



Visualizaciones de redes conceptuales de teorías del espacio-tiempo y la gravitación mediante el análisis de conceptos formales

Tesis Doctoral

Presenta:

Mariana Espinosa Aldama

Director:

Dr. Mario Casanueva López

Jurado:

Dr. Diego Méndez Granados

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Dra. Atocha Aliseda Llera

Enero, 2022

Resumen. Propongo utilizar el método de Análisis de Conceptos Formales (FCA) para conformar redes conceptuales de teorías del espacio-tiempo y la gravitación con el fin de representar visualmente las relaciones jerárquicas entre teorías y conceptos teóricos, facilitando su análisis mediante diagramas interactivos y accesibles. Los retículos permiten visualizar las jerarquías entre distintas clases de atributos, teorías y modelos, así como identificar y clasificar *conceptos formales*, y señalar relaciones interteóricas e intermodélicas como las de teorización y especialización, entre otras. Los diagramas interactivos permiten, por su parte, resaltar nodos específicos, así como sus subconceptos y superconceptos, y ofrecer información extra al picar en alguna etiqueta. El marco teórico de clasificación se apoya en la corriente semántico-conjuntista representada aquí por Bunge y Friedman, y la estructuralista de Balzer, Moulines y Sneed pero va más allá al implementar la metodología del FCA que mediante algoritmos permite relacionar y visualizar contextos muy grandes, revelando patrones y estructuras. La recolección de datos, su análisis, visualización e interpretación requieren ciertos conocimientos en materia de física, matemáticas, lógica, análisis de datos, programación, diseño, comunicación, filosofía e historia de la ciencia. Esta clase de estudios multidisciplinares entran dentro del campo conocido como *Ciencia de la Ciencia* o *Estudios de la Ciencia*, que estudia y analiza matemáticamente datos sobre la ciencia (datos meta-científicos), les visualiza e interpreta con el objetivo de ofrecer mayor entendimiento sobre su objeto de estudio. Los retículos conceptuales presentados se encuentran accesibles al público en la página web remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium, desde donde se accede a nueve visualizaciones: Protofísica, Dinámica Analítica, Espacio-tiempos, Teorías clásicas, Teorías básicas, Teorías métricas, Teorías $f(R)$, Teorías MoND, Holón de teorías y al Manzano de la Gravitación.

Índice general

Agradecimientos	6
Introducción	9
0.1. Motivación: una pluralidad de teorías	9
0.2. Justificación: del entendimiento y los diagramas	11
0.3. Antecedentes: la mirada gráfica	14
0.4. Problemática: multiplicidad de representaciones de teorías	21
0.5. Preguntas de investigación, objetivos e hipótesis	23
0.6. Metodología: un proceso recursivo	24
0.7. Marco teórico: una mirada a las estructuras	26
0.8. Capitulado: <i>Back to the basics</i>	28
Capítulo 1. Análisis de conceptos formales	31
1.1. Nociones de concepto	33
1.2. Conceptos y contextos formales	40
1.3. Orden, jerarquía y retículos	48
1.4. Diagramas y visualizaciones interactivas	52
1.5. Proceso de visualización	54
1.6. Implicaciones y modelos en el FCA	56
1.7. Consultas al experto y exploración de atributos	61
1.8. Herramientas de análisis	64
1.9. Recapitulación.	68
Capítulo 2. La estructura conceptual de las teorías axiomatizables	69
2.1. Estructuras en los planos sintáctico y semántico	74
2.2. Fundacionismo y coherentismo	80
2.3. Representaciones de la estructura de la ciencia: edificios, pantanos y redes	83
2.4. La profísica de Bunge	88
2.5. La visión axiomática	93
2.6. Distinción de términos y clases de axiomas	98
2.7. Clasificación de Bunge de teorías clásicas	105
2.8. La concepción estructuralista y el elemento teórico	110
2.9. Noción de modelo	114
2.10. Redes teóricas	118
2.11. Recapitulación	124

Capítulo 3. Retículos conceptuales de teorías del espacio-tiempo	126
3.1. La geometría física y la variedad diferenciable	127
3.2. Generalizaciones, relativizaciones y simetrías	134
3.3. Estrategias de construcción	137
3.4. Retículos para las teorías de espacio-tiempo, siguiendo a Friedman y Dewar	143
3.5. Clasificación de Barthelborth	151
3.6. Teorías equivalentes	152
3.7. Recapitulación	161
Capítulo 4. Teorías alternas a la visión estándar	162
4.1. Teorías métricas y parámetros post-newtonianos	162
4.2. Exploraciones con funciones de la curvatura: las teorías $f(R)$	171
4.3. Oscuridad y modificaciones a la dinámica newtoniana	173
4.4. Teorías MoND y la gravedad extendida	178
4.5. Sobre las constantes fundamentales y los sistemas de unidades físicas	186
4.6. Holón de teorías del espacio-tiempo	193
4.7. Otras teorías alternas a la relatividad general	195
Capítulo 5. Conclusiones y resultados: El Exploratorium	206
Anexos	211
Axiomatización de Newton de la MCP	211
Axiomatización de un espacio métrico de dos dimensiones	211
Axiomatización de Bunge de la MCP	212
Reconstrucción Balzer <i>et al.</i> de la MCP	214
Implicaciones y asociaciones	215
Glosario	224
Bibliografía	227

Agradecimientos

Al escribir estas líneas, dando cierre a este viaje maravilloso que ha sido el adentrarme en las entrañas de conocimiento científico y filosófico, me sorprende de todos los sitios físicos e intelectuales visitados y de tantas personas hermosas que me han acompañado en el camino y que me han dado ánimo, guía, apoyo técnico, académico, económico y espiritual, y que me brindaron su confianza y facilidades para expresar mi punto de vista y forma particular de representación. La naturaleza interdisciplinaria del proyecto, su envergadura y sus alcances parecieron para muchos (incluyéndome a mí), una misión titánica que ciertamente no hubiera sido posible sin la presencia de estas personas. Primeramente, al Posgrado en Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa, en particular a mis tutores: Mario Casanueva y Diego Méndez, quienes me acogieron dentro del *Seminario de representación y modelización del conocimiento científico* (REMO) y reconocieron el potencial del presente proyecto. Además del respaldo ofrecido, quiero expresar mi agradecimiento por todas las ricas discusiones que tuvimos en torno a las representaciones gráficas, la filosofía de la ciencia, el estructuralismo, la teoría de categorías y tantísimos temas de particular interés. Así como a Sergio Mendoza y Xavier Hernández, quienes desde el Instituto de Astronomía de la UNAM, han sido fuente de inspiración, de fascinación y de amistad sincera. Sergio, además de fungir como parte del comité tutorial, de compartir textos inspiradores, de proponer rutas de investigación como encontrar un nuevo cubo de Okun, y de ocupar y promocionar las visualizaciones que hemos obtenido en sus conferencias, me ha ayudado a resolver los problemas asociados con el lenguaje *LATEX*, muy necesario para escribir y publicar textos que contienen sobre todo fórmulas matemáticas, y requerido por las revistas especializadas; además de encontrar mejores herramientas y aplicaciones acordes con mi forma particular, más gráfica, de pensar como es ahora *Overleaf*. Acompañar el desarrollo de su teoría de gravitación extendida ha sido un privilegio y un gozo absoluto. Agradezco también los valiosos comentarios de Atocha Aliseda, quien fungió como jurado en el examen de candidatura, y sinodal en la disertación pública. Un cariñoso agradecimiento a Hernán Miguel, cuyas reflexiones y profunda lectura del texto, así como su acompañamiento durante estos años e interés en mi propuesta ha sido de vital importancia para que ésta llegue a buen término. Ha sido una feliz coincidencia encontrar a alguien con tantas afinidades al proyecto. Una mención especial para mi hermano Arturo Espinosa con quien pasé días enteros programando en diversos lenguajes a fin de lograr las visualizaciones interactivas en páginas web. El compartir ese proceso de investigación y programación, lleno de riquísimas discusiones que apenas aquí lograré esbozar, ha elevado nuestro vínculo a las nubes. Esto fue también posible gracias al curso de visualización de datos que impartió Irving Morales en el Centro de Ciencias de la Complejidad de la UNAM

en donde fui introducida al lenguaje de Wolfram Mathematica y que ahora me permite seguir en detalle las investigaciones en torno a la Física de Wolfram. Hay que mencionar el apoyo en la corrección del diseño web por parte de Adriana Casas, Amanda Lemus y Ameyalli Yáñez del Centro Multimedia del Centro Nacional de las Artes, así como al apoyo técnico de Heriberto Zabaleta, quien fuera coordinador de Desarrollo Académico e Innovación Educativa de la UAM-C, para alojar la página de REMO y el *Exploratorium* en los servidores de la UAM. Ha sido siempre el interés el poner a disposición del público los resultados de esta tesis, de la misma manera en que yo misma me he beneficiado por los cursos a los que he podido acceder de forma remota. El curso de introducción al análisis de conceptos formales impartido en línea en *Cursera* por parte de la *National Research University Higher School of Economics* fue importantísimo para apenas comprender los fundamentos y alcances de esta metodología. Igualmente el curso de filosofía científica de Gustavo E. Romero, publicado en YouTube vino como anillo al dedo en los últimos momentos de revisión del texto, pues su profundo conocimiento de la filosofía bungeana hizo evidentes algunos aspectos cruciales sobre la perspectiva leibniziana de Mario Bunge del espacio-tiempo. Extiendo también un sincero agradecimiento a los lectores de las diversas versiones de este trabajo: Rocío Guadarrama, por su asesoría en la estructuración del proyecto como tal; a Juan Campesino por sus asesoría relativa a la semántica y la corrección de estilo, así como a los directores del posgrado: Laura Carballido, José Luis Sampedro y Leonardo Díaz Abraham. Un agradecimiento más a Luis Aldama y Roberto Sussman, quienes me brindaron libros y referencias valiosísimas como fueron los libros de Mario Bunge y de Michael Friedman. Debo un enorme agradecimiento al programa de estancias cortas de investigación de la UAM que me brindó apoyo para presentar trabajos relacionados con el proyecto de tesis y sus resultados en el II Workshop sobre Ontología de la Física, que tuvo lugar del 5 al 6 de junio de 2017, en la Facultad de Filosofía y Letras de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Buenos Aires, Argentina; en el XV Encuentro Marcell Grossmann, 2018 (MG2018) en Roma, Italia; y en la Universidad de Indiana en Bloomington en octubre de 2019. A Katy Börner por ser un modelo a seguir y por su gentil acogida en la Universidad de Indiana y su trabajo en torno a la comunicación de la ciencia a través de visualizaciones. El curso en línea *Information Visualization Massive Open Online Course* (IVMOOC) y el software Sci2Tool fueron una excelente introducción al mundo de la ciencia de datos y agradezco a Óliver López por esta recomendación. A mis queridos primos Federico, Adam y Charlotte por todo el cariño y acogida durante mis travesías por el medio oeste, desde Bloomington hasta Pittsburg, estancias que me permitieron dimensionar el *status quo* de los mapas de la ciencia y de la filosofía de la física, así como conocer a personas afines y hacerme de textos críticos para iniciar el estudio. Al asistir a estos congresos pude dimensionar el interés de las diversas comunidades, ya fueran físicos, filósofos de la ciencia o científicos de datos por el trabajo expuesto, su originalidad, sus flaquezas y sus alcances. Y a la vez, conocer y ser testigo del profesionalismo y las novedades que se proponen a nivel internacional. Más aún, los lazos de confianza y amistad, y las posibilidades de colaboración se extienden y fortalecen con dichos encuentros, que en todos los casos han sido beneficiosos. Las conferencias remotas en las que he participado más recientemente han sido muy satisfactorias también, pues es evidente que en estos años he logrado construir una plataforma de despegue con bases firmes y metodologías probadas para la investigación y la comunicación visual

interactiva, y por todo ello, estoy muy agradecida. Quedan por publicarse los artículos escritos para los *Proceedings* del MG2018 y el *Graph Operand Logic Workshop* (GOL2021) y la presentación en línea en el Forum Filosófico Internacional organizado por el Círculo de Estudios de Filosofía Analítica. Un abrazo cariñoso a mis compañeros de seminario, en particular a Ximena González, Octavio Valadez, Nemesio Chávez, Oswaldo Basurto, Nora Morales, Nuria Valverde y los demás compas del doctorado por todo su apoyo, acompañamiento y sabrosas pláticas. Finalmente a mi querida familia: Carlos Salces, mi compañero de vida, quien ha costeado y soportado todos los vaivenes de esta odisea; a mi madre Adelina y Ricardo, mi padre, y a mis adoradas hijas Ana y Alicia que me animan día con día a seguir adelante.

Introducción

0.1. Motivación: una pluralidad de teorías

El presente trabajo de investigación nació en 2015, en el contexto de la celebración del centenario de la teoría de la relatividad general, cuando concentré esfuerzos para comprender y difundir el desarrollo de ésta y otras teorías gravitatorias. En los últimos cien años se han propuesto decenas de teorías alternas a la relatividad general con aplicaciones en escenarios distintos como el galáctico, el cosmológico, el de campo fuerte, las aproximaciones a la mecánica cuántica y a la termodinámica. De las decenas de propuestas, ninguna cumple con todos los requisitos de adecuación empírica, ni resuelve satisfactoriamente la variedad de problemáticas que se han detectado, como son el problema de la *materia oscura*,¹ el de la abundancia de litio,² el de la *energía oscura*,³ el de la inflación del universo temprano tras la gran explosión,⁴ el del gravitón, etc. Algunas problemáticas han podido explicarse desde la teoría estándar, tales como la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio y la expansión del universo observada por Edwin Hubble y Milton Humason en 1929. Tampoco se ha encontrado el engranaje adecuado entre la mecánica cuántica y las teorías gravitatorias, la famosa gravedad cuántica, necesaria en micro escenarios de gran densidad (campo fuerte), como el que se encontraría en las estrellas de neutrones, en los agujeros negros o al comienzo de la gran explosión. Asimismo, por el lado de la mecánica cuántica nos hemos encontrado con fenómenos tan inesperados como el entrelazamiento cuántico. Esta situación ha llevado a algunos a hablar de una crisis en la física, en señal de un próximo cambio revolucionario;

¹El problema de la materia oscura refiere a la discrepancia entre las predicciones teóricas newtonianas y einstenianas y múltiples observaciones de la dinámica de las galaxias y los datos cosmológicos que pueden interpretarse como un faltante en la densidad de materia, como lo es el aplanamiento de curvas de rotación de las galaxias espirales (véase Sanders, 2010). Otros problemas refieren a la forma y la distribución caprichosa de los halos de materia oscura (de Blok, 2010; Boylan-Kolchin *et al.*, 2011) y al problema de los satélites galácticos faltantes (Klypin *et al.* 1999).

²Las mediciones de la abundancia de litio en estrellas muy viejas está tres o cuatro órdenes de magnitud por debajo de la predicción de abundancia en los modelos estándar. Esto pone en duda el parámetro de abundancia primordial que da la razón entre la densidad de bariones y fotones (véase Fields, 2011).

³El problema de la energía oscura refiere a una aceleración en la expansión del universo que comenzó a suceder en tiempos recientes, cuando las galaxias ya se habían formado, y que continúa sucediendo por causas desconocidas.

⁴El proceso de inflación expresa que tras la gran explosión y por un período relativamente breve de tiempo, el espacio se expandió más rápidamente que la velocidad de la luz. El posible mecanismo detrás de esta cuestión aún no se entiende del todo, pero gracias a ello puede explicarse la homogeneidad del universo (véase Sanders, 2016).

es decir, de encontrar una solución clave para el desarrollo de la ciencia moderna que permita acoplar estos varios campos de la física (Kroupa, 2012; Magueijo, 2003; Moffat, 2008; Heiblum, 2014).

Dentro de la variedad de propuestas encontramos algunas contribuciones mexicanas que entre los años cincuenta y setenta intentaron conciliar la teoría electromagnética y la mecánica cuántica con la gravitación, así la contribución de Carlos Moshinsky a la teoría de Birkhoff o las contribuciones a las teorías no métricas de Plebanski (Galindo *et al.*, 2013), quien hizo escuela en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), donde sus alumnos han continuado investigando la teoría gravitacional de bucles cuánticos (*quantum loop gravity*). En el Instituto de Ciencias Nucleares y la Facultad de Ciencias de la UNAM la teoría de supercuerdas y la geometrodinámica resultan más atractivas. Por su parte, la gravitación extendida, desarrollada por los astrofísicos Xavier Hernández y Sergio Mendoza en el Instituto de Astronomía de la UNAM niega la existencia de la materia oscura y propone modificaciones a la ley universal de gravitación. Un panorama más general nos muestra que son centenas las propuestas que se han hecho durante el siglo XX y cientos de miles los artículos publicados en la materia a nivel mundial.

La teoría einsteniana también se ha anotado puntos a favor. En 2016, el observatorio LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) reportó resultados exitosos al detectar variaciones sincronizadas en el tamaño de la Tierra debido al efecto de onda producido en el espaciotiempo; es decir, detectó ondas gravitacionales producidas, se entiende, por el colapso de dos agujeros negros ubicados en las afueras de nuestra galaxia (Castelvecchi y Witze 2016). Las detecciones del macro interferómetro que reproducen las predicciones teóricas de la geometrodinámica y la reciente fotografía de un agujero negro han afianzado en muchos sentidos la confianza en la teoría einsteniana y en el modelo cosmológico de concordancia.⁵

La carrera por descubrir la “verdadera” naturaleza del fenómeno gravitatorio y sus fundamentos se encuentra en un momento excitante; sin embargo, dados los tiempos de ultra-especialización en que vivimos, resulta trabajoso, incluso para cualquier experto en ciencias físicas, tener una visión de conjunto y dar seguimiento a todas las teorías, problemáticas y descubrimientos. Más difícil aún resulta comunicarlo al público. Un ejemplo que ilustra esta situación es la página de *Wikipedia* (2020) “*Alternatives to General Relativity*”, en donde puede encontrarse una larga lista de teorías alternas que espanta a cualquiera. Resulta sencillo perderse en este mar de información y de ligas con semejante grado de especialización. Incluso muchos físicos dedicados a ramas como la gravedad cuántica de bucles resultan ajenos a los principios básicos de otras ramas como la gravedad *mondiana*, y viceversa, por mencionar un par cualquiera.

⁵David Merrit (2017) argumenta que el modelo de concordancia *lambda cold dark matter* (Λ CDM) se encuentra en un estado problemático degenerativo (degenerating problem shift, en términos de Irme Lakatos) y que ello se debe a estrategias convencionalistas del tipo descrito por Karl Popper como respuesta a observaciones inesperadas. Muchos de dichos elementos han sido invocados como hipótesis auxiliares en respuesta a las observaciones que falsifican el modelo estándar, pero el argumento de la concordancia, a decir de Merrit, es más débil que los argumentos de convergencia ofrecidos en el pasado para apoyar la teoría atómica o la de la cuantización de la energía.

Estas circunstancias me han inspirado a buscar recursos comunicativos que ilustren los caminos teóricos explorados a la sazón con el afán de comprender justamente qué tan “alternativas” resultan dichas teorías – o si acaso llegan a serlo–, cuáles son sus diferencias entre unas y otras y qué tan radicales son las propuestas más novedosas. Dadas las limitaciones espaciotemporales que implican los entornos editoriales para expresar contextos sumamente ricos y complejos en pocas páginas, me urgió la necesidad de contar con un mapa conceptual y cronológico confiable a propósito de dichas teorías, en donde además se señalaran las contribuciones de interés. Para ello es necesario ubicar, clasificar y visualizar de algún modo decenas de teorías alternas. En esta investigación pretendo construir una serie de visualizaciones de redes que permita al usuario-lector explorar de manera sistemática y abreviada los conceptos fundamentales que caracterizan a las teorías gravitatorias y ampliando así el entendimiento de este fascinante campo del conocimiento científico. Las visualizaciones interactivas se encuentran publicadas en la página web remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium y han sido construidas mediante el análisis de conceptos formales utilizando bases de datos especializadas, conformadas a partir de conocidas clasificaciones de corte axiomático y de la experiencia de los expertos. En la lectura de los retículos conceptuales se aprovecha el vocabulario estructuralista de Sneed, Moulines y Balzer para identificar las estructuras teóricas e interteóricas en las redes. Las visualizaciones interactivas en este sitio de internet promoverán la discusión en torno a los fundamentos de las teorías, a sus semejanzas y diferencias y su calidad de modelo o teoría, entre otras cuestiones, conduciendo a un mayor entendimiento de la composición del campo en cuestión.

0.2. Justificación: del entendimiento y los diagramas

Comunicar efectivamente avances científicos hoy en día requiere de creatividad, dinamismo e interactividad, en particular si la comunicación se hace digitalmente o en línea. Representaciones atractivas para el lector, que cuenten una historia y estimulen el interés por profundizar en el tema mediante la interacción, la interconexión de documentos ligados y participación del público (véase el panorama de la comunicación de la ciencia en línea en Rigutto 2017). El tiempo promedio que un lector tarda en escanear una página web o un artículo antes de decidirse a leerlo es de entre 4 y 15 segundos. En ese tiempo sus ojos pueden recorrer más de 150 lugares dentro del texto y darse una idea de su contenido de manera muy general. Múltiples estudios que registran el movimiento ocular de los lectores muestran que los textos no suelen ser leídos en su totalidad, a diferencia de las imágenes. Pero no todas las imágenes son iguales; las hay simplemente decorativas, que como en el caso de los artículos de salud ya no incluyen esquemas anatómicos o fotografías de las cicatrices producidas por las enfermedades, sino de ancianos felices y familias unidas y sonrientes, o en el caso de la astronomía, de dibujos espectaculares de mundos fantásticos. El lector también se encuentra con anuncios publicitarios que interrumpen la lectura y provocan regresiones. Sin embargo, el tiempo que los lectores se detienen en las imágenes simplemente decorativas y los anuncios comerciales es mínimo, no así las imágenes explicativas y que tienen relación y pertinencia con el texto. Éstas últimas alargan los tiempos de lectura al atrapar la atención del público y mejoran la retención del tema (Pernice *et al.*, 2014),(Madeleine, 2018),(Beymer *et al.*, 2007).

Edward Tufte en *The Visual Display of Quantitative Information* (1983), ya señalaba que un veinticuatro por ciento de la información publicada en revistas arbitradas como *Science* y *Nature* se presenta como imágenes: gráficas, ilustraciones, infografías, esquemas, diagramas, etc. Las imágenes constituyen un valioso recurso epistemológico para la ciencia y para el estudio de la misma. Y sin embargo, éstas también pueden ser descontextualizadas, manipuladas, distorcionadas y malinterpretadas fomentando la desinformación (Rigutto, 2017). Una razón más para fomentar y practicar el correcto uso y lectura de los diagramas: la diagramática (Krämer y Ljungberg, 2016).

Las representaciones visuales tienen el atributo de proveer ideas generales y sintéticas que refuerzan el contenido del texto. Las imágenes (dibujos, ilustraciones, pinturas, fotografías...), los diagramas (de redes, arbóreos, gráficos, las tablas...), los mapas (geoespaciales y abstractos), las animaciones, los esquemas, las infografías y las visualizaciones de datos constituyen un recurso importantísimo para compartir el conocimiento, ya que amplían nuestra capacidad de entendimiento de modos distintos de aquellos que se pueden lograr por las vías oral y/o escrita.⁶

Las aportaciones de las imágenes a la ciencia han sido estudiadas desde los puntos de vista estético, histórico, filosófico, comunicativo y epistemológico (Gombrich, 1972; Stjernfelt, 2007; Galison y Jones, 2014 entre muchos otros). Nos situamos, por cierto, en lo que se conoce como el giro pictórico del conocimiento científico (Casanueva y Bolaños 2009), viraje que data de antes de la invención de la escritura, pero que sólo recientemente ha sido objeto de estudios epistemológicos.

Desde este punto de vista, Sergio Martínez ha señalado que el proceso de entendimiento surgido gracias a las imágenes se da con la integración de representaciones heterogéneas que proveen cierta perspectiva subjetiva al conocimiento fáctico y que permiten apreciar relaciones explicativas en un cuerpo de información.⁷

[La] dimensión no fáctica del conocimiento consiste sobre todo en la integración de representaciones heterogéneas. Las representaciones heterogéneas son diferentes representaciones de una cosa o proceso que no podemos ver como describiendo partes que pueden agregarse para constituir una representación más completa, pero son la mejor representación del proceso que podemos tener (Martínez, 2009).

Por ejemplo, si nos interesa analizar una base de datos, la tarea puede hacerse mediante métodos estadísticos, configurando diversos cálculos y ordenamientos, y el resultado de dichos ordenamientos puede representarse gráficamente y proveer de claridad e inteligibilidad

⁶En este texto utilizaré como sinónimos los términos "representaciones visuales", "representaciones gráficas" e "imágenes". Mientras que serán sinónimos los términos "diagramas", "gráficos" y "grafos", aún cuando podamos distinguirlas. Esto, en función de una lectura más fluida.

⁷Una tradición de corte diríamos subjetivista da mayor peso al sujeto y a sus estados mentales, en cuyo caso las creencias deben ser verdaderas. Véase (Kvanvig, 2003). Para otros autores, de tradición objetivista, se trata simplemente de la identificación de procesos causales (Salmon, 1984; Lipton, 2004; Elgin, 2007).

al análisis. Hay tantas representaciones como herramientas puede el hombre idear. Los análisis formales y los diagramas son herramientas que los filósofos no debieran devaluar, sino aprovechar.

Siguiendo a Casanueva (2016, p. 84 y ref.), los diagramas son en particular, herramientas cognitivas que “asisten al razonamiento, a la solución de problemas y a la obtención de explicaciones de diversa índole”. Y agrega: “permiten externalizar, fijar, vincular y recrear ideas y arquitecturas conceptuales, facilitan la transmisión de información condensada (densa) y son eficientes potenciadores heurísticos, e inductores de vías insospechadas para la relación de conceptos, contextos, perspectivas y niveles de profundidad de análisis”. Los diagramas también se utilizan como herramientas de análisis epistemológico al recuperar estructuras conceptuales de teorías científicas, como lo hace Casanueva con su grafo modelo de la estructura de la genética mendeliana (Casanueva, 2016).

En virtud de: su gran capacidad para la evocación y la heurística, su utilidad para la representación y el cálculo, su potencia sinóptica y su naturaleza de experiencia multimodal corporizada, los diagramas científicos constituyen apoyos, soportes, o andamiajes (*affordances*) útiles y estratégicos para la obtención de inferencias, respuestas y explicaciones pues, entre otros, facilitan la integración de distintos niveles de profundidad de análisis y de perspectivas diversas (Casanueva y Madrigal, 2016).

Más que el estudio del conocimiento factual, verdadero y justificado, la epistemología constituye el estudio del entendimiento; es decir, de la facultad de discernir y explicitar las partes constitutivas y fundamentales y las relaciones explicativas de un asunto e integrarlas con coherencia.

Una base fundamental hace explícitos los aspectos generales esenciales, ingredientes y operaciones de una ciencia, así como sus orígenes y el desarrollo de sus leyes generales. El propósito de hacerlos explícitos es el de proveer una guía en el aprendizaje, uso y consiguiente desarrollo de la ciencia. Una base pura que olvida su propósito y persigue fundamentos especulativos para su propio beneficio es claramente un no fundamento (Lawrie, 2012).⁸

Catherine Elgin hace notar que la ciencia en muchas ocasiones hace uso de idealizaciones o modelos falsos y que, por lo tanto, el entendimiento no puede consistir en una mera correspondencia con los hechos. Reconocemos que hay diferentes tipos de razonamiento asociados a diferentes tipos de representaciones. En su libro “Una teoría combinatoria de las representaciones científicas” (UTC) Andoni Ibarra y Thomas Mormann, en un intento por formalizar la noción de representación y llevar la diagramática y la teoría de categorías a la filosofía de la ciencia, clasifican las representaciones en cuatro clases: por semejanza, como puede ser una pintura; por sustitución, como lo puede hacer un abogado; por función o homomorfía (preservadoras de estructura) o por homología (preservan relaciones lógicas). La utilidad de

⁸“A foundation makes explicit the essential general features, ingredients, and operations of a science, as well as its origins and general laws of development. The purpose of making these explicit is to provide a guide to the learning, use, and further development of the science. A «pure» foundation that forgets this purpose and pursues a speculative «foundation» for its own sake is clearly a nonfoundation.”

estas representaciones a nuestros objetivos es variable. El logro cognitivo depende de la capacidad de integrar las diversas representaciones de manera coherente (véase Ibarra, c2000.). En ese sentido, este trabajo ha sido pensado como un acompañamiento en la lectura de los textos analizados en donde las redes permiten dar un lugar a los conceptos de un contexto coherente.

Martínez expone dos razones por las cuales las imágenes son importantes en la epistemología:

Una razón es que nos ayudan a diagnosticar el origen de errores o confusiones y por lo tanto permiten calibrar nuestros criterios de lo que es una buena inferencia o una buena explicación.

La otra razón relacionada es que las imágenes (como los modelos falsos) muchas veces guían la integración de saberes y en la medida que esa integración constituye muchas veces un nuevo saber, llegan a ser parte constitutiva del saber: los saberes artísticos y técnicos muchas veces incluyen imágenes como parte constitutiva del saber (Martínez, 2009).⁹

Veremos aquí cómo es posible acrecentar nuestro entendimiento con respecto a la composición de las teorías de gravitación, a sus linajes y progresos a partir de una serie de visualizaciones que integran información diversa, y de qué manera estas visualizaciones pueden ser validadas.

Eddington hace una interesante analogía entre nuestro equipamiento intelectual y sensorial con una red de pescar, donde la pesca es nuestro conocimiento del mundo físico (Eddington, 1939). La física será aquello que nuestra red pueda atrapar, generalizaciones a partir de observaciones. Una red más fina, obtenida a partir de inspección epistemológica puede ayudar en el avance del conocimiento del mundo. Eddington lo ejemplifica con el desarrollo de la teoría de relatividad y con el paso de la teoría cuántica empírica a una racional. Aquí hacemos la analogía con las representaciones visuales. ¿Qué nociones podemos atrapar con las distintas herramientas de representación gráfica?

0.3. Antecedentes: la mirada gráfica

La mirada gráfica para representar ordenamientos y clasificaciones puede rastrearse al menos hasta el año 270 de nuestra era, con la publicación del *Isagoge* o "Introducción" al *Organon* de Aristóteles mediante la que el filósofo neoplatónico Porfirio de Tyre aclara las nociones de 'género' y 'especie' empleadas por el estagirita para entender las categorías. Para Aristóteles el conocimiento se clasifica por su objeto a partir de las categorías de sustancia, cantidad, cualidad, relación, lugar, tiempo, postura, condición, acción y afección. En la traducción al latín del *Isagoge*, de Boecio (s. VI), aparece por vez primera un diagrama anidado en forma de árbol ilustrando la interpretación dicotómica de Porfirio. El *Isagoge* sirvió de texto básico durante más de mil años en los colegios medievales e influyó en la discusión sobre el problema

⁹A decir de Martínez, un saber es un tipo de conocimiento que no necesariamente se hace explícito como información sobre hechos que son o no el caso, y muchas veces no puede caracterizarse meramente como conocimiento proposicional (*conocimiento qué*). Es un tipo de conocimiento que depende de aspectos implícitos en la situación o el tema respecto al cual ese conocimiento se considera un saber. Un saber involucra muchas veces lo que en ciertos ámbitos se designa *conocimiento cómo*.

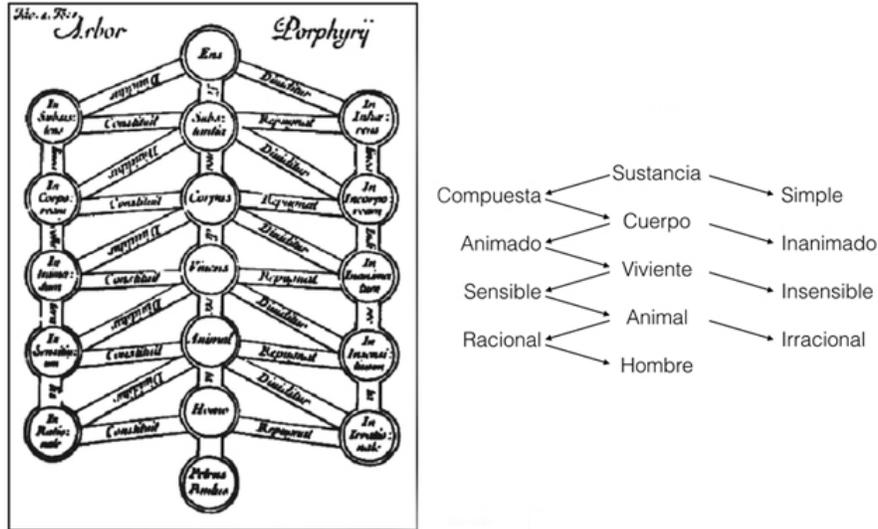


Figura 0.3.1. Diagrama del árbol de Porfirio que clasifica en dicotomías a los objetos.

de los universales. Los llamados árboles de Porfirio son un medio para identificar las cualidades que le son propias a los objetos (véase Lima y Shneiderman 2014).

Los árboles han sido un recurso clásico para ilustrar clasificaciones y linajes. Desde la edad media han representado relaciones jerárquicas como virtudes, sistemas de leyes, líneas de progreso y asociaciones biológicas, entre otras cualidades. Un ejemplo moderno de árbol con líneas de tiempo es *The Computer Tree*, de Karl Kempf (1961, Fig. 0.3.2), que ilustra la evolución de las computadoras entre 1945 y 1960. Las líneas de la figura pueden considerarse como un sistema de referencia, característica básica de los mapas.

En materia de gravitación encontramos el *Mass Discrepancy Tree*, de Benoit Famaey y Stacy S. McGaugh (Fig. 0.3.3), dividido en dos partes: la superior representa con sus ramas las soluciones hipotéticas al problema de la materia oscura, o de la masa faltante, mientras que la inferior representa las raíces empíricas, es decir, las observaciones.

Una primera aproximación al problema que ocupa el presente trabajo es el Manzano de la gravitación (Espinosa, 2015) (Fig. 0.3.4), un árbol que clasifica cuarenta y tres teorías agrupadas en doce ramas principales, desarrolladas entre 1905 y 2015. Tiene al menos dos niveles de lectura. De lejos se aprecia primeramente una pluralidad de ramificaciones y hojas. Los textos de mayor tamaño, corresponden al nombre de las teorías (en rojo) y a algunos principios fundamentales compartidos, éstos últimos ubicados en el centro de las ramas. El segundo nivel de lectura corresponde es el de los caracteres más pequeña donde se indican los autores y las fechas (en verde) y los fenómenos (en color gris como líneas de tiempo). El manzano posee muchas cualidades: presenta una pluralidad de teorías; propone un marco temporal que ordena y relaciona los progresos tanto teóricos como experimentales; ubica autores y ligas a las publicaciones originales en formato PDF mediante una versión animada e

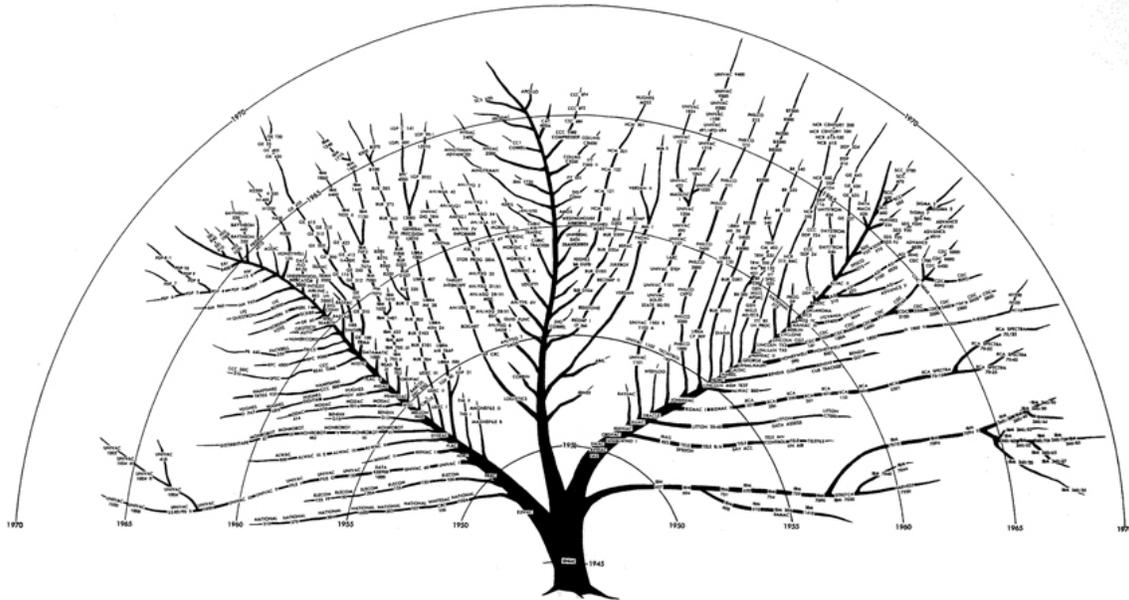


Figura 0.3.2. The Computer Tree de Karl Kempf (1961) en (Lima y Shneiderman 2014)

interactiva disponible al público en línea: <https://prezi.com/rdkivznlhgga/the-gravity-apple-tree/>.

El manzano ha funcionado como un primer mapa para navegar en las aguas conceptuales de la gravitación a través del tiempo, representando las distancias temporales entre sucesos, proporcionando ordenamientos de un amplio dominio de un mundo abstracto y ubicando ciertos componentes fundamentales de los que habla el campo y sus relaciones generales. Además, proporciona una base de datos bibliográfica susceptible de ser analizada, ampliada y representada bajo procesos más formales y sustentados. Es una expresión que me remonta a los primeros mapas geográficos, apenas siluetas por detallar.

El arte de la cartografía también es parte central de las representaciones y exploraciones de los mundos físicos y los abstractos. Se conocen mapas rupestres, babilonios y egipcios de más de 4,000 años grabados en piedra, arcilla y papiro. Hoy en día, los mapas contienen puntos y sistemas de referencia, a manera de gráficas, curvas de nivel, diagramas, estadísticas, símbolos, conexiones, dimensiones, interactividad y dinamismo. En las exploraciones abstractas, así como en las geográficas, se requiere también de mapas que ilustren y contextualicen la información y que ayuden a comprender mejor algún aspecto del problema a tratar. En el *Atlas of Knowledge* (2010), Katy Börner resalta el carácter interdisciplinario que requiere la nueva cartografía de la ciencia en la que se involucran analistas de datos, diseñadores gráficos, bibliotecarios, geógrafos, comunicadores, programadores, científicos, sociólogos, filósofos y cientímetristas, entre otros. Este es un campo de estudio en crecimiento para el que han sido necesarios progresos en materia de recopilación de información de manera

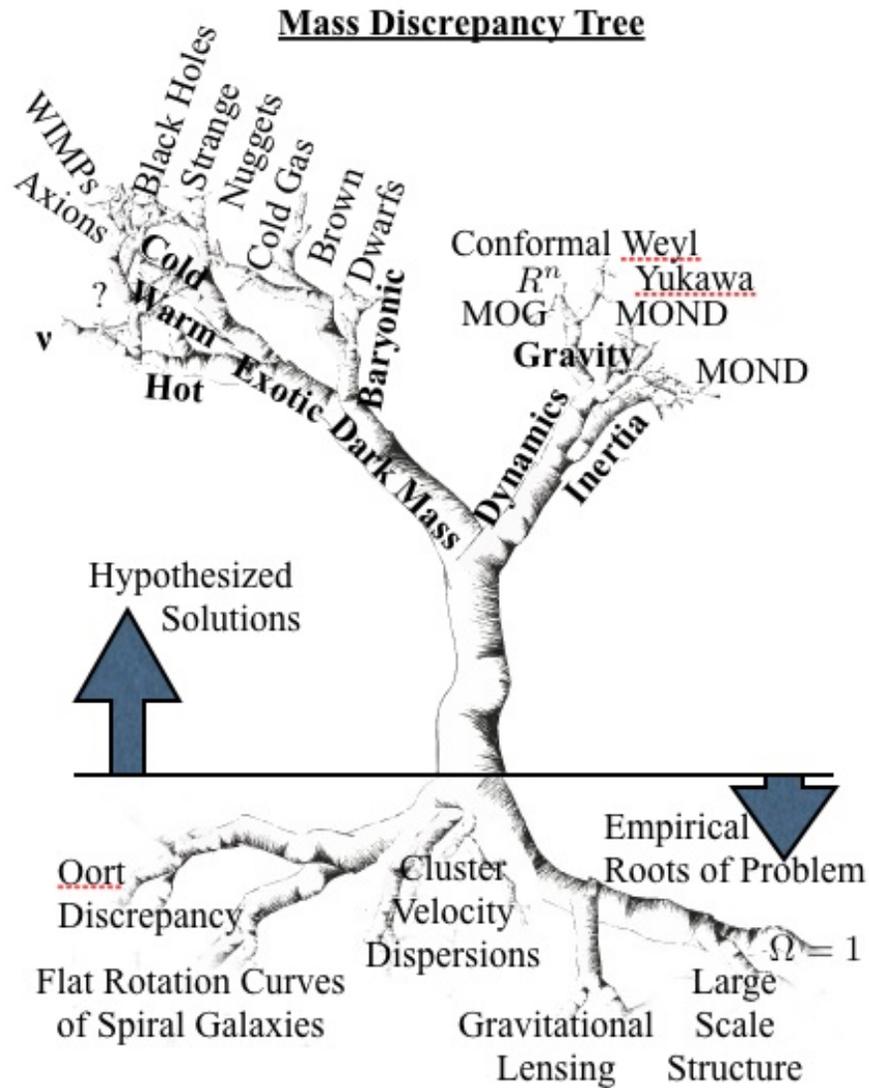


Figura 0.3.3. Mass Discrepancy Tree, propuesto por Stacy McGaugh y Benoit Famaey (2012), para ilustrar las numerosas soluciones ideadas para explicar el problema de la masa faltante. Se distingue del *Manzano de la gravitación* al colocar los fenómenos y observaciones como raíces del árbol. No contiene una línea temporal ni referencias a autores o fechas.

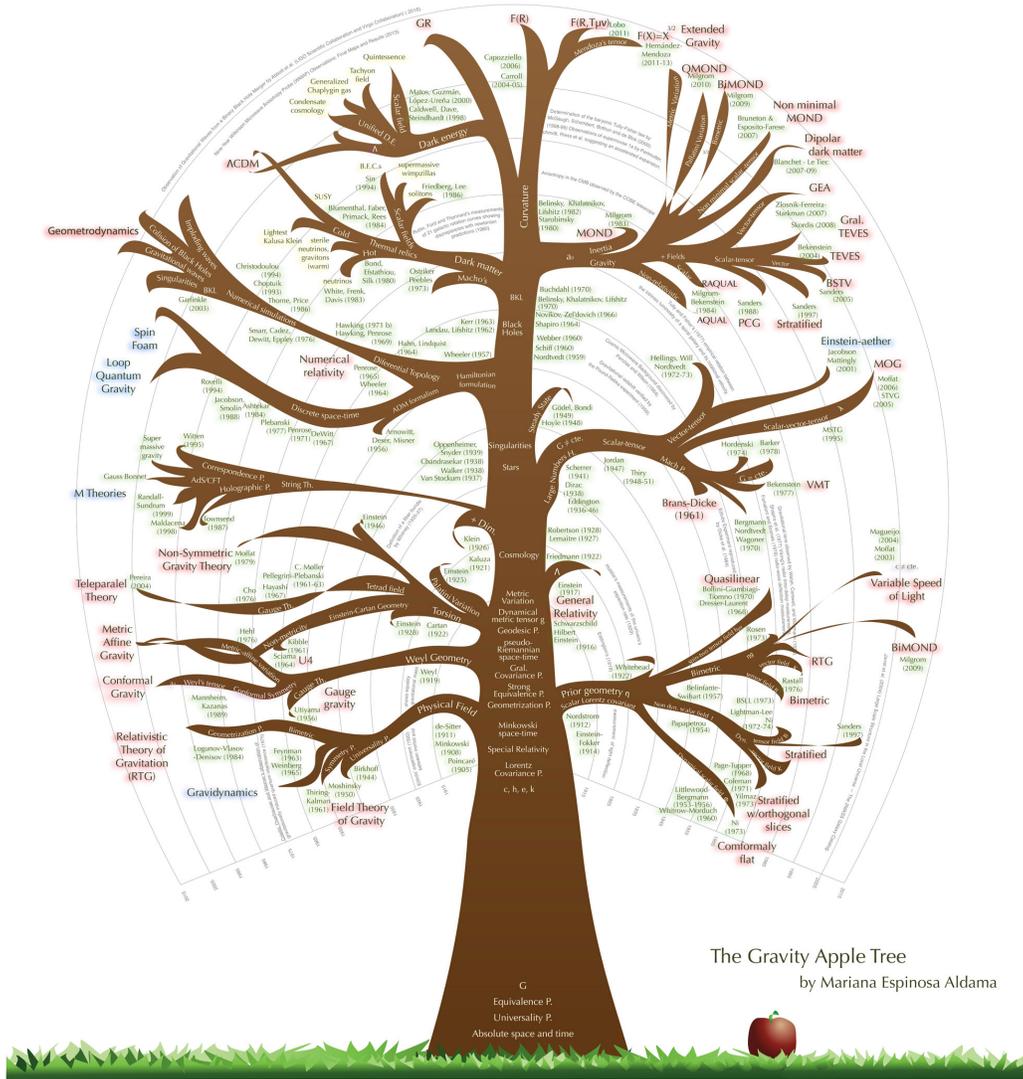


Figura 0.3.4. El manzano de la gravitación, de Mariana Espinosa, árbol genealógico de las teorías de gravitación desarrolladas entre 1905 y 2015, en el que las principales ramas teóricas se encuentran resaltadas en negritas, mientras que los modelos de materia y energía oscuras se indican en negritas de menor puntaje. Los autores y fechas de publicación de los artículos originales se encuentran en color gris. Los principios fundamentales se inscriben entre las ramas, y las líneas de referencia temporal (en gris) refieren lo mismo a observaciones que a experimentos relevantes en la materia. Una versión interactiva a color puede consultarse en: <https://prezi.com/rdkivznlhgg/the-gravity-apple-tree/>.

enciclopédica como la *Wikipedia*, la posibilidad de diseminar el conocimiento masivamente a través del Internet y la Web; de hacer clasificaciones del conocimiento creando archivos, bases de datos e índices de citas, así como estudios de redes científicas, compilaciones, algoritmos y despliegues visuales.

Aunque los mapas también pueden poseer atributos estéticos, se diferencian de las imágenes y los dibujos en que aquéllos son altamente intersubjetivos, pues poseen códigos ampliamente conocidos y en consecuencia son capaces de transmitir información organizada espacialmente de manera fácil de seguir. En ese sentido, Xavier de Donato señala la analogía que existe entre los mapas y las teorías; ambos pueden verse como sistemas útiles para obtener inferencias o como sistemas descriptivos que poseen un carácter representacional y clasificatorio y que simplifican o idealizan diferentes aspectos de la realidad. Igualmente, ambos requieren de una interpretación técnica concreta (Casanueva y Bolaños 2009).

Sin embargo, al igual que el lenguaje escrito, los mapas, los diagramas y en general las imágenes también pueden ser engañosas. Es decir, puede haber múltiples mapas y diagramas que intenten representar cierta cuestión, y volverse atractivos haciendo uso del diseño; pero que no gocen de una racionalidad epistémica que les justifique, o que favorezca un mejor análisis y crítica.

Ya en 1963, el físico e historiador de la ciencia Derek John de Solla Price había sugerido que la ciencia se estudiara utilizando métodos científicos (de Solla Price, 1965). Su aproximación llevó al nacimiento de la *cienciometría*. Este campo de estudio se refiere al procesamiento de datos bibliográficos y académicos obtenidos ya sea a mano o a través de software avanzado que corre en grandes servidores interconectados. Los análisis están basados en algoritmos o teorías matemáticas y técnicas estadísticas. Algunos de los más famosos algoritmos y teorías utilizadas con estos fines son la teoría de gráficas de Köing, el *factor analysis* de Thurstone, el *clusters analysis* de Tryon, la teoría de la información de Shannon, el despliegue de gráficas de Tufte (1983), el *co-citation analysis* propuesto independientemente por Small y Marxhakova-Shaikovich, el *author cocitation* de White y Griffith, el *topics model* de Griffith y Steyvers (2012), el *combine link and content information* de Richardson y Domingos (2004), la *community structure detection* de Girvan y Newman (2002), los análisis de conglomerados, el análisis de correspondencias de Hartley y Benzécri (1973) y el análisis de conceptos formales (FCA) de Rudolf Wille (1982), entre otros. Esta última metodología ya ha sido aplicada por Méndez y Casanueva (2012) para representar dominios teóricos de la herencia biológica, y es la que nos proponemos seguir.¹⁰

¹⁰El *factor analysis* es un método estadístico para describir la variabilidad entre variables correlacionadas, utilizado por de Thurstone para modelar grupos de habilidades mentales en contraposición con a la concepción de una sola inteligencia general. El análisis de cúmulos de Driver y Kroeber (1932) y Tryon (1939) refiere a una serie de algoritmos utilizados para agrupar conjuntos de objetos según sus similitudes, una tarea básica en la minería de datos y la comprensión de datos. La teoría de la información de Shannon se ocupa de la medición de la información y de modelar su comunicación partiendo de una fuente que a través de un transmisor emite una señal que viaja por un canal, sujeto a cierto ruido, que llega a un receptor que decodifica la información en un mensaje que interpretará un destinatario. Además de las contribuciones de Edward Tufte en el diseño de información y la lectura visual, éste propuso medidas para determinar la calidad de una gráfica o infografía, como el factor de mentira, la razón datos-tinta, y la densidad de datos. El análisis de co-citación supone que entre dos o más documentos citados juntos existe una similitud temática, y la intensidad de esta relación está dada

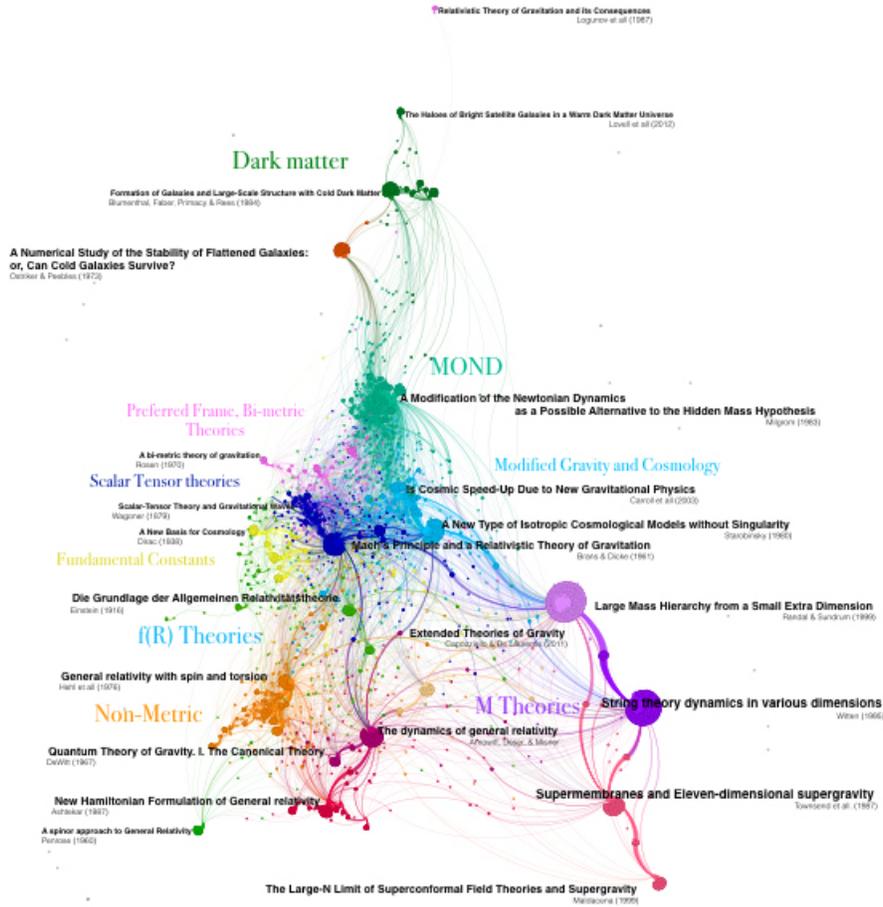


Figura 0.3.5. Red de citas que relaciona 30,952 nodos obtenidos de una selección de 200 artículos seminales sobre teorías alternativas de gravitación y sus correspondientes citas. Los datos fueron obtenidos en diciembre de 2016 de la Science Citation Index (SCI) de Thomson Reuters; del archivo electrónico para pre-publicaciones de artículos científicos y servidor de distribución automatizado ArXiv.org, operado por la Universidad de Cornell, y del Sistema de Datos de Astrofísica de la NASA (ADS). Los colores reflejan la modularidad de la red, entendida como la fracción de las aristas que caen dentro de determinados grupos menos la fracción esperada si las aristas estuviesen distribuidas al azar. El tamaño de los nodos codifica el grado de salida, es decir, el número de citas. El análisis y la visualización de datos fueron realizados con *Sci2Tool*, *Wolfram Mathematica* y *Gephi*. Se presentan algunos títulos significativos de artículos seminales. Trabajo presentado en el XV Encuentro Marcell Grossmann 2018 en Roma, Italia.

En general, estos análisis buscan ordenar y relacionar tipos de datos, identificar jerarquías, conglomerados y patrones, así como variables y correlaciones que bien pueden ser representados mediante gráficas en infografías que sean significativas y comunicables de múltiples maneras. Pero la idea basal de muchas de estas técnicas es que los objetos se pueden situar en un espacio de atributos.¹¹ Los procesos pueden sistematizarse cada vez más y actualizarse continuamente o en tiempo real. Otra de las ventajas de la ciencimetría en nuestros tiempos informáticos es el fácil acceso a datos y software especializado, y la proliferación de cursos en línea. Además, no se requiere de gran experticia con el campo a estudiar, al estar los análisis basados en la ocurrencia de términos o datos. Esto implica a su vez una desventaja: la pérdida de significación de los conceptos en tanto que no se realizan estudios semánticos sobre significación de términos, sino de ocurrencia. Sin embargo, los estudios cienciométricos permiten visualizar agrupamientos, relaciones, tendencias, etc. que proporcionan cierto entendimiento. Rogier De Langhe propone en "The Kuhnian Paradigm" (2013) hacer uso de este tipo de visualizaciones de redes referentes al desarrollo científico para identificar períodos de ciencia normal, de crisis o de cambio paradigmático, entre otros criterios de caracterización, dado que el análisis de casos individuales no ha logrado establecer patrones de desarrollo.

0.4. Problemática: multiplicidad de representaciones de teorías

Dos de los problemas a los que nos enfrentamos en la labor de distinguir y relacionar los conceptos fundamentales de ciertas teorías gravitatorias de otras, yacen en la concepción misma del término teoría y en las diversas representaciones de su estructura desde la filosofía de la ciencia. Hasta ahora, nos hemos referido a los términos "teoría" y "modelo" de manera muy general, pues cuando se habla de alguna teoría como la mecánica newtoniana de manera amplia, general y coloquial, podemos referirnos a mucho más que a sus tres famosas leyes; podemos referirnos también a los experimentos a ella asociados, a sus modelos, a los valores de juicio, a la comunidad científica, a sus foros e instituciones, al contexto socio-histórico que le ha visto nacer y desarrollarse, o a otros factores. Todos estos aspectos de las teorías científicas han propiciado diversas investigaciones filosóficas que pueden tener un carácter descriptivo, prescriptivo, o interpretativo. Aquí no nos interesará el carácter prescriptivo-normativo de la filosofía de la ciencia, ni la evaluación de las teorías, ni los aspectos históricos. Nos mantendremos en el carácter descriptivo e interpretativo de las dimensiones sintáctica, semántica y

por el número de documentos que les citan de forma conjunta. De manera semejante White y Griffith proponen a los autores como unidades de análisis y el índice de co-citación como una medida de cercanía. Los modelos temáticos de Griffith y Steyvers relacionan la información autoral con palabras clave y distribución de palabras en los textos. El algoritmo de Richardson y Domingos mantiene la eficiencia en tiempos de búsquedas en la Web al tomar en cuenta la estructura de ligas asociadas, mejorando la calidad de los resultados ofrecidos por los buscadores. Girvan y Newman propusieron un método para detectar estructuras de comunidad en sistemas de redes donde algunos nodos están unidos fuertemente en pequeños grupos utilizando índices de centralidad. Los análisis de conglomerados agrupan objetos siguiendo distintos criterios de similitud y ordenamiento, como el jerárquico.

¹¹Un espacio de atributos es un conjunto de dos o más dimensiones cualitativas con las que podemos comparar los objetos. Por ejemplo, un espacio de atributos para describir la gama de colores estará compuesto por las dimensiones de brillo, saturación y matiz.

pragmática de las teorías físicas y sus reconstrucciones. Éste, pretende ser un estudio de corte más bien “interno” sobre la estructura teórica, y aunque no pretende responder preguntas sobre las raíces y el significado de los términos físicos, cuestionar las presuposiciones ontológicas de las teorías ni analizar los hechos acontecidos, sí intenta representar ciertas relaciones internas.

El objetivo es representar cómo los conceptos que componen el corazón formal de las teorías se relacionan en un momento dado; como si tomáramos una fotografía en rayos x del esqueleto teórico, congelándolo en el tiempo. Para ello pensaremos, siguiendo a Mario Bunge (1976), que una teoría es un sistema conceptual conformado por una serie de componentes, una estructura –conformada por un conjunto de relaciones–, y un entorno. Este último es a su vez un “conglomerado gigante de estructuras conceptuales con diversas “concreciones” (artículos, libros, instrumentos científicos, programas de televisión, páginas web, visualizaciones interactivas, etc.), y puestas en operación y articuladas por un conjunto muy diverso de personas (científicos, ciudadanos, comunicadores, funcionarios públicos, etc.), en un momento histórico determinado”.¹² Es un sistema muy complejo de múltiples relaciones que afecta de alguna manera el núcleo de las teorías, por ejemplo, el significado de los términos, habiendo enlaces entre los componentes centrales y el entorno, pero este aspecto no lo abordaremos y nos centraremos en el núcleo teórico. La cuestión es, qué elementos tomaremos como los componentes del sistema y qué relaciones forman su estructura, cómo la distinguimos del entorno y cómo se le representa gráficamente.

El problema que buscamos resolver consiste en obtener diversos ordenamientos epistémicamente justificados de las entidades científicas en el campo de las teorías de gravitación del siglo XX y representarlos gráficamente. Realizar este tipo de ordenamientos es uno de los objetivos propios de la filosofía de la ciencia; Mormann (2007) le llama la “pregunta T”: ¿Cuál es la estructura de las teorías científicas? y la cataloga como la pregunta más central en la filosofía de la ciencia, la cual ha sido abordada desde inicios del siglo XX de manera sistemática y con diversas aproximaciones.

En la visión sintáctico-axiomática (o enunciativista), propia de los empiristas lógicos del Círculo de Viena como Rudolph Carnap, una teoría consiste en dos cosas: un sistema formal y cierto uso de este sistema para poder hacer afirmaciones acerca del mundo físico (Carnap, 1939). El sistema formal incluye una colección de símbolos y reglas de formación que conforman enunciados bajo reglas de inferencia. Es decir, desde este punto de vista las teorías empíricas son teorías matemáticas más una interpretación. Además, el lenguaje científico se clasificó en dos partes: una parte observacional y otra teórica, sin embargo, esta clasificación y el proceso de significación de los términos teóricos resultó problemática.

Ya en los años sesenta era evidente que esta postura conducía a muchos problemas, entre ellos, la fallida distinción entre términos teóricos y observacionales, y el hecho de que las reglas de correspondencia entre dichos términos no cumplan su función. Una contrapostura es la visión semántica o modelo-teórica, propuesta por Patrick Suppes (1954) y Joseph Sneed (2012), entre otros, quienes representan las teorías científicas como clases de estructuras de

¹²Diego Méndez, comunicación privada.

un lenguaje formal, clases de modelos, describiendo las teorías no con lenguaje metamatemático, sino conjuntista. Las descripciones semánticas de Fredrick Suppe (1977; 1989), Ban van Fraassen (1986; 1996) privilegian en cambio los espacios fase.

Una estructura, es un conjunto de relaciones entre componentes del sistema (ligas o vínculos) y con los componentes del entorno (enlaces). Determinar la estructura de las teorías científicas implica determinar cuáles son estos componentes, el entorno y el tipo de relaciones que se asumen. En la visión de Kuhn, el paradigma está compuesto de modelos, leyes, valores y ejemplares. Para Harré, la teoría se compone de un conjunto de afordancias, conceptos bisagra y modelos icónicos.¹³ En la visión estructuralista, el elemento teórico está compuesto por un núcleo formal conformado por distintas clases de modelos y ligaduras, un conjunto de aplicaciones intencionales, una comunidad científica y datos históricos. Van Fraassen en cambio, habla de espacios de estados. James O. Weatherall (2017) describe los fundamentos de las teorías del espacio tiempo desde la teoría de categorías, que contempla cosas, propiedades y una estructura. En abril de 2020, Stephen Wolfram aprovechó la cuarentena para retomar su proyecto de representar los fundamentos de las teorías físicas (Wolfram, 2002) ya no mediante el lenguaje de las matemáticas, sino el computacional, visualizando modelos en patrones de redes.^{14, 15}

Podemos ya intuir que así como hay muchas formas de caracterizar y representar las teorías, también hay múltiples relaciones dentro y entre las teorías. Las teorías son sistemas complejos que deseamos desenmarañar para ir visualizando sus partes, para ello debemos elegir cierto enfoque. Hemos de notar que todos los enfoques han iniciado sus análisis utilizando como ejemplo las teorías de la geometría física, la mecánica newtoniana y las teorías relativistas de Einstein. Estos son casos paradigmáticos, muy trabajados y muy matematizados, para los cuales las problemáticas tanto sintácticas como semánticas no parecen ser tan sustanciales. Sin embargo, para otras ciencias, incluso dentro de la física lo son con mayor medida. Una razón más para iniciar esta empresa con las teorías del espacio-tiempo.

0.5. Preguntas de investigación, objetivos e hipótesis

Nos preguntamos entonces, ¿Qué parte de la estructura de este campo teórico deseamos representar? ¿Desde qué postura filosófica hemos de partir? ¿Qué métodos de análisis y

¹³La *Afordancia de Gibbons* es una posibilidad efectivamente actualizable que se describe como una relación entre el agente, el instrumento y el contexto. Los conceptos bisagra de Wittgenstein refieren a concepciones teóricas muy elementales, casi intuitivas como la concomitancia y ciertas prácticas materiales. Los modelos icónicos se distinguen de los modelos lógicos por la idea de similitud.

¹⁴Véase <https://www.wolframphysics.org/>.

¹⁵La teoría de categorías formaliza las estructuras matemáticas y sus componentes en categorías, compuestas de objetos y morfismos que son representados por nodos y flechas direccionadas. Los morfismos tienen la propiedad binaria de composición, asociatividad e identidad. Los funtores son flechas que relacionan categorías. Esto permite fundamentar teorías muy abstractas como la teoría de grupos o la teoría de conjuntos en un marco más general. Fue propuesta en los años cuarenta por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane y desarrollada en los sesenta por William Lawvere entre otros. En años más recientes ha sido aplicada a la física y al estudio del lenguaje computacional (véase Landry, 2017).

visualización son adecuados para representar dicha estructura? ¿Cómo generamos una base de datos apropiada? ¿Qué beneficios podemos obtener con este ejercicio?

El análisis que se elige y el tipo de representación visual dependen en mayor medida de la historia que se desee contar. En este caso, el objetivo es representar gráficamente la estructura entre los componentes teóricos fundamentales que distinguen a las teorías gravitatorias desarrolladas durante el siglo XX, de forma sincrónica. Asumimos que los términos han sido interpretados y nos olvidamos de las relaciones entre las teorías y el mundo para centrarnos en ciertas relaciones inter-teóricas y en construir un andamiaje clasificatorio de sus partes fundamentales que permita incorporar otras teorías.

Las hipótesis son:

1. Si seguimos el enfoque axiomático podríamos conformar una tabla adecuada para un análisis semántico con el cual representar las relaciones entre los conceptos fundamentales de las teorías, y un análisis sintáctico de clasificación de clases de atributos.

Para ello hay que reconocer una buena axiomatización e identificar clases de axiomas.

2. Si analizamos y visualizamos las bases de datos usando la metodología del FCA, obtendríamos representaciones reticulares con una estructura jerárquica compatible con la visión fundacionista. Podríamos entonces comparar los retículos con otros diagramas que representan también estructuras teóricas, así como contrastar la relación de deducibilidad con las de implicación y cobertura.

3. Si encontramos varias clasificaciones, axiomatizaciones o reconstrucciones con formatos en común podremos generar bases de datos extensas que comprendan el espectro que se busca representar.

4. Si logramos conjuntar varios grupos de teorías obtendríamos un andamiaje estructural inerteórico que permitirá incorporar fácilmente otras teorías afines al campo.

5. Si utilizamos redes interactivas que puedan ser exploradas en línea podríamos compartir y evaluar los retículos fácilmente.

6. Los despliegues interactivos permitirían visualizar diversas relaciones en redes complejas y de gran tamaño.

7. Los retículos conceptuales proporcionarían a los estudiosos de estos temas, un mejor entendimiento de lo que es el corazón de las teorías gravitatorias.

El desarrollo de tales hipótesis requiere de encontrar reconocidas clasificaciones y reconstrucciones de teorías de gravitación que se encuentren presentadas de forma similar de manera que sea posible conformar una base de datos epistémicamente justificada de la que podamos obtener un retículo mediante el FCA. Se requiere visualizar los retículos en webs interactivas coherentes y evaluar de alguna manera la sensación de entendimiento en los usuarios de las visualizaciones. Comparar los resultados obtenidos bajo distintos esquemas de axiomatización para poder distinguir las distintas clases de estructuras que se pueden dar en determinados contextos.

0.6. Metodología: un proceso recursivo

La metodología consiste en seleccionar una serie de clasificaciones de teorías del espacio-tiempo y la gravitación, y conformar una nueva clasificación incluyente, representada en una

tabla binaria llamada contexto, que relaciona objetos (en este caso las teorías) con atributos (en este caso las relaciones, funciones y parámetros que constituyen a las teorías), de modo que tal atributo está (o no está) presente en tal objeto. A partir del contexto se identifican conjuntos de objetos y sus correspondientes conjuntos de atributos, de tal suerte que los integrantes de la segunda colección son los atributos que comparten los objetos de la primera, y sólo en esos objetos están presentes esos atributos. A estos pares de conjuntos se les denomina conceptos formales. Los contextos se analizan mediante un software especializado. Los algoritmos que aplica el explorador de conceptos (*conexp 1-3*) son propios de una teoría matemática conocida como análisis de conceptos formales (FCA), desarrollada por Rudolf Wille en los años setenta.

El FCA identifica conceptos a partir de contextos y los ordena jerárquicamente, proporcionando una representación gráfica multidimensional llamada retículo conceptual. Los retículos conceptuales son redes jerárquicas que tienen la propiedad de poseer un nodo supremo y uno ínfimo en común para cualesquiera dos nodos que se elijan de la red. Cada nodo representa un concepto conformado por un conjunto de atributos y de objetos. Las ligas representan relaciones de orden parcial (jerárquicas o de cobertura) con una lectura vertical. El FCA provee de múltiples algoritmos y otros instrumentos de análisis para caracterizar un contexto, su correspondiente retículo y su estructura. El análisis arroja información sobre conceptos, objetos, atributos, sub-conceptos, supra-conceptos, clases de conceptos, implicaciones, asociaciones y facilita la exploración de atributos, el cálculo de índices de separación entre conceptos y la visualización del retículo conceptual entre otras cuestiones.

Estos análisis se hicieron en *Wolfram Mathematica* con el apoyo de Arturo Espinosa y el curso de análisis y visualización de datos impartido por Irving Morales en el C3-UNAM. El programa permite importar bases de datos extensas en archivos *csv*, analizarlos utilizando al *conexp* como una biblioteca, y exportando un archivo tipo *json* con la información necesaria para visualizar las redes interactivas en páginas web mediante documentos de datos (*D3, javascript*). Las visualizaciones son entonces codificadas y enriquecidas mediante otras bases de datos y documentos de diseño en lenguaje *css* y *html*. Los nodos se acomodan manualmente y se evalúa e interpreta la red resultante, dando lugar, en muchos casos a cambios y ajustes en el contexto.¹⁶

Este es un proceso recursivo que se guía por lineamientos para la exploración de atributos con el fin de obtener un contexto lo más cerrado posible.

Los detalles técnicos y los algoritmos explicados en el primer capítulo están basados mayormente en las notas que tomé del curso en línea de “Introducción al FCA” en *coursea.org* ofrecido por Sergei Obledkov, profesor asociado de la Escuela de Análisis de Datos e Inteligencia Artificial de la Alta Escuela de Economía, de la National Research University, en Rusia. El proceso es acompañado con un ejemplo sencillo. Apuntaré hacia las nociones centrales

¹⁶Al picar en un nodo, el retículo interactivo resaltará las ligas y nodos superiores e inferiores a dicho nodo, indicando los atributos y objetos correspondientes a dicho concepto. Las clases de atributos se codifican con etiquetas coloreadas, mientras que los objetos se localizan en nodos conocidos como conceptos-objeto y se les identifica mediante etiquetas de color blanco. Otra codificación es la que se observa en los círculos que representan los nodos. Un círculo cuya parte superior está coloreada de gris indica que posee un nuevo atributo. Un círculo con la parte inferior coloreada de negro indica que se trata de un concepto-objeto.

del FCA, entre ellas las de contexto, concepto, orden y jerarquía, objeto, atributo y retículo, así como algunos algoritmos y lineamientos para hacer exploraciones básicas y establecer un lenguaje de trabajo. Me apresuro a presentar la metodología en el capítulo primero para aprovechar los diagramas en la construcción progresiva del holón, el gran retículo que comprenderá las cuarenta y cuatro teorías estudiadas.

0.7. Marco teórico: una mirada a las estructuras

El marco teórico se presenta en el segundo capítulo, donde me doy a la tarea de contrastar las características de las clasificaciones con las que se ha de trabajar. Hay bastantes textos en la literatura, tanto de física, como de filosofía de la ciencia que hablan sobre los fundamentos de las teorías científicas y su estructura, así como de clasificaciones de algunas teorías. Seleccionar qué textos seguir no fue cosa sencilla, pues en general, utilizan criterios un tanto distintos para realizar sus análisis. Nos encontramos con la visión conjuntista, que se distingue de la teoría de categorías; la semántica en contraposición a la sintáctica; la visión axiomática y fundacionista en contraposición con la coherentista; la modelo-teórica, en oposición a la axiomática y las diversas posturas estructuralistas, unas enfocadas en las matemáticas y otras en las teorías empíricas.

Es preciso por tanto acotar el campo de estudio, y centrarnos en reconstrucciones axiomáticas y modelo-teóricas distinguiendo diversas representaciones gráficas de la estructura científica que se han utilizado como lo son las representaciones arquitectónicas de la ciencia como edificios de tabiques o polis; los árboles deductivos de la visión axiomática y las redes teóricas de la visión estructuralista, que comparo con los retículos obtenidos aplicando el FCA. Un estudio más detallado, y el más comprensible que he encontrado respecto a las diferencias entre el enfoque sintáctico y el semántico y sus variantes estructuralista y de *espacio de estados* es la tesis de doctorado de Germán Guerrero Pino (2003), a quien citaré con frecuencia, así como los *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia* de Díez y Moulines (2008). Una lectura a conciencia de los retículos presentados deberá hacerse con las fuentes originales en mano, pues no reproduciré todas las axiomatizaciones ni discutiré las peculiaridades de las teorías. Me limitaré a señalar algunos comentarios importantes que condujeron a la modificación de los contextos formales y a lecturas comprensibles de las visualizaciones que pueden llevar a discusiones interesantes. Estas cuestiones sólo se plantean como temas de posible discusión y se continúan en los capítulos 3 y 4.

En *Foundations of Physics* (1967), Mario Bunge insiste en la importancia de hacer investigaciones filosóficas sobre los fundamentos de la física, y proporciona axiomatizaciones muy detalladas de varias teorías físicas, incluyendo la primera axiomatización formal de la relatividad general y su propuesta de agrupar dentro de la categoría de *Protofísica* una serie de teorías parcialmente desarrolladas sobre las que se montan las teorías físicas. Su visión es fundacionista, conjuntista, axiomática y semántica, mas no modelo-teórica. De este libro he conformado tres retículos que presento en el segundo y tercer capítulo.

La propuesta estructuralista brinda muchas herramientas de análisis y vocabulario para la exploración de estructuras, así como ejemplos de múltiples casos estudiados. En *Una arquitectónica para la ciencia* (2012) –libro icónico para la escuela estructuralista–, Balzer, Moulines

y Sneed presentan la reconstrucción de 18 modelos especializados de la mecánica clásica de partículas (MCP), presentando un grafo de esta red teórica. Entre ellos, el de la mecánica clásica de partículas newtonianas (MCPN), de las mecánicas dependientes de la posición, la gravitacional y la gravitacional newtoniana. Al igual que muchos otros diagramas esta red ha sido dibujada a mano y no mediante un análisis computacional. Esta red representa solamente una parte de la estructura de la MCP.

Utilizando los datos proporcionados en *Una arquitectónica*, me di a la tarea de generar un contexto y visualizarlo con FCA. El resultado fue una red, muy parecida, si, a la red teórica ilustrada en el libro, pero con algunas diferencias interesantes:

1. Los atributos de los modelos quedan desplegados.
2. Algunos elementos distinguidos son compartidos por varios modelos y por tanto producen nodos extra.
3. Los términos teóricos propios de modelos especializados quedan evidenciados en su nivel jerárquico.

La estructura de las teorías no es una, sino varias, dependiendo del tipo de relaciones que observemos. En este caso, interesan las relaciones de cobertura entre conceptos, y las relaciones identificadas en la escuela estructuralista: las de especialización y teorización, que están basadas en la estructura conceptual de un contexto, un campo o dominio, y que muestra cierta estructura interna, otra externa y un andamiaje interteórico; mientras que otras relaciones estructurales, como las de deducción lógica, aproximación, inconmensurabilidad, determinación conceptual y determinación de vínculos interteóricos quedarán fuera del estudio. Hay diversas relaciones entre los componentes de estos sistemas, y se pueden dar, además de forma sincrónica o diacrónica. Aquí nos enfocaremos en el aspecto sincrónico.

En el tercer capítulo se introducen ya nociones matemáticas necesarias para comprender la composición de los dominios y atributos de las teorías relativistas y entrarle de lleno a la conformación de los contextos que incluyen teorías más recientes. Para ello ha resultado vital el libro *Foundations of Space-time Theories* de Michael Friedman (1983), un regalo del Dr. Roberto Sussman del Instituto de Ciencias Nucleares. En este libro, Friedman dentro de su visión modelo-teórica, proporciona las reconstrucciones de dos teorías newtonianas, de la electrodinámica clásica y la de Maxwell-Faraday, de la relatividad especial y la relatividad general. En mayo de 2016, antes de iniciar el doctorado, asistí a un congreso de fundamentos de la física en la Universidad de Pittsburg, donde Niel Dewar presentó un trabajo de reconstrucción de algunas teorías del espacio-tiempo y la gravitación: la teoría leibniziana, galileana, newtoniana, de Maxwell, de Newton-Cartan y de Maxwell-Cartan. Los trabajos que este joven alemán ha venido publicando me ha ayudado a complementar y descifrar algunas omisiones en el trabajo de Friedman y a definir, por ejemplo, el espacio Leibniziano y el de Maxwell.

El libro de Friedman es particularmente útil, pues las reconstrucciones se encuentran en dos formalismos distintos: el formalismo del cálculo tensorial basado en coordenadas y el de la geometría diferencial; de manera que funcionó como una piedra rosetta que me permitió comparar notaciones y decifrar algunos textos y artículos. Además su noción de modelo es suficientemente general para iniciar una clasificación, ya que está conformado por una variedad diferenciable M , una serie de dominios (objetos geométricos, variables o campos

φ) y un conjunto de relaciones R entre los dominios $m = \{M, \varphi, R\}$. Sin embargo la noción de modelo que terminé empleando se complementó con las distinciones estructuralistas de ciertos axiomas propios, llamados caracterizaciones (tipificaciones y condiciones) e incluí los elementos distinguidos, no así las ligaduras ni las aplicaciones intencionales. Por otro lado, la clasificación de teorías métricas de Clifford Will (1993) distingue ciertas funciones especiales y parámetros cosmológicos, así como las integrales para calcular la mínima acción. Este elemento ha sido importante para clasificar las teorías métricas, $f(R)$ y métrico-affin.

0.8. Capitulado: Back to the basics

Con esta tesis pretendo apuntalar una serie de conceptos básicos y de discusiones ya clásicas en filosofía de la ciencia mediante visualizaciones de redes y el uso de la teoría de conjuntos. El capitulado intenta llevar de la mano al lector introduciendo paulatinamente estas discusiones filosóficas así como los conceptos de las teorías físicas, pues se entiende que algunas de las múltiples disciplinas que abarca el proyecto pueden no ser de su conocimiento. Por tanto comenzaré por presentar la metodología del FCA que requiere de conocimientos mínimos de teoría de conjuntos y lógica elemental. Esto permitirá hacer uso de los diagramas desde un principio, a la vez que entramos en temas más complejos, guiados por dos ejes: La física y la filosofía de la ciencia. El primer eje introduce las teorías y principios fundamentales de la profísica y la teoría newtoniana en el Capítulo 2; la teoría general de relatividad en el capítulo 3 y teorías alternas en el capítulo 4. El segundo eje introduce posturas filosóficas diversas respecto a la estructura y representaciones gráficas de las teorías empíricas.

El marco teórico se esboza en el segundo capítulo desde la filosofía de la ciencia para describir la estructura interteórica, interna e intermodélica de las teorías. Es decir, veremos qué tipo de componentes y de relaciones plantean las diversas visiones y cómo identificamos o no dichas características en los retículos que obtenemos con el FCA. Esto hay que puntualizarlo, ya que las diversas reconstrucciones que encontramos en la literatura están presentadas bajo concepciones y notaciones distintas: El estilo axiomático, representado en este trabajo por Isaac Newton y David Hilbert, el semántico-axiomático-conjuntista de Mario Bunge (1967) y Guillermo Covarrubias (1993); el estilo modelo-teórico representado aquí por Michael Friedman (1983), y el semántico-modelo-teórico-estructuralista representado por Wolfgang Balzer, Ulises Moulines y Joseph Sneed (2012) y por Thomas Barthelborh (1993). Dado que todos estos estilos toman como ejemplo la mecánica clásica de partículas y varios la teoría general de relatividad serán estas teorías una referencia de comparación e hilo conductor.

En el tercer capítulo se complementa el marco teórico presentando tres contextos que contienen como objetos varias teorías del espacio-tiempo, cinemáticas y gravitatorias que han sido clasificadas en el marco modelo-teórico de Michael Friedman y Neil Dewar. En este capítulo introduzco los elementos básicos que componen la punta del iceberg del holón de teorías gravitatorias y cierto vocabulario básico en la física y las matemáticas, siguiendo a I.D. Lawrie (2012), esto con la finalidad de dar algún contenido a los elementos de los retículos y permitir una lectura más comprensible. Ahí explicaré lo que son los objetos geométricos que juegan un papel fundamental en las teorías gravitatorias: la conexión afin y el tensor métrico, así como de los operadores, dominios y demás clases de atributos que aparecerán en

los retículos. En estas redes, las relaciones de especialización y teorización se evidencian, así como la ubicación jerárquica de las distintas clases de atributos y su distribución. Finalmente, el FCA nos arroja una serie de implicaciones de interés para estudios posteriores que se presentan en los anexos.

En el cuarto apartado aplicaré la misma metodología para visualizar las redes teóricas de grupos de teorías alternas a la gravitación, en particular las teorías métricas, las teorías $f(R)$ y las teorías de dinámica newtoniana modificada (MoND) o teorías $f(R)$ extendidas. Las teorías métricas se encuentran resumidas y clasificadas en el libro del físico Clifford Will: *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (1993), que contiene una tabla que sintetiza las variables, parámetros y funciones que poseen una buena cantidad de teorías métricas viables y no viables. En su recetario para calcular los parámetros post-newtonianos de las teorías, se desglosan las variables, relaciones y condiciones que fundamentan dichas teorías, entre ellas ciertas funciones especiales y parámetros cosmológicos. Dos retículos se produjeron a partir de la tabla de Will: el del formalismo lagrangiano y el de parámetros post-newtonianos.

En el artículo de Sotiriou y Farahoni (2010), los físicos estudian teorías gravitatorias a partir de funciones del escalar de Ricci, llamadas teorías $f(R)$. En el artículo se incluye un diagrama que es susceptible de ser comparado con los retículos producidos a partir de la interpretación de su texto. Se observan diferencias sustanciales, tanto en la disposición de los elementos como en los elementos representados. Esta clasificación es importante porque permite incluir teorías que hacen suposiciones muy fuertes en los elementos más fundamentales, como es la conexión afín. Con ello, se expande el abanico de posibilidades.

En este punto del trabajo en el que se han ya visualizado varias clasificaciones, nos encontramos en la posibilidad de incorporar al andamiaje que se ha venido construyendo teorías que no han sido propiamente clasificadas por su reciente aparición. Me refiero a las teorías de dinámica modificada y las teorías $f(R)$ extendidas propuestas por el equipo de Mendoza [Barrientos y Mendoza, 2018; Barrientos *et al.* 2018; Carranza y Mendoza 2013; Mendoza 2012]. Esto se ha hecho siguiendo una exploración de objetos y atributos. Aquí nos encontramos con la aparición de una nueva constante fundamental y condiciones de no localidad.

El capítulo cuarto concluye presentando el holón, que incluye cuarenta y cuatro teorías del espacio-tiempo y la gravitación. Un holón, bajo el vocabulario estructuralista, relaciona teorías de cierto campo, incluso de varios campos. Es una red de gran dimensión, conjuntos de redes teóricas que al ser presentadas de forma interactiva o por secciones pueden ser bien apreciadas.

Las clasificaciones que se han abordado difieren en muchos aspectos. En particular, algunas están deducidas a partir de elementos muy generales pero bastante complejos. Para que sean todas incorporadas en un mismo contexto ha sido necesario ampliar los modelos propuestos al incluir estos objetos más generales e imponer ciertas condicionantes. El holón de teorías es un andamiaje que permite incorporar fácilmente otras teorías no consideradas o modelos especializados de teorías como modelos cosmológicos. Inversamente el holón puede ser recortado de manera que se visualicen solamente las teorías de interés.

Finalmente se ofrecen unas breves descripciones de muchas otras teorías de gravitación que quedaron fuera del alcance de esta investigación, entre ellas las teorías no métricas,

descritas en (Blagojevic y Hehl, 2013), así como aproximaciones a la gravedad cuántica y la teorías de supercuerdas.

En el quinto apartado se presentan las conclusiones generales y una serie de anexos complementarios que incluyen axiomatizaciones, listas de implicaciones y asociaciones, un glosario y la bibliografía.

Análisis de conceptos formales

En 1978 el grupo de Rudolf Wille de la Universidad Técnica de Darmstadt, Alemania, organizó la primera de una serie de reuniones entre matemáticos para discutir los problemas de la ciencia super especializada, la instrumentalización y la manera en que las matemáticas se estaban desarrollando. Wille cuenta que la discusión fue ampliamente influenciada por la concepción filosófica del conocido educador alemán Hartmut von Hentig de la *Wissenschaftsdidaktik* (Didáctica de la ciencia), elaborada en el libro *Magician or Master? On the Unity of Science in the Process of Understanding*. Hentig propone reestructurar las disciplinas científicas:

Las ciencias deben examinar su disciplinariedad, y esto significa: recuperar sus propósitos inconscientes, declarar sus propósitos conscientes, seleccionar y ajustar sus medios acorde a sus propósitos, explicar las posibles consecuencias de una forma comprensible y pública, y hacer accesible sus formas de descubrimiento científico y sus resultados en un lenguaje coloquial.

Reestructurar las disciplinas científicas dentro de sí mismas se vuelve cada vez más necesario para hacerlas comprensibles y aprendibles, mutuamente disponibles y criticables en entornos más generales también más allá de la competencia disciplinaria. Esta reestructuración puede y debe ser realizada por patrones generales de percepción, pensamiento y acción de nuestra civilización (Wille, 1982).¹

Wille entiende reestructurar como retrabajar creativamente los desarrollos producidos con el fin de integrar y racionalizar orígenes, conexiones, interpretaciones y aplicaciones.

El objetivo es alcanzar una teoría estructurada que despliega los pensamientos formales de acuerdo a interpretaciones significativas, permitiendo una comunicación amplia y crítica del contenido, de manera que resulte claro cuáles son sus efectos y consecuencias más allá de la teoría. Esto significa que la teoría reestructurada es substancialmente determinada por un entendimiento

¹“Sciences have to examine their disciplinarity, and this means: to uncover their unconscious purposes, to declare their conscious purposes, to select and to adjust their means according to those purposes, to explain possible consequences comprehensibly and publicly, and to make accessible their ways of scientific finding and their results by the every-day language”.

“The restructuring of scientific disciplines within themselves becomes more and more necessary to make them more learnable, mutually available, and criticisable in more general surroundings also beyond disciplinary competence. This restructuring may and must be performed by general patterns of perception, thought, and action of our civilization”.

pragmático, de manera que la teoría es abierta lo más posible a los alrededores donde la teoría pueda tener algún efecto. Este entendimiento sugiere ver la reestructuración dentro de la concepción de la «ciencia general» que ha sido desarrollada desde 1987 (Wille, 1996).²

El grupo de Wille hizo intentos por reestructurar el álgebra lineal, la teoría de retículos, la teoría del orden, el álgebra introductoria, la geometría axiomática, las bases de la estadística y el cálculo. El proyecto inicial quedó por mucho incompleto, pero resultó sumamente fructífero e inspirador. Al reestructurar la teoría de retículos desarrollada por Garret Birkhoff (1940) e integrando la *conexión monótona de Galois* abrieron una nueva disciplina llamada *Análisis de Conceptos Formales* o *Formal Concept Analysis* (FCA).

En este primer capítulo hablaré sobre esta metodología utilizada para visualizar redes de los así llamados conceptos formales y sus atributos asociados mediante el FCA, y consiste en al menos seis pasos:

1. Conformar una tabla o contexto.³
2. Analizar el contexto para identificar conceptos formales que serán representados como nodos.
3. Analizar las relaciones jerárquicas para identificar niveles y otras propiedades de las redes.
4. Visualizar las redes en páginas webs, agregando propiedades interactivas e información complementaria mediante textos e imágenes.
5. Realizar preguntas a los expertos, sugeridas por las implicaciones que arroja el FCA.
6. Interpretar y validar los resultados.
7. Regresar al paso 1 tantas veces como sea necesario hasta obtener la estabilidad requerida.

En este primer capítulo nos centramos en el FCA, que es un método para ordenar jerárquicamente conceptos formales expresados en un contexto y representarlos mediante un diagrama reticular. Además plantea implicaciones derivadas del retículo que permiten explorar y ampliar o refinar el contexto, entre otras aplicaciones. Esto puede hacerse a mano, y para no caer en la sensación de que se trata de una caja negra, revisaremos paso a paso parte de la metodología utilizada con un ejemplo sencillo. Sin embargo, en el análisis que nos ocupa utilizamos software especializado que facilita la visualización de contextos extensos, seleccionar objetos y atributos a conveniencia, agregar vínculos y hacer constantes modificaciones. Finalmente, se requiere montar las visualizaciones en webs que puedan ser compartidas para facilitar la

²*"The aim is to reach a structured theory which unfolds the formal thoughts according to meaningful interpretations allowing a broad communication and critical discussion of the content, so that it becomes clear what are its effects and consequences beyond the theory. This means that the restructured theory is substantially determined by a pragmatic understanding, so that the theory is opened as much as possible to the surrounding which the theory might effect. This understanding suggests viewing restructuring in the wider conception of "Allgemeine Wissenschaft" which has been developed since 1987".*

³La conformación de los contextos y la interpretación de las redes están fuertemente regidas por marcos teóricos de la filosofía de la ciencia que se explicarán en el capítulo 2.

exploración, interpretación y validación del estudio. Una vez seleccionados los datos, el proceso que va de analizar el contexto y obtener una web interactiva lista para ser validada puede llevar más de 48 horas de trabajo. Muchos de estos procesos podrían reducirse con mayor programación y el desarrollo de software.

El FCA ha encontrado aplicaciones en muchas disciplinas como son la lingüística, la ingeniería de software, la psicología, la inteligencia artificial, en los procesos de recuperación de información y más recientemente en el análisis de redes sociales (Singh *et al.*, 2016). En Alemania, Europa del Este y los Países Nórdicos se celebran varios congresos internacionales especializados en FCA y sus aplicaciones, y es tema de discusión en congresos de diagramática, cognición, representaciones visuales e inteligencia artificial, entre muchos otros.

A continuación veremos algunas nociones de concepto, relación y atributo, para llegar a la noción de concepto formal y de contexto, que son con las que trabaja el FCA. Estas nociones, junto con la de modelo nos serán también muy útiles en los capítulos 2 y 3, y dado que están íntimamente relacionadas, las presentamos de una vez.

1.1. Nociones de concepto

Desde el punto de vista clásico, un concepto es una idea simple, la unidad de significado y el bloque de construcción de una proposición. Los conceptos no son entidades localizadas espacialmente como lo son los objetos físicos, ni tampoco acotadas temporalmente como lo son las sensaciones, en ello se distinguen de los perceptos que son paquetes de sensaciones que se relacionan entre sí y que perduran en aquel que las experimenta.⁴ No debemos confundir a las palabras, que son expresiones físicas del mundo real, con los conceptos. Éstas son símbolos que denotan a los objetos y designan a los conceptos. De hecho una misma palabra puede denotar tanto al tercer planeta como al suelo bajo nuestros pies. Los conceptos no poseen sustrato material, son entes abstractos que pueden o no estar bien definidos. Los conceptos vagamente definidos como el amor son propios del lenguaje natural. A los conceptos bien definidos en un lenguaje formal, como los conceptos matemáticos, se les llama constructos. Un constructo es un concepto construido por abstracción, siguiendo reglas explícitas. En la física y en particular en esta tesis, cuando hablamos de conceptos, estamos hablando de constructos, aunque la metodología aquí presentada es también aplicable al lenguaje natural.

Podemos catalogar los conceptos de diversas maneras. Mario Bunge, por ejemplo, distingue los conceptos elementales o individuos, tales como “escuela” o “ π ”; los conjuntos: {*Europa, Gamínedes, Calisto, Io*}; los conjuntos ordenados (listas) :

\langle primaria, secundaria, preparatoria, licenciatura, maestría, doctorado, posdoctorado \rangle,

⁴El término percepto, ha sido utilizado por Leibniz, Bergson, Deleuze, y Guattari para definir una percepción independiente del sujeto que percibe (Deleuze y Guattari, 1994).

que son conjuntos en donde la posición de cada elemento asigna una propiedad;⁵ y los pares de conjuntos ordenados (relaciones), en donde se expresa o bien el dominio y el codominio, o el dominio y la relación que se le aplica. Con respecto a la estructura de los predicados en la física, Bunge distingue los conceptos de clase como “soluble”, los conceptos relacionales como “soluble en agua” y finalmente los conceptos métricos o cuantitativos como “solubilidad”. Éstos últimos son también llamados magnitudes y variables.

Las relaciones más comunes se expresan como conjuntos de pares ordenados binarios: $R = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle\}$ siendo el conjunto de las primeras entradas de cada par el dominio (*Dom*) y de la segunda el codominio o recorrido (*Rec*) de la relación. Algunas objeciones a esta clasificación es la de que toda relación es en sí un conjunto, y que los conceptos individuales, según el álgebra de Boole en realidad no existen. A decir de Juan Campesino, la lógica de clases y la filosofía analítica no tendrían sentido si los hubiera. Bunge argumenta en su *Foundations* (1967) que lo que es individual en un cierto nivel de análisis puede ser relacional en otro nivel, así como las partículas elementales lo son en la física de bajas energías, mientras que en la física de altas energías son sistemas complejos. Tenemos entonces que todo concepto es un conjunto, pero no todo conjunto es un concepto. La Figura 1.1.3 muestra una clasificación que compara los conjuntos con las relaciones (conjuntos ordenados) y ubica los distintos tipos de conceptos, según la forma en que se les representa.

Desde la interdisciplina de las ciencias cognitivas, Peter Gärdenfors (2000) distingue dos clases de conceptos: las propiedades, a las que nos referimos en el lenguaje natural mediante adjetivos, y los conceptos elementales, objetos o sustantivos. Como seres cognoscentes que somos, tenemos la habilidad de identificar mediante nuestros sentidos e instrumentos (como los telescopios y las matemáticas) propiedades comunes, similitudes e invariancias entre los objetos. Lo que podemos detectar se inserta en ciertos dominios ya sea sonido, color, posición, peso, parentesco, tipo de material, etc. y depende del detector que utilicemos: el oído, la vista, el tacto, etc. Los dominios se conforman por ciertos conjuntos de dimensiones. Por ejemplo, el sonido está conformado por cuatro dimensiones: intensidad, tono, timbre y duración que ocurren con ciertos valores comparables. El dominio espacial está conformado por tres dimensiones: ancho, largo y profundidad. Los objetos tienen propiedades que son combinaciones posibles de dichas dimensiones. Por ejemplo, una manzana, en el dominio del color tiene la propiedad de ser roja y dicho color tiene ciertos valores de matiz, brillo y saturación. En el dominio de la forma, podemos pensarla redonda y dar valores a su redondez mediante dimensiones alternativas como las esféricas (radio, latitud y azimutal). Los conceptos pueden estar conformados en varios dominios y ubicarse en rangos de valores dimensionales. Esto permite incluso generar la noción de concepto prototipo, que cumple con valores o rangos de valores particularmente característicos. Aunque afín a los propósitos de esta tesis, el trabajo

⁵Otro ejemplo de n-tuplas ordenadas son los vectores y covectores $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Un vector es una lista de

valores $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_4 \end{bmatrix}$ que suele representarse con una flecha. Los vectores vienen acompañados de operaciones que permiten sumar y escalar.

de Gärdenfors va más allá de nuestros alcances al representar el lugar donde viven los conceptos (los objetos y sus propiedades) construyendo espacios a partir de las dimensiones de cualidad, los llamados espacios conceptuales.

Díez y Moulines, siguiendo a Hempel y a Stegmüller, distinguen a los conceptos en científicos y no científicos. Desde su punto de vista, los conceptos que se manejan en la ciencia son aquellos que tienen valor epistémico, es decir, que pueden aplicarse a objetos de la realidad. Conceptos inventados como los unicornios pueden tener valor en el mundo del arte, la poesía, la ciencia ficción o la filosofía, incluso en la historia de la ciencia. Los conceptos de un sistema conceptual se refieren, o subsumen, ya sea a objetos del mundo real o a constructos. El concepto 'astro' puede referirse a Saturno, el Sol, a una estrella, etc. Véanse las Figuras (1.1.1 y 1.1.2). El ejemplo del concepto 'flogisto', que en su momento se pensó existente, supone un "acto epistémico fallido". En la práctica esto no sucede así. Hay múltiples ejemplos de conceptos que se manejan hoy en día y que muchos dudan severamente de su existencia. Es el caso mismo de la materia oscura, el inflatón, el gravitón, las partículas supersimétricas, las supercuerdas, etc. Estos conceptos pueden estar formalmente bien contruidos, tener un referente formal y aún así no encontrarse una referencia factual. En todo caso, podríamos decir que la ciencia trabaja con conceptos no científicos en busca de determinar su autenticidad.

Los conceptos que se usan en ciencia pueden también separarse en conceptos clasificatorios, comparativos (o topológicos) y métricos. Estas clases, siguiendo a Stevens *et al.* (1946) en Orlandoni Merli (2010) pueden darse según las operaciones empíricas de asignación que deben hacerse y las propiedades matemáticas de las escalas resultantes.

Los conceptos clasificatorios son los más usados en la vida diaria, por ejemplo, los conceptos de color (amarillo, azul, rojo. . .), de forma (circular, cúbico, etc.) o tipo de animal (herbívoro, carnívoro, mamífero. . .), etc. Los criterios de clasificación científica están dados por relaciones empíricas de equivalencia que inducen particiones en el conjunto de elementos del dominio. Por ejemplo, la relación empírica de asignar un sexo femenino o masculino a una persona puede definirse según si tiene o no las características de un prototipo. Si son equivalentes entonces son de la misma clase. Esto es, una clase de equivalencia: $[a] = \{b \in X \mid a \sim b\}$.

Clasificar cierto dominio de objetos no es más que agruparlos en grupos disjuntos, ninguno de ellos vacío, y tales que entre todos los grupos estén todos los objetos del dominio en cuestión (Díez y Moulines, 2008).

Las reglas de equivalencia deben ser reflexivas, simétricas y transitivas. Es decir, para todo $x, y, z \in X$ debe cumplirse que:

1. $x \sim x$, (reflexividad)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (simetría)
3. $x \sim y$ y $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitividad).

Puede ser que las particiones no sean perfectas, o que las relaciones de equivalencia no estén claramente formuladas o sean de difícil aplicación. En dados casos, pueden discutirse criterios para aceptar o rechazar una clasificación dada. En general, se preferirán las clasificaciones más finas que cuentan con un número mayor de particiones, a las dicotómicas como la del árbol de Porfirio. Sin demeritar las aportaciones que estas clasificaciones dieron a la silogística aristotélica, las clasificaciones que se basan en la afirmación y negación de una

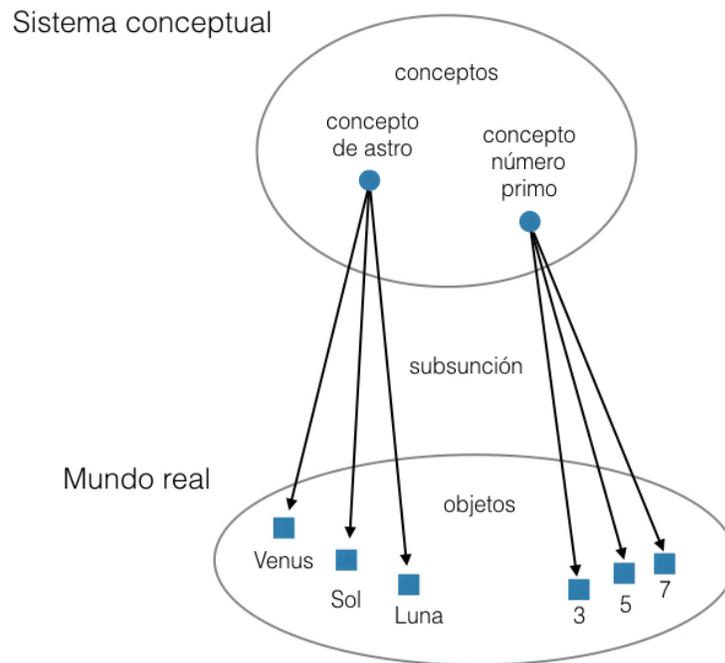


Figura 1.1.1. Subsunción. Adaptado de (Diez y Moulines, 2008, p. 94).

propiedad suelen ser más pobres y no aportan tanta información. La superposición sucesiva de clasificaciones resultan en árboles clasificatorios como los taxonómicos, en donde los subniveles jerárquicos son cada vez más finos.

Si asignáramos un número a cada una de las cualidades de un concepto clasificatorio, por ejemplo 1 al sexo femenino y 2 al masculino, veríamos que éstos solo tienen la propiedad de la identidad. Es decir, cada número tiene un significado particular y no son susceptibles de comparación.

Los conceptos comparativos permiten, además de clasificar un dominio dado, ordenarlo; son de carácter relacional, del tipo "x es tan o más (menos)... que y". Además de la relación de equivalencia, tenemos una relación de precedencia, que permite ordenar el dominio. Por ejemplo, "la Tierra es tanto o más masiva que la Luna", "el diamante es más duro que el yeso", "la leche es menos ácida que el limón". El ordenamiento lo hacemos asignando ciertos valores, por ejemplo el 5 a la acidez del agua de lluvia, el 1 al ácido gástrico y el 10 al jabón de manos, pero igual podemos hacerlo asignando simplemente colores. O en una competencia, podemos asignar medallas de oro, plata y bronce. Estos valores tienen un orden ascendente o descendente pero no podemos hacer con ellos operaciones aritméticas. No sabemos la

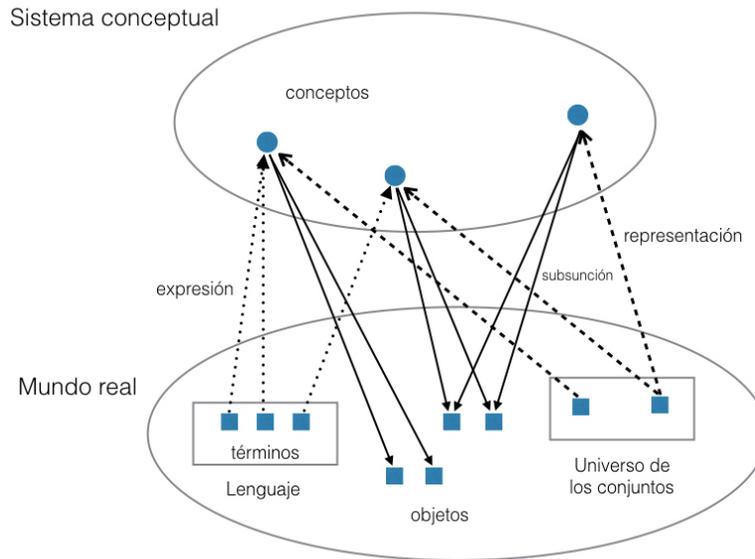


Figura 1.1.2. Representación. Adaptado de (Diez y Moulines, 2008, p. 98).

distancia entre el primer lugar y el segundo o el tercero. Se trata de escalas ordinales donde los números asignados tienen una magnitud, aunque no sepamos la distancia entre unos y otros. Podemos hacer un ordenamiento siguiendo el patrón del arcoíris, pero no podemos sumarlos, menos hacer cálculos elevados.

El tipo de conceptos con los que más trabaja la física son los conceptos métricos o cuantitativos, a los que está asociada, además de una magnitud, la propiedad de poseer intervalos iguales. Las diferencias entre los números asignados en cualquier punto de la escala son las mismas. Esto permite que las operaciones de suma y resta sean aplicables y podamos saber cuánto más hay de cierta magnitud. En la escala musical por ejemplo, podemos subir o bajar tonos en intervalos exactos y sumarlos. Pero no podemos multiplicar ni dividir. Lo mismo en la escala de grados centígrados. Para ello se requiere de la propiedad del cero absoluto, un valor que indique la ausencia de la magnitud. Las escalas métricas que cuentan con un cero absoluto son llamadas de razón o de proporciones e incluyen las escalas de masa, fuerza, longitud, etc. Estos conceptos traen ya implícita una comparación y clasificación previa. Podemos clasificar un objeto como un grave, dado que cae al soltarlo al suelo, podemos comparar su gravidez mediante una balanza y podemos obtener una cuantificación de su masa al experimentar con ella, midiendo su aceleración y la fuerza aplicada. Así, los símbolos de la segunda ley de Newton (m, F, a) representan conceptos métricos, mientras que la fórmula $F = ma$, como totalidad, designa una proposición.

La introducción sistemática de conceptos métricos en las teorías permite hacer uso de toda la fuerza de la aritmética y de todas las ramas de la matemática que pueden “montarse” sobre ella, creando un puente entre los procesos de la realidad empírica y las operaciones algebraicas, geométricas o de cálculo elevado. Por otro lado, la asignación de las escalas de valores no es fortuito, debe estar basado en metodologías u operaciones empíricas sistemáticas, es decir, las tiritas para medir la acidez deben ser estandarizadas y las balanzas deben estar bien calibradas.

El problema básico en el intento de metrizar un área de conocimiento consiste en encontrar la función o conjunto de funciones métricas apropiadas. Una vez encontrado ello, podemos decir que, en cierto sentido, hemos «identificado» los objetos del dominio estudiado con números reales (o entidades matemáticas derivadas, como vectores, matrices, tensores, etc.) Entonces, en vez de considerar directamente las relaciones y operaciones empíricas que se dan entre los objetos estudiados, podemos concentrar nuestra atención sobre las relaciones y operaciones entre los números que representan propiedades de los objetos empíricos, y a través de ello, indirectamente, ganamos información sobre los mismos objetos y sus propiedades representadas (Diez y Moulines, 2008).

Una manera más de identificar los conceptos es mediante el conjunto de los objetos que el concepto subsume. A este conjunto se le llama la *extensión* del concepto. La visión *extensionalista* de concepto, que nos viene desde Kant, identifica a los conceptos con sus extensiones. Ésta es la base de la epistemología genética de Piaget y, en general, de todo el funcionalismo. Por ejemplo, la extensión del concepto “humano terrícola” es representado por el conjunto de todas las personas que han nacido en la Tierra. Esta visión es útil, pues permite aplicar la teoría de conjuntos para estudiar los conceptos. En el caso de los conceptos métricos, la extensión es una clase de funciones numéricas equivalentes en su capacidad representacional. Por ejemplo, cuando asignamos un peso a cierto objeto, lo hacemos basándonos en una escala de medida, como puede ser la del sistema internacional, que ocupa los kilogramos, o puede ser la del sistema inglés, que ocupa las libras. La función que asigna un peso dado a un objeto pertenece a una familia de funciones, las cuales están relacionadas por una regla de transformación. La extensión de los conceptos comparativos es una relación de orden, mientras que la de los clasificatorios es una partición. Las formas de discurso en donde esta sustitución no es válida son los denominados discursos *intensionales*, donde se utilizan operadores epistémicos como “creer”, o modales como “posible” o “necesario”.

La visión clásica de concepto ha sido criticada por Wittgenstein, Rosch y otros, por no representar adecuadamente la cognición humana; sin embargo, dentro de las disciplinas computarizadas como la minería de datos, la inteligencia artificial o los sistemas de recuperación de información, esta concepción formal es útil.

Una identificación más completa de los conceptos toma tanto el conjunto de las extensiones como el de las intensiones, siendo estas últimas, el conjunto de los atributos que pueda poseer un concepto en un contexto dado. Ésta es la representación de la noción de significado dentro de la concepción dualista. Los conceptos tienen significado, y en esta concepción,

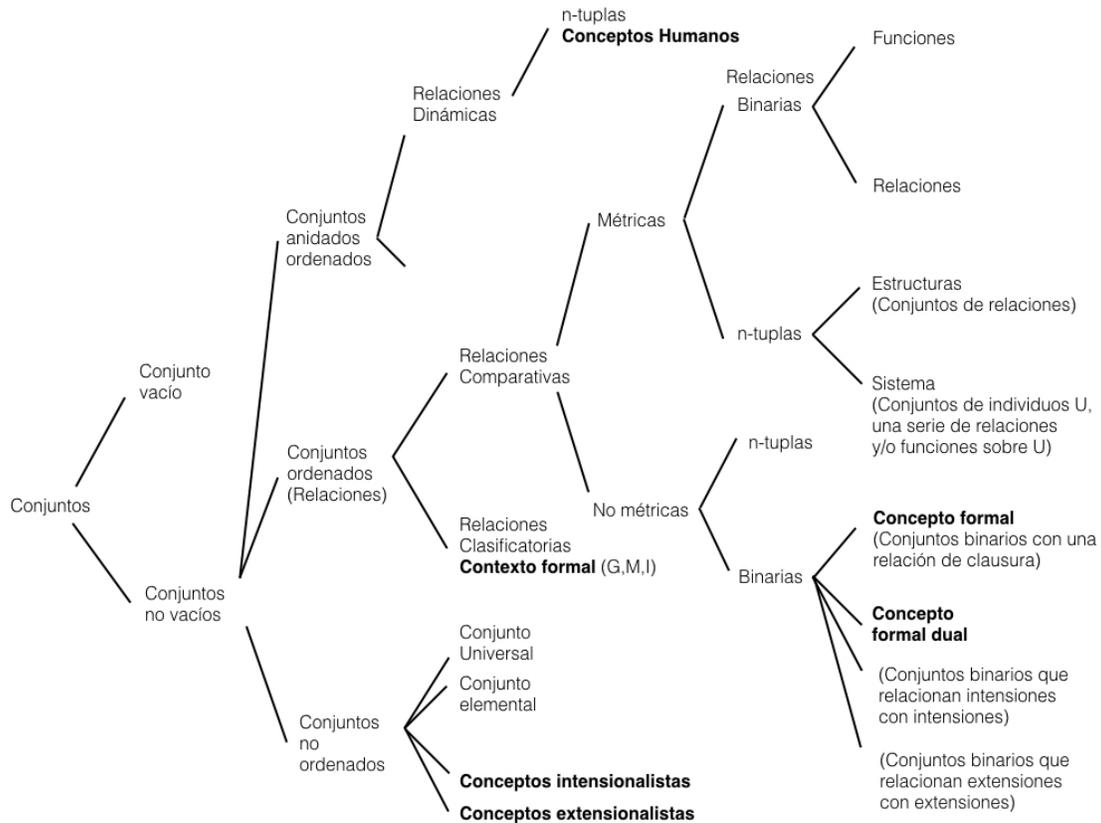


Figura 1.1.3. Ubicación de tipos de conceptos entre tipos de conjuntos. Los conceptos formales son conjuntos binarios ordenados y relacionados por un operador de clausura. Este árbol se lee de izquierda a derecha y es solo esquemático y parcial.

tienen la misma forma que usa la literatura del FCA para definir un *concepto formal*: el par ordenado <Intensión, Extensión>.

La concepción sintética del significado toma el par ordenado <Sentido, Referencia>. Dentro de esta concepción, el significado es previo a la noción de verdad. La extensión requiere de un criterio de verdad, la referencia no Bunge (1976). Retomaremos este punto en el capítulo dos, pues ésta es la noción que ocupa M. Bunge para hacer cálculos de significado, vaguedad e inconmensurabilidad, y que como veremos bien puede el FCA interpretarse en dichos términos. Por lo pronto seguiremos la literatura propia del FCA.

Uta Priss (2007) apunta que para evitar confusiones con las teorías no clásicas o versiones no matematizadas de la teoría clásica, los conceptos en el FCA son llamados “conceptos formales”. El FCA trabaja con este tipo de conceptos y no con “conceptos humanos” como

los entiende las ciencias cognitivas o la lingüística. Wille, en (Ganter *et al.*, 2005), encuentra en la teoría de conceptos de Thomas Bernhard Seiler, en *Conceiving and Understanding, a Book on Concepts and Meanings*, una teoría convincente y comprensiva que describe los conceptos como estructuras cognitivas cuyo desarrollo en la mente humana es constructiva y adaptativa, y concluye que la matematización realizada en el FCA es adecuada y abre oportunidades para soportar matemáticamente el pensamiento lógico de los humanos, lo que se ha venido experimentando en multitud de aplicaciones del FCA.

El FCA puede verse como una formalización matemática de la teoría clásica de conceptos, y consiste en identificar conceptos dentro de un contexto que relaciona objetos (entidades, teorías o modelos) con ciertos atributos, agruparlos jerárquicamente y representarlos mediante retículos, proveyendo una descripción para cada grupo. Para entenderlo, abordaré a continuación varias nociones importantes: las de concepto formal, contexto, orden, jerarquía, objeto y atributo, entre otras.

1.2. Conceptos y contextos formales

Los conceptos formales son primeramente entidades matemáticas; pares de conjuntos $\langle B, A \rangle$ que están determinados por su extensión e intensión. La extensión B consiste en el conjunto de todas las entidades a las cuales el concepto puede ser aplicado, mientras que la intensión A es la colección (o conjunto) de todos los atributos compartidos por las entidades. Por ejemplo, el concepto 'planeta', según las resoluciones de la Unión Astronómica Internacional en Praga del 2006, refiere a los objetos $B = (\text{Mercurio}, \text{Venus}, \text{Tierra}, \text{Marte}, \text{Júpiter}, \text{Saturno}, \text{Urano}, \text{Neptuno})$ que tienen los atributos $A = (\text{Orbitar alrededor del Sol}, \text{haber limpiado su vecindad orbital}, \text{tener forma esférica})$. Dado que Plutón no cumple con el atributo de haber limpiado su órbita, pues sus lunas Caronte, Nix e Hidra son de tamaño semejante, no entra dentro de esa clasificación. En el caso del asteroide Ceres, que durante el siglo XIX fue considerado planeta, éste no tiene forma esférica y comparte su órbita con muchísimos otros asteroides, por ello, estos objetos no entran dentro del concepto planeta.

Para definir este concepto fue necesario hacer distinciones entre otros objetos, como los asteroides, los objetos transneptunianos en el cinturón de Kuiper y los exoplanetas, así como contemplar otros atributos característicos. Los conceptos se generan dentro de contextos que proporcionan elementos de contrastación. En muchas ocasiones no es posible o práctico mencionar todas las entidades de algún tipo ni todos los atributos de alguna entidad, como lo sería incluir todos los exoplanetas detectados, que ya van en decenas de miles. En aquellos casos, pueden especificarse algunos ejemplares característicos, utilizando por ejemplo la noción de concepto prototipo, generando un contexto conceptual acotado con el cual se puede trabajar, que contiene todas las combinaciones de atributos posibles, de tal manera que cualquier objeto dentro del dominio tenga una descripción.⁶ Es decir, si nos encontramos con un nuevo objeto celeste, podremos incorporarlo bajo algún concepto previamente identificado.

FCA introduce la noción de contexto formal, la cual expresamos mediante una tabla anotando en la primera columna todas las entidades que deseamos relacionar, formando el conjunto G de objetos, y en el cabezal los atributos que han o no de compartir, formando el

⁶Véase en (Gärdenfors, 2000) la noción de *concepto prototípico*.

conjunto M .⁷ El contexto es la tabla (G, M, I) , donde I es la relación de incidencia $I \subseteq G \times M$. Esta relación está dada por todos los pares ordenados $\langle g_i, m_i \rangle$ tales que el objeto g_i posee el atributo m_i , donde $g_i \in G$ y $m_i \in M$. Es decir, si un objeto –Mercurio–, cumple con cierto atributo –ser esférico–, se marca una x en el lugar correspondiente de la tabla del contexto y se anota como $\langle \text{Mercurio}, \text{esférico} \rangle$

Un concepto formal consistirá en un par ordenado $\langle B, A \rangle$, donde B (la extensión) es un sub-conjunto de objetos de G , $B \subseteq G$; mientras que A (la intensión) es un sub-conjunto de todos los atributos del contexto $A \subseteq M$. Sin embargo, no cualquier combinación de objetos y atributos conforma un concepto de un contexto. La formalización matemática aquí presentada es necesaria, no solo por completud, sino para poder programar algoritmos que permitan analizar y visualizar las relaciones conceptuales.

1.2.1. Operadores de derivación y de clausura. Identificaremos con una tilde «'» a dos funciones de derivación isomórficas que asignan, una, conjuntos de objetos a conjuntos de atributos, y la otra, conjuntos de atributos a conjuntos de objetos. Si un conjunto de objetos $B = (g_1, \dots, g_n)$ posee (comparten) ciertos atributos $B' = (m_1, m_2, \dots, m_m)$, y los objetos correspondientes a dichos atributos, digamos B'' son exactamente B , entonces $\langle B'', B' \rangle$ es un *concepto formal* del contexto. De la misma manera, sea A un conjunto de atributos, y A' el conjunto de los objetos que poseen dichos atributos, si al aplicar nuevamente la función «'» a A' tenemos que $A = A''$, entonces $\langle A', A'' \rangle$ es un *concepto formal* del contexto. A esta doble función «'» de ida y vuelta se le conoce como *conexión monótona de Galois*. De manera que, dentro de un contexto podemos encontrar una serie de conceptos formales $\langle B_1, A_1 \rangle, \langle B_2, A_2 \rangle, \langle B_i, A_i \rangle$, entre todos los pares de conjuntos del contexto (G, M, I) .

Hay algunos casos en los que es necesario explicitar cuál operador de derivación se está aplicando, por ejemplo, con el conjunto vacío, que es subconjunto tanto de G como de M ; o cuando $G = M$, o cuando $G \cap M \neq \emptyset$. Si tratamos al conjunto vacío como un subconjunto de M , y aplicamos el segundo de los operadores que mapea atributos en objetos, entonces obtenemos el conjunto G de todos los objetos, en caso de que no haya un atributo compartido por todos los objetos. Algunas veces es necesario poder hablar acerca de varios contextos formales y de sus operadores de derivación. En dichos casos, la notación a base de primas puede ser ambigua por lo que se llega a utilizar símbolos de relación de incidencia.

De manera que, para $B \subseteq G$ y $A \subseteq M$:

$$B' = \{m \in M \mid \forall g \in B : gIm\}$$

$$A' = \{g \in G \mid \forall m \in A : gIm\}$$

Con dichas definiciones, se cumplen las siguientes proposiciones:

Para $B, C \subseteq G$:

1. $B \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq B'$
2. $B \subseteq B''$
3. $B' = B'''$

De la misma manera, para $A, D \subseteq M$:

1. $A \subseteq D \Rightarrow D' \subseteq A'$

⁷Las letras G y M vienen del alemán Gegenstände (objetos) y Merkmale (características).

2. $A \subseteq A''$
3. $A' = A'''$

Al permutar las columnas y los renglones de la tabla correspondiente al contexto formal, cada concepto formal define un rectángulo máximo lleno de cruces, y cada uno de dichos rectángulos máximos corresponde a un concepto formal.

Los operadores doble prima «''», que nos llevan ya sea de conjuntos de objetos a conjuntos de objetos, o de conjuntos de atributos a conjuntos de atributos, son operadores de clausura ya que cumplen con ser:

Monotónicos:: $B \subseteq C \Rightarrow B'' \subseteq C''$

Extensivos:: $B \subseteq B''$

Idempotentes:: $B'''' = B''$

Diremos entonces, que un subconjunto de objetos $B \subseteq G$ es cerrado en (G, M, I) si $B = B''$; y que un subconjunto de atributos $A \subseteq M$ es cerrado en (G, M, I) si $A = A''$.

Un sistema cerrado sobre un conjunto M es una familia de conjuntos que incluye M y es cerrado bajo la intersección. Lo que significa que cuando M contiene dos conjuntos A y B , también debe incluir su intersección. Dado un operador de clausura, el conjunto de todas sus clausuras, es decir, el conjunto de todos los conjuntos cerrados con respecto al operador forma un sistema cerrado o de clausura (*closure system*).

1.2.2. Proceso de análisis para obtener conceptos, un ejemplo: Ejemplificaré el proceso del FCA analizando la tabla del Figura 1.2.1 que proporciona un contexto muy limitado para los planetas del Sistema Solar, tomado de (Davey y Priestley, 2002), quien a la vez lo toma de Wille.

El primer paso que deseamos dar es identificar los conceptos del contexto. Una primera exploración nos llevaría a tomar los primeros dos objetos: sea $B_1 = (\text{Mercurio}, \text{Venus})$, y observar que el conjunto de sus atributos compartidos es $B'_1 = (\text{pequeño}, \text{cerca})$. Al aplicar el segundo operador tenemos $B''_1 = (\text{Mercurio}, \text{Venus}, \text{Tierra}, \text{Marte})$ y que $B_1 \neq B''_1$. Es decir, el conjunto ordenado $D_1 = \langle (\text{Mercurio}, \text{Venus}), (\text{pequeño}, \text{cerca}) \rangle$ no es un concepto del contexto.

Tomemos ahora $B_2 = \{\text{Tierra}, \text{Marte}\}$,
entonces $B'_2 = \{\text{pequeño}, \text{cerca}, \text{sí} - \text{tiene} - \text{satélites}\}$
y $B''_2 = \{\text{Tierra}, \text{Marte}\}$ que es igual a B_2 .

Hemos encontrado un primer concepto:

$C_1 = \langle (\text{Tierra}, \text{Marte}), (\text{pequeño}, \text{cerca}, \text{sí} - \text{tiene} - \text{satélites}) \rangle$.

Y así, revisamos todos los subconjuntos del conjunto potencia de G . La exploración puede igualmente hacerse a partir de los atributos, por ejemplo, tomando $A_1 = (\text{mediano}, \text{lejos})$ y aplicando la conexión, observamos que $A'_1 = (\text{Urano}, \text{Neptuno})$

y que $A''_1 = (\text{mediano}, \text{lejos}, \text{tiene} - \text{satélites})$. Observamos que $A_1 \neq A''_1$ y por tanto $\langle A'_1, A_1 \rangle$ no es un concepto, pero $\langle A''_1, A_1 \rangle$ sí lo es, por la propiedad de idempotencia, que lleva al conjunto a un punto fijo, de manera que más aplicaciones del operador nos dejan en el mismo lugar. Se trata de un conjunto cerrado ante el operador.

	Tamaño			Distancia al Sol		Tiene satélites
	pequeño	mediano	grande	cerca	lejos	sí
Mercurio	x			x		
Venus	x			x		
Tierra	x			x		x
Marte	x			x		x
Júpiter			x		x	x
Saturno			x		x	x
Urano		x			x	x
Neptuno		x			x	x
Plutón	x				x	x

Figura 1.2.1. Contexto para el Sistema Solar. Aquí se asume que todos los objetos son planetas y se busca clasificarlos mediante tres clases de atributos. El atributo no tiene satélites queda implícito.

Hay varios algoritmos que nos permiten encontrar los conjuntos cerrados, es decir, los conceptos. Una de ellas es revisar cada uno de los subconjuntos propios de M , que son 2^M . Pero muy rápido la cantidad de cálculos nos rebasan. Los mejores algoritmos utilizan las propiedades del operador de clausura y órdenes particulares como el orden léxico reduciendo el número de operaciones necesarias. In-Close es uno de los algoritmos más rápidos para calcular conceptos formales de bases de datos medianas (entre 200 atributos y 10,000 objetos) (véase Andrews, 2009). Para Simon Andrews, la clave para lograr un cómputo eficiente es aprovechar los resultados previamente obtenidos, con un enfoque incremental a la clausura.

Los atributos que conforman M adquieren un orden lineal al ser insertados en una tabla y asignados la letra de una columna. Por ejemplo: $M = (a, b, c, d, e, f)$, donde diríamos que hay un orden entre estos elementos según la posición de las columnas: $M = \{m_1 < m_2 < \dots < m_n\}$. Este orden es posicional, aunque arbitrario en el sentido de que las columnas pueden reordenarse por ejemplo, según la cantidad de objetos relacionados a cada atributo, pero esto no es necesario. Al fijar un orden posicional podemos representar los subconjuntos de M como vectores característicos, colocando unos en las posiciones ocupadas, y ceros en las faltantes: $S \subset M$, $S = \{grande, lejos, satélite\} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$. El conjunto M será siempre mayor a todos sus subconjuntos propios.

Se dice entonces que un conjunto A es léxicamente más pequeño que B si el elemento más pequeño en el que A y B difieren (el que esté más a la izquierda) pertenece a B . Es decir, hay un atributo i contenido en B , pero no en A , tal que cada atributo estrictamente más pequeño que i pertenece tanto a B como a A , o a ninguno de los dos.

	a	b	c	d	e	f
Mercurio	x			x		
Venus	x			x		
Tierra	x			x		x
Marte	x			x		x
Júpiter			x		x	x
Saturno			x		x	x
Urano		x			x	x
Neptuno		x			x	x
Plutón	x				x	x

Figura 1.2.2. Contexto abreviado para el Sistema Solar.

Sea $A, B \subseteq M$, decimos que A es lécticamente más pequeño que B :

$$A < B \text{ si } \exists i (i \in B, i \notin A, \forall j < i (j \in A \Leftrightarrow j \in B))$$

Ejemplo:

$A = \{c, e, f\} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$ es lécticamente más pequeño que

$B = \{b, e, f\} = (0, 1, 0, 0, 1, 1)$ porque el primer elemento en el cual difieren, b , pertenece a B .

Encontraremos ahora los conceptos del contexto en el Figura 1.2.2 mediante el algoritmo *next closure*, que es más digerible que *in-close*, y que revisa los subconjuntos en orden léctico.

Input: Un operador de clausura $X \rightarrow X''$
 en un conjunto M ordenado linealmente
 y un subconjunto $A \subseteq M$.

Output: El siguiente conjunto cerrado en orden léctico
 después de A , si es que existe;

else: *null*.

$\forall m \in M$ en orden inverso

if $m \in A$ then
 $A := A \neg \{m\}$

else

$B := (A \cup \{m\})''$

if $B \neg A$ no contiene elementos menores que m then

return B

return *null*.

Llenaremos una tabla con las siguientes columnas: Última clausura, A , Atributo m , $A \cup \{m\}$, $B = (A \cup \{m\})''$, elemento nuevo más pequeño. En el primer renglón llamamos a la primera clausura, que es el primer conjunto de atributos cerrado en orden léxico, y que por lo general es el conjunto vacío. En este contexto, el conjunto vacío está cerrado. *Next closure* nos regresa en orden léxico el siguiente conjunto cerrado después del conjunto vacío, pasando por cada uno de los atributos, de mayor al menor (de derecha a izquierda), tratando de sumarlos al conjunto A . De manera que, siguiendo nuestro ejemplo, el primer atributo en m es f . La unión de ambos es $\{f\}$. Nos vamos entonces a encontrar B . Tomamos la unión del valor actual en A y m y calculamos la doble derivación. Al resultado le restamos el conjunto A y apuntamos el primer nuevo elemento en el que A y B difieren. Si ese valor es menor o igual que m , apuntamos B como última clausura, de lo contrario lo ignoramos y continuamos con el siguiente atributo m , revisando nuevamente si se encuentra incluido en el conjunto A del renglón anterior, para reiniciar el algoritmo. En la tabla de la Figura 1.2.2 seguimos este proceso, notando que hay algunas casillas vacías, esto sucede justamente cuando m ya ha sido trabajado. Entonces saltamos al siguiente subconjunto no trabajado, ahorrando muchos pasos de cálculo.

Las intenciones encontradas son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \emptyset \\
 A_2 &= \{f\} = \{\text{tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_3 &= \{e, f\} = \{\text{lejos, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_4 &= \{c, e, f\} = \{\text{grande, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_5 &= \{b, e, f\} = \{\text{mediano, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_6 &= \{a\} = \{\text{pequeño}\} \\
 A_7 &= \{a, f\} = \{\text{pequeño, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_8 &= \{a, e, f\} = \{\text{pequeño, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_9 &= \{a, d\} = \{\text{pequeño, cerca}\} \\
 A_{10} &= \{a, d, f\} = \{\text{pequeño, cerca, tiene} - \text{satélites}\} \\
 A_{11} &= M
 \end{aligned}$$

Una iteración al operador de derivación y encontramos las extensiones correspondientes de estos conjuntos, quedando los siguiente conceptos:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \langle B_1, A_1 \rangle = \langle G, \emptyset \rangle \\
 C_2 &= \langle B_2, A_2 \rangle = \langle \{T, Mar, J, S, U, N, P\}, \{\text{tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_3 &= \langle B_3, A_3 \rangle = \langle \{J, S, U, N, P\}, \{\text{lejos, tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_4 &= \langle B_4, A_4 \rangle = \langle \{J, S\}, \{\text{grande, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_5 &= \langle B_5, A_5 \rangle = \langle \{U, N\}, \{\text{mediano, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_6 &= \langle B_6, A_6 \rangle = \langle \{M, V, T, Mar, P\}, \{\text{pequeño}\} \rangle \\
 C_7 &= \langle B_7, A_7 \rangle = \langle \{T, Mar, P\}, \{\text{pequeño, tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_8 &= \langle B_8, A_8 \rangle = \langle \{P\}, \{\text{pequeño, lejos, tiene} - \text{satélites}\} \rangle \\
 C_9 &= \langle B_9, A_9 \rangle = \langle \{M, V, T, Mar\}, \{\text{pequeño, cerca}\} \rangle \\
 C_{10} &= \langle B_{10}, A_{10} \rangle = \langle \{T, Mar\}, \{\text{pequeño, cerca, tiene} - \text{satélites}\} \rangle
 \end{aligned}$$

Última	A	m	$Au\{m\}$	$B=(Au\{m\})''$	$B \rightarrow A$	Nuevo
\emptyset	\emptyset	f	{f}	{f}	{f}	f
{f}	\emptyset	e	{e}	{e,f}	{e,f}	e
{e,f}	{e}	f				
	\emptyset	e				
	\emptyset	d	{d}	{a,d}	{a,d}	a
	\emptyset	c	{c}	{c,e,f}	{c,e,f}	c
{c,e,f}	{c,e}	f				
	{c}	e				
	{c}	d	{c,d}	M	{a,b,d,e,f}	a
	\emptyset	c				
	\emptyset	b	{b}	{b,e,f}	{e,f}	e
{b,e,f}	{b,e}	f				
	{b}	e				
	{b}	d	{b,d}	M	{a,c,d,e,f}	a
	{b}	c	{b,c}	M	{a,c,d,e,f}	a
	\emptyset	b				
	\emptyset	a	{a}	{a}	{a}	a
{a}	{a}	f	{a,f}	{a,f}	{f}	f
{a,f}	{a}	f				
	{a}	e	{a,e}	{a,e,f}	{e,f}	e
{a,e,f}	{a,e}	f				
	{a}	e				
	{a}	d	{a,d}	{a,d}	{d}	d
{a,d}	{a,d}	f	{a,d,f}	{a,d,f}	{f}	f
{a,d,f}	{a,d}	f				
	{a,d}	e	{a,d,e}	M	{b,c,e,f}	b
	{a}	d				
	{a}	c	{a,c}	M	{b,c,d,e,f}	b
	{a}	b	{a,b}	M	{b,c,d,e,f}	b
M						

Figura 1.2.3. Tabla de procesos para obtener las intensiones del contexto del Sistema Solar.

$$C_{11} = \langle B_{11}, A_{11} \rangle = \langle \emptyset, M \rangle$$

1.2.3. Concepto-objeto y concepto-atributo. El *concepto-objeto* de $g \in G$, llamado $\gamma(g)$ es el concepto más pequeño (con menor número de objetos) que tenga g en su extensión. De igual manera, el *concepto-atributo* de m , se denota como $\mu(m)$, es el concepto más grande con m en su intensión.

Por ejemplo, tomemos $g_9 = \text{Plutón}$, una rápida exploración nos indica que el concepto $C_8 = \langle (P), (\text{pequeño}, \text{lejos}, \text{sí} - \text{tiene} - \text{satélites}) \rangle$ es el concepto de menor extensión que contiene al objeto Plutón, de manera que $C_8 = \gamma(g_9)$ es el concepto-objeto de plutón.

Tomemos ahora $g_3 = \text{Tierra}$, $g'_3 = (\text{pequeño}, \text{cerca}, \text{tiene} - \text{satélites})$, y vemos que $g_3 \neq g'_3$. Observamos entonces que el concepto con menos objetos, que contiene al objeto Tierra es $C_{10} = \langle (T, \text{Mar}), (\text{pequeño}, \text{cerca}, \text{sí} - \text{tiene} - \text{satélites}) \rangle$. $C_{10} = \gamma(g_3) = \gamma(g_4)$. C_{10} es el concepto-objeto de tanto del objeto Tierra, como del objeto Marte.

En la Figura 1.4.1 los nodos correspondientes a los *conceptos-objeto* muestran una etiqueta blanca correspondiente al objeto g en cuestión, mientras que los *conceptos-atributo* van acompañados por una etiqueta gris con el atributo en cuestión.

1.2.4. Sub-conceptos y supra-conceptos. Sean $\langle B_1, A_1 \rangle$ y $\langle B_2, A_2 \rangle$ dos conceptos formales de (G, M, I) , donde $B_1, B_2 \subset G$ y $A_1, A_2 \subset M$, decimos que $\langle B_1, A_1 \rangle$ es un subconcepto de $\langle B_2, A_2 \rangle$ si $B_1 \subseteq B_2$.

Es decir, para jerarquizar los conceptos solo es necesario comparar las extensiones, pues se puede deducir fácilmente que si $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow A_2 \subseteq A_1$, y que el inverso es también cierto: Si $A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow B_1 \subseteq B_2$.

Veamos: si $\langle B_1, A_1 \rangle$ es un concepto, entonces $B'_1 = A_1$, y B'_1 es el conjunto de todos los atributos compartidos por todos los objetos de B_1 , de igual manera, $B'_2 = A_2$. Tomemos un atributo de A_2 , que es compartido por todos los objetos de B_2 , pero $B_1 \subseteq B_2$, esto quiere decir que este atributo también es compartido por los objetos de B_1 y por tanto lo encontramos en A_1 . Esto prueba que cada atributo de A_2 es parte de A_1 , y por tanto si

$$A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow B_1 \subseteq B_2.$$

La inversa también es demostrable. De manera que, un concepto es subconcepto de otro:

$$\langle B_1, A_1 \rangle \leq \langle B_2, A_2 \rangle$$

si

$$B_1 \subseteq B_2 \Leftrightarrow A_2 \subseteq A_1$$

Esta relación es una relación de orden que cumple, como veremos a continuación, con las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

1.3. Orden, jerarquía y retículos

La tendencia humana a encontrar orden en el mundo es tan natural que a veces la pasamos desapercibida. Sin embargo, constantemente estamos comparando y ordenando no sólo objetos, sino clases de objetos, conceptos y categorías. El Sol es más grande que la Tierra, ésta es mayor que la Luna y la Luna es mayor que la manzana; dos hermanos tienen la misma madre; $22/7$ es una peor aproximación a π que 3.141592654 , A es más informativo que B . . . Nociones de progresión, precedencia y preferencia son todas nociones de orden y son estudiadas por la teoría del Orden.

Un conjunto P se encuentra parcialmente ordenado si la relación que se da entre sus elementos cumple con las propiedades de antisimetría, reflexividad, y transitividad.⁸

Es decir, si tiene una relación binaria \leq tal que para todas $x, y, z \in P$ se cumple:

1. $x \leq x$, (reflexividad)
2. $x \leq y$, y $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetría)
3. $x \leq y$, y $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividad).

Escrito esto en términos de conceptos formales:

1. $(B_1, A_1) \leq (B_1, A_1)$
2. $(B_1, A_1) \leq (B_2, A_2)$ y $(B_2, A_2) \leq (B_1, A_1) \Rightarrow (B_1, A_1) = (B_2, A_2)$
3. $(B_1, A_1) \leq (B_2, A_2) \leq (B_3, A_3) \Rightarrow (B_1, A_1) \leq (B_3, A_3)$

Los conjuntos parcialmente ordenados son comúnmente llamados posets (por sus siglas en inglés) y se les denota como $(P; \leq)$. La teoría del orden estudia las propiedades de las distintas clases o familias de conjuntos ordenados y sus morfismos, mapeos que preservan de alguna manera la estructura de los posets, ya sea mediante isomorfismos, embebiendo el orden o simplemente preservando el orden (monotónicas).

1.3.1. Retículos a partir de ínfimos y supremos. En particular, interesan las propiedades de los conjuntos ordenados no vacíos y finitos que cuentan con un elemento supremo y otro ínfimo. Estos conjuntos son conocidos como retículos (*lattices*), y muchas de sus propiedades pueden ser expresadas en términos de sus límites superiores e inferiores. Pensemos en un subconjunto S de un conjunto ordenado P , como podría ser un intervalo cerrado y acotado del conjunto de los números reales \mathbb{R} . Un elemento $x \in P$ es una cota superior de S si para toda $s \in S$, $s \leq x$. De igual manera, x es una cota inferior de S si para toda $s \in S$, $s \geq x$. El conjunto de todas las cotas superiores de S se denota como S_u y el conjunto de

⁸Aquí algunas propiedades de las relaciones:

Biyección.: Todo objeto del dominio está relacionado con el codominio de forma unívoca.

Reflexividad.: Todo objeto del campo está relacionado consigo mismo.

Simetría.: Para todo par, el par converso está también en la relación.

Transitividad.: La relación se «hereda»; siempre que un objeto esté relacionado con otro y éste lo esté con un tercero, el primero también está relacionado con el tercero.

Intransitividad.: No hay ninguna secuencia de pares transitivos.

Conexión.: Cualesquiera dos objetos del campo diferentes están relacionados, en un sentido u otro (o en los dos).

Equivalencia.: La relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

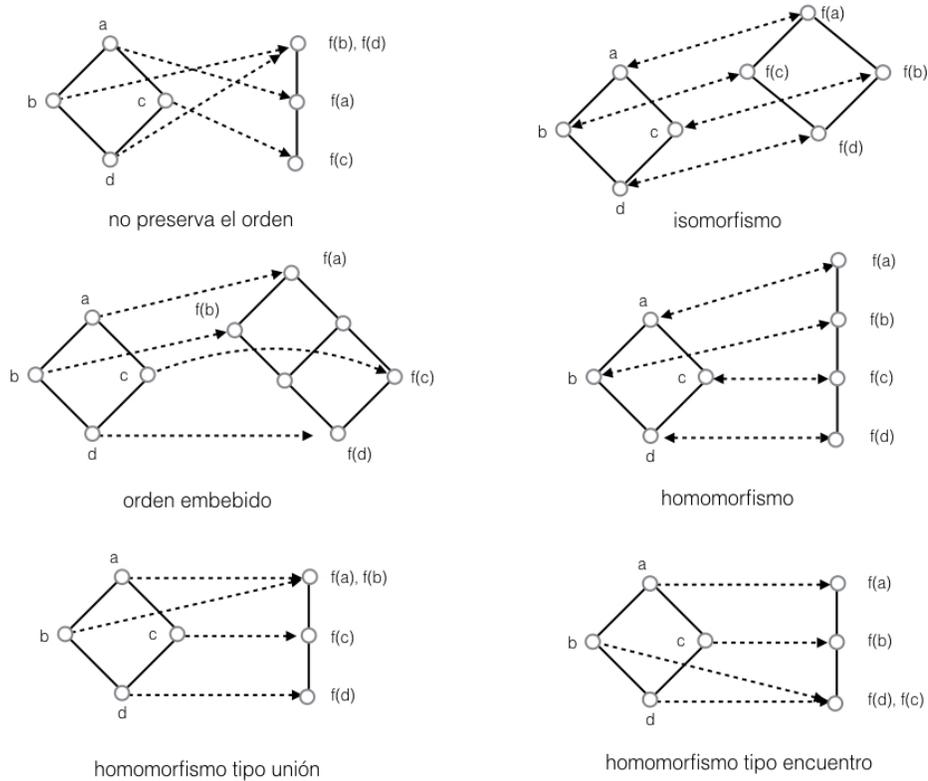


Figura 1.3.1. Ejemplos de morfismos. Diagramas adaptados a partir de los presentados en (Davey y Priestley, 2002, p. 24) y (Grätzer, 1978, p.17)

todas las cotas inferiores como S_ℓ . El elemento supremo de S ($\vee S$) será la menor de las cotas superiores de S_u ; y el elemento ínfimo de S ($\wedge S$) será el mayor de las cotas inferiores de S_ℓ . Cuando existen, estos elementos son únicos.

El mayor de los subconceptos comunes o ínfimo se define como:

$$(B_1, A_1) \wedge (B_2, A_2) := ((B_1 \cap B_2), (A_1 \cup A_2)'')$$

El menor de los superconceptos o supremo se define como:

$$(B_1, A_1) \vee (B_2, A_2) := ((B_1 \cup B_2)'', (A_1 \cap A_2))$$

Podemos pensar en subconjuntos S de P de tan solo dos elementos $\{x, y\}$ y buscar sus ínfimos y supremos, que pueden vivir, no necesariamente en S , sino en P . De existir, a estos elementos se les conoce también como “unión” o “join” ($x \vee y$) y “encuentro” o “meet” ($x \wedge y$).

$$x \vee y = \sup \{x, y\}$$

$$x \wedge y = \inf \{x, y\}$$

Join y *meet* son a la vez operaciones binarias que se aplican a pares de elementos de P y que son mapeados en P . Estas operaciones binarias tienen las propiedades de idempotencia, conmutatividad, asociatividad y de absorción, y conforman por tanto un álgebra. El definir los retículos de esta manera nos permite aplicarles los conceptos y metodologías del álgebra universal.

Tenemos entonces, las siguientes dos definiciones:

Sea P un conjunto ordenado no vacío,

1. Si $(x \vee y)$ y $(x \wedge y)$ existen para toda $x, y \in P$, entonces P es un retículo.
2. Si $\vee S$ y $\wedge S$ existen para toda $S \subseteq P$, entonces P es un retículo completo.

De maneja que debe existir un elemento en P mayor a todos los elementos de S .

Todo retículo finito es necesariamente un retículo completo. Por ejemplo, los números naturales no conforman un retículo completo porque no existe un número natural que sea mayor que todos (no hay un supremo). En cambio, el intervalo real cerrado $([0, 1], \leq)$ sí es un retículo completo.

La Figura 1.3.2 muestra tres ejemplos de conjuntos ordenados que no son retículos puesto que 1) no se cumple para algunas x y y . Veamos el tercer caso, donde el conjunto de las cotas superiores de b es $\{e, g, h, \top\}$ y el de c es $\{d, f, g, h, \top\}$ y su intersección es el conjunto de las cotas superiores de b y c : $\{b, c\}'' = \{g, h, \top\}$. Las cotas mínimas son $\{g, h\}$, y como no es única, entonces $b \vee c$ no existe, por lo que el tercer diagrama no es un retículo.

1.3.2. Teorema básico del FCA.⁹ El teorema básico del FCA se divide en dos partes: la primera, nos dice que el retículo conceptual $\mathfrak{R}(G, M, I)$ de cualquier contexto formal es siempre un retículo completo L ; la segunda, que todo retículo completo es en cierto sentido un retículo conceptual de algún contexto formal.

Veamos la primera parte:

Sea $\mathfrak{R}(G, M, I)$ un retículo conceptual del contexto (G, M, I) , entonces el supremo y el ínfimo son:

$$\bigvee_{t \in T} (B_t, A_t) := \left(\left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'', \bigcap_{t \in T} A_t \right) (\text{supremo})$$

$$\bigwedge_{t \in T} (B_t, A_t) := \left(\bigcap_{t \in T} B_t, \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'' \right) (\text{ínfimo})$$

para todo $\{(B_t, A_t) \mid t \in T\} \subseteq \mathfrak{R}(G, M, I)$

Con estas nociones, podemos obtener subconjuntos de elementos distinguidos del retículo L .

⁹Véase (Ganter y Stumme, 2002)

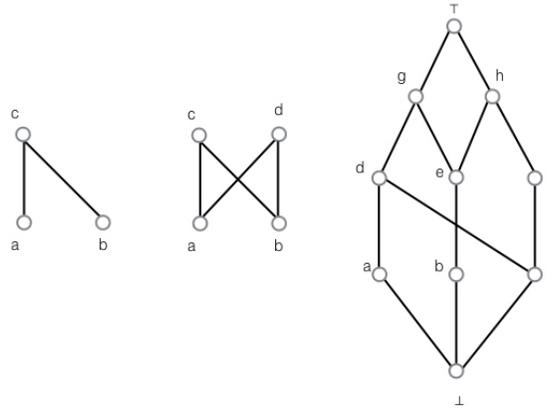


Figura 1.3.2. Diagramas de conjuntos parcialmente ordenados que no son retículos. En el tercer diagrama observamos que el conjunto de las cotas superiores de b es $\{ e, g, h, T \}$ y el de c es $\{ d, f, g, h, T \}$. Su intersección es el conjunto de las cotas superiores de b y c : $\{ b, c, \}$ $u = \{ g, h, T \}$. La menor de las cotas de $\{ g, h, T \}$ no es única y por tanto el supremo de b y c ($b \vee c$) no existe.

Un elemento $x \in L$ será **unión-irreducible** (*join-irreducible*, o \vee -irreducible, o *supremo-irreducible*) si $a < x$ y $b < x$ implica $a \vee b < x$ para todo $a, b \in L$. Esto es, que no puede ser representada como el supremo de elementos estrictamente menores. La noción de **encuentro-irreducible** (o *meet-irreducible*, o \wedge -irreducible, o *ínfimo-irreducible*) se define a la inversa.

En cierto sentido, no se necesitan todos los elementos de un retículo si se tienen las operaciones de ínfimo y supremos, pues se pueden reconstruir ciertos elementos a partir de otros utilizando estas dos operaciones, pero esto no se puede hacer para los elementos irreducibles.

Un conjunto $C \subseteq P$ es llamado **denso por supremos** si para todo elemento $c \in C$ existe un retículo $C_1 \subseteq C$ tal que $c = \vee C_1$.

Estos conceptos nos ayudarán a dibujar el retículo, pues los elementos *unión-irreducible* cubren exactamente a un solo elemento, mientras que los elementos tipo *encuentro-irreducible* son cubiertos por exactamente un solo elemento.

1.3.3. Relación de dominación. Sea P un conjunto ordenado y sean x y $y \in P$, decimos que y domina a x , simbolizado como $(y \succ x)$, si $x < y$ y no exista $z \in P$ tal que $x < z < y$. Una colección ordenada por una relación de dominación o cobertura es una jerarquía. Una jerarquía puede ligar entidades directa o indirectamente de manera vertical u horizontal. Las ligas indirectas pueden extenderse verticalmente, ya sea hacia abajo o hacia arriba vía múltiples nodos que interconectan un camino.

Retomemos nuestro ejemplo de los planetas, enlistando aquí los once conceptos obtenidos, donde los nodos $\langle B_1, A_1 \rangle$ y $\langle B_{11}, A_{11} \rangle$ corresponden respectivamente a los nodos *supremo* e *ínfimo* (*top* y *bottom*) del retículo:

$$\begin{aligned}
\langle B_1, A_1 \rangle &= \langle G, \emptyset \rangle \\
\langle B_2, A_2 \rangle &= \langle \{T, Mar, J, S, U, N, P\}, \{tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_3, A_3 \rangle &= \langle \{J, S, U, N, P\}, \{lejos, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_4, A_4 \rangle &= \langle \{J, S\}, \{grande, lejos, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_5, A_5 \rangle &= \langle \{U, N\}, \{mediano, lejos, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_6, A_6 \rangle &= \langle \{Mer, V, T, Mar, P\}, \{pequeño\} \rangle \\
\langle B_7, A_7 \rangle &= \langle \{T, Mar, P\}, \{pequeño, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_8, A_8 \rangle &= \langle \{P\}, \{pequeño, lejos, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_9, A_9 \rangle &= \langle \{Mer, V, T, Mar\}, \{pequeño, cerca\} \rangle \\
\langle B_{10}, A_{10} \rangle &= \langle \{T, Mar\}, \{pequeño, cerca, tiene - satélites\} \rangle \\
\langle B_{11}, A_{11} \rangle &= \langle \emptyset, M \rangle
\end{aligned}$$

y los ordenaremos mediante la definición de subconcepto:

$$(\langle B_i, A_i \rangle \geq \langle B_j, A_j \rangle) \Leftrightarrow (B_i \supseteq B_j) \Leftrightarrow (A_i \subseteq A_j)$$

Como resultado en nuestro ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle B_1, A_1 \rangle &\geq \langle B_2, A_2 \rangle \geq \langle B_3, A_3 \rangle \geq \langle B_4, A_4 \rangle \geq \langle B_{11}, A_{11} \rangle \\
\langle B_1, A_1 \rangle &\geq \langle B_6, A_6 \rangle \geq \langle B_7, A_7 \rangle \geq \langle B_8, A_8 \rangle \geq \langle B_{11}, A_{11} \rangle \\
\langle B_2, A_2 \rangle &\geq \langle B_7, A_7 \rangle \geq \langle B_{10}, A_{10} \rangle \\
\langle B_3, A_3 \rangle &\geq \langle B_5, A_5 \rangle \geq \langle B_{11}, A_{11} \rangle \\
\langle B_3, A_3 \rangle &\geq \langle B_8, A_8 \rangle \\
\langle B_6, A_6 \rangle &\geq \langle B_9, A_9 \rangle \geq \langle B_{10}, A_{10} \rangle \geq \langle B_{11}, A_{11} \rangle
\end{aligned}$$

Podemos ver que son 16 los símbolos \geq , cada uno será representado por una línea, y cada concepto por un nodo. Con esta información procedemos a dibujar nuestro diagrama.

1.4. Diagramas y visualizaciones interactivas

El camino para dibujar los diagramas es el siguiente:

Sea P un conjunto finito ordenado, podemos representar P a partir de una configuración de nodos (que representan los elementos de P) y líneas que interconectan a los nodos, indicando la relación de dominación.

1. A cada punto $x \in P$, asociamos un punto $p(x)$ del plano euclidiano \mathbb{R}^2 (en coordenadas cartesianas), indicado por un pequeño círculo centrado en $p(x)$.
2. Para cada par $(y \rightarrow x)$, en P , tomamos un segmento de línea $\ell(x, y)$ uniendo al círculo en $p(x)$ con el círculo en $p(y)$.

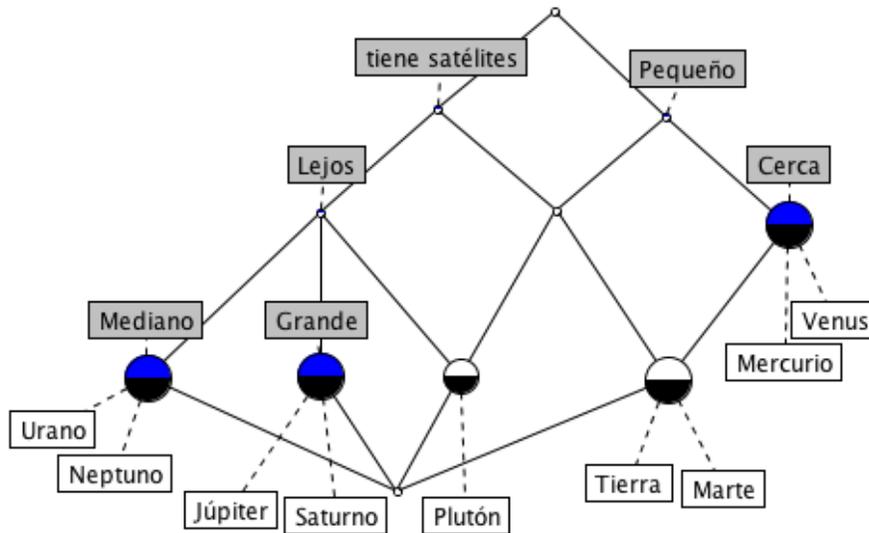


Figura 1.4.1. Retículo de los planetas, un clásico del FCA. Las etiquetas grises refieren a los atributos y se colocan sobre los nodos tipo *concepto-atributo*. Las etiquetas blancas refieren a los planetas y son colocadas sobre nodos de mayor tamaño tipo *conceptos-objeto*. El color azul marca los *conceptos-objeto* que son además tipo *encuentro-irreductible*, es decir que están cubiertos solamente por un nodo.

3. Se continúa con ese proceso de tal forma que si $(y \mapsto x)$, entonces $p(x)$ está más abajo que $p(y)$ de manera que el círculo en $p(z)$ no se interseque con la línea $\ell(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración que satisfaga 1, 2 y 3 es llamado un diagrama de Hasse. Un retículo es una red ordenada con un elemento supremo y otro ínfimo, y se representa gráficamente mediante diagramas de Hasse (nodos y líneas). No todos los diagramas de Hasse conforman un retículo, pues, como ya vimos, debe cumplirse la condición de que *join* y *meet* existan. Los nodos *top* y *bottom* se dibujan en los extremos superior e inferior.

Iniciamos el dibujo hasta arriba del diagrama con el nodo supremo que pudiéramos etiquetar como G . Trabajar hacia abajo de la lista de *Extensiones* dada en el inciso anterior. Para cada concepto C_i en la lista, agregar un nuevo nodo al diagrama posicionándolo adecuadamente. Debajo del punto correspondiente a C_i , enlistar los elementos de C . Si C_i es un *concepto-atributo* $C_i = m'$, agregar la etiqueta m arriba del punto correspondiente a C_i . El

diagrama se dibuja y redibuja en cada iteración, agregando las etiquetas g y m . Para cada objeto g de G , agregar una etiqueta g debajo del nodo en el diagrama, el cual tiene la extensión mínima conteniendo el objeto g . Utilizar el teorema fundamental para revisar los resultados. Revisar que cada elemento tipo *unión-irreducible* tenga una etiqueta $g \in G$. Revisar que cada elemento tipo *encuentro-irreducible* tenga una etiqueta $m \in M$. Revisar que $(\forall g \in G)$ y $(\forall m \in M) gIm \iff g \leq m$ checando que $\forall m \in M$ el conjunto de etiquetas de objetos en m es exactamente la extensión de atributos m' .¹⁰

En la Figura 1.4.1 cada nodo representa un concepto encontrado. Los nodos grandes divididos en dos representan *conceptos-objeto*, identificados mediante las etiquetas blancas que indican los objetos contenidos. Los *conceptos-atributo* están señalados con la etiqueta gris. El color azul señala que el concepto es de ambos tipos, es decir, que el objeto tiene atributos que son nuevos o que sólo le pertenecen a ese objeto y sus descendientes. El número de objetos que contiene un concepto-objeto se indica codificando el tamaño del nodo.

Una de las características más atractivas de los retículos es que sus propiedades pueden ser analizadas computacionalmente y codificadas gráficamente. El FCA ha desarrollado múltiples algoritmos que pueden aplicarse para obtener los conjuntos de conceptos de un contexto, construir los retículos, actualizar los contextos, asignar etiquetas, etc. Varios de estos se presentan en el libro *Concept Data Analysis* (Carpineto y Romano, 2004) y han sido incorporados en aplicaciones computacionales como *Toscana*. En esta investigación he trabajado con el explorador de conceptos *Conexp 1-3* desarrollado por *The Apache Software Foundation*, que ofrece una tabla para ser llenada, calcula y visualiza los retículos de manera que los nodos pueden acomodarse manualmente, hace cálculos de implicaciones y asociaciones, y permite exportar imágenes fijas.

1.5. Proceso de visualización

Con el apoyo de Arturo Espinosa, revisamos varios exploradores de conceptos basados en FCA, escritos en lenguaje Java. Encontramos que *conexp-ng* (*Concept Explorer-New Generation*) cumple con su propósito esencial y las responsabilidades se encuentran mejor separadas que en otros exploradores gracias a una mejor jerarquía de clases pero con algoritmos incorrectos. Otra alternativa era *conexp-clj*, escrito en *clojure*,¹¹ que permite identificar más fácilmente los objetos y algoritmos propios del FCA, pero fue descartado ya que encontramos que los algoritmos que generan las etiquetas no eran correctos.¹² Ninguno de los exploradores de conceptos revisados cuenta con opciones necesarias para hacer visualizaciones de mayor nivel, por ejemplo, que codifique clases de conceptos. No cuenta con la opción de cargar archivos *csv*, mientras que solo exporta archivos *svg*, *png* y *cex* (*XML*). Son representaciones netamente visuales de la información pero no contiene información semántica. El archivo *cex* tiene los extremos, el input y el output, con las coordenadas del grafo final, pero no tiene los conceptos formales inferidos, necesarios para hacer visualizaciones interactivas.

¹⁰Véase también (Davey y Priestley, 2002).

¹¹<https://clojure.org/>

¹²Esto se encuentra explicado en <https://github.com/fcatools/conexp-ng/issues/158>

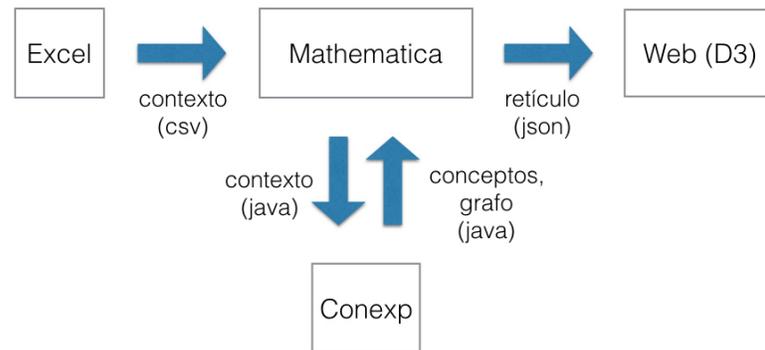


Figura 1.5.1. Diagrama de flujo para procesar un contexto desde archivos tipo excel a visualizaciones interactivas en D3 utilizando Mathematica y Conexp.

Esta situación se resolvió al trabajar de manera modular y utilizando la biblioteca del *conexp 1.3*.¹³

El proceso es el siguiente: Se conforma un contexto en una hoja de cálculo convencional que se exporta a formato *csv*. Después se ejecuta un script en *Mathematica 11*, el cual carga el contexto del *csv* e invoca la funcionalidad interna de *conexp* con estos insumos. Esta funcionalidad corresponde a los algoritmos básicos de FCA que hemos recorrido, y también aplica algunos otros la asignación de clases de conceptos. Los datos resultantes se escriben finalmente en un archivo *json* para pasar a la parte de la visualización. Esto también puede escribirse en *Python* con software libre como *Jupyter*.¹⁴ El *json* se usa como insumo para generar una visualización interactiva en una página web basada en *D3 (Data Driven Documents)*.¹⁵ La carpeta web contiene también documentos en *html*, instrucciones de estilo en *css*, archivos *csv* con tablas de información adicional y los scripts en *D3* que son los que generan la visualización gráfica.¹⁶

El archivo *json* contiene la información del contexto, los nodos, los atributos, los objetos, las clases, las etiquetas y los niveles. El trazo de diagramas es una labor artesanal, de hecho es un problema matemático no resuelto; puede pasar uno algunas horas arreglando la configuración de nodos, y codificando el diseño, pues al hacer modificaciones en el contexto, las redes se colapsan y es necesario volver a arreglarlas manualmente. Este es un esfuerzo no trivial, dar un orden estético y significativo a las redes se complica mucho al trabajar en contextos extensos. Este es un problema que se puede mitigar con mayor programación y desarrollo de software.

¹³<http://conexp.sourceforge.net/>

¹⁴<https://jupyter.org/>

¹⁵<https://d3js.org/>

¹⁶remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium/codigo

Las visualizaciones resultantes pueden consultarse en la página web del Seminario de representación y modelización del conocimiento científico (REMO) de la UAM-C, donde también se incluyen los *scripts* mencionados.¹⁷

1.6. Implicaciones y modelos en el FCA

Los siguientes apartados están basados en los apuntes tomados del curso *Introduction to Formal Concept Analysis*, impartido en línea vía *Cusera* por Sergei Obiedkov de la *National Research University Higher School of Economics*, así como en (Ganter y Wille, 1999) y (Ganter y Stumme, 2002), y están dirigidos a asentar nociones muy importantes tanto en el FCA como en la filosofía de la ciencia, los cuales referiremos nuevamente en el capítulo 2, pero desde otra perspectiva.

Una implicación sobre el conjunto de atributos M en un contexto formal (G, M, I) , es una condición simple de la forma $A \rightarrow B$ (A implica B), donde A es la premisa y B es la conclusión, y $A, B \subseteq M$. Las implicaciones pueden o no ser verdaderas o consistentes con respecto a los datos. Además, las implicaciones son transitivas, esto es, si $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$, entonces $A \rightarrow C$. Encontrar las implicaciones consistentes en nuestros datos es una tarea importante en el FCA.

Un subconjunto N de M satisface la implicación $A \rightarrow B$ si siempre que sucede A , sucede B . Decimos entonces que N es un modelo de la implicación si A no está contenido en N o si B está contenido en N :

$$N \models A \rightarrow B \text{ si } A \not\subseteq N \text{ o } B \subseteq N.$$

También se dice que N respeta la implicación $A \rightarrow B$ o que N satisface la implicación.

N es un modelo de un conjunto de implicaciones \mathcal{L} si N es un modelo para toda implicación de dicho conjunto:

$$N \models \mathcal{L}$$

si para toda

$$A \rightarrow B \in \mathcal{L} : \{N \models A \rightarrow B\}.$$

Decimos que una implicación es válida en el contexto (G, M, I) si para todos los objetos de G se cumple que g' es un modelo de $A \rightarrow B$. Ésta es una implicación de atributos; de forma similar se puede definir una implicación de objetos, pero es menos útil.

Hay tres formas de verificar si para todo $g \in G$, $g' \models A \rightarrow B$:

1. Repasar todas las intenciones g' y checar que son todos modelos de la implicación. Para que la intención de un objeto sea un modelo de $A \rightarrow B$, es suficiente que $g' \not\subseteq A$, o $B \subseteq g'$.
2. Calcular A'' y checar que $B \subseteq A''$. A'' es el conjunto de todos los atributos compartidos por los objetos de A' ; pero los objetos de A' tienen los atributos B . Por lo que este conjunto de atributos B debe estar entre aquellos compartidos por todos los atributos de A' .

¹⁷remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium

3. Revisar que $A' \subseteq B'$. Decir $B \subseteq A''$ es lo mismo que decir que $A' \subseteq B'$ porque B' es el conjunto de todos los objetos que tienen todos los atributos de B . Y sabemos que todos los objetos de A' tienen atributos de B , por lo que los objetos de A' están entre aquellos de B' .

Sea \mathcal{L} un conjunto de implicaciones, decimos que $A \rightarrow B$ se sigue (semánticamente) de \mathcal{L} si cuando tenemos un modelo de \mathcal{L} , debe ser también un modelo de $A \rightarrow B$. Para checar si $\mathcal{L} \models A \rightarrow B$ sin considerar todos los subconjuntos de M definimos otro operador de clausura $\mathcal{L}(X)$.

Sea $X \subseteq M$, $\mathcal{L}(X)$ es la intersección de todos los modelos Y de \mathcal{L} que incluyen X .

$$\mathcal{L}(X) := \cap \{Y \mid X \subseteq Y \subseteq M, Y \models \mathcal{L}\}.$$

Una definición equivalente para conjuntos finitos de M es:

$$X^{\mathcal{L}} := X \cup \{B \mid A \rightarrow B \in \mathcal{L}, A \subseteq X\}$$

$X^{\mathcal{L}}$ es un conjunto que incluye a X y algunos atributos adicionales. De manera que cuando \mathcal{L} contiene una implicación $A \rightarrow B$ de tal forma que $A \subseteq X$, incluimos B en dicho conjunto. Entonces definimos $\mathcal{L}(X)$ de la forma:

$$\mathcal{L}(X) := X^{\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}\dots}$$

y aplicamos este operador hasta que obtengamos el mismo valor, es decir, lleguemos a un punto fijo.

Utilicemos $\mathcal{L}(X)$ para revisar si $A \rightarrow B$ es una consecuencia de \mathcal{L} (si se sigue semánticamente de \mathcal{L}). Para ello demostramos que $\mathcal{L} \models X \rightarrow Y \Leftrightarrow Y \subseteq \mathcal{L}(X)$.

Demostración de ida: $\mathcal{L} \models X \rightarrow Y \Rightarrow Y \subseteq \mathcal{L}(X)$

Supongamos lo contrario:

$$Y \not\subseteq \mathcal{L}(X)$$

$$\Rightarrow \exists Z : Z \models \mathcal{L}, X \subseteq Z, Y \not\subseteq Z$$

$$\Rightarrow Z \not\models X \rightarrow Y$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \not\models X \rightarrow Y$$

Utilizando la primera definición $\mathcal{L}(X) := \cap \{Y \mid X \subseteq Y \subseteq M, Y \models \mathcal{L}\}$, podemos ver que hay un modelo de \mathcal{L} que contiene X pero que no contiene Y . De manera que hay un modelo Z tal que Z es modelo de \mathcal{L} que contiene X pero no contiene Y . Pero entonces Z viola la implicación $X \rightarrow Y$ porque contiene X pero no contiene Y . De manera que no es un modelo de $X \rightarrow Y$. Es decir, encontramos un modelo del conjunto \mathcal{L} que viola la implicación $X \rightarrow Y$. Lo que significa que \mathcal{L} no es un modelo de $X \rightarrow Y$. Lo cual contradice nuestra hipótesis.

Demostración de vuelta: $\mathcal{L} \models X \rightarrow Y \Leftarrow Y \subseteq \mathcal{L}(X)$

Supongamos que $Y \subseteq \mathcal{L}(X)$

$$\Rightarrow \text{para toda } Z \text{ que cumpla } X \subseteq Z \text{ con } Z \models \mathcal{L} \text{ tenemos que } Y \subseteq Z$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \models X \rightarrow Y.$$

Con esto, si queremos revisar si $X \rightarrow Y$ se sigue de \mathcal{L} , podemos computar la clausura de X bajo las implicaciones de \mathcal{L} y revisar si Y es un subconjunto de esta clausura.

1.6.1. Redundancia en las implicaciones y bases de implicaciones. Cuando tenemos un contexto formal y queremos calcular su conjunto de implicaciones, generalmente no

queremos ver todas las implicaciones que se pueden derivar, sino sólomente un pequeño subconjunto de implicaciones válidas a partir del cual podemos deducir todas las implicaciones que le siguen. A esto se le llama una base de implicaciones.

Tomemos, por ejemplo un contexto que no tiene ningún objeto; por tanto, no contiene ningún contra-ejemplo a ninguna implicación en la que podamos pensar, y por tanto todas las implicaciones son válidas en este contexto.

$$G = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{si } A'' = M \text{ para todos los subconjuntos de } M, A \subseteq M,$$

$$\Rightarrow A \rightarrow B \text{ para todos los } A \subseteq M, B \subseteq M,$$

Si M contiene n atributos, entonces hay 2^{2^n} implicaciones en este contexto (2^n para A y 2^n para B). Lo interesante aquí es que todas ellas se siguen de una sola implicación: $\emptyset \rightarrow M$.

Una base de implicaciones deberá satisfacer tres condiciones:

1. Ser sólida (que incluya solamente implicaciones válidas).

$$\text{Si } A \rightarrow B \in \mathcal{L} \Rightarrow (G, M, I) \models A \rightarrow B.$$

2. Ser completa.

$$\text{Si } (G, M, I) \models A \rightarrow B \Rightarrow \mathcal{L} \models A \rightarrow B.$$

3. Ser no-redundante.

Si $A \rightarrow B \in \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{L} \setminus \{A \rightarrow B\}$ para todo $A \rightarrow B$. Una base de implicaciones es no redundante si no es posible remover una implicación de ella sin perder la segunda propiedad de completud.

También podemos remplazar la condición $(G, M, I) \models A \rightarrow B \Leftrightarrow B \subseteq A''$ en las primeras dos condiciones y obtener la definición de una base de implicación para un contexto formal. Como veremos en el Capítulo 2, una base axiomática consistente, independiente y completa de una teoría es una base de implicaciones como se le ha definido aquí.

Pueden existir varias bases de implicaciones correspondientes al mismo operador de clausura, varios conjuntos de implicaciones que sean sólidas, completas y no-redundantes, pero existe una manera de obtener una base canónica, es decir, una base cuyo número de implicaciones es mínimo. A esta base se le conoce también como la base de Duquenne-Guigues (Guigues y Duquenne, 1986). Para calcularla requerimos los conceptos de conjunto pseudo-cerrado y pre-cerrado.

Un conjunto **pseudo-cerrado** es un conjunto que no está cerrado, pero que de alguna manera se comporta como si lo estuviera, pues debe contener la clausura de cada uno de sus propios subconjuntos pseudo-cerrados.

Sea $X \rightarrow X''$ un operador de clausura en un conjunto finito M , Un subconjunto P de M es pseudo-cerrado si

1. $P \neq P''$.

2. Para cada subconjunto pseudo-cerrado Q de P , tenemos que $Q'' \subseteq P$.

Esta definición puede parecer circular, pero nótese que nos referimos solamente a los subconjuntos propios de P , y que si P no contiene subconjuntos, entonces la segunda condición de la definición corresponde al conjunto vacío. También puede suceder que los subconjuntos de P sean todos cerrados. En estos casos, no pueden ser pseudo-cerrados, dada la primera condición. Dicho de otra manera, si todos los subconjuntos propios de P son cerrados, y P no

es cerrado, entonces se trata de un conjunto pseudo-cerrado. Esta definición, como veremos más adelante se aplica de forma inductiva.

De manera que la base canónica \mathcal{L} es

$$\mathcal{L} = \{P \rightarrow P'' \mid P - \text{es-pseudo} - \text{cerrado}\}.$$

Algunas veces también se escribe $\mathcal{L} = \{P \rightarrow P'' \setminus P \mid P - \text{es-pseudo} - \text{cerrado}\}$.

Es posible demostrar que la base canónica para un conjunto finito M y el operador de clausura «"» es sólida, completa y no-redundante.

Aunque la base canónica sea mínima, puede contener una gran cantidad de implicaciones y los pasos para calcularla pueden extenderse mucho, por lo que requerimos identificar algunas circunstancias en las que nos podemos saltar algunos pasos.

Un conjunto $Q \subseteq M$ está pre-cerrado si sus subconjuntos propios se encuentran pre-cerrados. Entonces la clausura de S debe estar contenida en Q . $S'' \subseteq Q$.

Esta definición también parece ser circular, pero esto no es un problema, ya que se procede de manera inductiva, iniciando con el conjunto vacío.

Otra forma de esta definición es:

Un conjunto $Q \subseteq M$ es pre-cerrado si Q es cerrado o si $P \subseteq Q$ es pseudo-cerrado y $P'' \subseteq Q$.

Cuando tenemos un subconjunto P , propio de Q , y que a la vez es pseudo-cerrado, entonces su clausura debe estar contenida en Q .

Lo interesante de conjuntos precerrados es que forman en sí mismos un sistema de clausura. Un sistema distinto al operador de clausura «"», para el cual estos conjuntos están precerrados, y que llamaremos $\mathcal{L}^*(X)$, corresponde al superconjunto pre-cerrado más pequeño de X .

Aclararemos estas nociones calculando la base de implicaciones de nuestro contexto de planetas paso a paso y en orden léxico, iniciando con $A = \emptyset$.

Iniciamos con el conjunto de atributos vacío, que siempre es precerrado y continuamos la exploración de nuestro contexto, recorriendo los subconjuntos propios de M en orden léxico, iniciando con el último de los atributos. Al encontrarnos con un conjunto de atributos no cerrado, en este caso el primero en aparecer es $\{e\}$, y observamos que su único subconjunto es el vacío, que es cerrado, por lo que le damos el estatus de pseudo-cerrado. Lo mismo sucede con el conjunto $\{d\}$. Al llegar al conjunto $\{d, f\}$ que no es cerrado, nos encontramos con la situación de que uno de sus subconjuntos $\{d\}$ es ya pseudo-cerrado. Por lo que este subconjunto A de M no está pre-cerrado y por tanto no nos sirve. Así sucederá con todos los conjuntos A no cerrados que tengan a e o d como subconjuntos, por lo que nos los saltamos. Tampoco nos interesarán los subconjuntos cerrados, porque estamos buscando aquellos que son pseudo-cerrados. Utilizando este criterio, del total de subconjuntos propios de M es $2^M = 2^6 = 64$, solamente necesitamos verificar el estatus de 8 subconjuntos (el subconjunto $\{d, f\}$ solo lo computamos para ejemplificar). Así, la base canónica del segundo contexto de planetas está compuesta por las implicaciones $A \rightarrow A''$ donde A es pseudo-cerrado. En este caso, dentro del contexto del Sistema Solar,

$$L = (e \rightarrow e, f), (d \rightarrow a, d), (c \rightarrow c, e, f), (b \rightarrow b, e, f);$$

	a	b	c	d	e	f
Mercurio	x			x		
Venus	x			x		
Tierra	x			x		x
Marte	x			x		x
Júpiter			x		x	x
Saturno			x		x	x
Urano		x			x	x
Neptuno		x			x	x
Plutón	x				x	x

Figura 1.6.1. Contexto abreviado para el Sistema Solar.

A	A'	estatus	estatus
\emptyset	\emptyset	cerrado	
{f}	{f}	cerrado	
{e}	{e,f}	no cerrado	pseudo-cerrado
{e,f}	{e,f}	cerrado	
{d}	{a,d}	no cerrado	pseudo-cerrado
{d,f}	{a,d,f}	no cerrado	OJO: No pre-cerrado
{c}	{c,e,f}	no cerrado	pseudo-cerrado
{b}	{b,e,f}	no cerrado	pseudo-cerrado
{a}	{a}	cerrado	

Figura 1.6.2. Tabla para obtener los conjuntos pseudo-cerrados y el conjunto de implicaciones correspondiente al contexto del Sistema Solar.

es decir:

$$L = \{(lejos \rightarrow tiene - satélites), (cerca \rightarrow pequeño), (grande \rightarrow lejos, tiene - satélites), (mediano \rightarrow lejos, tiene - satélites)\}.$$

Cada implicación de una base canónica es como un teorema. Revisarlas mediante preguntas a los expertos nos permite verificar la validez y completud de nuestro contexto (véase Fig. 2.1.3).

Por ejemplo, podemos preguntar si la implicación (*grande* \rightarrow *lejos*) es cierta, es decir, que si es cierto que todos los planetas grandes están lejos de su Sol. El experto podría decir que sí o que no, y proporcionar un contra-ejemplo: responder que se han observado exoplanetas muy grandes, muy cercanos a su Sol. Podríamos entonces añadir este objeto al contexto con el fin de acercarnos a un contexto mejor definido.

Al final del texto se ha anexado como resultado la base de implicaciones correspondiente a la Figura 3.4.2.

1.7. Consultas al experto y exploración de atributos

Hay varios escenarios a los que se puede enfrentar un analista de datos al pretender conceptualizar un dominio. Uno de ellos: el no tener suficientes datos sobre el dominio, pero contar con la ayuda de expertos a quienes se les puede hacer consultas precisas. Otro escenario, es cuando hay demasiados datos, más de los que podemos manejar, y deseamos simplificar, reducir o limpiar el contexto. Para ello también hay mecanismos de consulta. Un tercer escenario es trabajar con dominios matemáticos que pudieran incluso tener una infinidad de objetos. Para ello se cuenta con procedimientos que pueden probar teoremas del dominio automáticamente, o presentar contra-ejemplos del dominio a cierta hipótesis.

Los procedimientos interactivos formalizados se estudian más ampliamente en el contexto de lo que se conoce como *learning with queries* o *aprendizaje vía consultas*, desarrollado inicialmente por Dana Angluin (1988), y que es una subespecialidad del aprendizaje de máquina. En el aprendizaje de máquina clásico supervisado, el objetivo es construir un clasificador que pueda clasificar objetos en varias clases predefinidas.

1.7.1. Consultas a los expertos. Aunque podrían ser más, supongamos que tenemos solamente dos clases de objetos: los que tienen cierto atributo (ejemplos positivos) y aquellos que no lo tienen (ejemplos negativos). Por ejemplo podemos clasificar fotografías en dos grupos: aquellas que tienen la imagen de una cara humana y las que no. En el planteamiento de Angluin se propone una tabla de entrenamiento, dividida en positivos y negativos con la que se aprende a clasificar nuevos ejemplos no vistos anteriormente. Aquí, no se tiene una tabla de entrenamiento, sino acceso a un experto dispuesto a contestar cierto tipo de cuestionamientos.

Al hacer una **consulta de** , le solicitamos al experto que etiquete cierto objeto como positivo o negativo. Básicamente le preguntamos si el objeto es miembro o no de cierta clase de descripción que deseamos aprender. Haciendo consultas de membresía se puede construir una tabla de entrenamiento.

En las **consultas de equivalencia** se sugiere una hipótesis H y se le pregunta al experto si H describe con precisión todos los ejemplos positivos de la propiedad en cuestión y solo ellos. Si la respuesta es "sí", el aprendizaje se ha completado y podemos utilizar H para clasificar cualquier nuevo ejemplo que se nos presente. Si un nuevo ejemplo cumple con H , se tratará de un ejemplo positivo, de lo contrario, será negativo. En caso de que la respuesta

sea “no” entonces puede estar sucediendo una de dos: puede ser que H sea muy restrictiva, de manera que hay ejemplos positivos de la propiedad que no satisfacen la hipótesis –también llamados **contra-ejemplos positivos**; o puede suceder que H sea demasiado general y se hayan clasificado como positivos ejemplos que en realidad no tienen la propiedad en cuestión. A estos falsos positivos también se les llama **contra-ejemplos negativos**.

Por ejemplo, supongamos que deseamos aprender a clasificar caballos. Nuestra hipótesis inicial H es: los caballos tienen cuatro patas, corren rápido y son color café. El experto podrá contestar “no” y presentar un caballo blanco como contra-ejemplo positivo, o presentar un perro café como contra-ejemplo negativo. Cuando hacemos consultas de equivalencia, no hay control sobre el tipo de contra-ejemplo que obtendremos.

Si estamos interesados en obtener solamente contra-ejemplos negativos, entonces realizamos **consultas de subconjuntos**, preguntando si el conjunto de objetos que satisface nuestra hipótesis es un subconjunto de la clase que queremos aprender. Es decir, si tener cuatro patas y ser de color café es una condición necesaria para ser caballo. Como respuesta recibiremos contra-ejemplos negativos.

Si por el contrario, estamos interesados en obtener contra-ejemplos positivos debemos consultar si la clase de objetos que satisfacen H incluyen la propiedad que buscamos. Es decir, preguntamos si tener cuatro patas y ser café es una condición necesaria para ser clasificado como caballo. La respuesta negativa viene acompañada con un ejemplo de un caballo que no es café. Estas son **consultas de superconjuntos**.

Las bases de datos o tablas que aquí se trabajan –los contextos–, tienen un número finito de atributos, por lo que deben tener una base de implicaciones finita y un retículo finito. También hay un número finito de teorías que se espera comparar. Cuando el conjunto de objetos G es finito, podemos calcular la base canónica. Puede ser que una infinidad de objetos se subsuman bajo alguna de las combinaciones de atributos posibles en un contexto, pero el número de combinaciones de atributos es finita. Hay 2^M posibles combinaciones de atributos. Un número finito, pero que crece exponencialmente y se puede volver inmanejable. El aprendizaje mediante consultas reduce el número de proposiciones que se necesitan considerar.

Sin embargo, cuando G es infinito no es posible trabajar con el contexto entero directamente. Recordemos que un conjunto de implicaciones describe a un conjunto de modelos, que son combinaciones de atributos que satisfacen las implicaciones. Hay dos formas de trabajar esto. Una de ellas viene de las técnicas de cálculo de implicaciones, desarrolladas fuera de la teoría del FCA, en donde podemos olvidarnos del contexto y consultar a un experto para calcular un conjunto de implicaciones provicional que llamaremos L^* . Un modelo de L^* es una combinación de atributos que satisface todas las implicaciones de L^* . De manera que cuando hacemos una consulta de membresía acerca de un conjunto de atributos A , y preguntamos si A es un miembro del conjunto de modelos de L^* , en realidad estamos preguntando si A satisface todas las implicaciones de L^* .

Una consulta de membresía sería: ¿Es $A \subseteq M$ un modelo de L^* ?

En una consulta de equivalencia preguntamos si dos conjuntos de implicaciones L y L^* tienen exactamente los mismos modelos.

Si L^* es distinto a L , el experto provee de un contra-ejemplo positivo o negativo.

En este caso, un contra-ejemplo positivo es un conjunto que satisface todas las implicaciones de L^* , pero viola una de las implicaciones de L , alguna de esas implicaciones que se sugirieron como hipótesis H . Un contra-ejemplo negativo es un modelo de L que satisface todas las implicaciones de L , pero viola una o más implicaciones de L^* .

¿Cómo lidiar con los contra-ejemplos?

Si el contra-ejemplo X es positivo y no satisface alguna implicación $A \rightarrow B$ de L , hay que debilitar $A \rightarrow B$ reemplazándola por $A \rightarrow (B \cap X)$. Si X es negativo, hay que fortalecer L , reemplazando alguna implicación $A \rightarrow B$ de L con $(A \cap X) \rightarrow B$ o añadiendo una nueva implicación $X \rightarrow M$, de manera que se excluya X del conjunto de modelos de L . El problema con este algoritmo polinomial es que requiere de contra-ejemplos negativos que no son parte del dominio. Son combinaciones de atributos que pueden nunca ocurrir. Son descripciones de algo que quizás no existe. No puede esperarse de un experto humano que produzca fácilmente dichas combinaciones de atributos. Incluso un programa computacional puede encontrar fácilmente contra-ejemplos positivos, pero con mayor dificultad encontrará algo que tal vez no exista.

1.7.2. Exploración de atributos. Una técnica alternativa para aprender implicaciones mediante consultas y que sí viene del FCA es el algoritmo de exploración de atributos. Este algoritmo no es polinomial, pero es menos demandante para el experto.

Supongamos que tenemos un contexto extenso para el cual deseamos calcular su base de implicaciones. Pudiera incluso tener un número infinito de objetos. Pero suponemos que tiene un número finito de atributos, y por tanto un conjunto finito de implicaciones y un retículo finito. Iniciamos nuestra exploración del dominio con una pequeña muestra de objetos y atributos que conformarán un subcontexto, el cual irá creciendo durante la exploración, siempre manteniéndose finito. Puede incluso estar vacío en un principio. Calculamos las implicaciones válidas en el subcontexto y le preguntamos al experto si estas implicaciones son válidas en general, es decir, en el contexto grande que conforma nuestro dominio. Si una implicación no es válida en general, le pedimos al experto que proporcione un contra-ejemplo, es decir un objeto y un conjunto de atributos que violan la implicación, y los añadimos a nuestro subcontexto. Pasamos entonces a la siguiente implicación.

Este algoritmo en particular se encuentra programado en el software *conexp 1.3*, y consulta la validez de las implicaciones de la base canónica, por lo que el número de consultas es mínimo. Al preguntar sobre la validez de una implicación estamos realizando una consulta de superconjunto. Al consultar si $A \rightarrow B$ es válido, estamos preguntando si cada conjunto que satisface todas las implicaciones de nuestro contexto también es modelo de la implicación $A \rightarrow B$. Es decir, preguntamos si el conjunto de modelos de la implicación $A \rightarrow B$ es un superconjunto del conjunto de modelos de todas las implicaciones válidas en nuestro contexto.

Desde el punto de vista formal, los objetos y los atributos se comportan de forma simétrica, de manera que igualmente podemos plantear algoritmos para la exploración de objetos. En vez de explorar implicaciones de atributos se exploran implicaciones de objetos, utilizando el mismo algoritmo, pero aplicado al contexto dual.

En el libro *Conceptual Exploration* (Ganter y Obiedkov 2016) se encuentran muchas otras formas de explorar atributos, pero para nuestros fines, lo que hemos visto será suficiente. El

aprendizaje mediante consultas ayuda a enumerar todas las implicaciones de un contexto y revisar si son válidas, así como a refinar o ampliar las bases de datos. Como se verá en el capítulo 3, una consulta fue necesaria para distinguir entre el espacio de Minkowski y el espacio lorentziano. En el apartado 4.4, se hace un ejercicio de consulta para ampliar el contexto y construir el retículo para teorías tipo MoND. No entraré en detalle respecto a los algoritmos involucrados, pues la intención de este trabajo no es construir un clasificador de teorías, sino presentar una primera visualización del dominio. En efecto, un estudio subsecuente podría ir en esa dirección.

1.8. Herramientas de análisis

Cuando se tienen contextos muy extensos, los retículos se vuelven muy complejos y de difícil lectura. A menos de que se les explore de forma interactiva, difícilmente darán una primera sensación de mayor entendimiento. Véase el retículo de la Figura 4.6.2, llamado holón por la gran cantidad de teorías que incluye. A primera vista parece una confusa maraña, pero con la versión interactiva podemos explorar parte por parte y fijarnos en los conceptos que nos interesan en particular y observar qué combinaciones de atributos son posibles y veremos que al contrario, tiene una gran lógica, y podremos encontrar patrones y muchas lecturas. Pero en general, los contextos muy extensos no proporcionan mayor entendimiento por parecer una gran maraña de conexiones y es probable que contengan errores o ruido, ya sea por falta de precisión al recolectar los datos, o al añadir atributos extra a algunos objetos o por omisión de objetos en la extensión de algún atributo. El ruido también puede ser entendido como excepciones a alguna regla. Por todas estas razones es que se recomienda concentrarse en algunas partes del retículo. Una de ellas es la parte superior que contiene los conceptos más generales. El llamado *retículo iceberg* por asemejar la punta de un iceberg.

1.8.1. Retículos Iceberg.

La idea detrás del retículo iceberg es la de fijar un cierto límite en el tamaño de la extensión para quedarnos solamente con los conceptos que son subsumidos por tantos o más objetos. Agregamos el concepto ínfimo en caso de que éste haya sido eliminado con el fin de conservar las propiedades reticulares. Hay muchos algoritmos para calcular el retículo iceberg, los más eficientes han sido desarrollados por la comunidad que trabaja con la minería de reglas asociativas (*association rule mining*). Algunos de ellos generan los llamados *frequent closed item-sets* (conjuntos item frecuentes y cerrados), que son precisamente intensiones conceptuales correspondientes a grandes extensiones.

Los retículos iceberg funcionan cuando queremos ver solamente los conceptos más generales de nuestro retículo. Pero tal vez deseamos ver otros conceptos interesantes que no cubren a tantos objetos, pero que pueden ser significativos. En tal caso utilizamos otros criterios como el de estabilidad conceptual (véase Klimushkin *et al.* (2010) y Kuznetsov y Makhalova (2016)).

1.8.2. Estabilidad conceptual. Los índices de estabilidad conceptual pretenden capturar qué tanto depende la intensión de un concepto en objetos particulares de su extensión.

¿Si eliminamos ciertos objetos, la intensión cambia? Y de forma dual, ¿qué tanto depende la extensión de la existencia de ciertos atributos?

La **estabilidad intensional** nos dice qué tan fuerte es la dependencia de la intensión en ciertos objetos particulares de la extensión del concepto. Es la razón entre el número de subconjuntos de B que genera A y el número de todos los subconjuntos de B :

$$\sigma_i \langle B, A \rangle = \frac{|\{D \subseteq B \mid D' = A\}|}{2^{|B|}},$$

donde $B \subseteq G$ y $A \subseteq M$

Sabemos que $B' = A$, de manera que la intersección de todos las intenciones de objetos de B nos da A . Pero qué pasa si nuestro contexto no contiene todos los objetos de A ? ¿Qué pasa si algunos de ellos son ruidosos? Supongamos que nuestro contexto contiene solamente objetos del subconjunto $D \subseteq A$. ¿Obtendremos A como la intención en esta situación? Esto es lo que la estabilidad intensional mide.

La **estabilidad extensional** nos dice qué tan fuerte es la dependencia de la extensión del concepto de ciertos atributos particulares de la intensión del concepto:

$$\sigma_e \langle B, A \rangle = \frac{|\{C \subseteq A \mid C' = B\}|}{2^{|A|}},$$

donde $B \subseteq G$ y $A \subseteq M$

Una vez que se tiene un retículo conceptual se puede calcular la estabilidad conceptual de cada concepto, fijar un límite y quedarse solamente con los conceptos cuya estabilidad sea superior al límite.

También es posible calcular la estabilidad para cada concepto y luego ver cómo se relaciona ésta con la estabilidad de los conceptos superiores e inferiores. Si un concepto es al menos tan estable como sus vecinos superiores e inferiores, entonces se le deja en el contexto. De lo contrario se le considera ruidoso. Un concepto es localmente estable si su estabilidad intensional es al menos tan alta como el de sus vecinos superiores e inferiores. Al elegir conceptos localmente estables, es muy probable que obtengamos conceptos que se encuentran en la parte de enmedio del diagrama, que pueden ser más interesantes.

1.8.3. Índice de separación. ¿Qué tan independientes son unos conceptos de otros? ¿Dado un concepto $\langle B, A \rangle$, los objetos subsumidos bajo A son suficientemente distintos a otros objetos? ¿Los atributos de B son suficientemente distintos de otros atributos? Son preguntas que se pueden contestar mediante el índice de separación. En la Figura 1.8.1 se ha hecho un reacomodo de renglones y columnas, formando un rectángulo completo cubierto de cruces. Observamos que los objetos de B pueden tener atributos fuera de A , y que hay objetos fuera de B que comparten atributos de A , pero que no son parte de la extensión del concepto en cuestión. Diremos entonces que un concepto es bien portado si hay pocos objetos fuera de B que cumplen con algún atributo de A , y pocos atributos fuera de A que correspondan a objetos de B . Es decir, pocas cruces fuera del rectángulo central.

De manera formal, el índice de separación está definido por el producto del número de atributos por el número de objetos, entre la suma del número de intenciones de cada objeto

			A						
			x		x				
					x				
B	x		x	x	x	x			
			x	x	x	x	x	x	
		x	x	x	x	x		x	
			x	x	x	x			
				x					
					x				

Figura 1.8.1. Al hacer reacomodos de renglones y columnas de un contexto podemos ubicar un rectángulo completo donde todas las celdas tienen cruces, representando el concepto $\langle B, A \rangle$. B son los renglones correspondientes a los objetos del concepto, y A es el conjunto de columnas correspondientes a los atributos del concepto en cuestión.

de B , más la suma de las extensiones de cada atributo de A , menos el producto del número de atributos por el número de objetos.

$$s \langle B, A \rangle = \frac{|B| |A|}{\sum_{g \in B} |g'| + \sum_{m \in A} |m'| - |B| |A|}$$

El índice se calcula para cada concepto del contexto y se utiliza para filtrar conceptos ruidosos, en particular en contextos muy extensos. Cuando el índice resulta ser igual a 1, no existen atributos en común entre los objetos de B y los demás objetos de G , y no existen más objetos que posean los atributos de A . Es decir, el concepto es independiente de los demás conceptos del contexto. Al filtrar conceptos mediante este método, usualmente se conservan los conceptos con alto índice de separación. El límite puede ser subjetivo, en tanto el resultado tenga sentido para los expertos en el dominio. En el ejemplo de los planetas, el concepto-objeto con menor índice de separación es Plutón, el objeto que se aleja más de un concepto prototípico de planeta. Esta metodología puede ser aplicada junto con otros índices, como el de estabilidad y el de probabilidad conceptual, que permite seleccionar conceptos interesantes en retículos grandes.

1.8.4. Probabilidad conceptual. Un problema con la estabilidad conceptual es que los conjuntos de atributos pequeños, cuando A tiene pocos elementos, son usualmente más

estables que los conjuntos con muchos atributos. Esto es porque es más probable que los conjuntos pequeños sean cerrados. ¿Qué tan probable es que un conjunto de atributos sea en realidad una intensión? Es decir, ¿Qué tan probable es que un conjunto de atributos esté cerrado?

La probabilidad $P(m)$ de un objeto arbitrario de tener el atributo m puede estar dada *a priori*, puede ser que el conocimiento del dominio en cuestión nos proporcione esta información. Si no es así, podemos estimar $P(m)$ al dividir el número de objetos que tienen el atributo m entre el número de objetos en total:

$$P(m) = \frac{|m'|}{|G|}$$

Es decir, fijándonos en la frecuencia del atributo m en el contexto.

La probabilidad de que un objeto tenga todos los atributos de A , $A \subseteq M$ se puede definir de manera ingenua como el producto de las probabilidades individuales de los atributos de A ; sin embargo debemos considerar que los atributos no son independientes unos de otros. De serlo así, la fórmula $P(A) = \prod_{m \in A} P(m)$ sería correcta, donde $\prod_{m \in A}$ indica la multiplicación de todas las probabilidades de las m . En cambio, para cada elección calculamos la probabilidad de que un conjunto A de atributos esté cerrado:

$$P(A = A'') = \sum_{k=0}^n P(|A'| = k, A = A'') = \sum_k \left[\binom{n}{k} P_A^k (1 - P_A)^{n-k} \prod_{m \notin A} (1 - P_m^k) \right]$$

donde $n = |G|$, $k = |A'|$. El número de combinaciones o maneras de elegir k objetos de entre n objetos es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. P_A^k es la probabilidad de que todos los objetos k tengan todos los atributos de A . $1 - p$ es la probabilidad de un objeto de no tener todos los atributos de A , y está elevada a la potencia del número de objetos que restan. Es importante que, para que A sea cerrado, los k objetos no compartan ningún otro atributo que no sea parte de A . Y que todos los otros objetos que no pertenecen a ese conjunto de k objetos, por lo menos tengan un atributo que no pertenece a A . P_m^k es la probabilidad de que todos los k objetos tengan el atributo m . $1 - p_m^k$ es la probabilidad de que al menos uno de los k objetos no tenga el atributo m . Iteramos sobre todos los atributos fuera de A y multiplicamos estas probabilidades; multiplicamos todo junto y finalmente sumamos sobre los diferentes valores de k .

Los conceptos con baja probabilidad resultan interesantes, porque no deberían estar ahí, en el retículo; de lo que se infiere que hay algo acerca de sus atributos que realmente los conecta y que comprueba que los atributos no son independientes. La probabilidad conceptual no es suficiente para filtrar contextos, pero puede combinarse con otros criterios para remover ruido y errores en las bases de datos.

1.9. Recapitulación.

Hemos visto, de forma muy resumida apenas una pequeña parte de lo que el análisis de conceptos formales puede aportar a la representación y entendimiento de los retículos conceptuales. Podemos identificar conceptos provenientes de un contexto y ordenarlos jerárquicamente; a su vez, dicho contexto está formado por objetos y sus atributos. Del contexto extraemos mediante diversos algoritmos mucha información interesante susceptible de ser codificada. Las visualizaciones interactivas, realizadas para web en D3, mediante archivos java-script, html, json, csv y css permiten explorar las redes, mover nodos, señalar nodos, resaltar relaciones específicas, ampliar la información de las etiquetas, codificar con colores y tamaños las clases de atributos y clases de objetos. Las implicaciones que se deducen de las relaciones jerárquicas nos permiten validar las clasificaciones que se proponen mediante preguntas a los expertos, así como ampliar o reducir los contextos según sea necesario. El FCA ofrece también criterios para identificar conceptos interesantes y sacarle jugo a la exploración de objetos y atributos, pero es de resaltar que estos criterios son sugerencias, y que al definirse límites, siempre hay detrás un elemento subjetivo. El criterio para incluir o no ciertos conceptos en un retículo está relacionado con la sensación de entendimiento que se llega a producir para un cierto fin, y éste con la identificación de patrones específicos.

A continuación veremos algunos criterios para seleccionar nuestros objetos y sus atributos.

La estructura conceptual de las teorías axiomatizables

En esta tesis busco representar mediante redes reticulares las relaciones que existen entre los conceptos fundamentales de cierto grupo de teorías físicas. En el capítulo anterior presenté brevemente la metodología del análisis de conceptos formales (FCA, por sus siglas en inglés) que permite visualizar retículos, analizar los contextos y sus implicaciones, y generar preguntas de exploración para su evaluación por la comunidad de expertos pertinente. En este segundo capítulo pretendo dilucidar el marco teórico desde el cual han de analizarse las teorías científicas. Esto es, distinguir las aproximaciones desde la filosofía de la ciencia y los estudios estructuralistas que han abordado el problema de caracterizar, clasificar, ordenar y fundamentar las teorías científicas con el fin de identificar en qué sentido pueden o no ser compatibles con la metodología seleccionada, el FCA. Interesará entonces abordar la noción misma de estructura como un conjunto de relaciones entre los componentes de un sistema; la visión fundacionista (jerárquica) de la ciencia, la postura axiomática y cómo los axiomas pueden componer los atributos de un contexto. Por otro lado, qué parte de la estructura de las teorías es la que se logra representar mediante los retículos conceptuales. El objetivo principal es identificar cómo se representan las estructuras teóricas, la clase de objetos y atributos que han de ocuparse en la construcción de los contextos, y poder distinguir y comparar los retículos obtenidos de otros diagramas semejantes, además de contar con herramientas para la interpretación y evaluación de las visualizaciones.

Las teorías físicas pueden concebirse de las maneras menos pensadas: por serendipia, por intuición, inducción o inspección, además de la deducción lógica. Su estructura y contenido emerge gradualmente, siguiendo un proceso de maduración hasta que llegan al punto de poder ser axiomatizadas. Moulines llama a este proceso de cristalización.

Se trata de un proceso que se inicia al derrumbarse una teoría anterior bien consolidada (un "paradigma" en el sentido kuhniano), sin que ella sea en seguida suplantada por otra; el derrumbe conduce más bien a un proceso considerablemente largo, en el que de manera gradual y fragmentaria se van constuyendo nuevos modelos, en parte ajenos entre sí o incluso en franca competencia; [...] gradualmente, esos fragmentos de teoría se van aglutinando en un todo coherente hasta dar lugar a una nueva teoría o paradigma bien asentado (Moulines, 2016).

En este trabajo se busca representar la estructura de teorías cristalizadas, axiomatizadas, con un enfoque sincrónico, como si tomáramos una fotografía en rayos x del esqueleto teórico, congelándolo en el tiempo. Un análisis diacrónico posterior podrá reconstruir esta fotografía

en series de tiempo con el fin de evaluar su desarrollo, pero ese trabajo no entra dentro de los alcances de esta tesis. No es que una teoría no cristalizada no pueda ser axiomatizada, el punto es que la axiomatización de una teoría cristalizada nos da una mayor confianza en el análisis que pretendemos hacer.

En este intento por delimitar y caracterizar el campo de estudio comenzaré por señalar brevemente que existen varias escuelas denominadas estructuralistas: el estructuralismo matemático (Galois, Klein, Hilbert, Bourbaki, Shapiro, Hellman y Bunacerraff, entre muchos otros); el estructuralismo francés en las ciencias sociales, que busca develar las estructuras que producen significado dentro de una cultura: Cassirer y Levi-Strauss en antropología, De Saussure en lingüística, Lacan en psicoanálisis, Althusser en el estudio del marxismo y Piaget, quien trata el método mismo en *El estructuralismo* (1995), en la epistemología genética; y tres corrientes estructuralistas en las ciencias empíricas: la sintáctica-deductiva, representada aquí por Carnap, la semántica-modelo-teórica, representadas por Suppe, Sneed, Stegmuller, Moulines, Ludwig y Scheibe entre otros, y la semántica-conjuntista-axiomática representada aquí por Bunge. De aquí en adelante llamaré estructuralista a la escuela semantista-modelo-teórica representada por Balzer, Moulines y Sneed en (2012), aunque en ocasiones tomaré algunos ejemplos traídos del estructuralismo matemático, que tiene varias vertientes: aquellas donde lo fundamental son los conjuntos como la teoría de conjuntos de Zermelo, aquellas donde lo son las estructuras (como la teoría de grupos), y aquellos donde lo son las funciones o funtores (teoría de categorías). El estructuralismo de las ciencias empíricas se apoya en gran medida en el estructuralismo matemático pero tiene que lidiar además con el problema de la relación entre el mundo teórico y el fenoménico. Es éste, el estructuralismo empírico el que más nos interesa, pero nos apoyaremos mucho en el estructuralismo matemático dado que los tratamientos físicos de las teorías del espacio-tiempo como la relatividad general son muy próximos a los geométricos. El estructuralismo matemático nos da ya plataformas de inicio en el análisis pretendido. Además, la relatividad general es frecuentemente utilizada como ejemplo en tratamientos de estructuralismo matemático, lo que permite ver la perspectiva del tema desde otras escuelas.

En este segundo capítulo abordaremos dos aproximaciones desde la filosofía de la ciencia que buscan representar las estructuras de las teorías empíricas: la axiomática y la modelo-teórica.

Ambas son herederas de los trabajos realizados antes de la segunda guerra mundial, sobre todo por miembros del Círculo de Viena o positivistas lógicos y del Círculo de Berlín o empiristas lógicos. El Círculo de Viena (1924-1936) estaba dirigido por Moritz Schlick, filósofo y físico, alumno de Planck, quien llegó a la Universidad de Viena gracias a las gestiones del matemático Hans Hahn y una recomendación directa de Einstein, quien había quedado impresionado por su análisis de la relatividad especial. Schlick estaba también muy impresionado por los trabajos de Wittgenstein y su rechazo a la metafísica, así como por las ideas positivistas de Mach. En 1929 organizaron el primer congreso de la filosofía de la ciencia, enfocando su trabajo en el análisis del lenguaje, a descartar la metafísica y encontrar un criterio de demarcación entre ésta y la ciencia. Entre los miembros del Círculo de Viena encontramos a H. Feigl, O. Neurath, F. Kaufmann, K. Gödel, Ayer, Morris y R. Carnap. Éste último también frecuentaba

las reuniones del Círculo de Berlín, dirigino por Hans Reichenbach. También llamado la Sociedad de la Filosofía Científica (1928-1933), este grupo se destacó por su mayor inclinación hacia la física y las matemáticas y a la formalización de las teorías y sus axiomas. Estaban fuertemente influenciados por los trabajos de Einstein, Boltzmann, Tarski, Hilbert y Russell, quienes asistían con frecuencia a sus reuniones. Otros miembros fueron K. Grelling, W. Dubistav, G. Hempel y R. von Mises. Los empiristas lógicos dan gran peso a los descubrimientos y avances de la ciencia, tomando como fuentes únicas de conocimiento las observaciones científicas, los experimentos y las teorías y no los juicios a priori ni los datos sensoriales. Las teorías se trataban con un enfoque axiomático-sintáctico, mediante análisis lingüísticos de enunciados protocolares, que conforman una base de contrastación que permitía relacionar términos teóricos con términos observacionales mediante reglas de correspondencia. El Círculo de Viena se deshizo en 1936 tras la muerte de Schlick. Weissmann y Neurath emigraron a Inglaterra, mientras que Carnap emigró a California donde continuó la escuela de filosofía analítica en compañía de sus alumnos Quine y Donald Davidson. Por su parte, Reichenbach y Hempel emigraron también a California y junto con H. Putnam, A. Grünbaum, W. Salmon, B. van Fraassen y J. Earman desarrollaron lo que hoy se conoce como filosofía científica (véase Reichenbach, 1990), de la cuál se consideran herederos Mario Bunge y Gustavo Romero.

No fue sino en 1944 cuando Alfred Tarski publicó sus fundamentos de la semántica y el concepto de verdad, que la semántica pudo ser formalizada. Ante una serie de problemáticas y limitaciones que conlleva el enfoque sintáctico, expuestas por Patrick Suppes (1954), y Fredrick Suppe (1977), es que se plantea analizar las estructuras teóricas, no mediante análisis lingüísticos o metamatemáticos sino matemáticos mediante la teoría de conjuntos, y añadiendo criterios semánticos de significado y verdad contextual. El significado es previo y no posterior al criterio de verdad, y las referencias a las teorías deben ser incluidas como partes constitutivas de éstas.

El enfoque axiomático-semántico, representado en esta tesis con las reconstrucciones de Mario Bunge en *Foundations of Physics* (1967), abandona las reglas de correspondencia, los enunciados protocolares y la distinción de términos observacionales para incluir una serie de axiomas de interpretación que dan significado a los términos, los cuales son todos teóricos. Los axiomas se presentan como predicados conjuntistas y se incluye el concepto de verdad tarskiano. La concepción del significado es sintética y hace uso de la teoría de conjuntos para hacer cálculos de significados.

A finales de los años setenta se extendió la corriente semántica modelo-teórica, que caracteriza las teorías a partir de conjuntos de modelos, y no a partir de enunciados axiomáticos. Es decir, aunque los axiomas pueden persistir, no son éstos los que caracterizan a la teoría, sino sus modelos. En *La estructura de la ciencia*, Ernest Nagel (1961) intenta ya enriquecer la visión sintáctica introduciendo un tercer componente a la descripción de las teorías que diera una interpretación más familiar o visualizable a las fórmulas abstractas, y ejemplificó dicha interpretación con el modelo planetario de Bohr. Su intención era tratar el problema de las reglas de correspondencia entre términos teóricos y observaciones, pues al haber avances tecnológicos y nuevos experimentos, las definiciones de los términos no siguen necesariamente las reglas de correspondencia. Nagel (1979), hizo énfasis en la relevancia del papel de los

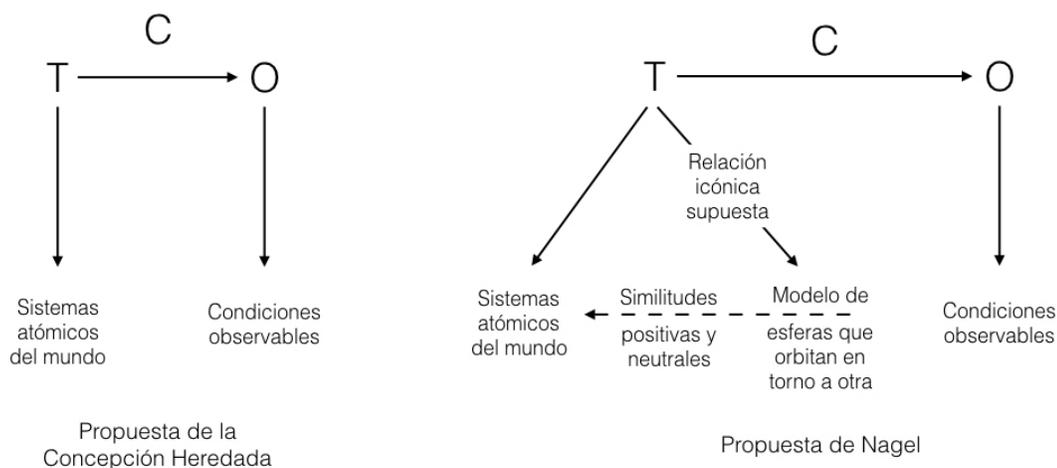


Figura 2.0.1. Diagrama con el que Fredrick Suppe (1977), distingue la propuesta de la Concepción Heredada de la propuesta de Nagel, quien identifica los modelos como parte constitutiva de las teorías empíricas. T son las leyes de la teoría, C son las reglas de correspondencia y O son los enunciados observacionales. Las líneas verticales o inclinadas indican interpretaciones semánticas.

modelos en la caracterización de las teorías científicas. Las escuelas semanticistas modelo-teóricas se desarrollaron principalmente en Europa y América, destacando Dalla Chiara, y Toraldo di Francia en Italia, y en Estados Unidos fueron encabezadas por Patrick Suppes, Fredrick Suppe, Joseph Sneed, Van Fraassen y Ronald Giere. Wolfgang Stegmüller llevó la escuela estructuralista de Sneed a Alemania donde la desarrolló junto con Ulises Moulines. El venezolano, educado en Barcelona y Munich llevó el estructuralismo a los países de habla hispana, junto con Jose Díez en España, Newton Da Costa en Brasil, Pablo Lorenzano en Argentina y Mario Casanueva en México, por mencionar algunos.

Por más de treinta años la escuela estructuralista se ha aplicado a múltiples estudios de caso, que se pueden encontrar en una extensa antología editada por Balzer, Moulines y Sneed (2000), y en la compilación bibliográfica de Abreu, Lorenzano y Moulines (2013). En física resaltan los trabajos de Thomas Bartelborth (relatividad general), Thomas Brückner (teoría de partículas elementales y mecánica cuántica), Ulrich Gähde (astronomía), C. Ulises Moulines (termodinámica), Jose Díez (teoría de la medida) y Martin Rotter (mecánica ondulatoria y mecánica de matrices).

Para los estructuralistas, los términos son todos teóricos, pero con respecto a ciertas teorías, las cuales se conforman a partir de sus modelos. El contenido empírico (los fenómenos) se hace inteligible mediante modelos de datos que representan el mundo y cuya relación con los modelos teóricos es un área de interés (véase Guerrero, 2003). Es justamente ahí, en

los modelos de datos y su relación con los modelos teóricos, donde tiene lugar el debate realismo/antirrealismo, para el cual, como veremos, este estudio es bastante neutro.

Otras escuelas semanticistas, como la de Van Fraassen, representan las teorías mediante espacios de estado, los componentes estructurales se identifican mediante objetos o características invariantes que permanecen ante transformaciones, por ejemplo, de coordenadas.

En primera instancia hablaré brevemente de la noción de estructura que estaremos manejando como conjunto de relaciones que se dan en un sistema determinado, y del tipo de relaciones que esperamos encontrar al analizar teorías científicas. La noción de jerarquía viene ligada a la discusión sobre los fundamentos teóricos y el fundacionismo, la idea de que el conocimiento se basa en conocimiento previo más seguro, y de la imagen que se ha formado de la ciencia como un edificio de tabiques. Reconoceremos entonces algunos de esos elementos de construcción que conforman digamos, el esqueleto estructural del edificio al centrarnos en el apartado 2.5 en la visión axiomática. Ésta supone que una teoría es el conjunto de sus axiomas con su cerradura lógica. Los árboles lógicos representan la estructura deductiva y no deben confundirse con los retículos conceptuales, aunque podamos encontrar cómo relacionarlos.

En los apartados 2.4 y 2.7 ilustro mediante retículos la clasificación de teorías físicas que hace Mario Bunge en *Foundations of Physics*. Si algo caracteriza el trabajo de Bunge, es su claridad y sistematicidad en el análisis filosófico mediante el lenguaje matemático, en particular la teoría de conjuntos y la lógica formal. Un axiomatizador sistémico y formal por excelencia, convencido de la importancia del estudio de los fundamentos de las teorías científicas. Sus trabajos de formalización de la ontología y la semántica son guías indispensables en las labores de análisis de datos, pues permiten la sistematización de conceptos fundamentales.¹ Bunge resalta la importancia del hacer *Foundations Research*, y en especial del trabajo de síntesis, que implica reconstruir teorías a partir de axiomas. Su aproximación sin embargo, no es modelo teórica pues los modelos no son las unidades de análisis. Habrá que notar que este libro fue escrito en 1967, año en que Suppes apenas proponía su enfoque semántico. Sin embargo Bunge no comparte la distinción teórico observacional, pues argumenta que todos los términos son teóricos. Su enfoque también es conjuntista, y semanticista, porque incluye en el análisis axiomas de referencia y denotación, pero no caracteriza los modelos de datos o alguna base de contrastación o cuerpo de evidencia. De manera que resulta ser una transición entre ambas posturas, centrado en la parte teórica.

En *Foundations of Physics* encontramos la axiomatización de dos mecánicas clásicas, tres teorías de campos, y la mecánica cuántica, así como un capítulo de 'herramientas' que dejan ver los niveles de complejidad que se requieren contemplar para describir una teoría científica. Aquí se presenta la primera axiomatización que se hizo de la relatividad general, y que en (1993) fue revisada por Covarrubias para incluir aspectos cosmológicos. Un aspecto que más me ha interesado es rescatar la clasificación que hace Bunge de la profísica y los principios zerológicos al que dedico el apartado 2.4. En el apartado 2.7, se presenta el retículo para la clasificación de Bunge mostrando las clases de atributos que conforman el contexto. Con estos primeros resultados entramos en la materia de visualizar los fundamentos de las teorías físicas, y será interesante distinguir las clases de atributos que se van identificando: los primitivos, los

¹Véase su *Tratado de Filosofía* (Bunge, 1976).

axiomas, las relaciones o leyes, los condicionantes, las definiciones, las tipificaciones y otras clases que bien pueden ser codificadas.

La distinción entre términos (teóricos, no teóricos, observacionales o no), discusión clásica en la filosofía de la ciencia, también la abordaré en el apartado 2.6, pero con la previsión de que estas disputas están dirigidas a la relación entre modelos teóricos y modelos de datos, o aplicaciones intencionales. Nos distanciaremos un poco de estas discusiones pues los vínculos de interpretación o aserciones empíricas no entran (aunque podrían entrar), dentro del esquema de visualización. En los apartados 2.8, 2.9 y 2.10 hablaré de la visión modelo-teórica, centrándome en la caracterización de la escuela estructuralista que ha detallado las diversas estructuras tanto intra-teóricas como inter-teóricas, sincrónicas y diacrónicas de las teorías empíricas. Aquí haré una comparación entre la red teórica propuesta en el libro icónico del estructuralismo: *Una arquitectura para la ciencia* (Balzer, Moulines y Sneed, 2012), notando los beneficios que brinda el FCA.

2.1. Estructuras en los planos sintáctico y semántico

Las teorías empíricas son sistemas complejos en los que ciertos componentes de distinta naturaleza se articulan para dar cuenta de ciertos fenómenos mediante relaciones sintácticas que clasifican a los componentes dándoles orden; estructuras semánticas que relacionan componentes con otros componentes con la finalidad de dotarlos de significado y estructuras prácticas que relacionan componentes con el mundo. Ejemplo de las primeras son las relaciones de inferencia, mientras que ejemplos de relaciones semánticas son la definición, la referencia y la denotación. Una definición señala la correspondencia entre un signo y otro, entre palabras o entre conceptos. La referencia, relaciona conceptos (conceptos físicos), con cosas (objetos o procesos físicos). La denotación relaciona signos con conceptos. Así, *H* denota *Hidrógeno*, *Hidrógeno* refiere al primer elemento de la tabla periódica o al elemento más abundante en el Sol, pero definimos *Hidrógeno* como el elemento cuyos átomos poseen solamente un protón y un neutrón en su núcleo, esto de acuerdo con el modelo de átomo de Bohr. Este modelo nos da ciertos criterios para distinguir un elemento químico de otro. Los modelos refieren a estructuras del mundo. La semántica permite estudiar el significado de las palabras y la verdad o falsedad de los enunciados. Es la referencia al mundo real lo que nos informa si nuestras teorías son adecuadas.

Siguiendo el modelo propuesto por Bruner (1966), y esquematizado por Juan Campesino (2013), (véase Fig. 2.1.1), diremos que la articulación del sistema complejo se da en tres ejes, iniciando con el eje pragmático del referente, el eje sintáctico de la expresión, el eje semántico del contenido para volver al eje pragmático del referido. Cada uno de los ejes tiene un nivel formal y otro sustancial. Cada vez que se clasifican atributos, se hace un acto sintáctico de selección. Cada vez que se combinan los elementos, hay un acto semántico que dota de nuevo significado. Un tercer componente es el pragmático, donde importa el usuario de la teoría y el desarrollo de la misma a lo largo de la historia. Los análisis sintácticos, semánticos y pragmáticos abordan distintos aspectos de la misma cuestión de forma complementaria, sin ser uno mejor que el otro. Así lo afirma Mosterín:

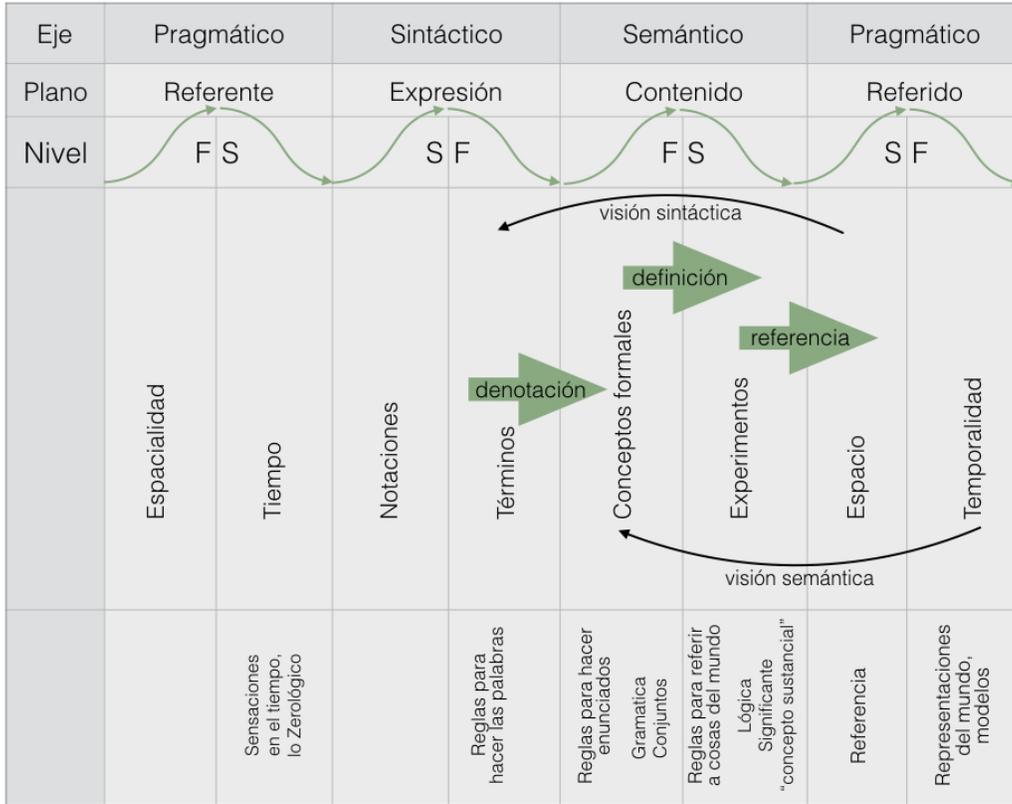


Figura 2.1.1. Esquema de lenguaje directamente referido aplicado al estructuralismo empírico. El proceso de articulación de una teoría que se da mediante un lenguaje directamente referido (es decir no hay doble sentido, no es metafórico) inicia con un modo formal, una espacialidad que da forma al referente, al investigador en este caso, que es sustancia al estar en el tiempo. La expresión propia de dicho investigador son sus notaciones muy particulares, pertenecientes a un área de investigación por ejemplo, que expresan un léxico particular con algún estilo. Con dicha sustancia se da forma a los términos mediante reglas gramaticales naturales y artificiales, y nuevamente, mediante reglas de deducción y cálculo de predicados se da forma a sistemas teóricos, que se llenan de sustancia lógica (experimental), y permiten referir los objetos en el espacio, con sus propiedades temporales mediante modelos prácticos. Este proceso puede pensarse de manera cíclica, en donde conjuntos de modelos conforman una objetividad que se convierte en el modo formal de un nuevo referente colectivo.

Estos tres enfoques [sintáctico, semántico y pragmático] son compatibles entre sí y complementarios. La misma teoría puede considerarse alternativa-mente (y con provecho) desde los tres puntos de vista. de hecho, una teoría en sentido sintáctico determina la clase de sus modelos... Una clase de modelos determina el conjunto de las fórmulas (de cierto lenguaje formal) satisfechas en todos ellos, que puede considerarse como una teoría en sentido sintáctico (Mosterín en Guerrero, 2003).

Diremos entonces, de manera muy general, que un sistema está compuesto por una serie de componentes, relacionados entre sí y con cierto entorno $S = \langle E, R \rangle$. Una estructura E es un conjunto de relaciones R entre un universo U de componentes: $E = \langle U, R \rangle$. Por ejemplo, un lenguaje es un sistema, cuya estructura relaciona cierto vocabulario v mediante una serie de reglas gramaticales g con las que podemos conformar oraciones de distintos tipos: $L = \langle v, g \rangle$. Las reglas gramaticales son reglas sintácticas que nos dicen cómo ordenar las palabras. Las reglas de formación en general dictan cómo construir signos complejos a partir de signos sencillos. También hay reglas de transformación que nos dirán cómo convertir una expresión o fórmula en otra. Un sistema formal, por ejemplo $S = \langle L, R \rangle$ es un lenguaje al que se le agregan reglas de inferencia que permiten derivar o deducir expresiones a partir de otras expresiones; por ejemplo, el modus ponens.²

Las "estructuras conceptuales" $\langle D_i, R_j \rangle$ pueden ser representadas de diversas maneras y con herramientas más fuertes que la lógica de primer orden, como la teoría de modelos, la teoría de conjuntos, la topología, el análisis no-estándar, la teoría de categorías, los métodos de las ciencias cognitivas, la teoría de los sistemas dinámicos, la teoría de los espacios fase o los programas computacionales de simulación. Dentro de las corrientes semánticas, por ejemplo, Beth y Van Frassen caracterizan los modelos mediante espacios de estado, que son representados como puntos en espacios de configuración n -dimensionales. Fredrick Suppe (1989), entiende la estructura como un sistema relacional consistente en el conjunto de los estados posibles como dominio en el que se imponen varias relaciones secuenciales. En ambos textos estudiados en este capítulo, se los presenta como estructuras conceptuales, de manera que x es un modelo del predicado conjuntista tal si cumple con las condiciones estipuladas.

Una estructura matemática axiomatizada es un sistema que consiste en una serie de enunciados particulares llamados axiomas de un lenguaje matemático L : $E = \langle A, R \rangle$, en donde las reglas de inferencia están dadas por la reglas de derivación de la lógica deductiva. La relación de deducibilidad, por ejemplo, \vdash ordena los enunciados según las reglas de la lógica ordinaria y el concepto de verdad.

De manera que una teoría T se deduce de un conjunto de suposiciones A si resulta verdadero que A implica T , es decir:

²El concepto de oración es una noción sintáctica pues las oraciones se conciben como fórmulas bien formadas. Un enunciado es material, es una oración dotada de significado, un enunciado interpretado y es la unidad de análisis del eje semántico. Solo de un enunciado interpretado puede decirse si es verdadero o falso. Las proposiciones clases de enunciados y son las unidades de análisis del eje pragmático, ya que sus valores de verdad dependen del texto o contexto en que se presenten.

$$A \vdash T \text{ si } A \Rightarrow T \subseteq V_L$$

donde V_L es el conjunto de verdades lógicas.

El subconjunto $A \subset F$ de generadores lógicos (no históricos) de todas las fórmulas restantes de una teoría T es la base axiomática de T . El conjunto F de una teoría axiomatizable (o axiomatizada) es la colección $Cn(A)$ de todas las consecuencias lógicas de $A : F = Cn(A)$. Por tanto, $Cn(F) = F$ bajo un sistema deductivo cerrado. En particular, $Cn(\emptyset) = V_L =$ conjunto de verdades lógicas (Bunge, 1967).³

Aquí, F es el conjunto de todos los consecuentes de las implicaciones encontradas mediante este método, el conjunto de fórmulas que mediante la relación de deducibilidad generarán una teoría T . F ha sido conformado a partir del conjunto de axiomas A .

[U]na teoría es una estructura relacional $T = \langle F, \vdash \rangle$, donde \vdash es la relación de deducibilidad, que tiene *grosso modo* las mismas propiedades que la relación \leq de orden parcial. La relación \vdash que ordena el conjunto F de fórmulas de una teoría física T está caracterizada por las reglas de inferencia de la lógica ordinaria (Bunge, 1967).⁴

Recordemos ahora que en el FCA, un conjunto de inferencias \mathcal{L} entre conjuntos de atributos de un contexto proporcionan también una estructura $E = \langle M, \mathcal{L} \rangle$. Un modelo N de una estructura E resulta a su vez en otra estructura dada por la función I que interpreta los enunciados de $E : N = \langle E, I \rangle$. Recordemos también que N es un modelo de \mathcal{L} si N es un modelo para toda implicación de dicho conjunto: $N \models \mathcal{L}$ si para toda $A \rightarrow B \in \mathcal{L} : \{N \models A \rightarrow B\}$.

El sistema axiomático-deductivo, que representa la estructura interna de las teorías axiomatizadas, se puede visualizar mediante árboles lógicos cuyos nodos son enunciados⁵ que se relacionan entre sí mediante líneas que representan la deducción lógica sobre un eje vertical donde la deducibilidad fluye hacia abajo.

En la Figura 2.1.2 se ilustra un árbol lógico de la explicación del movimiento de una partícula que viaja por un túnel a través del centro de la Tierra. Éste es un ejercicio típico de salón de clase.

La Figura 2.1.3 es una simplificación de la figura anterior y representa una parte finita de una teoría axiomatizable en donde los nodos A_1 y A_2 representan los enunciados con el carácter de axiomas o pedazos de una teoría física, los nodos con la letra M representan leyes matemáticas, la H representa la hipótesis auxiliar y los nodos con letra B representan

³"A subset $A \subset F$ of logical (not historical) generators of all the remaining formulas of a theory T is the axiom base of T . The set F axiomatizable or actually axiomatized theory is the collection $Cn(A)$ of all the logical consequences of $A : F = Cn(A)$ In turn, $Cn(F) = F$ (closure under deduction). In particular, $Cn(\emptyset) = L =$ set of logical truths".

⁴"[A] theory is a relational structure $T = \langle F, \vdash \rangle$, where the relation \vdash is the one of deducibility, which has the gross properties of the relation \leq of partial order.

The relation \vdash that orders the set F of formulas of a scientific theory T is characterized by the rules of inference of PC = [ordinary logic]".

⁵Empleo aquí *enunciado* como equivalente a *fórmula (bien formada) cerrada*.

Explicación del movimiento armónico de una partícula soltada en un túnel a través de la Tierra.

Ejemplo de explicación física con estructura de árbol lógico.

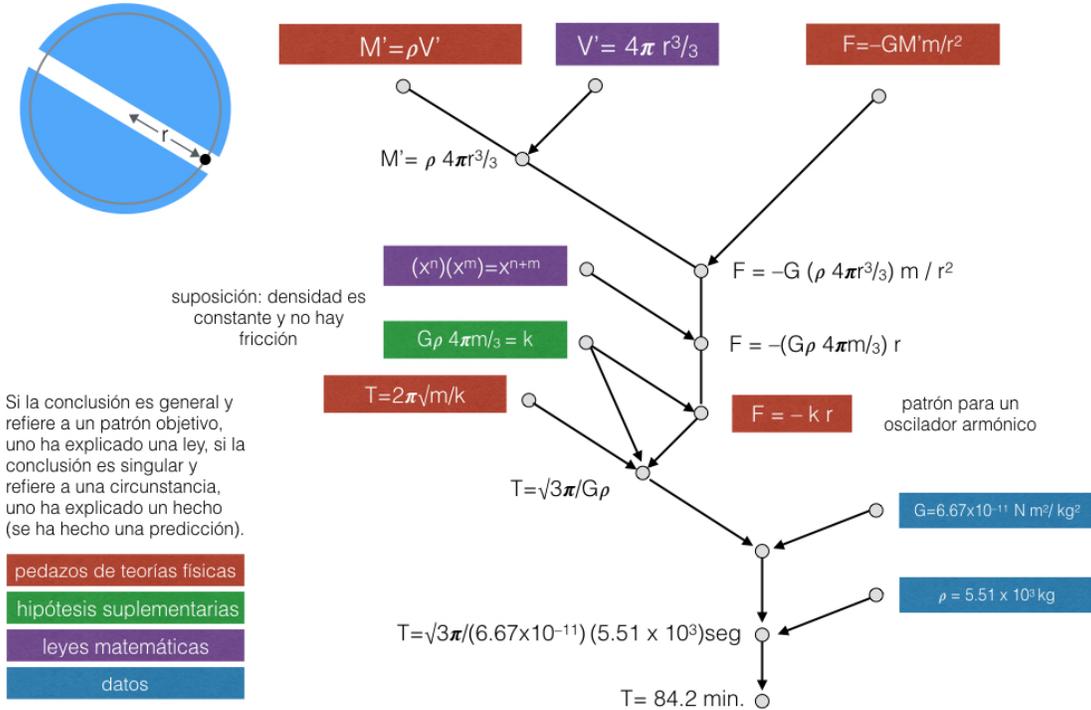


Figura 2.1.2. Ejemplo de explicación física con estructura de árbol lógico. Explicación del movimiento armónico de una partícula soltada en un túnel a través de la Tierra. Se distinguen cinco clases de componentes: leyes matemáticas, definiciones, algunos pedazos de teorías físicas (axiomas o fórmulas), hipótesis auxiliares, y datos (condiciones iniciales). Podemos observar dos conclusiones, la primera, donde se concluye que la fuerza actúa como un oscilador armónico (Ley de Hook), al suponerse que no hay fricción y que la densidad de la Tierra es constante. En la segunda conclusión, se calcula el período de oscilación e intervienen los datos específicos. La primera conclusión es más general, pues refiere a un patrón objetivo y por tanto se dice que se ha explicado una ley. La segunda conclusión es singular y refiere a una circunstancia; se dice que se ha explicado un hecho o se ha hecho una predicción.

consecuencias o teoremas. Las aristas representan relaciones de deducibilidad fluyendo hacia abajo. Nótese que éste no es un retículo pues las relaciones de deducibilidad \vdash de los árboles lógicos no son exactamente las relaciones de cobertura u orden parcial que representan los retículos del FCA, aunque se parecen mucho. Por ejemplo, no se tiene una única cota

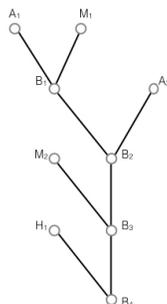


Figura 2.1.3. Árbol lógico de una parte finita de una teoría axiomatizable con dos axiomas A_1 y A_2 , dos leyes matemáticas M_1 y M_2 , una hipótesis auxiliar H_1 , y cuatro conclusiones o teoremas B_1, B_2, B_3 y B_4 , y donde las ligas representan relaciones de deducibilidad.

superior para todos los pares de nodos. La lectura es en dirección hacia abajo. Lo que sí podemos obtener es una serie de implicaciones, en este caso: $(A_1, M_1) \Rightarrow B_1$, $(B_1, A_2) \Rightarrow B_2$, $(B_2, M_2) \Rightarrow B_3$, $(H_1, B_3) \Rightarrow B_4 = B$. Estas implicaciones se pueden expresar en una sola implicación: $A = (A_1, M_1, A_2, M_2, H_1) \Rightarrow B$. Notemos que en esta implicación, las letras B con subíndice ya no figuran, y sólo nos quedamos con la última consecuencia $B_4 = B$; en este caso, la ecuación para el oscilador armónico. Este mismo ejercicio puede repetirse en muchísimos ejemplos paradigmáticos, como deducir, a partir de la primera y segunda leyes de Newton, la ley de gravitación universal de la mecánica clásica tomando en cuenta la relación cuadrática inversa con respecto a la distancia que generaliza mediante una abstracción las observaciones empíricas (las leyes de Kepler). Con numerosos ejemplos se pueden ir generando una serie de implicaciones que sumarían al proceso de encontrar una base canónica de implicaciones \mathcal{L} que genere un contexto (G, M, I) lo más cerrado posible para un campo teórico con un dominio suficientemente demarcado.

Los defensores de la equivalencia entre el enfoque sintáctico y semántico se basan en el teorema de corrección del cálculo proposicional y en el teorema de completud de Gödel para la lógica de cuantificadores. El primero nos dice que, en primer orden, un cálculo deductivo es correcto si todo teorema lógico es una fórmula lógicamente válida. El segundo establece a la inversa, que un cálculo es completo si toda fórmula lógicamente válida es un teorema lógico.

La conjunción de los dos teoremas establece, en primer orden, la equivalencia entre *deducibilidad*, que es una relación sintáctica, y *consecuencia*, que es una relación semántica. En otras palabras, establece la equivalencia entre la sintaxis y la semántica de un cierto lenguaje en el siguiente sentido, como dice Manzano: "la noción semántica de verdad selecciona de entre todas las fórmulas aquellas que son verdaderas en todos los sistemas, y el cálculo deductivo a las que se deducen sin premisas de él" (Guerrero, 2003).

Es decir, se trata con clases de enunciados que son las proposiciones. Así, una misma teoría puede caracterizarse en términos sintácticos a través de un conjunto de proposiciones cerrado por la relación de deducibilidad o en términos semánticos a través de sus modelos.⁶

En la Sección 2.9 veremos cuan diversa es la noción de modelo y cuál es la que optaremos por usar.

De forma un tanto independiente, los componentes de los modelos teóricos y su naturaleza conforman una estructura más simple, según la caracterización de Newton da Costa de los distintos niveles de conceptualización de las teorías (da Costa, 1997). Tanto las relaciones sintácticas como las semánticas conforman estructuras parciales de lo que es una teoría. Las estructuras se encuentran anidadas, con relaciones tanto internas como las de deducción o las de cobertura y otras son externas, como aquellas que se dan entre modelos teóricos y modelos de datos. Igualmente encontramos relaciones interteóricas, intermodélicas, relaciones de interpretación... etc. Al conjunto de todas ellas se le llama la estructura global de las teorías, y como se intuye, es bastante compleja. Nos enfocaremos entonces en visualizar la estructura simple de las teorías físicas axiomatizadas y por tanto la problemática de la relación entre la teoría y el experimento prácticamente no será tratada. Tampoco lo serán otros criterios pragmáticos e históricos, más que por el hecho de ilustrar, contextualizar y aligerar la lectura.

La visión axiomática representa la estructura interna de las teorías mediante árboles lógicos que siguen relaciones de deducibilidad. Con dicha metodología los axiomas quedan bien identificados, y pueden tomarse entonces como atributos para un análisis de conceptos formales y encontrar relaciones semánticas. Los retículos que se obtendrán nos brindarán información distinta a la de los árboles lógicos, sin embargo, podrá obtenerse una serie de implicaciones y asociaciones que los expertos pueden ayudar a calificar mediante sus conocimientos adquiridos al practicar los ejercicios paradigmáticos.

2.2. Fundacionismo y coherentismo

Dos sentidos encontramos de la corriente fundacionista: el ontológico, que supone que hay objetos muy elementales a partir de los cuales se conforma la materia, como la filosofía atomista; y el sentido epistemológico, que se plantea como un aspecto en el proceso de justificación de nuestras creencias y teorías. Aquí nos interesa el segundo sentido.

Pensemos en alguna teoría o investigación científica de actualidad, por ejemplo la cosmología, basada en la teoría de relatividad general, pero considerada una ciencia empírica desde mediados del siglo XX, en particular por las mediciones de Hubble del corrimiento al rojo de las galaxias más lejanas y su implicación para los modelos de un universo en expansión; así como con la detección de la radiación de fondo cósmico, lo que permite contrastar sus predicciones con las observaciones. Dichas mediciones suponen la validez de las relaciones entre el corrimiento espectral y la velocidad de movimiento de los astros, es decir, de la teoría atómica que explica porqué se emiten o absorben franjas espectrales, de la mecánica ondulatoria que explica el efecto Doppler y de la electrónica detrás de los aparatos de medición. A su vez,

⁶Van Fraassen objetará esta equivalencia al notar que esto último es cierto solo si se trata de una teoría categórica, y señala el caso de los números reales, que no cumplen con esta condición, pero ocupados en la mayoría de las teorías.

dichos conocimientos descansan en experimentos y teorías que se sustentan en conocimientos más básicos como la óptica, la geometría o el cálculo y la lógica.

Aristóteles abre el libro I del *Organon* con ésta idea:

Toda enseñanza y todo aprendizaje por el pensamiento se producen a partir de un conocimiento preexistente (Sanmartín y Montoya, 2016).

Libro que da lugar a la corriente fundacionista, así como a la lógica clásica y al razonamiento científico. Desde entonces seguimos en el entendido de que las teorías se sustentan en otras más fundamentales, y también, en otro nivel, que la teoría se sustenta bajo ciertos postulados o hipótesis. Para Bunge, el último de los aristotélicos,

Los fundamentos de una teoría son el conjunto de sus presuposiciones, tanto tácitas como explícitas; y los fundamentos de un procedimiento empírico reconocido en ciencia es el conjunto de teorías a partir de las cuales dicho procedimiento fue designado, llevado a cabo e interpretado (Bunge, 1967).⁷

Prácticamente todos los filósofos coinciden en que el conocimiento se construye y justifica a partir de una serie de presupuestos que consideramos verdaderos. Es decir, nuestro conocimiento está internamente fundamentado. Es en la naturaleza de los fundamentos donde empiristas como Locke, racionalistas como Descartes, aprioristas como Kant, empiristas lógicos y estructuralistas discrepan. Para los empiristas, el conocimiento más básico proviene de los fenómenos; en cambio, los racionalistas encuentran en las ideas el origen de nuestros argumentos. Los aprioristas suponen un marco teórico subyacente que los estructuralistas identifican como elementos teóricos de "lecho rocoso", que no tienen vínculos interpretativos (Balzer, Moulines y Sneed, 2012).

Aristóteles hizo notar que es necesario que el punto de partida de nuestro proceder deductivo sea verdadero, pues de lo contrario todo argumento será falso, pudiendo entrar en círculos viciosos, regresiones infinitas o contradicciones. Dicha verdad puede ser originada por la intuición, la experiencia o la inducción. Lo importante es que sea evidente para todo mundo y no requiera de mayor justificación previa. La corriente racionalista, siguiendo a Beth (1965) está conforme con los postulados del estagirita de deductividad y evidencia, pero no necesariamente con los de realidad. La corriente empirista en cambio, procede a partir de datos experimentales, en conformidad con el postulado de realidad, pero no necesariamente con los postulados de deductividad y evidencia.

Una vez establecida la verdad de las premisas, el fundacionismo supone que los círculos metodológicos viciosos no suceden en la práctica. Internamente, no se encuentran ejemplos que nos muestren un círculo vicioso donde una teoría T_1 determine los conceptos de otra T_2 , ésta a su vez de una tercera, y así sucesivamente hasta llegar a una teoría T_n que determine los conceptos de T_1 . Tampoco regresiones infinitas. Esto no queda tan claro cuando se toman en cuenta estructuras globales.

La visión coherentista u holística, en contrapostura, no privilegia un conjunto de proposiciones en particular. La confianza en la teoría se sustenta en la consistencia entre teorías

⁷"The foundation of a theory is the set of its assumptions, both tacit and explicit. And the foundation of an empirical procedure recognized in science is the set of theories by means of which the procedure is designed, carried out and interpreted".

y con la evidencia. Las consecuencias lógicas de las teorías deben contrastarse de alguna manera con las observaciones que hacemos del mundo, que se representan mediante modelos de datos (aplicaciones intensionales).

Un ejemplo ilustrativo que proporcionan Balzer, Moulines y Sneed de un posible bucle es el que se puede encontrar entre la mecánica de cuerpo rígido, la cinemática clásica y la geometría física. Las aplicaciones intensionales de la primera están determinadas por la cinemática clásica, cuyas aplicaciones intensionales a su vez están en parte descritas por medio de la geometría física. Dado que la geometría física trabaja con sistemas que pueden concebirse como barras rígidas, relojes de péndulo y cosas semejantes, sus aplicaciones intensionales dependen en cierta manera de la mecánica de cuerpo rígido.

El dogma estructuralista es que estos modelos deben estar planteados en términos más simples que aquellos que ocupa la teoría que estamos intentando evaluar; es decir, en términos *T-no-teóricos*. El análisis de Guerrero Pino plantea que el estructuralismo deriva en un coherentismo respecto a la evaluación de las teorías y por tanto a un coherentismo respecto a la fundamentación de las teorías. Este coherentismo es global, en el cual la configuración total de los elementos y sus vínculos interpretativos primarios y secundarios es la de "una red sin cuerdas sueltas (sin elementos teóricos con fondo firme), que se 'autosostiene' o, en otras palabras, una serie de bucles que se 'sostienen' mutuamente" (Guerrero, 2003). "El coherentismo le quita lo *vicioso* al círculo vicioso" al no exigir una justificación de T_2 mediante T_1 , sino sólo pedirle que sean coherentes, es decir, que no lleven a contradicciones, dando por sentado que lo son con las demás teorías, esto es, un coherentismo global. Falguera (2000, p.425) también examina la distinción fundamentalismo vs. coherentismo en el estructuralismo como consecuencia del criterio de teoriedad que les rige, llegando también a la conclusión de que el estructuralismo es consecuente con un coherentismo. Hernán Miguel (2011), apunta a mostrar que no es cierto que las teorías se apoyen mutuamente de modo simétrico, sino que el apoyo es asimétrico. Si nos diéramos cuenta que la teoría del efecto Doppler está mal, eso arrastra la teoría del *big bang*, pero no al revés. Eso muestra que la crítica posmoderna del holismo no se aplica tal como se la quiere mostrar, es decir, hay conocimientos teóricos más difíciles de revisar que otros.

Una cuarta postura, con la que parece coincidir Guerrero, es la del empirismo no radical o posfundamentista como el de van Fraassen para quienes la experiencia es decisiva. Los modelos de datos se presentan en términos de fenómenos observables que son experiencias conceptualizadas en términos de parámetros medibles para los que la teoría debe dar cuenta, sosteniendo la tesis de la independencia teórica de la experiencia y distinguiendo entre términos observables e inobservables.

En todos los casos reportados de posible coherentismo, éste se encuentra en los vínculos entre los modelos teóricos y los modelos de datos, es decir, entre la teoría y la experiencia. Este estudio no incluye dichos aspectos por lo que queda neutro ante la controversia, siendo que todas las aproximaciones aceptan un fundacionismo local o interno. Por lo mismo hablaré poco de ellos. Sin embargo, el asunto no deberá descartarse, ya que el análisis de dichos vínculos y sus correspondientes compromisos epistemológicos pueden ayudar a clarificar el debate realismo/empirismo.

Al estudiar diversas axiomatizaciones de varios autores nos encontraremos con reconstrucciones distintas que otorgan jerarquías contrarias, como sucede con el caso de la relatividad especial que es fundamento de la relatividad general en la axiomatización de Bunge, y como un modelo especializado de la misma en la clasificación de Sotiriou. Sin embargo, establecida una metodología de clasificación, ya sea aditiva o sustractiva, esto no debería observarse. De esas metodologías hablaré más en el tercer capítulo.

De aquí en adelante nos comprometemos con una postura fundacionista interna que puede ser representada mediante retículos que sí reflejan las jerarquías internas e interteóricas. El fundacionismo interno no es una postura *a priori*, hay gran cantidad de estudios que evidencian que la investigación científica, ya sea básica o aplicada, está fundamentada en alguna teoría o procedimiento empírico, que a su vez tiene alguna base. Es una faceta de la mayoría de las reconstrucciones internalistas que supone un orden de dominación de ciertas ideas sobre otras, es decir supone un orden jerárquico. Es también una postura en sintonía con la naturaleza jerárquica del FCA.

2.3. Representaciones de la estructura de la ciencia: edificios, pantanos y redes

La metáfora arquitectónica de la ciencia y del mundo como un edificio es antigua. Múltiples menciones en textos del siglo XVII y filósofos como Bacon y Descartes hablan ya de las ciencias en estos términos. Al pensar en las matemáticas, la filosofía y la metáfora arquitectónica, Ferrerirós y Gray (2006), consideran que la pregunta más relevante es acerca de los fundamentos y su fortaleza para soportar el peso del edificio en construcción.

Acostumbrados a aceptar que estudiar la tierra en la cual aquellos fundamentos penetran no era en sí una cuestión matemática, sino más bien una filosófica, y que el diagnóstico acerca de dónde los pilares terminan y la tierra comienza era muy distinta a la de hoy en día. En 1854 Riemann pidió perdón a su público cuando procedió a analizar el concepto de variedad o clase, siendo éste un trabajo 'de carácter filosófico'. En su artículo de 1887 sobre el concepto de número, Kronecker todavía declararía que el estudio de ese concepto era un 'campo abierto' de discusión filosófica, sin estar en la barda de ninguna ciencia en particular (Ferreiros *et al.*, 2006).⁸

Un ingrediente importante en la imagen de las matemáticas del siglo XX es la de una disciplina autocontenida, una que pudiera dar cuenta de sus propios fundamentos.

Este movimiento se inició por autores como Dedekind, Cantor, Frege y Peano, quienes convirtieron la teoría elemental de números y conjuntos en un tema puramente matemático, pero fue Hilbert quien jugó un papel decisivo al traer esa imagen al centro del escenario. Una imagen extraña de un edificio cuyos

⁸*“Customary to accept that studying the soil into which those foundations penetrate was not itself a mathematical question, but rather a philosophical one, and the diagnosis about where the pillars end and the soil begins was very different from today. In 1854 Riemann begged his listeners pardon when he proceeded to analyse the concept of a manifold or class, this being work ‘of a philosophical character.’ In his 1887 paper on the number concept, Kronecker would still declare that the study of that concept belonged in ‘the open field’ of philosophical discussion, not in the ‘fenced’ domain of a particular science”.*

pilares y vigas serían esencialmente del mismo material que el terreno en el cual estaba construido. Pero ésta era justamente la esperanza, mostrar que el edificio de tabiques de las matemáticas estaba construido con piedras y no arena.⁹

En *The Logical Principles of Mathematical Thinking* (1905), Hilbert actualiza la imagen ingenua con los desarrollos históricos de la época:

El edificio de la ciencia no es levantado como una vivienda, donde los fundamentos son colocados firmemente y luego uno procede a construir y agrandar los cuartos. La ciencia prefiere asegurar lo antes posible espacios cómodos para deambular y solo subsecuentemente, cuando los signos aparecen aquí y allá de que los fundamentos sueltos no pueden soportar la expansión de los cuartos es que procede a apuntalar y fortificarlos. Ésta no es una debilidad, sino un camino de desarrollo sano y correcto.¹⁰

Bourbaki en cambio, dio un giro a la metáfora hablando de una polis que representara la complejidad del panorama del siglo XX:

Es como una gran ciudad, cuyos suburbios y distritos periféricos enchinchan incesantemente, y de una forma un tanto caótica, en los países vecinos, mientras el centro es reconstruido de tiempo en tiempo, cada vez de acuerdo con un plan concebido más claramente y con un orden más magestuoso, demoliendo las secciones viejas con sus laberintos y callejones, proyectando hacia la periferia nuevas avenidas, más directas, más anchas y más cómodas (Bourbaki 1948, en Ferreiros *et al.*, 2006).¹¹

Ferrerirós y Gray señalan que a pesar de los problemas encontrados por los arquitectos modernos como Hilbert y Bourbaki, muchos filósofos aún consideran a las matemáticas como un edificio cuyos fundamentos son certeramente sólidos. Y ya que los filósofos tienen la tendencia a concentrarse en las bases, normalmente enfocan su atención en la lógica y la teoría de conjuntos, identificadas como los fundamentos de todo el edificio matemático. Entre tanto, los historiadores miran los cuartos, avenidas y apartamentos, tratando de entender cómo es

⁹"This move was begun by authors like Dedekind, Cantor, Frege and Peano, who turned the elementary theory of numbers and sets into a purely mathematical topic, but it was Hilbert who played a decisive role in bringing that image centre stage. Strange image of an edifice whose pillars and beams would be essentially of the same material as the terrain on which it has been built. But this was indeed the hope, to show that the stony edifice of mathematics was built on nothing but stone – and not of course on sand".

¹⁰"The edifice of science is not raised like a dwelling, in which the foundations are first firmly laid and only then one proceeds to construct and to enlarge the rooms. Science prefers to secure as soon as possible comfortable spaces to wander around and only subsequently, when signs appear here and there that the loose foundations are not able to sustain the expansion of the rooms, it sets about supporting and fortifying them. This is not a weakness, but rather the right and healthy path of development".

¹¹"It is like a big city, whose outlying districts and suburbs encroach incessantly, and in a somewhat chaotic manner, on the surrounding country, while the centre is rebuilt from time to time, each time in accordance with a more clearly conceived plan and a more majestic order, tearing down the old sections with their labyrinths and alleys, and projecting towards the periphery new avenues, more direct, broader, and more commodious".

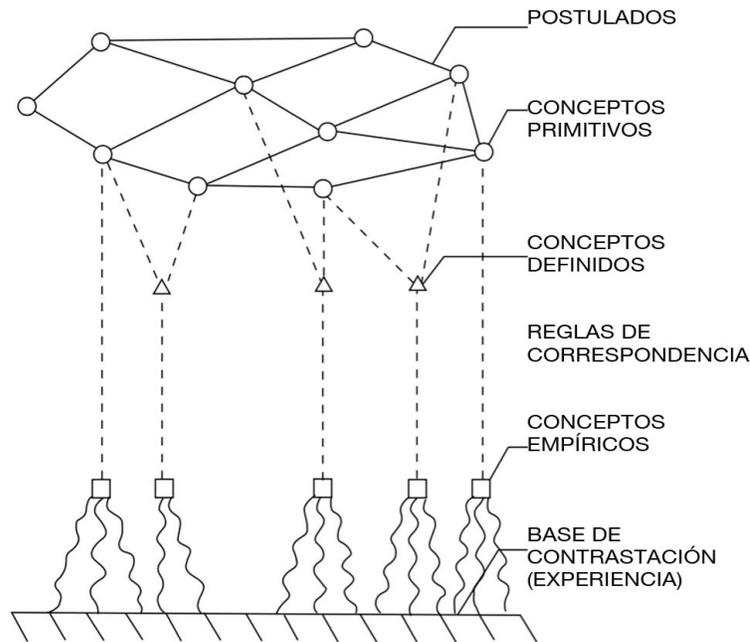


Figura 2.3.1. Representación lógico-empirista de una teoría científica, publicada en Herbert Feigl: "The Orthodox View of Theories: Remarks in Defense as Well as Criticism" (1979) en (Radner y Winokur, 1970). La red superior es una red de conceptos primitivos relacionados por postulados o axiomas de manera que todos ellos se encuentran al mismo nivel, mientras que los conceptos definidos son interpretaciones de los conceptos primitivos. Este diagrama sugiere que los conceptos definidos son contrastados con conceptos empíricos.

que fueron construidos y cómo han tomado su forma presente. En el proceso y con frecuencia ponen su atención en los constructores más que en el edificio.

Mormann (2007) rastrea esta metáfora pictórica de un sistema de conceptos que flotan libremente y que se determinan mutuamente anclándose en una realidad, a los trabajos de Schlick (1918) y a varios autores del empirismo lógico como Carnap (1939, 1966), Hempel (1952) y Feigl (1970).

La supuesta "infiltración" del significado apuntaba a un problema crucial en las consideraciones de los empiristas lógicos sobre las teorías empíricas, a saber, cómo los conceptos teóricos de "libre flotación" obtenían al menos algún tipo de significado empírico por el cual podían distinguirse de los términos metafísicos sin sentido (Mormann, 2007).¹²

¹²"[T]he alleged "seepage" of meaning pointed toward a crucial problem of the logical empiricists' account of empirical theories, to wit, how the "free-floating" theoretical concepts obtained at least some kind of empirical meaning whereby they could be distinguished from meaningless metaphysical terms".

El diagrama de la Figura 2.3.1 ha servido a muchos, a decir de Mormann como un mapa aproximado que permite dar una primera orientación al corazón de los problemas con los que lidiaban los positivistas lógicos como Carnap y posteriores, a saber: el entender filosóficamente cómo las ciencias empíricas logran conectar los componentes teóricos con los empíricos. Hay que observar que el diagrama de Feigl y los árboles lógicos representan dos aspectos que en muchas ocasiones se confunden en los diagramas: el significado y la «testabilidad» o comprobación empírica que se da al comparar los resultados del proceso deductivo con las mediciones experimentales. Ambas son relaciones que se hacen entre la teoría y el mundo, pero la primera es una relación sintáctico-semántica, el segundo es una relación práctico-semántica.

Sin embargo, hay cuestiones que perturban respecto a la naturaleza y firmeza de los fundamentos. Sabemos que cada tanto han ocurrido grandes cambios en nuestra cosmovisión, como la revolución copernicana, la newtoniana, la einsteniana,¹³ donde se quebrantaron supuestos tan fundamentales como el geocentrismo, la absolutéz del espacio y se definieron conceptos como el de masa y fuerza. Sin embargo, la ruptura difícilmente es total. En general, como lo muestra Koyré en su análisis internalista (1999), y el estudio detallado de las variedades del progreso científico de Kitcher en *The Advancement of Science* (1993), el progreso se va dando paso a paso, unos más grandes que otros, de manera que hay nociones que componen nuestras teorías que permanecen.

Desde el punto de vista realista de Popper, los fundamentos de las ciencias empíricas son un pantano de bases que no son firmes.

La ciencia no está cimentada sobre roca; por el contrario, podríamos decir que la atrevida estructura de sus teorías se eleva sobre un terreno pantanoso, es como un edificio levantado sobre pilotes. Estos se introducen en la ciénaga, pero en modo alguno hasta alcanzar ningún basamento natural. Cuando interrumpimos el proceso de introducción hasta un estrato más profundo no se debe a que hayamos topado con terreno firme; paramos simplemente porque nos basta que tengan fuerza suficiente para soportar la estructura, al menos por el momento (Popper, 1959).¹⁴

Esta satisfacción es necesaria para el científico, quien ha de partir de algún lugar, pero no debe serlo para el filósofo de la ciencia quien debe sumergirse como buzo en el lodo para desentramar las raíces del conocimiento. La tarea de investigar los fundamentos de la ciencia, de acuerdo con Bunge, requiere que se les de un carácter de provisional para poder escrutinarlos y dejar detrás la imagen de un edificio de tabiques que pueda desmoronarse al entender que se trata de una red compleja.

¹³Revolución Científica entendida como un evento de significado clave para la creación del mundo moderno, noción desarrollada en las obras de Thomas S. Kuhn, Alexandre Koyré, Herbert Butterfield, Rupert Hall, según el estudio de I.B. Cohen en *Revolution in Science* (Cohen, 1985). Véase también el texto de B.J.T Dobbs en (Aréchiga, 2016).

¹⁴"*Science does not rest upon solid bedrock. The bold structure of its theories rises, as it were, above a swamp. It is like a building erected on piles. The piles are driven down from above into the swamp, but not down to any natural or 'given' base; and if we stop driving the piles deeper, it is not because we have reached firm ground. We simply stop when we are satisfied that the piles are firm enough to carry the structure, at least for the time being.*"

[L]os fundamentos de la física son temblorosos en vez de firmes y no hay razón para suponer que [la ciencia que les investiga] pueda o deba darles alguna rigidez, pues si lo hiciera, volvería la ciencia un dogma. Pero la naturaleza provisional de los fundamentos no los hace no existentes: inseguros y por tanto sujetos a cambio lo son, pero su carácter provisional no los hace menos fundamentales en un momento dado. En cuanto al carácter orgánico de la física, el hecho de que deba ser visto como una red de partes mutuamente interactuantes en vez de un sistema de capas debe ser concedido también (Bunge, 1967).¹⁵

Pensemos por un momento en términos del FCA. Supongamos que vamos a comparar dos teorías T_1 y T_2 que junto con sus atributos conforman un contexto. El índice de separación puede ser una medida de afinidad entre teorías. Supongamos que $T'_1 \cap T'_2 = \emptyset$, es decir, que no comparten ningún atributo. Diríamos que si el índice de separación es igual a uno, las teorías son incunmensurables. Sin embargo, es probable que una exploración de objetos y atributos que busque rastrear los fundamentos en común de estas dos teorías encuentre atributos en común en forma de supuestos matemáticos, lógicos, y otros muy elementales. Estos atributos aparecerán en la parte superior del retículo, a la vez que se amplía la intensión de las teorías en el contexto. Mientras se incluyan en la lista, existirán atributos en común a ambas cosmovisiones que resaltarán como fundamentales. Por otro lado, puede haber teorías inconmensurables cuyo índice de separación sea distinto de 1. Esto depende de la noción de inconmensurabilidad que se tenga. En la concepción sintética de Bunge, la diferencia de significado de dos conceptos o teorías está dada por el par ordenado de las diferencias en la referencia y el sentido:

$$\delta_M(T_1, T_2) = \langle \delta_R(T_1, T_2), \delta_S(T_1, T_2) \rangle$$

donde

$$\delta_R(T_1, T_2) = R(T_1) \Delta R(T_2)$$

$$\delta_S(T_1, T_2) = S(T_1) \Delta S(T_2)$$

y el operador Δ es la diferencia simétrica:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Es fácil ver que si la intersección de los sentidos y las referencias es el conjunto vacío entonces la diferencia en el significado corresponde a la unión de sus partes, la cual es máxima:

¹⁵"[T]he foundations of physics are shaky rather than firm and there is no reason to suppose that [Foundations Research] can or should give them any rigidity for if it did it would turn our science into dogma. But the provisional nature of foundations does not render them nonexistent: insecure and therefore subject to change they are, but this provisional character of theirs does not make them any less fundamental at any given moment. As to the organic character of physics, the fact that it must be pictured as a net of mutually interacting parts rather than as a layer system must be granted as well".

$$\delta_M(T_1, T_2) = \langle S(T_1) \cup S(T_2), R(T_1) \cup S(T_2) \rangle$$

Los fundamentos se perciben como firmes en tanto sostienen muchas teorías exitosas,¹⁶ pero pueden desaparecer, o ser sustituidos si el contexto se describe de forma distinta. Por ejemplo, si incluimos como requisito el describir correctamente el movimiento de Mercurio, muchas teorías no entrarían en el contexto. Por el contrario, si comparamos en su mayoría teorías que ocupan cierta constante, ésta aparecerá como fundamental porque pertenecerá a la intensión de muchos objetos. De manera que los fundamentos pueden cambiar, según el contexto. El contexto puede también ser dictado para estudiar un período de tiempo específico o alguna subdisciplina específica, incluso el cambio de significado de los términos. El que dos teorías puedan ser comparadas mediante atributos en común, como puede ser el haber sido pensadas por alguien, no quiere decir que éstas puedan ser derivadas de dichos atributos. La selección de atributos no debe ser arbitraria o azarosa, sino por razones justificadas que esperamos ir dilucidando a lo largo del trabajo.

2.4. La protofísica de Bunge

Sólo cuando nos concentramos en los primeros principios es que empezamos a ver cómo se entrelazan.

Mario Bunge

Toda teoría científica tiene presuposiciones, ideas que constituyen una base que rara vez se cuestiona. Bunge clasifica las presuposiciones que se dan en las teorías físicas en tres: el conjunto de teorías matemáticas y lógicas que constituyen el formalismo de las teorías físicas, una pintoresca colección de principios que llama “zerológicos”¹⁷ y una serie de teorías muy genéricas e informales a las que bautiza como “protofísica”. La protofísica y los principios zerológicos en particular, no conforman un sistema. Son tan generales y fundamentales que difícilmente pueden ser ordenados más allá que por su extensión. Podemos relacionar la protofísica con los principios comunes de Aristóteles, las ideas innatas de Descartes, las *primae veritates* de Leibniz, los juicios sintéticos *a priori* de Kant o con los conceptos bisagra, término ideado por Wittgenstein y ocupado por Harré (2014) como herramienta para describir la estructura de la química. Bunge se refiere a un determinado conjunto de reglas o suposiciones extremadamente generales y teorías fragmentadas, con poco poder deductivo y que en 1967 habían sido poco desarrolladas. Éstas suelen tomarse como implícitas dentro de las teorías, o simplemente desapercibidas o tomadas como triviales; y pone como ejemplo a la teoría de la medida, la teoría general de campos, la estocástica general, la cronología, las teorías del espacio-tiempo,

¹⁶Una teoría exitosa tiene alto grado de adecuación empírica y facilita el desarrollo de nueva tecnología.

¹⁷En el ámbito de la filosofía, la palabra “zerological” no se encuentra en textos previos a *Foundations of Physics*. En la tradición Budista, la semiología y la poética se habla del “sujeto zerológico”. En medicina, serológico refiere a los sueros. En la teoría de invarianza de las variedades lógicas, la invarianza zerológica representa el punto de invarianza mínima en el espacio. En ambos casos, la raíz de ‘zero’ refiere al número cero. La palabra “cerológico” no existe oficialmente en español, y no debe confundirse con la lógica de orden cero, por lo que lo traduciré con z. Aquí un principio zerológico se entiende como un principio genérico y fundamental en un sentido genético.

la dinámica analítica, la geometría física y la teoría general de sistemas o mereología¹⁸, que ha sido punto de interés en las nuevas ciencias de la complejidad. Igualmente sucedió con la teoría de la medida, desarrollada y sistematizada en años posteriores a la publicación de *Foundations of Physics*, recibiendo gran atención en los años cincuenta, setenta, ochenta y noventa, y cristalizada en *Foundations of Measurement* de Suppes et al. (véase Díez 1993; 1994). En 1982, Moulines propuso una base axiomática para la proto-termodinámica, y describió la protofísica de Bunge como un campo de interés amplio y estimulante, localizado en la frontera entre la física y la filosofía de la física que abría nuevas perspectivas de estudio (Moulines, 1982b). Sin embargo, pocos como Peter Janich, Paul Lorenzen y Rüdiger Inhetveen han desarrollado la protofísica aunque desde un punto de vista constructivista (Janich, 1985).

Los principios zerológicos son un conjunto de suposiciones muy genéricas que pueden ser constitutivas de las teorías, o simplemente guías heurísticas en el momento de la creación teórica que no resultan necesariamente parte formalmente constitutiva de la teoría. Esta división no es una dicotomía, algunos principios son tanto constitutivos como heurísticos. Por ejemplo, el principio "Todas las interacciones se desvanecen asintóticamente" es una hipótesis genérica que ocurre cuando figuran fuerzas y campos, y es tanto una pareja para las leyes, como una herramienta heurística para rechazar soluciones "no físicas" de ecuaciones básicas. Otro: el principio de relatividad clásica de Galileo: "Las leyes básicas de la física deberán ser invariantes ante transformaciones de coordenadas representando cambios en marcos de referencia inerciales" es un requerimiento metanomológico, concerniente a leyes, no a hechos, que afecta solo a las ecuaciones fundamentales y no a sus consecuencias deductivas. Uno más: los principios variacionales integrales o principios de acción.

La protofísica establece nociones previas e indispensables a muchas teorías físicas; las nociones de espacio, tiempo, sistema, proceso, proceso estocástico, concomitancia, etc. Estas, son nociones muy generales y abarcadoras, que según Bunge, no son capaces de generar por sí solas una teoría sistemática, "no conducen a ningún sitio". Es decir, requieren en cualquier caso ser interpretadas dentro de una teoría física para proveer consecuencias observables.

Dichos conceptos y principios no son la 'propiedad' de teorías físicas particulares, sino que subyacen o abarcan teorías -las subyacen en el sentido de constituir sus presuposiciones implícitas o abarcarlas al unificar distintas teorías en una imagen más general de la realidad. Por su naturaleza general son esenciales a la constitución de esas familias de teorías que llamamos disciplinas científicas (Bunge, 1967).¹⁹

¹⁸La teoría más general de relaciones entre el todo y las partes que se rastrea hasta el año 1916 con los trabajos de metalógica de Stanislaw Lesniewski, y desarrollada por Lejewski (1955, 1960-61), Tarski (1956), Bunge (1967) y Ludwig von Bertalanffy (1969) entre otros.

¹⁹"Such concepts and principles are not the 'property' of particular physical theories: rather, they either 'underlie' or 'overarch' theories - 'underlie' them in the sense of constituting their implicit presuppositions or 'overarch' them by unifying different theories into a more general picture of reality. Because of their general nature they are essential to the constitution of those families of theories we call scientific disciplines".

Para Bunge, las teorías físicas no son autosuficientes ni eternas, dependen del fundamento dado por la protofísica y de nuestras representaciones y marcos más básicos, abstractos, intuitivos y sutiles; por ello son criticables aunque difíciles de identificar.

Las reconstrucciones en *Foundations of Physics* están divididas en cinco partes: El *background* (fondo o base), los primitivos, los axiomas, las definiciones, algunos teoremas representativos, y algunos comentarios que son importantes a tomar en cuenta. Un aspecto de la metodología aquí seguida ha sido visualizar estas partes por separado, con el fin de ir dilucidando su estructura y los criterios para considerar atributos. Iniciaremos entonces con el *background*. Habremos de tomar la decisión de si incluir o no como atributo de una teoría los principios heurísticos y experimentales o solamente los formales, esto parece no siempre estar claro. Veremos que podemos encontrarnos haciendo conclusiones precipitadas al tener contextos incompletos u objetos mal distinguidos.

En la Figuras 2.4.1 y 2.4.2, se ordena la información incluida solamente en el *background* de las teorías, en donde encontramos la base formal, la base material o protofísica, y los principios zoológicos en los que se basan las seis axiomatizaciones seleccionadas.

Con el resultado en mano, podemos hacer una nueva lectura del texto y confirmar si éste le representa, y podemos notar que no es así en todos los casos. Efectivamente, en los nodos superiores han quedado muchos de los principios protofísicos y las teorías matemáticas, pues son compartidas por casi todas las teorías, mientras que son menos los que les distinguen propiamente. Sin embargo, a pesar de los comentarios expresos de Bunge en relación a que la mecánica de partículas (MP) y la mecánica del continuo (MC) son teorías independientes, pareciera en este retículo que la MC presupone la MP.

En lo que respecta a la base material, la MC es una de las pocas teorías físicas autónomas: no presupone ninguna teoría física específica. En particular, no presupone la MP, aunque algunos tratamientos utilizan hipótesis corpusculares de manera heurística. Además, al eliminar ciertos supuestos de continuidad, PM podría deducirse de CM mientras que la deducción inversa es imposible: no se obtiene un continuo aumentando la cardinalidad de una colección numerable (Bunge, 1967, p.145).²⁰

El retículo debe leerse como que la MC supone la misma base formal y material que MP, los mismos atributos protofísicos, y no la teoría en sí. Esto aparece así porque no se han incluido atributos propios de la MP que no sean parte de la intensión de la MC. No hay atributo alguno que le distinga. Esto se verá en el retículo de la Figura 2.7.2. cuando se incluyan los axiomas en el contexto.

Observamos por otro lado que la relatividad especial (SR) está expresamente señalada como fundamento de teoría general de relatividad (TGR), y a su vez, el electromagnetismo clásico es fundamento de SR, y que esto sí se refleja en el retículo.

²⁰“As far as its material background goes CM is one of the few self-contained physical theories: it presupposes no specific physical theory. In particular it does not presuppose PM although some treatments of it use corpuscular hypotheses in a heuristic fashion. Moreover, by dropping certain continuity assumptions PM could be deduced from CM while the converse deduction is impossible: one does not get a continuum by increasing the cardinality of a denumerable collection”.

Z	Equipresencia								
Z	Indiferencia material		x						
Z	Covarianza general						x		
Z	Invarianza de Lorentz					x	x		
Z	Contiguidad espacial					x	x		
Z	Contiguidad		x	x	x	x			
Z	Invarianza galileana	x	x	x	x	x			
Z	Antecedencia	x	x	x	x	x	x	x	
Z	Convergencia uniforme	x	x	x	x	x	x	x	
F	Geometría analítica	x	x	x	x	x	x	x	
F	Análisis dimensional							x	
M	Dinámica analítica						x	x	
F	Teoría física de probabilidad							x	
M	Teoría de campos			x	x	x	x		
M	Geometría física	x	x	x	x	x	x	x	
M	Geometría física euclídeana	x	x	x	x	x	x	x	
M	Teoría general de sistemas	x	x	x	x	x	x	x	
M	Teoría del tiempo universal	x	x	x	x	x	x	x	
M	Teoría del tiempo local						x		
F	Geometría de variedades		x	x	x	x	x		
F	Estadística matemática							x	
F	Teoría de Espacios Riemannianos						x		
F	Teoría de la Probabilidad							x	
F	Teoría de espacios vectoriales	x	x					x	
F	Análisis	x	x	x	x	x	x	x	
F	Topología	x	x	x	x	x	x	x	
F	Álgebra	x	x	x	x	x	x		
F	Teoría de conjuntos	x	x					x	x
F	Semántica	x	x	x	x	x	x	x	
F	Lógica	x	x	x	x	x	x	x	
		Mecánica de partículas	Mecánica del continuo	Electromagnetismo clásico	Relatividad especial	Relatividad general	Mecánica cuántica	Óptica geométrica	

Figura 2.4.1. Contexto para teorías protofísicas. F clasifica las teorías de la base formal, M las de la base material (protofísica) y Z a los principios zero-lógicos.

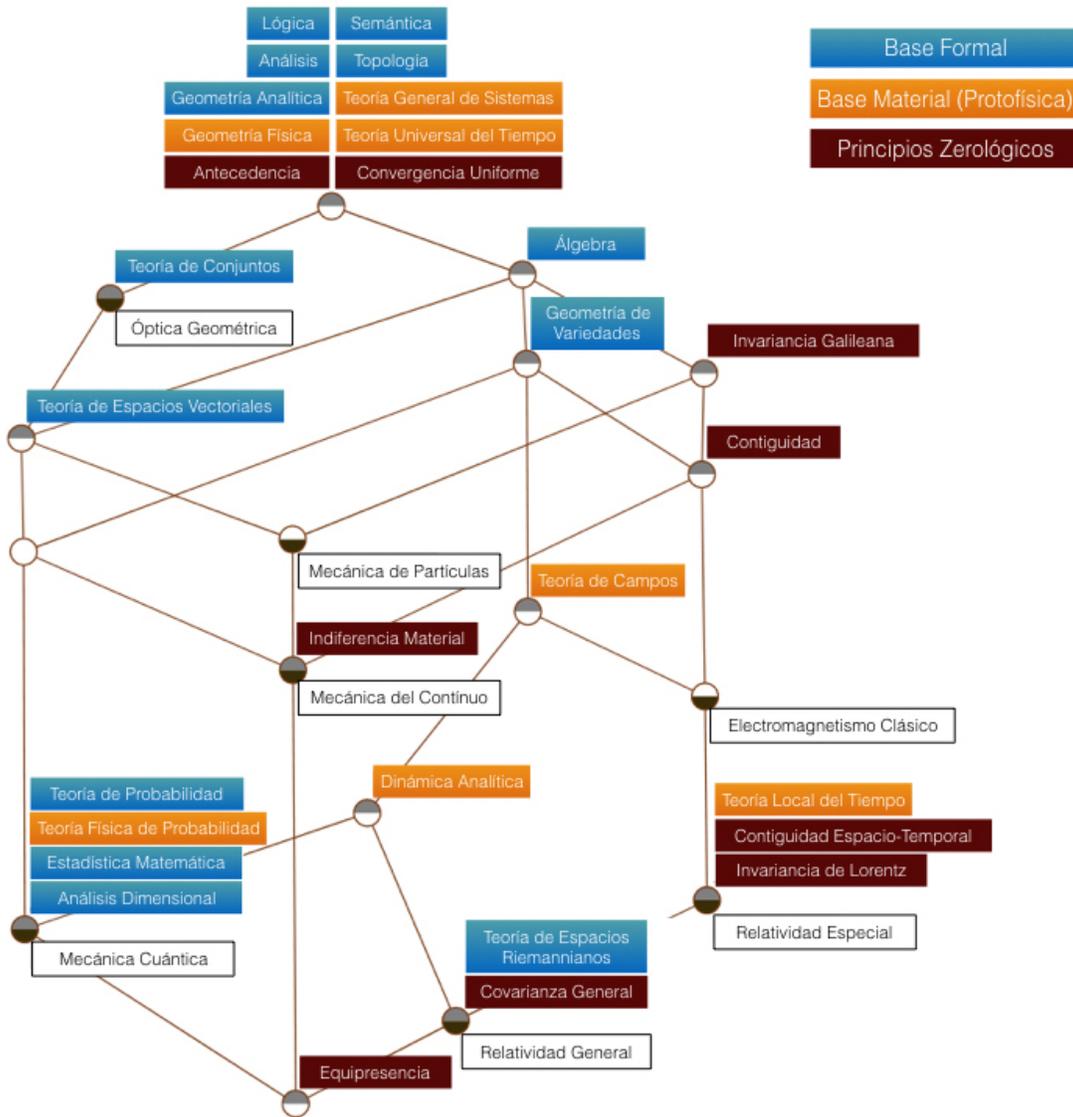


Figura 2.4.2. Retículo para las bases (*background*) de las teorías axiomatizadas en (Bunge, 1967) en donde se distingue la base formal en azul, la base material o protofísica en naranja, y los principios zerológicos en café.

Bunge señala que la mecánica cuántica (MQ) es más cercana a la mecánica de partículas que a la TGR, sin embargo esto no se observa en el retículo. Hay tres pasos entre la primera y la segunda, que entre la primera y la tercera. Señalamos que la MQ no tiene como elemento protofísico a los espacios de Hilbert, pues vienen incluidos en los axiomas de la teoría. El trabajo

de Moulines en prototermodinámica no ha sido incluido en este retículo, por lo que el atributo 'Equipresencia', un principio zerológico que Bunge encuentra propio de la termodinámica, aparece en el nodo ínfimo.

M. Strauss hace 21 señalamientos en *Corrections to Bunge's foundations of physics* (Strauss, 1969), de los cuales el referido solo acepta cinco (Bunge, 1969). El primero de ellos que refiere a los grupos de transformaciones de Galileo, Lorentz y Einstein nos interesa en particular pues se traduce en cambios en el retículo presentado. Bunge había planteado que el grupo de Galileo se encuentra embebido en el grupo de Lorentz, el cual está incluido en el grupo de transformaciones generales. Strauss señala que el grupo de Galileo no es subgrupo del grupo Lorentz y por tanto no puede ser embebido en él, y que el grupo de Lorentz no es un subgrupo del grupo de Einstein dado que en éste no existen marcos de referencia globales y menos que pudieran conectarse mediante transformaciones de Lorentz. De manera estricta, un grupo debe más bien ser reemplazado por el otro y no incluido, aunque coloquialmente se hable de esa manera. Correcciones de este estilo son las que esperamos encontrarnos frecuentemente al presentar los retículos, provocando la discusión filosófica y que deben ser parte de la exploración de atributos. Es decir, los retículos, así como las teorías son criticables y perfectibles.

La profísica es una plataforma ideal para iniciar la exploración de las teorías físicas, pues se trata de marcos muy generales sobre los que varias teorías pueden montarse. La imagen reticular de las estructuras teóricas que aquí utilizo, aunque fundacionista, es muy distinta a la imagen del edificio o polis en construcción. Los fundamentos se encuentran en la parte superior de las redes «colgando» de un nodo supremo, y las teorías crecen y se especializan en dirección hacia abajo. Pero sobre todo, son dependientes del contexto. Es decir, de los objetos que hemos decidido comparar y de ciertos criterios como el período de tiempo seleccionado o alguna característica en particular. Debemos saber, sin embargo, que los atributos elegidos serán suficientes para determinar la jerarquía entre las teorías. Los criterios de axiomatización añaden un formalismo que permite hacer mayores inferencias sobre la estructura de las teorías.

2.5. La visión axiomática

La visión axiomática nos llega desde la lógica, la física y las matemáticas en los escritos de Aristóteles, Arquímedes, Euclides, Newton, Frege, Hilbert y Bourbaki, por mencionar algunos, como un trabajo sistemático de organización interna de las teorías. Éste consiste en encontrar ciertos enunciados básicos llamados axiomas a partir de los cuales es posible deducir lógicamente teoremas y consecuencias observables. Una teoría axiomatizada es siempre más fácil de analizar y por ello es una condición deseable. Sin embargo, la forma de presentación y contenido de los sistemas axiomáticos, sus propiedades como sistema y lo que de hecho representan en términos estructurales es la cuestión a tratar.

Se dice que Newton inauguró la visión axiomática en la física por la forma rigurosa en que redactó sus *Principios Matemáticos de Filosofía Natural* (1687) (Véase Moulines, 1987 y Marquina, 2006). El *Principia* comprende tres libros y una sección básica con ocho definiciones fundamentales (masa, cantidad de movimiento, inercia, fuerza impresa, fuerza centrípeta y otras magnitudes), una discusión sobre el concepto de los absolutos y las famosas tres leyes

del movimiento (inercia, masa, interacción). En el Libro I: “El movimiento de los cuerpos”, y el Libro II: “El movimiento de los cuerpos en medios resistentes” Newton va demostrando rigurosamente la aplicabilidad de sus axiomas. En el Libro III, conocido como *El Sistema del Mundo* infiere la Ley Universal de gravitación, partiendo de las pautas observadas (las distancias medias al Sol y los tiempos periódicos de las órbitas de la Luna, los planetas y los satélites galileanos) y sus cuatro reglas para filosofar.²¹ Newton abre su tercer libro de los Principia, con la aseveración de que en los Libros I y II se habían “expuesto los principios de filosofía, no tanto filosóficos como matemáticos, sobre los cuales resulta posible fundamentar nuestros razonamientos en asuntos filosóficos” (Newton y Motte, 2003).²²

Ideada por Frege (1879) con la finalidad de fundamentar la aritmética, y con el subsecuente trabajo de Peano, Russell y Pierce entre otros, la lógica clásica se desarrolló utilizando un lenguaje formalizado y no ya el lenguaje común, lo que permitió estudiar exhaustivamente las reglas de inferencia y la noción de consistencia.

En 1899, David Hilbert, el mayor exponente de la visión axiomática, propuso en *Fundamentos de la Geometría* un sistema formal de 21 axiomas que sustituyen los cinco postulados de Euclides y que unifican la geometría plana y sólida. Éstos, se centran en las relaciones y no en los objetos. Los axiomas de conexión, (también conocidos como axiomas de enlace o axiomas de incidencia) relacionan un universo de objetos como variables y constantes no lógicas (símbolos primitivos del sistema) mediante constantes lógicas del lenguaje como lo son el símbolo de negación \neg , el de implicación \Rightarrow , de disyunción \vee y de conjunción \wedge ; o los cuantificadores universal \forall y de existencia \exists ; o el símbolo de igualdad $=$ y el de diferencia \neq , entre muchos otros (véase Giovannini, 2015).

Las teorías matemáticas deben ser concebidas como sistemas relacionales cuyas entidades están definidas implícitamente y que pueden ser consideradas como 'axiomas disfrazados' (Mormann, 2007).

El trabajo de Hilbert sirvió para consolidar, a principios del siglo XX una imagen de la ciencia como un edificio sólido que se podía construir a partir de fundamentos que descansaban no en principios filosóficos sino en conceptos matemáticos bien definidos. Sin embargo, el requisito que impuso el estagirita sobre los axiomas de ser autoevidentes resultó imposible de garantizar incluso en el caso de la aritmética y la geometría (véase Beth, 1965). Se buscó entonces que el sistema axiomático cumpliera con las propiedades de *completud*, *independencia* y *consistencia*.

Es deseable que los axiomas de una teoría sean lógicamente independientes, y que sus consecuencias no conduzcan a contradicciones internas.

En 1930 Gödel presentó sus dos teoremas de incompletud en la Segunda Conferencia en Epistemología de las Ciencias Exactas, donde establece que

1. Si un sistema axiomático formal o lógico es consistente, entonces no puede ser completo.
2. La consistencia de los axiomas no puede ser probada dentro del mismo sistema.

²¹El axioma que caracteriza la noción de sistema de referencia era innecesario en la formulación original de Newton, donde las posiciones eran absolutas (Bunge, 1967) p.132.

²²Véase la axiomatización de Newton en el Anexo 1.

Con esto, terminó la búsqueda del conjunto de axiomas únicos que puede producir una teoría, siendo evidente que para todo sistema de axiomas consistente, por más grande que sea, aunque computable, podemos encontrar un teorema que sea verdadero en la teoría y que no sea producto del proceso deductivo.

Muchos físicos y filósofos de la ciencia se encontraron con el reto de adaptar la metodología de Hilbert a las ciencias empíricas. Incluso el mismo Hilbert lo plantea como el sexto de los 23 problemas abiertos para los matemáticos. ¿Es posible crear un cuerpo axiomático para la física?

Las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría sugieren el problema: tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que las matemáticas juegan un papel importante; en primer lugar están la teoría [física] de probabilidades y la mecánica (Hilbert 1902 en Corry, 2004).²³

Algunos como Pierre Duhem y Henri Poincaré consideraban su programa cargado de metafísica, amenazando con despojarla de sus fundamentos empíricos y de caer en el convencionalismo. Pero no es que estuvieran en contra de la visión axiomática. En *The Aim and Structure of Scientific Theory* (1906),²⁴ Duhem describe una teoría física como un sistema de proposiciones, deducidas de un pequeño número de principios con los que se busca representar de la manera más sencilla, completa y exacta posible un conjunto de leyes experimentales; enfatizando la tesis de que las teorías físicas tienen que lidiar con dos tipos de hechos: los expresados en el lenguaje de las matemáticas y los prácticos o experimentales expresados en lenguaje ordinario, y que hay más de una correspondencia directa entre ellos, la cual debe ser franqueada por los científicos.

En los años treinta, Carnap, filósofo alemán de corte analítico y seguidor del trabajo de Hilbert, y de los *Principia Mathematica* de Whitehead y de Russell consideraba la teoría de relaciones como la parte más importante de la lógica y la axiomatización de las teorías científicas como la aplicación más importante de la teoría de las relaciones. A decir de Mormann, para Carnap, la explicación de la estructura de las teorías empíricas es en última instancia, un esfuerzo motivado por la práctica. En *Fundamentos de lógica y matemáticas* (1939), Carnap ejemplifica cómo puede reconstruirse la mecánica clásica de partículas:

1. Se toman como signos primitivos específicos algunos predicados y funtores, tales como: p , x , t , m y f .
2. Las leyes fundamentales de la mecánica se asumen como axiomas.
3. Las reglas de correspondencia establecen, por ejemplo que: p designa la clase de partículas materiales; x la posición de una partícula en el tiempo t ; m la masa de una partícula y f la clase de fuerzas que actúan sobre una partícula. Además se establecen otras reglas adicionales para cada concepto teórico primitivo, no observable, de

²³"The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: to treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics play an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics".

²⁴Duhem et al. (1991).

modo que se le relacione con términos observables o lo que vendría a ser equivalente, presentar una definición operacional del concepto precisando un método de medición.

La visión de Carnap en 1929 era, a decir de Mormann, ingenua:

En ese momento, axiomatizar para Carnap era “simplemente, ordenar los enunciados por un lado, y los conceptos de un dominio no lógico por otro, de acuerdo con sus dependencias lógicas”. Aunque axiomatizar puede considerarse como una heurística fructífera para los análisis lógicos de teorías científicas, no dió respuesta a los problemas epistemológicos y ontológicos concernientes al conocimiento empírico. En particular, no expresaba ninguna diferencia entre lo empírico y lo matemático. Pero obviamente, existe una diferencia entre las teorías matemáticas y las empíricas. No todos los conceptos de las teorías empíricas pueden ser definidos mediante definiciones implícitas. Hay más en las teorías empíricas que estructuras matemáticas definidas implícitamente. El problema es encontrar qué es y cómo afecta la estructura de las teorías empíricas (Mormann, 2007).²⁵

La principal diferencia entre las teorías empíricas y las matemáticas es la clase de entidades a las que refieren y las condiciones específicas que la naturaleza impone en los sistemas y que se reflejan, por ejemplo, en las constantes fundamentales, como la velocidad de la luz y la constante de gravitación. Las funciones de tiempo y masa no establecen una relación biyectiva con los reales positivos. Para determinar la posición de una partícula se requiere de un sistema coordinado y de un reloj. La geometría puede proporcionar el primero, pero el segundo depende de determinadas consideraciones empíricas. De igual manera, el concepto de masa no puede ser asimilado a la mera idea de extensión geométrica. Así como la matemática no ha sido reducida a la lógica, la física no es reducible a la geometría, pero se apoya en ellas en gran medida.

De acuerdo con los neokantianos como Cassirer, la diferencia entre los conceptos matemáticos y los empíricos radica en el hecho de que las definiciones implícitas fijan el significado de los conceptos matemáticos, mientras que los conceptos empíricos son “incompletos”, dado que el significado de los términos no está dado por un solo marco teórico y se va ampliando o especificando con nuevos experimentos y avances tecnológicos. Esto no era aceptable para los positivistas lógicos que buscaron determinar el carácter empírico de las teorías no a través de estipulaciones ontológicas, sino mediante el análisis de la estructura de los lenguajes de las ciencias empíricas.

Al aceptar que la estructura de las ciencias empíricas es más compleja que la de las matemáticas, los empiristas lógicos buscaron incorporar otras relaciones al aparato conceptual. La

²⁵“At the time, axiomatizing was for Carnap ‘simply to order the sentences on the one hand, and the concept of some non-logical domain according to their logical dependencies’ (Carnap 1929, iii). Although axiomatization may be regarded as a fruitful heuristic for the logical analysis of scientific theories, it did not answer the epistemological and ontological problems concerning empirical knowledge. In particular, it did not express any difference between the empirical and the mathematical. But, obviously, there is a difference between mathematical and empirical theories. Not all concepts of empirical theories can be defined by implicit definitions. There is more in empirical theories than implicitly defined mathematical structures. The problem is to find out what it is, and how it affects the structure of empirical theories”.

Figura 2.3.1 muestra un diagrama muy popular entre los positivistas lógicos que representa esta parte de la estructura de las teorías empíricas. Aquí se distingue, en la parte superior, una red en donde ciertos conceptos primitivos se relacionan mediante postulados y a otras definiciones que se traducen en términos de los conceptos empíricos mediante ciertas reglas de correspondencia. Los conceptos observacionales o empíricos surgen de una base de contrastación proveniente de los reportes experimentales en forma de enunciados protocolares. Se asumía que existía una especie de manual de traducción que permitía (al menos parcialmente) interpretar los enunciados de la parte teórica superior en términos del nivel empírico inferior con la ayuda de reglas de correspondencia. De esta manera había una especie de filtración hacia arriba de significado desde los términos observacionales a los términos teóricos.

El que los axiomas sean evidentes o no, o si las consecuencias correspondan con las observaciones, o si es posible encontrar un único conjunto que represente a una teoría suelen ser los puntos cuestionados a la axiomática. Los axiomas pueden ser presentados de forma enunciativa utilizando el lenguaje ordinario o utilizando simbología de la lógica y la matemática, o puede hacerse, siguiendo la corriente semanticista, mediante predicados conjuntistas, entre otras modalidades. Además hemos de considerar los siguientes puntos:

El proceso de axiomatización de una teoría puede llevarse a cabo de diferentes formas. Puede haber más de una posible axiomatización de una misma teoría. Uno de los principales criterios a la hora de evaluar la eficacia de una axiomatización es la de la inteligibilidad de la que ésta dota a la teoría: una buena selección de axiomas debería dar lugar a una estructuración lo más simple posible, sin perder de vista la eficacia operativa de sus aplicaciones y, por ende, permitiría una comprensión más profunda de la teoría. Una condición que se le puede exigir al conjunto de axiomas es que sean lógicamente independientes entre sí; que no haya forma de deducir ninguna de ellas a partir de las restantes. En algunas ocasiones, en la práctica, esta condición es obviada en beneficio de la intuición (Ezenarro, 2017).

Además, no podemos garantizar que todas las teorías sean axiomatizables. Podría haber teorías no axiomatizables o mal axiomatizadas o que conducen a resultados inadecuados. Moulines calificaría su estado conceptual como decadente o sin vigor:

Es probable que si tales teorías existen, debamos decir que su estado conceptual es “delicuescente” y que por tanto es muy difícil, cuando no imposible someterlas a un análisis filosófico mínimamente articulado.

El conjunto de las teorías físicas, económicas, fisiológicas, biológicas, lingüísticas y hasta literarias axiomatizadas hasta la fecha con un grado aceptable de rigor y adecuación es lo bastante numeroso para que tengamos la seguridad de no estar hablando al aire (Moulines, 1985).

De cualquier manera, nos centraremos en las teorías más archi-axiomatizadas: la mecánica newtoniana, la geometría física y la relatividad, y confiaremos en las reconstrucciones hechas por los expertos, sin el afán en un primer momento, de modificarlas, sino de interpretarlas gráficamente.

Una objeción más que se hace a la visión axiomática es que el conjunto de axiomas no puede ser representativo de una teoría dado que en la práctica encontramos muchos casos en que una misma teoría es axiomatizada de distinta manera. Conjuntos distintos de axiomas pueden generar las mismas consecuencias lógicas. Se podría pensar entonces que una teoría no puede estar identificada por el conjunto de sus axiomas, pues no se representa metateóricamente de forma satisfactoria. Además de diferencias triviales en estilos de enunciación y notación, o selección de unos teoremas por otros como fundamentales, hay teorías con diferencias sustanciales en los dominios como en el caso de las teorías lagrangiana y hamiltoniana, que sin embargo son consideradas equivalentes. Esto es un problema para un axiomatista rabioso que exigiera que la mínima diferencia en los axiomas representa una teoría distinta. Incluso, si el conjunto de consecuencias epistemológicas $Cn(A)$ se incluye en la definición. Díez plantea que tal como está concebido aquí el concepto de teoría, como un sistema de axiomas, si fuésemos muy estrictos, estaríamos obligados a reconocer que en todos los casos se trata de teorías distintas y no de dos axiomatizaciones de la misma teoría. Bunge, toma las teorías newtoniana, lagrangiana y hamiltoniana, como teorías distintas pero equivalentes. Retomaré este asunto de equivalencia entre teorías en el Capítulo 3.

Hemos visto que la práctica de axiomatizar teorías con el fin de sistematizar el trabajo científico y analizar sus componentes ha sido importante. Los axiomas conforman sistemas a los que se les pueden exigir ciertas características como los de completud, consistencia e independencia, y para las teorías empíricas, una conexión explícita con el mundo real. Bajo ciertas reservas, estos sistemas axiomáticos son buenos candidatos para iniciar un trabajo de análisis formal de conceptos, pero hay todavía mucho más que considerar, como distinguir las clases de términos y de axiomas, lo que nos permitirá codificar las clases de atributos.

2.6. Distinción de términos y clases de axiomas

El desarrollo de las geometrías no euclidianas y las teorías relativistas de Einstein funcionaron como catalizadores de un cambio en el pensamiento científico y filosófico (en particular el de la filosofía de la ciencia) de principios del siglo XX. Los positivistas lógicos se inspiraron en estas teorías para generar una alternativa a la distinción de las categorías kantianas de forma y contenido. Kant, concebía la estructura euclideo-newtoniana del espacio-tiempo como una estructura formal dada *a priori*. Los elementos formales de Kant eran verdades sintéticas irrevisables como lo que se creía era el espacio absoluto. La física clásica hace uso del concepto de movimiento absoluto a pesar de que solamente el movimiento relativo entre los cuerpos es observable. Todos los sistemas con velocidad constante (marcos inerciales) son equivalentes y la velocidad solo tiene sentido al ser relativa a uno u otro sistema.

La teoría de relatividad general no nació por una falla en las ecuaciones de Newton (aunque explique la discrepancia en la órbita de Mercurio, descubierta a mediados del siglo XIX), sino de tener las ecuaciones válidas para todos los marcos de referencia, que fueran invariantes y que además estuvieran de acuerdo con las leyes de Newton y dieran cuenta de los fenómenos electromagnéticos. Digamos que el campo de aplicaciones de la teoría newtoniana había quedado limitado. Newton consideró el tiempo como universal y común para todos los marcos de referencia. Había dado por hecho que la noción de simultaneidad de dos eventos distantes

no estaba relacionado con el estado de movimiento del instrumento con el que se determina si un evento precede a otro en el tiempo. La acción instantánea de las fuerzas desde un cuerpo masivo a otro (acción a distancia), requiere de simultaneidad absoluta.

En la electrodinámica, las señales derivadas de cualquier disturbio de una condición establecida del campo se propagan a una velocidad finita, la velocidad de la luz. Su valor constante había sido medido por Albert Michelson y Edward Morley en 1887. Ellos constataron con un interferómetro que no existe diferencia en la velocidad de un rayo de luz que viaja en la dirección de movimiento de la Tierra y otro que viaja ortogonalmente. La información de dos eventos distantes puede ser correlacionada sólo si esta información es enviada a un mismo sitio, donde las comparaciones pueden ser hechas por el hombre o por los instrumentos. Para los eventos que no están muy separados en el tiempo, el movimiento del instrumento utilizado para comparar mediciones determina cuál de dichos eventos sucedió primero. Como resultado, la sincronización de relojes que se encuentran en movimiento relativo o meramente distantes unos de otros, se hace bajo la suposición de que para cualquier observador en cualquier estado de movimiento (uniforme y rectilíneo), la velocidad de la luz en el vacío tiene el valor universal $c \approx 3 \times 10^{10} \text{cm/s}$. Se ha confirmado con una gran cantidad de evidencia observacional a nivel Sistema Solar que la velocidad de la luz es constante. La dependencia resultante del tiempo y de las distancias en función del estado de movimiento del observador está sistematizada en la teoría especial de la relatividad. Los problemas de baja velocidad, se pueden resolver satisfactoriamente con la teoría newtoniana y continúa hoy en día utilizándose en muchas áreas ingenieriles y en cálculos de dinámica celeste. Pero los posicionadores geoespaciales (GPS) que cargamos todos en nuestros bolsillos trabajan bajo las predicciones hechas con la relatividad general. Sucede entonces que se tienen no dos, sino varias estructuras espacio-temporales (o modelos) que surgen de teorías exitosas en su área de aplicabilidad. Y aunque la aplicabilidad de la relatividad general incluye la de la teoría especial, y ésta a su vez la de la teoría newtoniana, la segunda y la tercera se mantienen por resultar en cálculos más sencillos.

El principio de la relatividad especial nos libra de la velocidad absoluta y del reposo absoluto. Sin embargo no nos libra de la distinción entre sistemas acelerados y sistemas inerciales. Esto lo hace la teoría general de la relatividad, en donde todos los sistemas en movimiento son equivalentes. Friedman (1983) argumenta que Einstein, además de encontrarse empapado por el espíritu empirista de Mach, Hertz y Kirchhoff fue también influido por la nueva filosofía positivista y buscaba en ese sentido, deshacerse de aquellos conceptos a los que acusaba de metafísicos como lo era el supuesto aether, medio por el cual se propagarían las ondas electromagnéticas, y el espacio absoluto de Newton.

Los empiristas lógicos pensaban como Kant, que era esencial distinguir entre los aspectos del conocimiento que eran proveídos por la experiencia de aquellos proveídos por la razón; sin embargo no consideraban que el aspecto formal pudiera caracterizarse en términos de irrevisibilidad, necesidad o a-prioridad. Después de todo, había quedado demostrado que el espacio absoluto newtoniano no estaba dado *a priori*, y que por el contrario, la elección de un marco de referencia en particular, o de cierto sistema de coordenadas representaba la contribución subjetiva de la razón y no una necesidad irrevisable.

Lo que resulta invariante en un sistema de coordenadas admisible representa la contribución objetiva de la realidad: todo lo demás es arbitrario o convencional (Friedman, 1983).²⁶

Para Kant las nociones de reposo absoluto, velocidad absoluta y de simultaneidad, así como la geometría tridimensional euclidiana son objetivas e invariantes. Con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, la teoría de grupos y la física relativista fue evidente que al ensancharse la clase de sistemas de coordenadas y de marcos de referencia admisibles, las nociones absolutas mencionadas dejan de ser invariantes y objetivas y se vuelven convencionales, no factuales, sino subjetivas. Conforme se ensancha la clase de sistemas de coordenadas admisibles, se estrecha la clase de elementos objetivos o factuales en nuestra descripción de la naturaleza.

Poincaré señaló en 1902 que la elección de cierta geometría para describir un sistema es cosa de convención arbitraria. El caso de la relatividad general es extremo, pues todas las clases de sistemas de coordenadas son admisibles, es decir, las leyes gozan de covarianza generalizada. ¿Queda entonces algún elemento invariante u objetivo en esta teoría? Sólo los aspectos topológicos de los eventos, es decir, la noción de coincidencia local de dos eventos y la noción de cercanía de dos eventos. Todo lo demás es arbitrario. Por tanto, lo objetivo resulta ser estos aspectos observables del mundo.

A la luz de la ciencia, la discusión sobre la distinción contenido/forma evolucionó a la distinción convención/hecho, y ésta a la distinción teoría/observación. Friedman encuentra el nacimiento de la distinción teoría/observación en el texto de Schlick (1920), donde discute el famoso artículo de Einstein de 1916 en el que, además de obtener sus ecuaciones de campo, señala el efecto de requerir una covarianza generalizada le quita al tiempo y al espacio su último vestigio de objetividad, quedando sólo la coincidencia de marcadores.

La distinción teoría/observación fue heredada por los filósofos de la ciencia de la posguerra, quienes se encontraron con múltiples problemáticas para distinguir rigurosamente clases de términos; con el problema semántico de la supuesta neutralidad teórica de los términos observacionales; o el problema metodológico de la supuesta naturaleza observacional de la base empírica de contrastación (Diez y Moulines, 2008).

De acuerdo con Suppe, la línea de argumento implícito que aparentemente justificaba esta distinción es la siguiente:

Las teorías científicas son desarrolladas para explicar o predecir eventos que puedan observarse; no obstante, por razones de simplicidad, amplitud y economía, las teorías emplean entidades o constructos teóricos para proporcionar estas explicaciones o predicciones; estos constructos teóricos no son directamente observables. Consecuentemente, en una explicación o predicción teórica se tienen dos tipos de oraciones: (a) distintas premisas cuya verdad no es problemática al estar confirmada por la observación directa; (b) distintas leyes cuya verdad es problemática puesto que su verdad no puede confirmarse por la observación directa. Por tanto la distinción observacional/teórico

²⁶ "[W]hat is invariant in a class of admissible coordinate systems represents the objective contribution of reality: everything else is arbitrary or conventional".

es necesaria para mantener diferenciados los estatus de estas dos clases de oraciones (Suppe, 1989).²⁷

Esta dicotomía, de acuerdo con Van Fraassen (1996), encierra dos pares de distinciones, uno de carácter ontológico, que no fue detectada por los empiristas lógicos, y una de carácter semántico (relacionada con los significados).

La distinción ontológica se establece entre objetos, procesos o eventos: entre los observables y los inobservables. Bunge diría entre los escrutinables y los inescrutinables. Esta distinción, aunque no era el centro de discusión contra los empiristas lógicos, constituye actualmente un debate entre realistas y empiristas, físicos y filósofos. Los físicos argumentan que el uso de instrumentos es permitido al definir si un término es observable o no. Para muchos filósofos, esto no es así. Carnap mostró que esta condición vive en un continuo de grados de observabilidad.

La definición de término teórico solía estar dada por la negación de observabilidad, sin embargo ésta definición es insatisfactoria. La teoría del significado contextual se basa en consideraciones puramente semánticas y en términos Fregeanos del sentido. El sentido de un término como aquello que determina la referencia o extensión, al menos en parte. Si el método de determinación de la extensión de un término o concepto descansa en un axioma de la teoría, entonces será un término teórico.

La experiencia muestra que los términos de las teorías axiomatizadas cuentan con dicha condición, por lo que todos ellos son de una u otra manera, términos teóricos. La distinción semántica entre «término observacional» y «término teórico» cae en un error categorial porque todos los términos son teóricos por el simple hecho de pertenecer a una teoría axiomatizada, pero además sabemos que ningún término funciona por sí solo y depende de todo un contexto teórico. Las teorías son sistemas relacionales de cierto conjunto de conceptos, la mayoría de ellos bastante elaborados que no podemos correlacionar directamente con percepciones. Por ejemplo, la noción de spin de una partícula es incluso difícil imaginar, ya no digamos observar. Los empiristas lógicos esperaban “traducir” los enunciados teóricos a términos puramente observacionales utilizados en los reportes de laboratorio, mediante reglas de correspondencia con las que se esperaba restaurar el significado de los términos teóricos. Sin embargo se caía fácilmente en consecuencias absurdas, por ejemplo, al identificar una línea recta como la trayectoria de un rayo de luz, nos llevaría a concluir que en un cuarto oscuro no hay rectas.

Pero el defensor de las reglas puede replicar que las definiciones coordinativas no establecen una identidad sino más bien una traducción de este tipo: «línea recta» como «trayectoria posible de un rayo de luz». Aquí las dificultades persisten, la complejidad del lenguaje no sólo se evidencia en su carácter teórico irreducible sino también en el recurso a una modalidad como «posible». De

²⁷ “Scientific theories are developed to explain or predict events which can be observed; however, for reasons of simplicity, scope, and economy, such theories typically must employ theoretical entities or constructs in providing these explanations or predictions; these theoretical constructs are not directly observable. Accordingly, in any theoretical explanation or prediction one finds two sorts of sentences: (a) various premises the truth of which is nonproblematic in virtue of their being confirmed by direct observation; (b) various laws the truth of which is problematic since they cannot be confirmed by direct observation. And the observational-theoretical distinction is needed to keep distinct the different statuses of these two kinds of sentences”.

modo que las dificultades persisten ya que los elementos teóricos no están ausentes (por ejemplo, la expresión 'línea recta' no se puede sustituir completamente) y los criterios de aplicación están indefinidos puesto que no se establece si la posibilidad mencionada es relativa a las leyes y circunstancias, y de ser así, si dichas leyes y circunstancias pueden afirmarse sin recurrir al lenguaje geométrico.

La crítica anterior apunta directamente a la función principal –la de dar contenido empírico– que debería cumplir una regla de correspondencia de acuerdo con el empirismo lógico. Pero también es fácil observar que la misma caracterización de las reglas de correspondencia, ya sea como definiciones coordinativas o reglas operacionales o reglas semánticas o reglas de interpretación difícilmente se puede sostener dada la heterogeneidad de funciones de las mismas (Guerrero, 2003).

Al revisar los problemas y cambios en el criterio empirista del significado, Hempel (Ayer *et al.*, 1965) llega a la conclusión de que “la significatividad cognoscitiva no puede ser bien interpretada como una característica de oraciones individuales, sino de sistemas de oraciones, que corresponden aproximadamente a las teorías científicas, más o menos comprensivos”. La distinción teórico/observacional no es clara y más bien resulta en confusiones respecto a la forma en que los términos son dotados de significado.

La concepción estructuralista rechaza la distinción teórico/observacional por ambigua, dado que sus partes no son complementarias. En cambio, proponen centrarse en la distinción teórico/no-teórico con respecto a una teoría T , que es la relevante para el análisis local de la estructura de las teorías. El argumento, radica en señalar que los conceptos observacionales traen consigo cierta carga teórica. Y que dicha carga suele corresponder a teorías más generales o elementales, pero también puede provenir de la misma teoría. Por ejemplo, los conceptos de espacio, tiempo y distancia no son conceptos provenientes de la mecánica clásica sino de la geometría física y la cronología, y la distancia de la Tierra a la Luna puede ser obtenida por métodos óptico-geométricos, y no necesariamente mecánicos. Los conceptos T -teóricos, según el **criterio de teoriedad** presentado por Sneed (1971), son aquellos que son determinados solamente mediante el uso de la teoría en cuestión. Muchos estructuralistas consideran que los conceptos de masa y fuerza son términos T -teóricos (T_T) de la mecánica newtoniana o términos '*mecánica-newtoniana-teóricos*'; sin embargo, Hernán Miguel (2009), ha argumentado que esto no es así, ya que existen experimentos con dinamómetros mediante los cuales es posible medir fuerzas y masas sin necesidad de invocar la segunda ley de Newton. Los procedimientos de determinación de la T -teoriedad de un concepto implican analizar si es posible determinar el valor de una magnitud (en el caso de conceptos cuantitativos) por medios independientes a la teoría analizada o identificar un determinado objeto en casos de conceptos cualitativos como gen o electrón. Es decir, todos los métodos de determinación de un término T -teórico suponen la ley fundamental de la teoría T o de algún otro término T -teórico que a su vez supone la ley fundamental de T .²⁸

²⁸Véase cómo ha evolucionado el criterio de teoriedad de la concepción estructuralista en Gonzalo (2011) y (Balzer, Moulines y Sneed, 2012).

Una ventaja de introducir la distinción T_T/T_{noT} es que ayuda a diferenciar de mejor manera las jerarquías teóricas, lo que permite describir las disciplinas científicas con varios pasos de teorización. Así, muchos de los términos utilizados en teorías provienen de otras teorías previas, en vez de ser introducidas como definiciones o de un nivel observacional libre de teoría. Igualmente, permite abordar la cuestión de diferenciar entre conceptos a los que nos referimos coloquialmente con la misma palabra pero que pueden suponer intensiones o extensiones distintas. En el caso de fuerza y masa, siguiendo con el ejemplo anterior, podríamos distinguir explícitamente la fuerza newtoniana de la aristotélica o la relativista, forzando a que ciertos conceptos no compartieran extensiones. Sin embargo, es de suponer que existe cierta intensión que se conserva en dichos conceptos, de lo contrario, sería irracional mantener el mismo nombre. Por otro lado, antes de que Newton formulara su segunda ley, con qué experimentaba? Los físicos no aplican la segunda ley para medir fuerzas en el laboratorio. Eso lo hacen después, en el papel. Finalmente, suponiendo que la fuerza newtoniana es solamente la que cumple con las leyes de Newton, ¿qué sentido tiene decir que fuerza es la que cumple con $F = ma$? Eso le convertiría en un término puramente definicional y vacío. Toda reconstrucción que utilice la misma palabra en distintas teorías no debería ser aceptada por un estructuralista, salvo que acepte la solución de Flichman (2001) que indica que hay capas de significado, como una cebolla. Una capa más profunda de significado, con una extensión mayor, pero una intensión menor. Esto permite saber de qué está uno hablando aunque le falte terminar de definirse. Esto se parece bastante a la posición de Carnap para los términos teóricos: reglas de correspondencia como definiciones abiertas.

Carnap y Hempel se dan cuenta de que a medida que se van descubriendo nuevas propiedades de algún término o sistema físico, su definición se va enriqueciendo. Eso implica que las definiciones no están terminadas nunca porque se van a seguir investigando, lo que le llevó a abandonar la idea de regla de correspondencia y a aceptar que del otro lado, del lado del mundo hay otra cosa distinta a nuestros términos teóricos. Las relaciones entre lo teórico y lo empírico fueron llamadas principios puente y no son definicionales.

Vamos viendo ya, que a diferencia de las distinciones kantiana y empirista, la distinción estructuralista nos ofrece un método de determinación de teoridad que puede ser incorporado dentro del FCA, pues depende del nivel jerárquico que ocupen en las teorías. Los términos no teóricos de T habrán de ubicarse en nodos con niveles superiores, pertenecientes, como veremos más adelante, a los llamados modelos previos, que son supraconceptos de los modelos actuales. Mientras que los términos $T_{teóricos}$ se ubicarán debajo de los modelos previos. Esta cualidad es fácilmente detectable en los retículos, aunque discutible en muchos casos y veremos más de ella y otras clasificaciones estructuralistas en el apartado 2.8; sin embargo, nos queda la tarea pendiente de codificar aún clases de atributos. Hemos visto también que las leyes fundamentales, las definiciones y las hipótesis existenciales forman parte de estas axiomatizaciones, pero podemos distinguir más a detalle qué clase de leyes fundamentales se tienen, qué clase de términos se definen, así como ciertas tipificaciones, condiciones o descripciones que se hacen. Las clases son dependientes del campo de trabajo y de la intención comunicativa, y pueden ser sugeridas dentro de las mismas reconstrucciones como veremos en el ejemplo del apartado siguiente.

Ya Aristóteles distinguía cuatro clases de principios que conforman una teoría: los principios comunes a todas las ciencias (la lógica formal), ciertos principios especiales que el filósofo da por supuestos (leyes), definiciones que no suponen la existencia de lo que definen (definiciones matemáticas o implícitas), y para el caso de las ciencias empíricas, las hipótesis existenciales, que suponen que lo que se ha definido existe (axiomas de interpretación)(Sanmartín, 1982).

Las axiomatizaciones en *Foundations of Physics* y *Una Arquitectónica para la Ciencia* se presentan mediante definiciones de predicados conjuntistas, metodología ideada por P. Suppes (1957), la cuál se distingue de la axiomatización lógico-formal de Hilbert y Carnap (véase Giovannini, 2015).

Los axiomas definen una serie de símbolos presentados en tuplas que representan un modelo y sus relaciones, utilizando un vocabulario formal y otro básico. El vocabulario formal consiste en símbolos provenientes de la teoría de conjuntos y la lógica de predicados de primer orden con identidad, más algunos símbolos auxiliares. El vocabulario básico es un conjunto de términos que denotan las entidades que constituyen los modelos de una teoría y están divididos en dos: los **dominios** que son conjuntos con elementos empíricos que vienen interpretados, por ejemplo la clase de sistemas físicos Σ , y los **conjuntos auxiliares** que contienen entidades matemáticas de interpretación fija, como los números reales \mathbb{R} .

Siguiendo la tipología de Moulines (1985), podemos clasificar los axiomas de la siguiente manera:

1. **Conceptos primitivos** o básicos: Son signos que pueden recibir las interpretaciones más diversas según el modelo o teoría a representar.²⁹ Por ejemplo: E^3 . En principio no están definidos.
2. **Axiomas de interpretación**: Su función es subsumir cada uno de los conceptos primitivos bajo cierto género de cosas. Ej: E^3 representa el espacio euclideo en tres dimensiones.
3. **Tipificaciones**: es una indicación o análisis de cómo está contruida una entidad, la estructura del concepto. Por ejemplo, la función masa lleva el producto cartesiano de la clase de sistemas físicos Σ y la clase de sistemas de escalas y unidades S a los reales positivos $M : \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$.³⁰ Éstas pueden construirse como una mezcla (productos cartesianos) de dominios y conjuntos auxiliares. Las tipificaciones indican el nivel conjuntista en el que se ha construido un conjunto o una relación determinados. Indican su nivel ontológico dentro de la reconstrucción.
4. **Caracterizaciones**: son estipulaciones sobre las propiedades matemáticas esenciales de cada uno de los términos básicos. Por ejemplo: tener curvatura cero, tener signatura positiva, ser unívoco por la derecha, ser doblemente diferenciable, etc. Las caracterizaciones tienen, aunque sea en grado mínimo, un cierto contenido factual. Sin embargo, no se trata de enunciados directamente empíricos como pueda ser la

²⁹Moulines señala que en realidad no son conceptos, sino esquemas de conceptos puesto que se introducen como variables cuantificadas.

³⁰Véase en Bunge (1967, p. 31-34), notando que en general, incluso en el mismo *Foundations* la estructura de la función masa y otros primitivos se tomen de manera simplificada como una función de Σ a \mathbb{R}^+ .

afirmación de la negrura de los cuervos. Y sobre todo, su contenido empírico es muy pobre porque siempre refieren a un solo concepto.

5. **Leyes sinópticas:** son los axiomas más importantes, ya que expresan las conexiones que existen entre los conceptos primitivos, resumen toda la información esencial de la teoría.
6. **Condiciones de ligadura:** son vínculos entre modelos. Por ejemplo, el señalamiento de que la masa de las partículas antes (*modelo*₁) y después (*modelo*₂) de un choque inelástico en la mecánica de choque, se conserva.
7. **Leyes especiales:** son leyes que se aplican solamente a algunos modelos de la teoría, y pueden ser sinópticas. Por ejemplo, la ley de Hook en la teoría newtoniana.

Con esta tipología estamos ya listos para visualizar un primer retículo conceptual de las teorías axiomatizadas en *Foundations of Physics*.

2.7. Clasificación de Bunge de teorías clásicas

En este apartado presento como ejemplo de la visión axiomática-semántica un retículo conceptual para cinco de las dieciocho teorías que Bunge trabaja en su *Foundations of Physics* (1967): la mecánica de partículas (PM), la mecánica del continuo (MC), el electromagnetismo clásico (CEM), la cinemática relativista (SRK), y la relatividad general (TGR). Por simplicidad, el retículo no comprende la mecánica cuántica, que sí se incluye en el retículo de la profísica (Figura 2.4.2), tampoco las variantes de CEM y relativizaciones de teorías físicas como la óptica relativista, la mecánica de partículas relativista y la mecánica relativista (SRM). Estas últimas se guían por el principio de relatividad: "las leyes básicas de la física deberán ser las mismas para todos marcos de referencia inerciales", siendo la cinemática relativista la base de la relatividad especial (SR).³¹

Para cada teoría encontramos las siguientes secciones: la base profísica y la base formal, un listado de primitivos o conceptos definidos previamente, definiciones, axiomas, teoremas y comentarios.³²

En este análisis hemos dejado fuera mucho de la profísica, las definiciones y los teoremas lo que permitió tener un contexto manejable de tan solo 59 atributos y 5 objetos. En el texto, los axiomas se presentan en grupos: los axiomas cronométricos, los cinemáticos, los dinámicos... Sin embargo, este agrupamiento no parece ser riguroso pues hay casos, como el de la cinemática relativista, en que los axiomas no están divididos, y en la axiomatización de la TGR se tiene un grupo para el tensor métrico y otro para la conexión afín con esos mismos títulos. Por otro lado, muchos axiomas están divididos en varios incisos. De manera que la acción gramática ha requerido criterios para homologar las clases de axiomas entre las distintas teorías que analiza Bunge. Algunos axiomas como los que describen las leyes dinámicas se identifican fácilmente. Otros presentan hipótesis semánticas que relacionan conceptos matemáticos con conceptos físicos, describen primitivos mediante tipificaciones, caracterizaciones

³¹Véase en Bunge (1967, p. 195) el método para relativizar una teoría física clásica.

³²Las relaciones interteóricas no se incluyen en *Foundations*, Bunge las aborda en (1970), sin embargo esa revisión quedará pendiente.

y propiedades entre instancias. La tipología de axiomas de Moulines (1985) ayudó a identificar algunos de estos axiomas, en particular los vínculos, que aunque Bunge no llama de esa manera, parecen estar refiriendo a lo mismo, a establecer cuándo dos instancias corresponden o no a la misma cuestión. Esto es, los principios de aditividad de la masa y su conservación, etc. Otro añadido ha sido la identificación de elementos distinguidos, separándolos de las leyes sinópticas. En el retículo 2.7.1 los atributos se codifican de dos maneras distintas, lo que permite comparar la agrupación de Bunge con la aquí propuesta.

El contexto para este análisis contiene varios encabezados: los atributos, las etiquetas, las clases, los grupos de axiomas y los axiomas (véase la Fig. 2.7). Los atributos son un símbolo computable que se etiqueta ya sea mediante términos representativos de los axiomas que comprende o mediante el índice señalado en el texto original. La clase corresponde a la clasificación aquí definida, el grupo de axioma corresponde al agrupamiento señalado en el texto. El encabezado 'axiomas' refiere a todos los incisos comprendidos por el atributo, y pueden incluir axiomas de interpretación, tipificaciones, caracterizaciones, vínculos o leyes.³³ Las clases de atributos quedaron de la siguiente manera:

1. **Referentes:** nos indican de qué cosa estamos hablando, ya sea partículas, cuerpos o campos.
2. **Familias de funciones:** conjuntos de funciones cuyos dominios y codominios están tipificados.
3. **Vínculos:** axiomas de ligadura entre modelos
4. **Caracterizaciones:** propiedades matemáticas de las funciones, sus dominios y codominios.
5. **Leyes sinópticas:** ecuaciones de campo y leyes de fuerza: dictan las relaciones más generales entre los primitivos.
6. **Elementos distinguidos:** como lo son las constantes fundamentales.
7. **Marcos inerciales y sistemas de coordenadas**
8. **Tiempo y Espacio**

Los últimos dos puntos son vistos como propios de la profísica o de conjuntos matemáticos auxiliares. Notamos que en esta clasificación no aparecen las tipificaciones que, junto con muchas caracterizaciones, están incluidas en los axiomas que señala cada atributo.

Debido a la gran cantidad de información que se incluye en las axiomatizaciones de Bunge fue necesario limitar el número de objetos y atributos del contexto. Sin embargo hay que tomar en cuenta cierta información ubicada en otras secciones en la exploración. Por ejemplo, Bunge abre de forma contundente la sección de *Background and Heuristic Cue* de relatividad especial (SR) especificando porqué esta teoría presupone al electromagnetismo clásico (CEM):

SR presupone CEM, por tanto comparte el fondo formal y material del segundo. CEM proporciona a SR el concepto de campo de radiación electromagnética así como la suposición de que una vez en existencia, este campo es indiferente tanto a su emisor como a su eventual absorber. Un segundo concepto con que CEM surte a SR es el de marco inercial, como un marco relativo en el cual las ecuaciones de Maxwell se sostienen. Uno podría usar

³³Véase axiomatización de Bunge de la MCP en el Anexo 5.

	Axiomas	Axiomas
	Grupo	Grupo
	Clase	Clase
	Etiqueta	Etiqueta
	Atributo 1	Atributo 2
Objeto 1	x	
Objeto 2		x

Figura 2.7.1. Formato de tabla para procesar los contextos de Foundations. En las celdas correspondientes, los atributos deben escribirse utilizando signos sencillos que puedan ser leídos por el software especializado como los *scripts* de *D3*. Los signos denotan etiquetas cortas y significativas al público que simbolizan primitivos o relaciones de cierta clase. Los axiomas por grupos serán desplegados en recuadros al señalar una etiqueta.

también un concepto más restringido de marco inercial de SR, a saber: «Las leyes básicas de la física deben ser las mismas (relativas a) todos los marcos de referencia inercial» –donde 'inercial' significa «tal que las ecuaciones de Maxwell se satisfagan en él». Una vez se acierta [la teoría] CEM, es natural buscar más leyes, no contenidas en ella, que sean consistentes con ella y en particular que sean invariantes bajo las mismas transformaciones que preservan las ecuaciones de Maxwell (Bunge, 1967).³⁴

³⁴“SR presupposes CEM, hence shares the latter’s formal and material background. CEM supplies SR the concept of electromagnetic radiation field as well as with the assumption that this field once in existence, is indifferent to both its emitter and its eventual absorber. A second concept CEM supplies SR is that of inertial frame, as a frame relative to which Maxwell’s equations hold. One could also use a more restricted concept of inertial frame in SR, namely this: A reference frame is called inertial iff all light rays propagate in vacuum along straight lines relative to it. The electromagnetic concept of inertial frame enables us to state the principle of relativity in a mechanics-free fashion, namely thus: “The basic laws of physics ought to be the same (relative to) all inertial reference frames” –where ‘inertial’ means “such that Maxwell’s equations are satisfied in it”. Once CEM is asserted, it is only natural to look for further laws, not contained in it, that are consistent with it and in particular that are invariant under the same transformations which preserve Maxwell’s equations. Now classical mechanics is not invariant under the group that preserves CEM: the transformation properties of the two theories are very different. Hence if the unity of physics to be restored, of the two theories, CM and CEM, the former must be sacrificed this purely theoretical requirement motivated the invention of SR”.

Vinculos	GR 6.3								x
Ecuación de campo	Ecuación de Einstein								x
Elemento distinguido	kappa								x
Vinculos	GR 5.2								x
Familia de funciones	Tensor de energía-momento								x
Familia de funciones	Conexión afin								x
Caracterización	Forma asintótica								x
Caracterización	Signatura (1,3)								x
Familia de funciones	Tensor métrico								x
Tiempo y espacio	Localidad								x
Marcos Inerciales	Transformaciones								x
Ecuación de campo	Ley de fuerza				x		x	x	x
Ecuación de campo	Ecuaciones de Maxwell				x		x	x	x
Ecuación de movimiento	Momento del momentum			x					
Ecuación de movimiento	Balance del momentum			x					
Familia de funciones	Tensor de estrés			x					
Familia de funciones	Densidad de fuerza			x	x				
Familia de funciones	Velocidad y aceleración			x					
Familia de funciones	Posición y trayectoria	x							
Vinculos	CM 2.2			x					
Elemento distinguido	c				x		x	x	x
Caracterización	1/r				x		x	x	x
Familia de funciones	Campos magnéticos				x		x	x	x
Familia de funciones	Campos eléctricos				x		x	x	x
Familia de funciones	V-Cuerpos cargados				x		x	x	x
Familia de funciones	Densidad de carga				x		x	x	x
Familia de funciones	V-Cuerpos			x					
Vinculos	Conservación de la masa			x					
Vinculos	Aditividad de la masa			x					
Familia de funciones	Densidad de masa			x					
Caracterización	CM 1.4			x					
Ecuación de movimiento	2da Ley de Newton	x							
Familia de funciones	Fuerza entre partículas	x							
Familia de funciones	Fuerza externa	x							
Vinculos	PM 3.2	x							
Familia de funciones	Masa	x							
Vinculos	PM 2.5	x							
Marcos Inerciales	I							x	x
Marcos Inerciales	K	x	x		x		x	x	x
Familia de funciones	{XGR}								x
Familia de funciones	{XR}							x	x
Familia de funciones	{X}	x	x		x		x	x	x
Vinculos	PM 2.2	x						x	x
Referentes	Señales electromagnéticas						x	x	x
Referentes	Sistemas físicos						x	x	x
Referentes	Campos no gravitacionales								x
Referentes	Campos gravitacionales								x
Referentes	Cuerpos cargados						x	x	x
Familia de funciones	Campos electromagnéticos						x	x	x
Referentes	Cuerpos			x				x	x
Referentes	Partículas	x						x	x
Tiempo y espacio	Cotiempo							x	x
Tiempo y espacio	Rango de tiempo							x	x
Tiempo y espacio	M4								x
Tiempo y espacio	M3					x		x	x
Tiempo y espacio	E3R							x	x
Tiempo y espacio	E3	x	x					x	x
Tiempo y espacio	Tiempo	x	x			x		x	x
				Mecánica de partículas					
				Mecánica del continuo					
				Electromagnetismo clásico					
				Cinemática relativista					
				Relatividad general					

Figura 2.7.2. Contexto de teorías clásicas, basado en (Bunge, 1967).

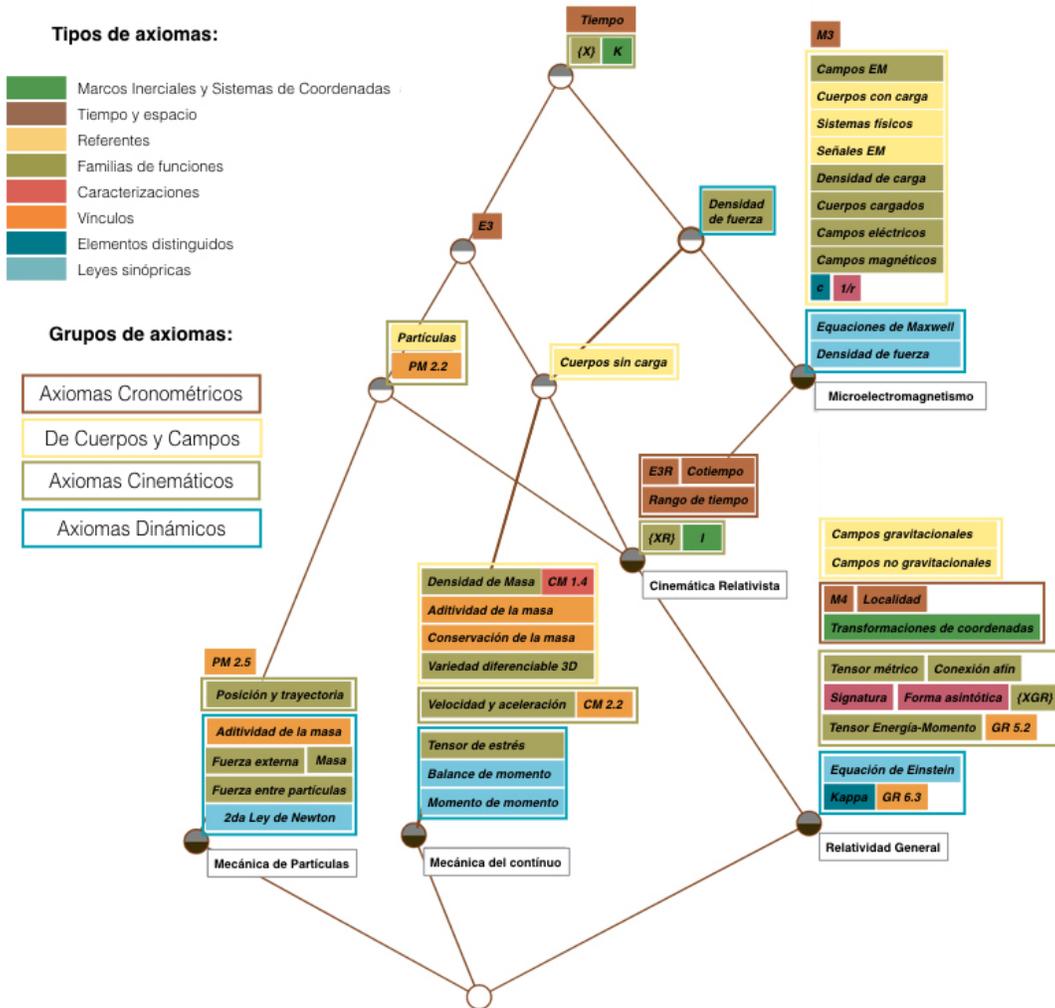


Figura 2.7.3. Retículo conceptual que relaciona los axiomas de la mecánica de partículas, la mecánica del continuo, el micro-electromagnetismo clásico, la cinemática relativista, y la relatividad general, indicando tanto la tipología aquí propuesta como los grupos de axiomas señalados por Bunge en (1967). Los atributos refieren a cada uno de los axiomas de las teorías indicados con el mismo índice del texto. Aquí se mantuvieron las siglas utilizadas por el autor, de manera que GR corresponde a la relatividad general (TGR).

Bunge señala que SR puede ser formulada de varias maneras, dependiendo de la elección de los primitivos y sus axiomas; y por tanto en su selección se mantiene cercano a los orígenes históricos de la teoría.

Esto es, tendremos en mente que Einstein tituló su artículo fundacional “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento”. De esta manera esperamos evadir ciertas malinterpretaciones, sobre todo que SR no le debe nada a la electrodinámica (interpretación cinemática), que lidia con sistemas materiales y no con todo tipo de sistema físico (mecanismo), que solo le concierne la lectura de varas y relojes (operacionalismo), que está basada en la redefinición del concepto de simultaneidad (convencionalismo) y que las coordenadas que ocurren en las transformaciones de Lorentz son aquellas de un continuo geométrico que, después de todo puede ser estudiado de una forma libre de coordenadas (formalismo) (Bunge, 1967).³⁵

Esto es, SR sí le debe mucho a la electrodinámica; SR lidia con todo tipo de sistemas físicos, le concierne mucho más que la lectura de varas y relojes, y no está basada en la redefinición del concepto de simultaneidad. En el retículo se aprecia que SRK se encuentra en un nivel inferior del concepto-objeto CEM; que distintos tipos de referentes son atributos de SRK, tanto a partículas, como cuerpos con y sin carga, sistemas físicos y señales luminosas. A su vez, la TGR es totalmente dependiente de SRK y CEM, incluyendo nuevos dominios y referentes, que en realidad, como veremos en el capítulo 3, no son propios de TGR. Observamos también que SRK no cuenta con leyes sinópticas. Esto se da en la mecánica relativista y otras especialidades.

Ya podemos ir viendo que los grupos designados por Bunge y señalados en la Fig. 2.7 nos van a remitir a las clases de modelos que manejan los estructuralistas y a otras reflexiones semejantes. Por ejemplo, siguiendo el método de determinación de teoriedad, llegaríamos a la conclusión de que los atributos que pertenecen a objetos en niveles superiores son términos no teóricos de las teorías en niveles inferiores, como se observa en el retículo que sucede con los términos propios de la SRK, con respecto a la TGR. Observamos también que al tomarse los axiomas de esta manera podemos comparar distintas teorías, pero no nos da mucha más información desde el FCA sobre la estructura interna de cada teoría. Para ello debemos desmenuzarla con mayor detalle y en ese sentido será de gran utilidad la visión modelo-teórica, que compara modelos de una misma teoría, entre otras bondades, así como comparar con teorías muy semejantes que tengan más atributos en común.

2.8. La concepción estructuralista y el elemento teórico

De entre las opciones semanticistas disponibles, la metateoría estructuralista es, a decir de Nancy Cartwright en Bovens *et al.* (2008), “el tratamiento más satisfactoriamente detallado y bien ilustrado de la estructura de las teorías científicas”. Se trata de un programa de investigación que ha proporcionado de forma muy rigurosa, herramientas para el análisis y

³⁵“That is, we shall keep in mind that Einstein titled his founding paper “On the Electrodynamics of Moving Bodies”. In this way we hope to avoid certain widespread misinterpretations, chiefly the beliefs that SR owes nothing to electrodynamics (kinematical interpretation), that it deals with material systems not with every kind of physical system (mechanism), that it concerns solely reading of yardsticks and clocks (operationalism), that it is based on a redefinition of the simultaneity concept (conventionalism) and that the coordinates occurring in the Lorentz transformation are those of a geometrical continuum which, after all can be studied in a coordinate-free way (formalism)”.

reconstrucción de una cantidad considerable de teorías científicas. Su principal cualidad, es que caracteriza detalladamente la clase de modelos que conforman una teoría, sus diferentes componentes y las relaciones que se establecen entre ellos.

En aras de especificar una acepción del término general de teoría, los estructuralistas definen esta noción en dos niveles: el *elemento teórico ET* y la *red teórica*. Del segundo nos ocuparemos en la Sección 2.10, el primero está conformado por un núcleo conceptual K que una comunidad científica CC pretende aplicar intencionalmente I durante un intervalo histórico h :

$$ET = \langle K, I, CC, h \rangle .$$

En muchas prácticas, incluso para las teorías físicas más formalizadas como es nuestro caso, se habla del elemento teórico omitiendo CC y h pues su caracterización es compleja, de manera que suelen tomarse solo los primeros dos conjuntos para determinar $E.T.$:

$$ET = \langle K, I \rangle .$$

El núcleo K es el que suele expresarse de manera formal, no así las aplicaciones intencionales, también llamadas aplicaciones paradigmáticas. De éstas hablaremos primero.

Newton en sus *Principia*, además de presentar los axiomas, definiciones y reglas de la mecánica, mostró cómo se aplica la teoría en corolario tras corolario, proposición tras proposición, problema tras problema. “Hacer oscilar un cuerpo pendular en una cicloide dada”, “Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado en el centro de una esfera es atraído hacia cualquier segmento de la misma”, “Hallar la distancia de la Luna a la Tierra a partir del movimiento horario de la Luna”. Muchos de éstos son ejercicios básicos para quien estudia la física newtoniana y nos muestran para qué sirve la teoría newtoniana. Las aplicaciones, en su conjunto conforman una parte esencial de la teoría. Algunas se han vuelto incluso paradigmáticas, en el sentido de que son inseparables de la noción misma de la teoría. Otras son así consideradas gracias a que han servido de ejemplo para hallar nuevas aplicaciones.

La parte aplicativa específica en términos pre-teóricos los sistemas físicos a los que la teoría pretende aplicarse, de los que pretende que son regidos por sus constricciones-leyes (Balzer, Moulines y Sneed, 2012).

Para decidirse a aplicar una teoría a un problema, como calcular la velocidad de escape de la Tierra, es preciso determinar en qué ámbito se encuentra el sistema, de qué precisión requerimos y qué tanto estamos dispuestos a complicar nuestros cálculos, para poder decidir qué teoría utilizar. Es decir, si nos encontramos en el microcosmos o el macrocosmos; en sistemas de campo débil cuando la curvatura del espacio-tiempo es despreciable o en sistemas que viajan a velocidades relativistas. Los sistemas que viven en el ámbito de campo débil suelen describirse mediante la mecánica newtoniana, como es el caso del sistema Tierra-Luna. En cambio se habla de sistemas en el campo fuerte cuando tratamos con las cercanías de los agujeros negros o las estrellas de neutrones, incluso del sistema Sol-Mercurio, donde la curvatura del espacio-tiempo es ya relevante y para los cuales se aplica la relatividad general. De igual manera, se identifican los sistemas de altas velocidades en donde la relatividad especial es la que aplica, como sucede en el paradigmático ejercicio de calcular la edad del

hermano gemelo que viaja a gran velocidad. La mecánica newtoniana no se aplica actualmente al sistema que es el cosmos (aunque puede intentarse), no así la relatividad general, que es base del modelo cosmológico estándar. De igual manera hay problemas propios de la termodinámica, la cuántica, el electromagnetismo, etc. Debemos saber para qué sirve una teoría así como de un piano debemos saber que sirve para tocar música, y no sólo cómo funcionan sus componentes o si es de madera o marfil.

Las aplicaciones intencionales hacen referencia al mundo, al dominio al cual se pretende aplicar, que suele describirse en términos informales. El núcleo teórico no es suficiente para conocer el mundo. Las aplicaciones intensionales representan los fenómenos con los que una teoría trata. Adriana Gonzalo (2011) comenta que los modelos parciales, conformados por términos $T_{no-teóricos}$ podrían de algún modo acercarse a lo que Dalla Chiara y Toraldo di Francia llaman “modelo de datos”. Guerrero hace también esta observación: las estructuras conceptuales que se forman mediante los reportes experimentales deben estar conformados por términos no teóricos.

Dado un elemento teórico $E.T. = \langle K, I \rangle$,

[...] los elementos de I han de concebirse en términos de la estructura conceptual de K , es decir, en términos de las caracterizaciones o tipificaciones de los axiomas impropios, sino además se plantea que tienen que describirse mediante términos $T_{T-no-teóricos}$.

[...] si las aplicaciones intencionales se caracterizan mediante términos relativamente teóricos entonces estas presuponen la teoría, por tanto, si no queremos caer en un círculo vicioso, no pueden ser la piedra de toque para la teoría misma. En otras palabras, si la determinación de todos los conceptos contenidos en una aplicación intencional supusiera siempre la validez de la teoría, esta sería *a priori* válida, por lo tanto no sería una teoría empírica. Precisando, los sistemas empíricos a los cuales se pretende aplicar el núcleo teórico deberán ser conceptuados como estructuras del tipo de los modelos parciales de la teoría y no como estructuras del tipo de los modelos potenciales. Es decir, las aplicaciones intencionales son estructuras que son compatibles con el núcleo teórico pero no presuponen la validez de la teoría en cuestión (Guerrero, 2003).

Aunque en esta tesis no se incluyen en los contextos las aplicaciones intencionales, se esperaría encontrarlas en niveles superiores a los modelos potenciales.

Pasemos ahora al núcleo teórico K que expresa los conceptos fundamentales en sus distintos niveles y las leyes y constricciones que rigen su ámbito de estudio. A grandes rasgos equivaldría a la parte más formal de lo que Kuhn llama “el paradigma”, dado que esta estructura no es cuestionada por los científicos durante el período de “ciencia normal”. En términos lakatosianos, es el “núcleo duro” de un programa de investigación que se mantiene intacto a pesar de las refutaciones que pueda recibir, gracias a que las reformas que se llegan a hacer suceden en la parte accidental, también llamada el cinturón protector de hipótesis específicas. Esto se debe en parte a que el núcleo, es decir las leyes fundamentales, por sí mismas no producen consecuencias empíricas contrastables. Para hacerlo, se requiere de leyes especializadas y una

buena cantidad de hipótesis auxiliares que pudieran caracterizar los modelos con propiedades particulares, como lo es una distribución isotrópica y homogénea del espacio, distribuciones estelares simétricas, sistemas ideales sin fricción, materia inobservada, etc. Cuando una teoría falla en predecir las observaciones, son las hipótesis auxiliares las que suelen modificarse en primera instancia, protegiendo así el núcleo de la teoría, por ello estas tesis son difíciles de falsar. Para los estructuralistas, dado el gran número de cuantificadores existenciales, las teorías son infalsables. Los físicos pueden convertirse en maestros del “epiciclismo”, ideando hipótesis auxiliares para sostener sus programas de investigación. Nos concentraremos por lo pronto en el corazón o núcleo teórico.

El núcleo conceptual K es el presupuesto mínimo del elemento teórico, y está a su vez, conformado por distintas clases de modelos y una serie de ligaduras o vínculos L .

$$K = \langle M, M_p, M_{pp}, L \rangle$$

Por ejemplo, en *Exploraciones Metacientíficas* (1982a), Moulines reconstruye la mecánica clásica de partículas MCP de la siguiente manera:

Definición. x es un modelo de la Mecánica Clásica de Partículas syss existen P, T, s, m, f tales que:

1. $x = \langle P, T, s, m, f \rangle$
2. P es un conjunto finito no-vacío (que representa un conjunto de partículas físicas).
3. T es un intervalo cerrado de número reales (que representa el intervalo temporal durante el cual se consideran las partículas).
4. s es una función del producto cartesiano $P \times T$ en el espacio vectorial R^3 , y s es dos veces diferenciable en T (s representa la función que determina la posición en el espacio de cada partícula en cada instante).³⁶
5. m es una función de P en los números reales positivos (que representa la masa de cada partícula).
6. f es una función de $P \times T$ en R^3 (que representa la fuerza resultante que actúa sobre cada partícula en cada instante).
7. Para todo p en P y para todo t en T se cumple: $m(p) \cdot D_t^2 s(p, t) = f(p, t)$.

Los modelos que cumplen con todos los axiomas del predicado son llamados modelos actuales, en este caso: $M(MCP)$. Los puntos 1-6 son axiomas impropios de la MCP. Éstos introducen cierto dominio y qué representa. Los puntos 2, 3 y 4 expresan caracterizaciones y/o tipificaciones pre-teóricas, es decir, de conceptos provenientes de la cinemática galileana, los términos no teóricos de la MCP. Los modelos que cumplen solamente con estos axiomas son los modelos potenciales parciales $M_{pp}(MCP)$.

Los axiomas 5 y 6 introducen términos $T_{teóricos}$ concebidos dentro de la teoría y conforman, junto con los M_{pp} , los llamados modelos potenciales $M_p(MCP)$. De los modelos potenciales no sabemos si cumplen con las leyes estipuladas, pero potencialmente podrían hacerlo. Los modelos potenciales M_p refieren a las estructuras que satisfacen los axiomas impropios.

³⁶Un espacio vectorial consiste en un conjunto de vectores, un conjunto de escalares, una regla de adición y una regla de escalamiento: $V_s = \langle V, S, +, \cdot \rangle$

El séptimo punto es un axioma propio que proporciona la ley fundamental y que relaciona los elementos definidos previamente. De manera que, los modelos actuales $M(T)$ refieren a las estructuras que además, satisfacen los axiomas propios que expresan relaciones entre los dominios y no meramente caracterizaciones matemáticas. De ello se sigue que $M \subseteq M_p$, tomando los modelos en su sentido extensional. Esta ley es empíricamente irrestricta. Las restricciones y el contenido empírico se suman al modelo actual de la teoría mediante leyes particulares conformando modelos especializados y constantes fundamentales. Éstos son los que dotan de contenido empírico al predicado conjuntista. Aquí figuran la ley de gravitación universal, la ley de Hook o la ley de Coulomb.

En el modelo presentado de la MCP no se mencionan a los sistemas de coordenadas ni los marcos de referencia. Éstos son conceptos auxiliares que pertenecen a teorías subyacentes a la MCP y se les adjudica a modelos previos.

Por otro lado, se identifican tres condiciones de ligadura L para la MCP, que en general expresan conexiones reales entre diferentes aplicaciones o conexiones entre modelos. En este caso, la condición de que la masa de un sistema mecánico compuesto sea la suma de las masas de sus partes, o que la masa de un objeto, por ejemplo un cohete (sin combustible) ubicado en la Tierra será la misma al llegar a la Luna: ésta es la condición de igualdad de la masa. Igualmente la condición de aditividad de las fuerzas. Estas condiciones, que pueden ser probadas experimentalmente, ligan modelos distintos, expresando ciertas simetrías que son comunes a muchos modelos, permitiendo deducir cálculos y valores de las funciones partiendo de otros modelos. A estas condiciones, tanto de definición como de ligadura también se les llama axiomas, o axiomas impropios, aunque con distinto estatus jerárquico. En ocasiones se les identifica como vínculos, y no deben confundirse con los vínculos interteóricos que conectan modelos entre distintos formalismos. Algunas veces son tomados como parte de la teoría, otras veces como parte de las constricciones adicionales C .

2.9. Noción de modelo

A diferencia de las teorías, que hablan en términos muy generales, los modelos son particulares y hablan siempre de casos y condiciones específicas. La noción de modelo es polisémica y muy variada. Por un lado los físicos llaman modelo al modelo atómico de budín de pasas de Thompson, al modelo atómico de Bohr con orbitales, al modelo de cebolla para el núcleo, al modelo de gota, etc. Son todas formas de referirnos a sistemas que no presuponen la existencia de las entidades que usan para el cálculo. Es decir, son modelos que sirven para predecir y describir algunos fenómenos de los que ni siquiera creemos que tengan esas cosas. El modelo aquí es un modo de llamar al sistema pero con la advertencia de que nadie cree que hayan cebollas ni pasas. Parece más bien una etapa de la investigación en donde tenemos la matemática pero no tenemos idea de lo que hay, de las entidades y procesos. Esta noción está en ciencia, no en filosofía o epistemología y es el resultado de la acción de modelizar. "Es la primera etapa en donde podemos reproducir el input-output."³⁷

A primera vista podemos distinguir dos contrasentidos: el modelo como la cosa pintada y la pintura de algo. Un jarrón como modelo para un bodegón, que a su vez puede servir de

³⁷H. Miguel, Correspondencia personal.

modelo para recrear una escena. El ser modelo o no, parece darse en la práctica, cuando un objeto o idea representa a otro. Un péndulo (de un reloj, por ejemplo) sirve de modelo como sistema empírico que encarna cierta estructura en este caso, la del oscilador armónico. A su vez, el oscilador armónico es un constructo teórico, matematizado, derivado de la teoría, que puede representar a todos aquellos objetos que oscilan armoniosamente. La noción de oscilador armónico es en realidad algo sin encarnadura, algo no empírico. Es una idealización que tiene una estructura abstracta. Cuando se lo interpreta empíricamente, se le otorga significado a los términos de las ecuaciones y al describir "exitosamente" una parcela de la naturaleza, o sistema concreto, se obtiene un "modelo teórico". De manera que, el péndulo, el resorte y el columpio son todos modelos empíricos del oscilador armónico que es un modelo teórico. Los modelos teóricos en las teorías físicas son sistemas de ecuaciones que nos permiten dar cuenta de una determinada porción de la realidad. Para ver si un sistema es o no un modelo de una teoría basta ver si satisface o no los axiomas de la teoría. Por ejemplo, el sistema Sol, Luna y Tierra es un modelo empírico del sistema de 3 cuerpos newtoniano pues se comporta, en cierta medida, como la teoría predice.

El que se le llame modelo a ambos, crea gran confusión. Tenemos el objeto que sirve de ejemplo, y una representación del objeto.

Casanueva (2005) estudia las variadas nociones de modelos que se han manejado en la filosofía de la ciencia del siglo XX, ofrecidas por Nagel, Maxwell, Black, Hesse y Harré, a saber: los modelos sustantivos, los formales, los semánticos, los modelos a escala, los analógicos, los matemáticos, los teóricos, los modelos lógicos, los icónicos, los homeomorfos y los modelos paramorfos... Los modelos de datos, siguiendo a Guerrero Pino, corresponden a una modelización de la experiencia, a una descripción estructural de la misma, por ejemplo, un reporte experimental estandarizado.

G.E. Romero (2018b) habla de modelos fácticos como representaciones conceptuales de mecanismos; matematizaciones de nuestras ideas sobre la realidad que se pueden caracterizar como un conjunto conformado por un dominio o clase de referencia D , un formalismo matemático F , una interpretación del modelo I y un conjunto de supuestos y datos específicos A como puede ser la composición de una estrella, su masa, su densidad, etc. Además de suponer ciertas teorías generales:

$$M = \langle D, F, I, A, T_1, T_2, \dots, T_n \rangle .$$

Casanueva señala que las nociones de "modelo formal" de Nagel, "modelo teórico" de Black, "modelo 1" de Hesse y "modelo lógico" de Harré recuperan la noción de modelo semántico de Tarski en su sentido lógico-matemático:

Dar un modelo para una teoría es dar una interpretación de sus términos (i.e., dotarlos de un significado concreto) tal que los axiomas (y teoremas) de la misma resulten verdaderos en esa interpretación (Casanueva, 2005).

A estas nociones Casanueva las cataloga con el nombre general de modelos teóricos.

La teoría del orden parcial, por ejemplo, consta de un conjunto y una relación binaria $P \langle U, \leq \rangle$ que cumplen con las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad. Esta teoría abstracta puede ser interpretada en un sentido lógico, geométrico o físico. Podemos

interpretar a U como el conjunto de todos los enunciados de un tipo y la relación de orden como la deducción lógica; o $I(U)$ = conjunto de puntos en una línea recta e $I(\leq)$ = estar a la izquierda de. Un tercer modelo resulta de interpretar U como un conjunto de cuerpos relacionados según cuál es más ligero. Una interpretación que no cumpla con las propiedades exigidas no será modelo de la teoría. Por ejemplo, si $I(U)$ = conjunto de insectos e $I(\leq)$ = ser más asqueroso que, se produce una interpretación falsa, ya que la asquerosidad no es transitiva.

Esta es la noción que encontramos tanto en *Foundations* como en *Una Arquitectonica*. Sin embargo, en el segundo texto se argumenta que los lógicos y los matemáticos utilizan consistentemente la noción tarskiana de modelo en el sentido de 'el objeto pintado'.

Los modelos son, por lo tanto, aquellas "cosas" pintadas por una teoría. Una teoría tiene normalmente muchos modelos diferentes. Por ser todos modelos de la misma teoría tienen algo en común. [...] todos ellos comparten *la misma estructura*. [...] Al decir "comparten la misma estructura" queremos decir esencialmente dos cosas diferentes al mismo tiempo: todos pueden ser subsumidos bajo el mismo "marco conceptual" y todos satisfacen las mismas "leyes" (Balzer, Moulines y Sneed, 2012).

Los modelos se subsumen en clases de modelos que comparten dichas estructuras.

[Lo que] identifica [a una teoría] es lo que dice sobre el comportamiento de determinada parcela de la realidad no cómo lo dice. Lo esencial es que caracteriza ciertos trozos de la realidad como comportándose de cierto modo. Esto es, que determina ciertos modelos (Diez y Moulines, 2008).

Lo que parece estar sucediendo es que se le está llamando modelo a cuatro cosas distintas que podemos distinguir más fácilmente utilizando la terminología del FCA y algunos diagramas: al modelo como objeto de un contexto, al modelo como el conjunto de atributos que posee el objeto (intensión), al modelo extensional como clase de modelos, y al modelo como el concepto-objeto de un contexto. Los diagramas de Venn y el retículo de la Figura 2.9.1 ilustran las relaciones entre los modelos (o clases de modelos) planteados por los estructuralistas desde las distintas perspectivas.

Como ya vimos, el estructuralismo distingue varias clases de modelos: los modelos actuales M , los modelos potenciales M_p y los modelos potenciales parciales M_{pp} . Estos modelos lo son en el sentido extensional, de manera que los M son un subconjunto de los M_p , y éstos de los M_{pp} . Los sistemas que cumplen con las leyes especializadas son menos que los que cumplen con las leyes fundamentales. La relación entre modelos es de inclusión. Los modelos especializados limitan el ámbito de aplicación de la teoría al introducir mayores restricciones o más relaciones entre los dominios.

El modelo intensional se conforma por la colección de atributos de un objeto. El diagrama de Venn correspondiente representa una relación inversa a la de los modelos extensionales. Esta noción de modelo es la que se planteó en la sección 1.6, como conjunto de atributos (modelo intensional), ya que en general, los objetos no son necesariamente modelos de una teoría, es decir, el nombre no se confunde.

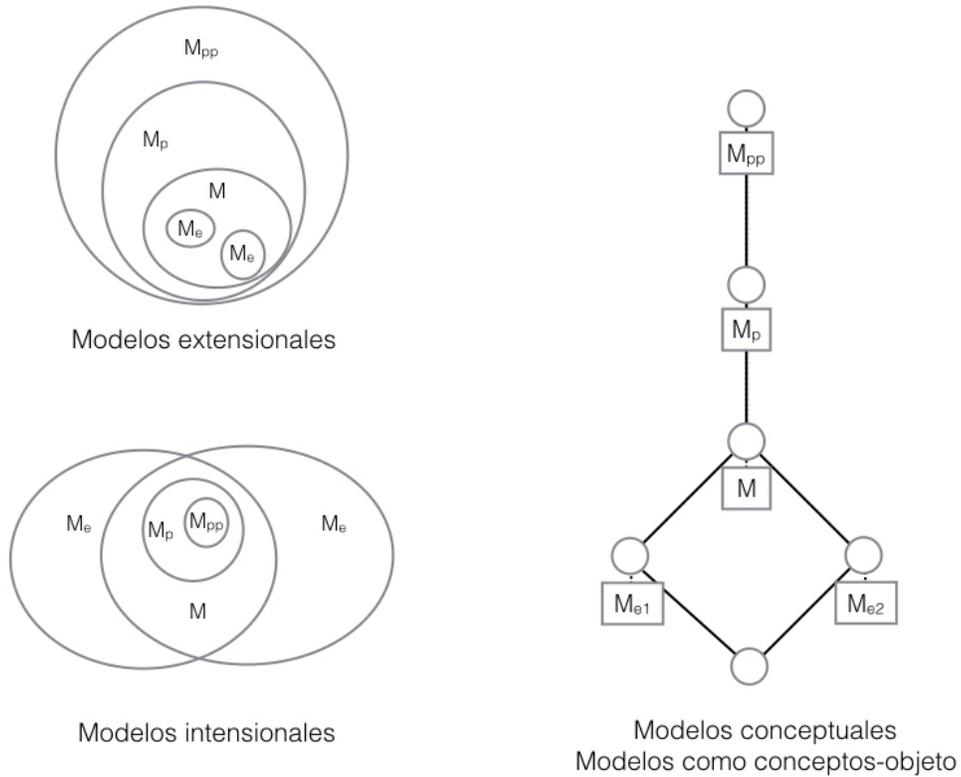


Figura 2.9.1. Diagramas que ilustran relaciones entre modelos potenciales previos M_{pp} , modelos potenciales M_p , modelos actuales M y especializados M_e , según la noción de modelo que se tenga: extensional, intensional o conceptual. Los M_{pp} contienen los dominios no teóricos de la teoría en cuestión, tipificados y caracterizados. Los modelos potenciales M_p introducen nuevos términos $T_{Teóricos}$. Los modelos actuales introducen las relaciones entre dominios más fundamentales de la teoría, que suelen venir acompañadas de constantes fundamentales.

El retículo conceptual en la Figura 2.9.1 presenta ambas características a la vez. Aquí las etiquetas de los conceptos-objeto señalan a los modelos, donde tanto la extensión como la intensión queda expresada.

Los modelos actuales son los que suelen seleccionarse como objetos del contexto, pero también pueden seleccionarse modelos más especializados o modelos previos. El nombre del modelo es el objeto y el renglón de atributos es el modelo intensional.

Los modelos concepto o conceptuales pueden tener distintos niveles jerárquicos y en algunos casos podremos decir que ciertos modelos se subsumen en clases de modelos. Recordemos que el criterio para determinar subconceptos es:

$$\langle \langle B_i, A_i \rangle \geq \langle B_j, A_j \rangle \rangle \Leftrightarrow (B_i \supseteq B_j) \Leftrightarrow (A_i \subseteq A_j)$$

y puede determinarse ya sea mediante las intensiones o las extensiones.

La estructura de los distintos modelos puede expresarse de la siguiente forma: Sea M_{pp} un concepto objeto, estará conformado por una extensión B_{pp} y una intensión A_{pp} . Es decir, $M_{pp} : (B_{pp}, A_{pp})$. De igual manera los conceptos-objeto $M_p : (B_p, A_p)$, $M : (B, A)$, $M_{e1} : (B_{e1}, A_{e1})$, $M_{e2} : (B_{e2}, A_{e2}), \dots, M_{en} : (B_{en}, A_{en})$.

Veremos que

$$\begin{aligned} B_{pp} &= (M_{pp}, M_p, M, M_{e1}, M_{e2}, \dots, M_{en}) \\ B_p &= (M_p, M, M_{e1}, M_{e2}, \dots, M_{en}) \\ B &= (M, M_{e1}, M_{e2}, \dots, M_{en}) \\ B_{e1} &= (M_{e1}) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} A_{pp} &= (D_1, Tip_1, C_1) \\ A_p &= (D_1, Tip_1, C_1, D_2, Tip_2, C_2, L) \\ A &= (D_1, Tip_1, C_1, D_2, Tip_2, C_2, L, R_A) \\ A_{e1} &= (D_1, Tip_1, C_1, D_2, Tip_2, C_2, L, R_A, R_1, E_1,) \\ A_{e2} &= (D_1, Tip_1, C_1, D_2, Tip_2, C_2, R_A, R_2, E_2,), \text{ etcétera.} \end{aligned}$$

Donde los atributos son los dominios D , sus tipificaciones Tip , caracterizaciones C y relaciones entre dominios R , así como ciertos elementos distinguidos E . Notamos que los distintos conjuntos de atributos de modelos especializados no están contenidos necesariamente unos en otros.

Ante la confusión, será necesario especificar de qué clase de modelo estamos hablando. En el caso en que no se toman en cuenta las ligaduras, el elemento teórico ET equivale al modelo actual, y por ello, y sólo en este caso, se habla igualmente de modelos, elementos teóricos y teorías.

En la siguiente sección hablaré un poco más sobre las relaciones de especialización y teorización entre modelos con la finalidad de analizar redes teóricas y sus correspondientes retículos.

2.10. Redes teóricas

Al revisar la reconstrucción de Moulines de la mecánica clásica de partículas (MCP) podemos preguntarnos ¿dónde quedaron la primera y la tercera ley de Newton? Las axiomatizaciones

enunciativistas de la mecánica newtoniana se las enlista como igualmente fundamentales. Aquí, dos ni aparecen. En *Exploraciones Metacientíficas* (Moulines, 1982a) se menciona a la primera, si acaso de paso como una derivación trivial del segundo principio, un teorema. Casanueva argumenta que esta postura se debe a la falta de consideración de los métodos de determinación de funciones (Casanueva en Santiago, 2000).

La primera ley se encuentra enmascarada en la forma en como es introducida la función de posición s . [...] Si nos olvidamos de los procesos físicos detrás de la noción de distancia no podemos construir la regla que determina la función.

Si uno simplemente dice que s es una función $P \times T$ a \mathbb{R}^3 , o un espacio afín a \mathbb{R}^3 , y que s es dos veces diferenciable en T , está presuponiendo muchas cosas acerca de la naturaleza del espacio, presupuestos que deben aflorar en una reconstrucción con miras al análisis filosófico y no permanecer ocultos bajo la leyenda: s se determina empíricamente y se supone dada.

De igual manera deben considerarse, como ya habíamos comentado, los experimentos con dinamómetros que no requieren invocar la segunda ley para medir fuerzas.

Así, puede postularse el siguiente lema: toda reconstrucción de una teoría empírica que desee dejar fuera el menor número de presupuestos posibles, debe otorgar especial atención tanto a la forma en que se construyen las reglas de asociación de las funciones involucradas en ella, como a la forma que permite la identificación de sus diferentes conceptos (Casanueva en Santiago, 2000).

Con respecto a la tercera ley, sabemos que solo algunos modelos mecánicos presentan el efecto de acción y reacción. Al contrario de lo que comúnmente se piensa, no todos los sistemas mecánicos la cumplen, por ejemplo, los sistemas inmersos en campos electromagnéticos. A estos modelos que sí la cumplen les llamamos newtonianos, y son una subclase de modelos de la MCP. De la misma manera, no todos los sistemas mecánicos cumplen con el principio de oscilación armónica o dependen de la velocidad del sistema, etc.

Esta distinción entre elementos teóricos se describe en el estructuralismo a partir de una relación de especialización teórica. La MCPN agrupa a todos aquellos modelos que cumplen con la MCP y con la tercera ley de Newton. Para dar cuenta de estos modelos específicos, se imponen progresivamente condiciones adicionales que conforman elementos teóricos más específicos o especializados de la MCP.

Un elemento T' es una especialización de otro T si la parte formal (las constricciones) de T' es una concreción de la de T y está destinada a dar cuenta de una parte de las aplicaciones pretendidas de T . En términos modelo-teóricos, ello significa lo siguiente: (1) los modelos determinados por las constricciones (leyes y ligaduras) del núcleo K' son parte de los determinados por K , esto es, los correspondientes conjuntos M' y GC' de K' están incluidos respectivamente en M y GC de K (pues se van imponiendo condiciones adicionales), mientras que la parte conceptualizadora de los elementos teóricos, los conjuntos M_p y M_{pp} , quedan igual; y (2) las aplicaciones de I' son algunas de las de I . La definición es pues la siguiente: donde $T'\sigma T$ abrevia T' es una

especialización $T : T' \sigma T$ sys def (1) $M'_p = M_p$, $M'_{pp} = M_{pp}$, $M' \subseteq M$, $GC' \subseteq GC$ y (2) $I' \subseteq I$. Como puede verse, la relación de especialización es reflexiva, antisimétrica y transitiva, esto es, de orden parcial (no estricto) (Diez y Moulines, 2008).³⁸

Los nodos de una red teórica representan las clases de modelos que son conceptualmente homogéneos y que mantienen estrechas relaciones entre sí; no son entidades aisladas y por tanto conforman un conjunto parcialmente ordenado. Una red teórica N es simplemente un conjunto de elementos teóricos parcialmente ordenado por una relación de especialización:

$N = \langle T_i, \sigma \rangle$ es una red teórica sys def (1) T_i es un conjunto no vacío de elementos teóricos y (2) σ es una relación de especialización sobre T_i . A cada red le corresponde un conjunto I_n de aplicaciones pretendidas, la unión de dominios I_i de los elementos T_i que la constituyen (Diez y Moulinez, 2008).

Los diagramas de redes teóricas muestran cómo se ramifican los elementos teóricos según la relación de especialización.

El estructuralismo distingue otros varios tipos de relaciones o vínculos en las redes teóricas, además de la relación de especialización (o de concreción o especificación) y de teoriedad, que ya vimos. Las relaciones interteóricas conectan modelos en el núcleo K mientras que los vínculos interteóricos que interconectan redes teóricas formando **holones teóricos** (totalidades); macro-unidades científicas que pueden englobar diversas redes teóricas o partes de una disciplina o incluso disciplinas diferentes y son fundamentales para elucidar algunas cuestiones relativas a la estructura global de la ciencia. Las **leyes puente** son un tipo de vínculo interteórico que relaciona, por lo general dos teorías mediante ecuaciones que relacionan magnitudes provenientes de distintas teorías. Por ejemplo, la famosísima $E = mc^2$, que relaciona el concepto de 'energía' originalmente proveniente de la termodinámica, con el concepto de 'masa', propio de la mecánica. Estos vínculos interteóricos, aunque son parte de lo que la teoría afirma de la experiencia, y aunque no son considerados propios de los modelos, son un componente importante del elemento teórico pues articulan teorías distintas. Como veremos en la Sección 3.5 el modelo actual de la relatividad general es considerado por Bartelborth como un puente (*link*) entre elementos teóricos de la mecánica de fluidos, la electrodinámica y la termodinámica.

Una Arquitectónica nos proporciona los predicados conjuntistas de dieciocho modelos especializados que conforman la red teórica de la MCP, y un diagrama que le representa (véase la Figura 2.10.1). Aquí, cada línea representa una relación de especialización y los nodos representan modelos.

Comparemos ahora este diagrama de la red teórica de la MCP con el retículo obtenido mediante FCA a partir del contexto de la Figura 2.10.1 que fue conformado apuntando cada uno de los axiomas dados en *Una Arquitectónica*. Las especializaciones correspondientes a la magnetostática (MCMP), a la gravitacional newtoniana (MCPMC), y la electrostática coulombiana MCPEC no se encuentran expresamente formuladas en el texto, por lo que no

³⁸GC: Ligadura global: refiere al efecto combinado o suma de las ligaduras.
 σ es una relación de especialización sobre T_i .

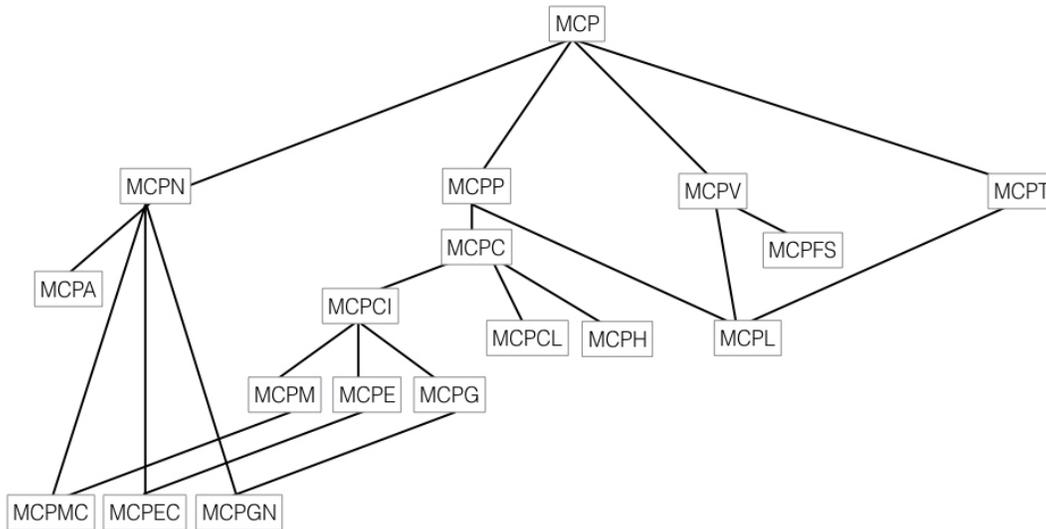


Figura 2.10.1. Red teórica de la mecánica clásica de partículas (en Balzer, Moulines y Sneed, 2012). Los nodos representan clases de modelos. Las relaciones se dan entre estos conjuntos. MCP: mecánica clásica de partículas; MCPN: newtoniana; MCPP: dependiente de la posición; MCPV: dependiente de la velocidad T: dependiente del tiempo; MCPA: aislada; MCPC: conservativa MCPCI: cuadrático Inversa; MCPCL: de carga libre; MCPH: de Hook M:magnética; MCPE: electrostática; MCPG: gravitacional; MCPL: de Lorentz; MCPMC: magnétostática coulombiana, MCPPC: electrostática coulombiana; MCPGN: gravitación newtoniana; MCPFS: de fricción simple

fueron incluidas en el contexto. El retículo resultante en la Figura 2.10.3 es muy semejante al original, pero encontramos varias diferencias interesantes.

El retículo despliega en abanico las etiquetas de los atributos, lo que permite ver cómo se están distribuyendo los axiomas. El retículo de 21 conceptos incluye expresamente los M_p y M_{pp} de la MCP, mostrando la relación jerárquica entre ellos. Observamos dos nodos extra, uno correspondiente a la carga eléctrica del electrón Q , un atributo compartido tanto por la MCPE como por la MCPL; el segundo, correspondiente a las fuerzas externas, que se dan en sistemas no aislados. Esto se traduciría en nombrar una clase de modelos con fuerzas externas (MCPF). También observamos que en varios de ellos se agregan nuevos dominios, como los campos eléctrico y magnético, y que los elementos distinguidos aparecen con las leyes más especializadas. Al desplegarse todos los atributos vemos fácilmente que en los modelos especializados de MCP hay una teorización, es decir se agregan nuevos dominios que no son parte del modelo potencial de MCP. Es decir, $M'p \subseteq Mp$, tomando el modelo extensional. Podemos decir que en este caso, el FCA reproduce y mejora la representación gráfica de las redes

y teorización en los retículos mostrados aquí y en los siguientes dos capítulos. Un modelo especializado es simplemente un modelo de un modelo actual. Es decir, que contiene todos los atributos del modelo actual más otros atributos. Una teorización será un modelo especializado que incluya nuevos dominios o elementos distinguidos. Esto nos hace ver que la red teórica no está compuesta solamente de modelos especializados en el sentido de agregar nuevas relaciones y condiciones específicas del sistema, sino que en muchos de ellos hay una teorización, es decir, la inclusión de nuevos dominios, de nuevos referentes al mundo.

2.11. Recapitulación

Hemos visto que filósofos, físicos y matemáticos desde distintas posturas plantean en la mayoría de los casos el carácter jerárquico de las teorías físicas, las cuales, a diferencia hasta ahora con las ciencias sociales, tienen la ventaja de haberse fundamentado en ciertos axiomas y en teorías más básicas, y de escribirse mediante el lenguaje de las matemáticas. El fundacionismo reconoce que existen conceptos más fundamentales que otros, que hay una jerarquía entre teorías y entre conceptos, lo que está en sintonía con la metodología ofrecida por el FCA. La visión de un edificio de tabiques, de una estructura rígida se ha transformado en la de una red compleja de componentes característicos. Sin embargo, las estructuras que cada aproximación plantea son muchas y de distinta naturaleza.

La visión sintáctica-axiomática analiza por un lado la estructura dada por la relación de deducibilidad a partir de un conjunto de axiomas, y es representada mediante los árboles lógicos. Por otro lado analiza el significado de los términos mediante reglas de correspondencia con la base empírica. Los axiomas no están jerarquizados y se presentan como un listado de enunciados.

En contra postura, la visión semántica propone analizar las relaciones entre conjuntos de axiomas, los cuales se presentan mediante predicados conjuntistas. Aquí, la unidad de análisis son las clases de modelos (modelos extensionales) y sus relaciones internas y externas. Las teorías son más que sistemas de enunciados, pues se les puede analizar mediante formalismos no metamatemáticos, como el conjuntista. En ese sentido, las relaciones semánticas amplían las limitaciones de los análisis sintácticos y lingüísticos.

Las reconstrucciones semántico-conjuntistas ofrecen un sustento teórico para construir un contexto donde los elementos teóricos o modelos funcionan como objetos, y a los dominios, sus tipificaciones y caracterizaciones, sus relaciones fundamentales y elementos distinguidos, es decir, los axiomas como los atributos del contexto. Asimismo, hemos visto que de las diversas distinciones entre términos, la distinción *término teórico de T vs término no teórico de T* es identificable en los retículos. Ubicaremos los términos T_T en nodos inferiores al de los M_{pp} , en tanto los términos T_{no-T} los habremos de encontrar como atributos de los M_{pp} .

La teorización se da al agregarse nuevos dominios al modelo actual, y la especialización se da al agregar nuevas caracterizaciones y relaciones entre los dominios ya planteados. De manera que modelos especializados pueden ser también teorizaciones.

Las redes teóricas se plantean mediante la misma relación de cobertura que plantea el FCA, sin embargo la representación gráfica original es engañosa. Hemos visto que la visualización mediante FCA podemos indicar fácilmente la ubicación de los dominios y la relación

entre clases de modelos y de elementos teóricos, mostrando ser útiles para el razonamiento filosófico.

En el siguiente capítulo buscaré desmenuzar más las teorías clásicas del espacio-tiempo y la relatividad general con el fin de mostrar cómo las tipificaciones y caracterizaciones de los dominios tienen un papel preponderante en la distinción entre teorías, el problema de la equivalencia entre teorías y algunos otros ejemplos de teorización y especialización.

Retículos conceptuales de teorías del espacio-tiempo

En este capítulo presentaré seis retículos que ilustran las relaciones jerárquicas entre conceptos de varios modelos de espacio-tiempo. Modelos de las teorías conocidas como la leibniziana, la newtoniana, la galileana, la minkowskiana, la lorentziana, la pseudo-riemana, la lagrangiana, la hamiltoniana y la métrico-afín. Pueden vérselos como modelos previos o protofísicos, sobre los que se montan muchas teorías físicas que buscan describir el movimiento de los cuerpos, como la relatividad especial y la general, la mecánica y la electrodinámica. A estas últimas Michael Friedman también les llama teorías del espacio-tiempo por versar sobre el cambio en la posición de los objetos. Estas teorías protofísicas y sus relaciones semánticas son muy importantes pues forman la punta del retículo *ice-berg* del holón teórico que esperamos conformar,¹ por lo que es recomendable familiarizarse con sus componentes.

El interés en la Sección 3.1 y 3.2 se centra en esclarecer aquellos listados de fórmulas con los que nos podemos encontrar al intentar conformar un contexto proveniente de diversas fuentes. Esto implica también conciliar diversas notaciones y formulaciones, así como conocer el significado de los términos para poder identificarlos; definir etiquetas, clases adecuadas y enriquecer la discusión en torno a las redes. La conciliación entre formulaciones y notaciones permite extender el contexto e incorporar fácilmente otras teorías de más reciente creación. Esto no es fácil, pues como veremos existen múltiples formalismos, formulaciones, notaciones y axiomatizaciones. El mismo Einstein cambió en repetidas ocasiones su postura respecto a cuáles son los fundamentos de su teoría general de relatividad (véase Norton, 1993). En múltiples ocasiones se mencionan los principios de equivalencia, de Mach y de covarianza como sus fundamentos; sin embargo es ahora mayormente aceptado que éstos son principios heurísticos, teoremas o principios metanomológicos (que hablan de las leyes y no de los objetos). Es común que tanto físicos como matemáticos utilicen teoremas o distintos conjuntos de axiomas para generar sus teorías.

Para abordar el problema identificaremos en la Sección 3.3 dos estrategias de construcción que resultan en discusiones filosóficas sobre el realismo: la estrategia aditiva de Riemann, postulando una topología a la que se le agregan propiedades geométricas; o de manera subtractiva a la Klein, donde los espacio-tiempos son sobre-caracterizados para luego restringir sus propiedades. Veremos que ambos caminos son útiles para explorar el contexto. Iniciaremos la exploración contextualizando las nociones topológicas y geométricas pertinentes, avanzando sobre el significado de los atributos para concluir con la interpretación de los retículos obtenidos.

¹Véase retículos *iceberg* en la sección 1.8.1.

En la Sección 3.4 se aborda el trabajo de Friedman, en *Foundations of Space-Time Theories* (1983), donde describe los modelos (actuales) de seis teorías geométricas del espacio-tiempo y ocho teorías físicas que describen el movimiento de los cuerpos, incluyendo dos versiones de la mecánica newtoniana: la relatividad galileana y la cinemática con espacio absoluto y dos versiones de gravitación newtoniana: la teoría de fuerza gravitacional que contrasta con su versión geometrizada de gravedad newtoniana en espacio curvo; la electrodinámica clásica, la electrodinámica de Maxwell-Lorentz, la relatividad especial y la relatividad general. El segundo y tercer retículo presentados en este capítulo están basados mayormente en este libro, apoyándome en (Dewar, 2016) para definir la teoría leibniziana y otras como el espacio de Maxwell, que no serán incluidos en esta tesis, pero que pueden ser de interés. Para definir el espacio métrico afín y extender el contexto me basé en el artículo de Sotiriou y Farahoni (2010). Se sugiere consultar estos textos para complementar la lectura de los retículos. No se pretende aquí reproducir sus trabajos, más bien ilustrarlos y conjuntarlos; sin embargo, será preciso sí asentar algunos conceptos que componen parte importante del dominio del que estaremos hablando de aquí en adelante. Textos recomendados en la materia: Lawrie (2012), Misner *et al.* (1973) y Maudlin (2012).

El problema de la equivalencia entre teorías se tratará brevemente en la Sección 3.6, utilizando como ejemplo el caso de las teorías lagrangiana y hamiltoniana, y que es en parte ilustrado mediante un retículo basado en una tabla que ofrece Bunge en *Foundations of Physics*. Otro ejemplo que presento es el resultado del análisis de las tablas de signatura encontradas en *Gravitation* de Misner *et al.* (1973) La investigación al respecto nos lleva a los trabajos contemporáneos de Thomas Barret (2018) y Jill North (2009), donde la discusión filosófica va dirigida a las diversas nociones de equivalencia y la relación entre la estructura teórica y la estructura del mundo.

3.1. La geometría física y la variedad diferenciable

En 1826 Nikolai Lobachevski propuso estudiar el controvertido quinto postulado de Euclides mediante el método de reducción al absurdo, negando la afirmación de que dado un punto y una recta existe solamente una paralela a dicha recta que pase por el punto. Esperando llegar a una contradicción, Lobachevski obtuvo un sistema lógico con sus propias implicaciones, y sorprendentemente, sin ninguna contrariedad. Él mismo señaló que la no contrariedad debía deducirse de la posibilidad de aritmetizar la geometría utilizando transformaciones analíticas y fórmulas de la trigonometría hiperbólica.²

Un año después, Gauss publicó su teoría de superficies en la que utiliza las ahora llamadas coordenadas gaussianas, en vez de las cartesianas y esféricas, para describir las geometrías no euclidianas, los espacios hiperbólicos donde las líneas paralelas pueden cruzarse o la suma de los ángulos internos de un triángulo no necesariamente suman 180° .

Bernhard Riemann presentó en 1854 su famosa ponencia “Sobre las hipótesis en que se funda la geometría”, explicando que el espacio que de hecho aparece ante nuestros sentidos es un caso particular de tres dimensiones de los muchos espacios —a los que llamó variedades— que pueden imaginarse e incluso posiblemente existir. Los espacios se distinguen en particular

²Véase también *Geometry as an Object of Experience* (Hacyan, 2009).

por la manera en que se definen las distancias (no es lo mismo una línea recta en un plano que en la superficie de una esfera), y al establecerse estas relaciones métricas, estas reglas de cómo medir distancias, es que puede definirse la curvatura o tipo de espacio que se tiene.

Se sabe que la geometría admite como dado *a priori* no sólo el concepto de espacio, sino también las primeras ideas fundamentales de las construcciones en el espacio. Puesto que no da de estos conceptos sino definiciones nominales, las determinaciones esenciales se introducen bajo forma de axiomas. Las relaciones mutuas de estos datos primitivos permanecen envueltas en el misterio; no se percibe bien si están necesariamente ligadas entre sí, ni hasta qué punto lo están, ni siquiera *a priori* si pueden estarlo.

[...] una magnitud de dimensiones múltiples es susceptible de diferentes relaciones métricas, y [...] el espacio no es, por tanto, más que un caso particular de una magnitud de tres dimensiones. Se deduce de esto, necesariamente, que las proposiciones de la geometría no pueden deducirse del concepto general de magnitud, sino que las propiedades por las cuales el espacio se distingue de toda otra magnitud imaginable de tres dimensiones no pueden ser deducidas más que por la experiencia. De aquí surge el problema de buscar los hechos más simples por medio de los cuales puedan establecerse las relaciones métricas del espacio, problema que, por la naturaleza misma del objeto, no está completamente determinado; pues se pueden indicar varios sistemas de hechos simples, suficientes para la determinación de las relaciones métricas del espacio. El más importante, para nuestro objeto actual, es el que Euclides ha tomado por base. Estos hechos, como todos los hechos posibles, no son necesarios; no tienen sino una certeza empírica y constituyen las hipótesis. Se puede, pues, estudiar su probabilidad, que es ciertamente muy considerable dentro de los límites de observación, y juzgar por esto del grado de seguridad de la extensión de estos hechos fuera de estos mismos límites, tanto en el sentido de los inconmensurablemente grandes, como en el de los inconmensurablemente pequeños.³

Las relaciones métricas del espacio físico sólo pueden obtenerse a partir de la experiencia, es decir de mediciones astronómicas y experimentos.

La geometría no euclidea no es algo ajeno, por el contrario, la encontramos en múltiples objetos comunes como los mapas geográficos, que intentan representar la forma de esferoide oblato que tiene la Tierra en un plano aplicando proyecciones que deforman las distancias y los ángulos. Así como el ojo observa que líneas paralelas se unen en el infinito, igualmente son concebibles los espacios proyectivos, no euclidianos tridimensionales y los multidimensionales.

La construcción de las geometrías no euclidianas se justifica por la posibilidad de utilizar sus deducciones para objetos que en la realidad existen. La circunstancia de que estas deducciones se formulan con términos de la geometría no

³B. Riemann, "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría". Traducción de la memoria póstuma de B. Riemann, publicada por R. Dedekind e incluida en el tomo XIII de las memorias de la Sociedad de Ciencias de Göttingen (1876).

tiene importancia esencial: las formulaciones geométricas se pueden modificar fácilmente de tal manera que correspondan a las propiedades de los objetos y fenómenos que se estudian (Smogorzhevskii, 1978).

La ventana abierta por Lobachevski dejó a la física el problema de investigar qué tipo de espacio es el espacio físico real, si éste es, como se pensaba, euclideo o no. Esto sólo se puede saber mediante mediciones muy precisas, de manera que la geometría empírica retomó su camino. La geometría física es una ciencia empírica que es estudiada en gran medida por las teorías gravitacionales "geometrizadas" como la relatividad general.

La geometría euclidiana en ocasiones no coincide con la experiencia sensorial, pero encaja, como mucho mejor aproximación al espacio real en lo local. La geometría física toma la geometría euclidiana como base, relacionando una de sus coordenadas con una función de tiempo. "Lo que es factualmente cierto es la geometría física, no la euclidiana".

Bunge distingue tres tipos de espacios:

1) Espacios abstractos de muchas clases y dimensiones, tales como los espacios topológicos, proyectivos, cartesianos (como los espacios de estados), euclidianos y riemannianos. Se trata de los objetos de otras tantas geometrías. "La experiencia y la medición resultan impertinentes en relación con estas teorías".

2) Espacio y tiempo físicos, considerados como rasgos objetivos del mundo. Son el objeto de las geometrías físicas contenidas en ciertas teorías físicas, en particular en la relatividad general de Einstein. A diferencia de las geometrías matemáticas, se supone que las geometrías físicas han de ser validadas a través de medidas de precisión. Hablamos de la geometría leibniziana que se distingue de la euclidiana al asignarle la función de tiempo; la galileana, la newtoniana y la geometría pseudo-riemanniana, entre otras.

3) Espacios fenoménicos (o de la experiencia), tales como los espacios visuales y auditivos de los humanos y otros animales. Son objeto de estudio de la psicología cognitiva, la cual ha descubierto que los espacios visuales y auditivos humanos no son euclidianos.

La distinción entre una teoría del espacio geométrica y una física puede ser vista claramente al asignarles diferentes significados físicos a los primitivos de la teoría abstracta D de espacios métricos. Los primitivos de D son un conjunto U y una función d no negativa, evaluada en R^+ en el conjunto $U \times U$ del par ordenado $\langle x, y \rangle$ de elementos de U (Bunge, 1967).^{4, 5}

Todas las teorías físicas en general, asumen la existencia de una estructura espacial definitiva, o simplemente presuponen una, generalmente la euclidiana con una función de tiempo. Bunge menciona unas cuantas excepciones como la termostática o la electrodinámica cuántica, que no se fijan en la configuración particular de sus objetos. "Cuando cierta geometría es asumida, se adopta sin más cuestionamientos, y suele ser el último atributo que los científicos están dispuestos a sacrificar". Bunge supone que la naturaleza del espacio-tiempo en sí no es ocupación de las teorías físicas; ni siquiera la relatividad general, que analiza las relaciones

⁴The distinction between a geometrical and a physical theory of space can be clearly seen by attaching different physical meanings to the primitives of the abstract theory D of metric spaces. The primitives of D are a set U and a nonnegative real valued function d on the set $U \times U$ of the ordered pairs $\langle x, y \rangle$ of individuals of U .

⁵Véase la axiomatización de un espacio métrico de dos dimensiones en el Anexo 2.

espacio-temporales, se pregunta qué es el espacio y el tiempo, algo que corresponde a la ontología. Newton adoptó la geometría euclidiana y un concepto de espacio absoluto, es decir, que sus partes no cambian con respecto a las otras. Su posición ontológica era sustantivalista: el espacio es una cosa que existe por sí mismo como una especie de escenario o contenedor fijo en donde los objetos se mueven. Sin embargo, no queda claro en dónde es que hay que fijar el punto de referencia con respecto al cuál medir. De ser necesario, se fija a conveniencia, ya sea en la Tierra, en el Sol, en el centro de la galaxia, etc. Este contenedor es rígido e inmutable, y es el que Kant toma como *a priori*. La visión opuesta, el relacionismo, defendido por Gottfried Leibniz, supone que la existencia del espacio y del tiempo dependía de los objetos reales: “el espacio es el orden de los coexistentes y el tiempo de los sucesivos, no cosas”. Éstos no tienen una existencia autónoma, el tiempo es una propiedad emergente de las cosas cambiantes y el espacio una propiedad relacional de las cosas interactuantes. En un principio, Einstein pretendió apoyar la postura de Leibniz al tratar de implementar el principio de Mach en sus formulaciones, y oponiéndose a la postura absolutista newtoniana. Si no hay materia, no hay espacio-tiempo. Sin embargo en 1917 Willem de Sitter le hace notar que las soluciones a sus ecuaciones en el vacío son dinámicas; es decir, que el espacio-tiempo está en expansión y de hecho, lleva consigo energía que se transmite mediante ondas. El espacio-tiempo cambia, posee energía y temperatura, por lo que es material. Einstein entonces se convirtió en un supersustantivalista, argumentando que todo está conformado por la sustancia “espacio-tiempo”. Fue hasta el 2018 que Mario Bunge defendió una postura relacionista (véase Romero, 2018 y Bunge, 2018). Para hacerla compatible con la relatividad general se requiere interpretar la métrica como un campo físico como el electromagnético, pero más complicado. Esta visión relacionista la encontramos tanto en su *Foundations* como en el *Tratado de Filosofía*, Vol. III (Bunge, 1976). En 1998, Romero y colaboradores generalizaron y actualizaron la teoría relacionista de Bunge, haciéndola compatible con la relatividad especial, y aunque sugieren pasos para hacer lo mismo con la relatividad general, y la encuentran compatible con la mecánica cuántica, el relacionismo resulta una postura insostenible, pero no del todo descartada. El hecho de que el espacio-tiempo posea temperatura y entropía hace pensar en que esta sustancia no es fundamental, sino que es una propiedad emergente de interacciones más básicas. Dichas interacciones tendrían características similares a los llamados “centros de acción indivisibles”, “procesos básicos” o “mónadas” de Leibniz y tienen resonancia en proyectos como el Wolfram Physics Project que busca representar las relaciones generadoras del espacio y el tiempo mediante el lenguaje del cómputo. Las diversas interpretaciones ontológicas del espacio-tiempo nos previenen de juntar sin reparo axiomatizaciones de distintos autores, pues sus consecuencias lógicas no son las mismas.

Otra distinción entre la visión absolutista o sustantivalista y la relacionista es que el espacio puede ser un continuo de puntos o un conjunto de eventos físicos. Friedman (1983) expresa que la visión adoptada en su *Foundations of space-time theories* es absolutista, en el sentido de que el espacio-tiempo se considera un contenedor (aunque en 4 dimensiones), conformado —como veremos más adelante, por todos los puntos de la variedad M y por los objetos geométricos definidos, junto con todas sus propiedades, y no sólo por el conjunto P de eventos

físicos o trayectorias posibles. En contraste, la metáfora relacionista leibniziana del espacio-tiempo es una representación de posibilidades, es decir, P está embebido en M . Un espacio-tiempo es un espacio de eventos, que en principio se supone continuo y sin quiebres abruptos (diferenciable), pero que solo asentamos ante la cercanía y coincidencia de marcadores como el empalme de dos manecillas o la alineación de dos astros.

La visión absolutista moderna (es decir, sustantivalista) lleva a plantear los modelos bajo estructuras formales más poderosas. Es decir, que el espacio-tiempo tenga las mismas cualidades que las proporcionadas a la variedad por los objetos geométricos postulados. Y se espera que estas estructuras sean tomadas de forma literal y no sólo como meras representaciones. Las entidades observacionales primitivas se definen mediante estas entidades geométricas abstractas. Friedman argumenta que esta diferencia ontológica tiene implicaciones teóricas importantes. Las estructuras de nivel superior proporcionan relaciones y propiedades que no se encuentran disponibles en estructuras de bajo nivel. Muchas veces estas relaciones y propiedades permiten formular leyes más precisas.

La estructura matemática que se asocia al espacio-tiempo es la **variedad diferenciable** M . Se trata de un conjunto de puntos (un espacio) más la colección de todos los subconjuntos de puntos del espacio (una topología discreta) y una noción de continuidad dada por los números reales. Para garantizar la continuidad se requiere establecer correspondencias, llamadas mapeos, entre puntos del espacio y conjuntos de números reales, de manera que funciones continuas definidas en la variedad aplicadas a los puntos P heredan las características de los puntos definidos en \mathbb{R}^4 : $f(P) = g(x_0, \dots, x_3)$. Esto conforma un espacio con una *topología natural*. Cada uno de los puntos P corresponderá a un único evento y la totalidad corresponde a la historia de nuestro modelo de universo (véase Lawrie, 2012).

La topología impone sobre el espacio dos estructuras: la local y la global. La topología local determina la forma en que las nociones de continuidad se aplican al espacio al observar la forma en que los conjuntos abiertos caben unos dentro de otros en regiones pequeñas. Localmente podemos decir que la variedad contiene vecindades homeomórficas al espacio euclidiano y que es continua y diferenciable; esto permite describir cantidades físicas como campos y trayectorias en términos de funciones diferenciables. La topología global determina la estructura general de M al observar cómo podemos sobreponer conjuntos de puntos de manera que se cubra todo el espacio; sin embargo, de esta estructura tenemos poca información.

En la clasificación de Friedman, las condiciones que se imponen a las teorías deben ser locales. Se asevera que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable en lo local porque todos los experimentos son de hecho locales. Nada nos dice cómo es el espacio tiempo en lo global, si es finito o infinito o si le faltan piezas o está desconectado. Incluso los modelos cosmológicos se elaboran bajo suposiciones locales. Los modelos locales pueden ser compatibles con muchas y diferentes topologías globales. Una condición global que se impone al espacio newtoniano es que sea plano. La única estructura topológica que posee una variedad abstracta y amorfa es la estructura euclidiana local, dada por el uso de n -tuplas de números reales como coordenadas. Esta estructura topológica local es común a todas las variedades riemannianas y pseudo-riemannianas (de espacio curvo y continuo), sin importar sus geometrías.

Las propiedades topológicas y geométricas de la variedad están dadas por estructuras adicionales: una estructura afín, una estructura conforme y una estructura métrica. La estructura afín consiste en el conjunto de reglas de transformación que conservan la noción de paralelismo y la razón entre segmentos de líneas paralelas. La estructura conforme respeta las relaciones angulares, mientras que la estructura métrica consiste en el conjunto de relaciones que conservan la noción de distancia entre puntos. Ésta se puede definir mediante reglas distintas, por ejemplo con un velocímetro y un reloj, o fijándonos en cuánta gasolina gastamos en un cierto recorrido, o determinando una función basada en las coordenadas, una función métrica.

La conexión afín es una regla muy general que nos va a decir cómo nos aproximamos de un punto a otro $\Gamma(P \rightarrow Q)$, y de esta regla obtendremos información sobre nuestra variedad diferenciable. Las nociones de paralelismo, curvatura, derivada covariante, y geodésica provienen de la conexión afín Γ . El transporte paralelo es una instrucción que define cómo transportar vectores a lo largo de una trayectoria, informando si continúan o no siendo paralelos al final del recorrido. Esta regla está dada por los coeficientes de la conexión afín y provee una medida de la curvatura de la variedad. De hecho, una variedad solo posee curvatura cuando posee una conexión afín, de lo contrario, la pregunta ni siquiera surge. En otras palabras, la conexión afín es cero en un espacio plano.

Para Einstein,

[...] el logro esencial de la relatividad general, llámese superar el espacio rígido (el marco inercial), está solo indirectamente conectado con la introducción de una métrica pseudo-riemanniana. El elemento conceptual directamente relevante es el 'campo de desplazamiento' (Γ_{ik}^l) [conexión afín], el cual expresa el desplazamiento infinitesimal de vectores (Einstein, 1955 en Blagojevic y Hehl, 2013).⁶

Einstein se refería, sin embargo, a la conexión métrica de Levi-Civita, que resulta de imponer ciertas condiciones a la conexión afín. Por ejemplo, que al transportar de forma paralela dos vectores, su producto punto se mantenga invariante. Es decir, el vector tangente mantendrá una longitud constante mientras es transportado a lo largo de una curva. La compatibilidad métrica nos asegura que la derivada covariante del tensor métrico es cero en todas direcciones: $\nabla g = 0$. La conexión métrica o conexión de Levi-Civita conserva la dirección de los vectores trasladados preservando su tamaño; es decir, la conexión es dependiente del tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}).$$

⁶“[...]the essential achievement of general relativity, namely to overcome 'rigid' space (ie the inertial frame), is only indirectly connected with the introduction of a Riemannian metric. The directly relevant conceptual element is the 'displacement field', which expresses the infinitesimal displacement of vectors”.

La conexión afín nos permite definir la llamada *derivada covariante* ∇_μ , cuya acción en un campo vectorial es de la forma:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + (\text{conexión}).$$

La derivada covariante nos ayuda a encontrar cómo transportar de forma paralela campos vectoriales de forma infinitesimal. Ya que el transporte paralelo está dado por la derivada covariante, es ésta la que provee la conexión. La derivada covariante es una generalización de la derivada direccional para campos escalares que también se aplica a campos vectoriales y tensoriales. Dependiendo del tipo de espacio en que nos encontremos y a quien se lo apliquemos obtendremos distintos resultados.

Por ejemplo, en el espacio plano, aplicado a un campo escalar, resulta en un campo vectorial y se le conoce como gradiente. La derivada covariante de una función escalar es equivalente a obtener la derivada direccional de una función escalar a :

$$\nabla_{\partial_i}(a) = \frac{\partial a}{\partial u^i}.$$

La derivada covariante aplicada a un campo vectorial en un espacio plano es simplemente la derivada ordinaria, siempre que nos aseguremos de diferenciar todas las componentes del vector y la base. Definida en una superficie curva, y desde un punto de vista extrínseco, la derivada covariante de un vector $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ es la tasa de cambio de un campo vectorial \mathbf{v} a lo largo de la dirección de \mathbf{w} con la componente normal de la tasa de cambio sustraída:

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dw} - \mathbf{n}.$$

Si $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = 0$, quiere decir que el vector \mathbf{v} está siendo transportado de forma paralela en la dirección \mathbf{w} . La derivada covariante en un espacio curvo, definida de forma intrínseca mediante coordenadas generalizadas tiene la misma definición que la anterior, pero con el problema de que los coeficientes cambian y no hay un vector normal.

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + V^\mu \Gamma_{\mu\nu}^k$$

donde los coeficientes de la conexión están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\delta g_{\mu\lambda}}{\delta x^\nu} + \frac{\delta g_{\nu\lambda}}{\delta x^\mu} - \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x^\lambda} \right)$$

siempre y cuando el tensor métrico g esté dado.

Una geodésica puede pensarse como la distancia más corta entre dos puntos o como la línea más recta entre dos puntos. Una curva geodésica es el camino más corto o recto posible en una curva o una superficie curva, y sucede cuando transportamos un vector tangente a lo largo de una geodésica: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$

Si tenemos una curva que es función de un parámetro λ entonces los vectores tangentes estarán dados por:

$$\frac{d^2 u^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} = \vec{0}$$

Aunque las geodésicas se obtienen a partir de la conexión afín, una geodésica no define la geometría de un espacio (véase Lawrie, 2012).

3.2. Generalizaciones, relativizaciones y simetrías

Riemann propuso generalizar los espacios geométricos a cualquier número de dimensiones y formas. Buscó ser lo más general posible, introduciendo el concepto de variedad para no relacionar esta noción tan generalizada con el espacio físico, representando los puntos con n -tuplas de números reales mediante los sistemas de coordenadas generalizadas: x_1, x_2, \dots, x_n . De esta manera pudo definir un elemento de línea n -dimensional generalizado. Debemos tener cuidado en no confundir las dos generalizaciones que se hacen aquí: una de coordenadas y otra de dimensiones.

El elemento de línea ds en coordenadas cartesianas (x, y) se obtiene mediante el teorema de pitágoras infinitesimal:⁷

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Haciendo una transformación podemos escribir el mismo elemento de línea en coordenadas polares (r, θ) como:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Se trata de dos representaciones del mismo segmento en dos dimensiones. El punto de vista cambia, pero el espacio es el mismo. Las características que se transforman con el cambio de coordenadas son extrínsecas a la superficie.

El mismo elemento de línea puede generalizarse de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2^2.$$

Esta expresión nos permite trabajar aún cuando no se haya definido un punto de vista, es decir, un sistema de coordenadas.

La generalización a n dimensiones resulta en la expresión:

⁷El teorema de Pitágoras no es cierto cuando se trabaja en bases de coordenadas que no son ortonormales, incluso si el espacio es plano:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2) \cdot (v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2).$$

Si $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ es una base ortonormal, entonces $\|\mathbf{v}\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2$, de lo contrario, los componentes están dados por el producto punto de la base de coordenadas:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = [\text{covector}] [\text{tensor} - \text{métrico}] [\text{vector}]$$

Los componentes de la matriz con una cierta base vectorial (sistema de coordenadas) están dados por el producto punto de los factores de la base.

En una variedad Riemanniana, el tensor métrico da un valor positivo a todo vector distinto de cero. Juntos, conforman un espacio métrico con una función de distancia. Al soltar el requerimiento de la positividad definitiva (*definite-positiveness*) obtenemos un espacio pseudo-riemanianno.

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j,$$

que también se expresa de forma abreviada como:

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j.$$

donde la sumatoria sobre todos los valores de los índices queda implícita al aparecer éstos repetidos en un mismo término.

Este elemento de línea generalizado (la forma cuadrática fundamental de la geometría diferencial) está dado por una serie de componentes g_{ij} que conforman el tensor métrico, al que le exigimos condiciones de simetría, i.e. $g_{ij} = g_{ji}$, y una norma positiva $ds^2 > 0$. Este tensor puede escribirse como una matriz de $n \times n$. Piénsese en una regla de 4 dimensiones que nos ayuda a medir distancias y ángulos entre vectores, y se usa para definir y calcular el largo de las curvas en la variedad. Tiene la característica de que su determinante no cambia al ser trasladado por el espacio-tiempo, en tanto sus componentes se ajustan en relación a unos y otros, conforme nos trasladamos. Es un objeto invariante. Para tener leyes covariantes, las ecuaciones de la física se pueden expresar en términos de objetos geométricos intrínsecos como los escalares, tensores o espinores, definidos en la variedad diferenciable M .

Un tensor métrico es también una función que manda un par de vectores a un real $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$. En el espacio euclideo en coordenadas cartesianas la matriz toma la forma $diag(1, 1, \dots, 1)$. Las características intrínsecas de las superficies estudiadas, como la curvatura o el elemento de línea son independientes de cualquier elección de coordenadas.⁸ Al hacer una transformación de coordenadas, los componentes de la matriz cambian, sin embargo el elemento de línea permanece siendo el mismo, es decir:

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j.$$

En cambio, si comparamos el elemento de línea de un espacio plano y uno curvo veremos que son distintos.

Dada una característica intrínseca a una superficie podemos encontrar un sistema de coordenadas con ciertas particularidades. Por ejemplo, la estructura euclidea está identificada con la existencia de coordenadas cartesianas y el elemento de línea pitagórico. En cambio, en el espacio curvo, las coordenadas cartesianas existen solo localmente. En la relatividad especial, el intervalo espacio-temporal que queda intacto es:

$$(3.2.1) \quad ds^2 = c^2 d\tau - d\ell^2$$

⁸En una geometría extrínseca, es posible seleccionar un origen fuera de la superficie y a partir de éste determinar una base de vectores canónica con los cuales medir. Pero en la geometría intrínseca, como la que se da necesariamente en la descripción de un espacio de cuatro dimensiones del cuál no nos podemos salir, la base vectorial va montada sobre el espacio a medir y cambia conforme el sistema se mueve, dejando de ser una base ortonormal.

donde τ es el tiempo propio, y $dl = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Junto con las transformaciones de Lorentz, esta ecuación expresa la estructura del espacio-tiempo de Minkowski, característica esencial de la relatividad especial. Los intervalos se clasifican en tres categorías según el valor de ds^2 : intervalos temporales si $ds^2 > 0$, intervalos espaciales si $ds^2 \leq 0$, y nulos si intervalos temporales si $ds^2 = 0$. Los distintos intervalos se representan gráficamente con los famosos diagramas de conos de luz.

Además de transformaciones de coordenadas podemos transformar las leyes físicas al posicionarnos en distintos marcos de referencia de manera que éstas conserven su forma. Las transformaciones de Galileo permiten conservar las leyes de movimiento al cambiar de un marco inercial a otro. Cuando Einstein y Grossmann incorporan el cálculo tensorial, toman el elemento de línea generalizado interpretando los subíndices, no como coordenadas geométricas, sino como variables. Esto hace posible posicionarse en distintos marcos de referencia, en particular los acelerados. Al escribir las ecuaciones en notación tensorial y remplazando la derivada ordinaria por la derivada covariante es que se tienen relaciones válidas bajo todo tipo de transformaciones de coordenadas.

Para Einstein, el principio de covarianza era un principio fundamental de la teoría de relatividad y la forma de introducir un principio de relatividad generalizada; sin embargo, esta postura ha sido muy criticada y ya no es considerada así (véase Norton, 1993). Los principios de relatividad son principios de simetría.

La idea detrás del principio de covarianza generalizada es que los sistemas de coordenadas son meras construcciones matemáticas descritas convenientemente para describir fenómenos y por tanto no deberían ser parte fundamental de las teorías físicas. Es un principio metanológico, que habla de cómo deben ser las leyes. Bunge ubica estos principios de invarianza como fundamentos profísicos de las teorías, y por tanto no entran dentro de los axiomas propios de las teorías físicas (véase Fig. 2.4).

Todas las teorías tradicionales del espacio-tiempo, en particular la mecánica newtoniana, pueden ser formuladas de forma covariante, cuestión asentada por Havas (1964). Estas teorías tienen el mismo grupo covariante, el grupo de todas las transformaciones admisibles, pero tienen distinto grupo de simetrías o de invariancias. El grupo de simetrías de la mecánica newtoniana es el grupo de Galileo, el grupo de simetrías de la relatividad especial es el grupo de Lorentz, y el grupo de simetrías de la relatividad general es el grupo general de todas las transformaciones admisibles.

En favor de la selección de formulaciones de su reconstrucción, Friedman argumenta que sólo en las teorías cuyos sistemas de ecuaciones son satisfechos por los mismos objetos geométricos en todos los sistemas de coordenadas (sólo las teorías covariantes) es que encontramos clases de modelos bien definidos y que sean independientes de cualquier selección de sistema de coordenadas.

3.3. Estrategias de construcción

La estrategia **aditiva** de Riemann consistió en extender los métodos desarrollados por Gauss para tratar con superficies de curvatura variable. Inició con una descripción muy empobrecida de lo que es un espacio, para dotarla poco a poco y de manera cuidadosa de propiedades geométricas, “haciendo un esfuerzo por asegurar que todas sus estructuras tuvieran un significado geométrico”(Norton, 1999).

Felix Klein (1872), propuso en cambio caracterizar las nuevas geometrías a partir de sus grupos de transformaciones característicos, yendo en oposición a la construcción de geometrías propuesta por Riemann. El programa *Erlangen* de Klein, llamado así por la universidad que lo acogió, buscó ordenar de forma sistemática la proliferación de geometrías sucedida durante el siglo XIX. La clave consistió en encontrar el grupo característico de cada geometría.⁹

Hay transformaciones espaciales que dejan las propiedades geométricas de las estructuras espaciales completamente sin cambios... Designamos la intension de todas estas transformaciones como el grupo principal de alteraciones espaciales; Las propiedades geométricas no se ven alteradas por las transformaciones del grupo principal. También, por el contrario, se puede decir: las propiedades geométricas se caracterizan por su invariabilidad bajo la transformación del grupo principal [Klein, 1872 p.463, en Norton, 1999].¹⁰

Klein trabajaba con geometrías de espacios proyectivos y uniformes, de curvatura constante o igual a cero. Su estrategia es **sustractiva**, consiste en sobre-describir el espacio y luego decidir qué partes de la sobre-descripción deben ser aceptadas como geoméricamente reales. Para saber si una descripción en términos de coordenadas es geoméricamente real es preciso revisar si la expresión analítica es un invariante del grupo de la geometría.

Siguiendo la lógica de Riemann, la relatividad especial se puede formular de dos maneras: la covariante lorentziana y la covariante generalizada. En la primera, la estructura métrica se adiciona al proponer el elemento de línea de la siguiente manera:

$$(3.3.1) \quad ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

En la segunda formulación, la estructura métrica se introduce mediante el elemento de línea

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

⁹Un grupo es un conjunto equipado con una operación binaria que tienen las propiedades de clausura, asociatividad, elemento identidad y elemento inverso.

¹⁰“There are spatial transformations which leave the geometric properties of spatial structures completely unchanged... We designate the intension of all these transformations as the principal group of spatial alterations; geometric properties are not altered by transformations of the principle group. Also, conversely one can say: geometric properties are characterized by their invariability under transformation of the principle group.”.

donde $g_{ik} = \eta_{ik}$ es una métrica que tiene la restricción de ser plana en toda la variedad. Si la geometría es la de Minkowski, entonces será posible escoger las coordenadas (ct, x, y, z) de

tal manera que $g_{ik} = \eta_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en todos los puntos P del espacio-tiempo.

η es conocido tanto como tensor de Lorentz como tensor de Minkowski.

La estrategia de Klein no requiere que se proponga el elemento de línea, pues éste se deriva de los invariantes del grupo de Lorentz.

De acuerdo con Norton (1999), Einstein utilizó la estrategia de Klein al desarrollar la relatividad especial, mostrando que las ecuaciones de Maxwell sí satisfacen el principio de relatividad, en tanto se reconozca la covarianza de Lorentz. Sin embargo, la misma estrategia no fue tan afortunada al desarrollar la relatividad general, pues el grupo general que admite todas las transformaciones no define un único elemento de línea. Sucede que el grupo de covarianza de la relatividad especial, coincide con el grupo de simetrías del espacio de Minkowski; pero esto no sucede en la teoría general. Mientras el grupo de covarianza crece, conteniendo toda clase de transformaciones arbitrarias, el grupo de simetrías del espacio que contiene a la relatividad general no admite simetrías no triviales.

Friedman traduce la estrategia aditiva en un efecto de “fiscalización de la estructura geométrica”, permitiendo que ésta sea objeto de investigación empírica. La estrategia sustractiva se traduce en una idealización de la estructura geométrica. Aquí la geometría es impuesta de forma convencional en el universo físico como un dispositivo para describir convenientemente la distribución concreta de la materia. Muchos como Lawrie (2012), Sotiriou y Farahoni (2010) se adhieren a esta estratagema:

En gran medida, las teorías especial y general de relatividad son teorías negativas. A esto me refiero en que consisten en relajar suposiciones incorrectas, aunque plausibles, que estamos inclinados a hacer acerca de la naturaleza del espacio y el tiempo, en lugar de introducir nuevas suposiciones (Lawrie, 2012).¹¹

Como veremos más adelante, la estrategia para agregar modelos al contexto como el espacio métrico-afín consistirá en una estrategia sustractiva, en el sentido de postular objetos geométricos muy generales para luego restringir su dominio y contradominio. Esto implicará un aumento en el número de atributos del contexto y en las intensiones de muchos modelos.

Derivación. De acuerdo con John Stachel (1999), el proceso de construcción de la relatividad general puede contarse en tres actos, siguiendo las publicaciones de Einstein entre 1907 y 1915:

- (i) El entendimiento del principio fuerte de equivalencia (1907-1908).

¹¹“To a large extent, the special and general theories of relativity are negative theories. by this I mean that they consist more in relaxing incorrect, though plausible, assumptions that we are inclined to make about the nature of space and time than in introducing new ones”.

(ii) La elección de una geometría riemanniana y el tensor métrico apropiado para un potencial Newtoniano relativista (1912-1913).

(iii) La búsqueda de las ecuaciones de campo apropiadas para dicho tensor métrico (1913-1915).

Por cinco años Einstein batalló con las matemáticas hasta que su compañero de estudios universitarios, Marcel Grossmann le sugirió que hiciera uso de la geometría no euclidiana de Riemann. También incorporó el cálculo tensorial que recién había sido desarrollado por Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita en 1900. Tras su visita a la Universidad de Göttingen en el verano de 1915, Einstein inició un intenso intercambio epistolar con Hilbert quien se había interesado en la teoría electromagnética de Mie y la gravitación. En noviembre 20 Hilbert presenta su trabajo a la Gesellschaft der Wissenschaften, la academia de Göttingen, derivando las correctas ecuaciones de campo a partir de un principio variacional de mínima acción y que incluían el término correspondiente a la traza del tensor de Riemann (Todorov, 2005).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

Dos días antes, Einstein, quien no pudo asistir al evento, había señalado que:

[I]a dificultad no estaba en encontrar ecuaciones covariantes generalizadas para el $g_{\mu\nu}$; esto es sencillo con la ayuda del tensor de Riemann. Lo que fue difícil en cambio, fue reconocer que estas ecuaciones forman una generalización, y esto es, una simple y natural generalización de la ley de Newton [Carta de Einstein a Hilbert, 18 de Nov, 1915 en Corry *et al.*, 1997].¹²

Einstein estaba preocupado por las consecuencias físicas de su teoría, en encontrar el balance entre las implicaciones matemáticas de un principio de relatividad generalizado y los requerimientos físicos como la existencia de un límite Newtoniano. El principio de equivalencia entre la masa inercial y la gravitacional, funcionó como principio heurístico que guió su razonamiento, sin embargo se le encuentra como un teorema en las reconstrucciones formales. Einstein llegó a las ecuaciones, como se dice, a pata, siguiendo sus intuiciones físicas. Y aún cuando en la versión que trabajó con Grossmann a principios de 1914 daba ya un papel importante al método variacional, lo abandonó por algunos meses al no lograr obtener todas las ecuaciones de forma covariante.

Hilbert, que seguía de cerca el trabajo de Einstein se topó con algunos mismos problemas, como lo muestran las pruebas de impresión de diciembre de 1915, previas a su publicación (véase Ferraris *et al.*, 1982). Sin embargo en la versión final de marzo de 1916, Hilbert hace uso extensivo del principio variacional aplicado a un Lagrangiano covariante. La covarianza generalizada se logró al hacer cambios en la definición de causalidad, al incluir la traza del tensor de Riemann. Durante 1916 Lorentz logra generalizar aún más el Lagrangiano de materia, influenciando a Einstein a soltar las restricciones que venía cargando para las coordenadas

¹²"The difficulty was not to find generally covariant equations for the $g_{\mu\nu}$; this is easy with the help of the Riemann tensor. What was difficult instead was to recognize that these equations form a generalization, and that is a simple natural generalization of Newton's law".

generalizadas y para la constitución de la materia en un artículo presentado el 26 de noviembre de 1916 (véase Todorov, 2005 y Wikipedia, 2020).

El procedimiento que Hilbert plantea es axiomático, pues parte de primeros principios, siguiendo el teorema de Noether que relaciona cantidades físicas conservadas con simetrías del sistema. El principio de mínima acción nos dice que el camino tomado por un sistema al pasar de un estado a otro es aquel que minimiza el cambio en la acción: $\delta S = 0$, donde ' δS ' designa la variación del funcional S de un conjunto de variables físicas q, q', q'' , que se refieren a un sistema físico. El principio de mínima acción puede utilizarse para derivar las ecuaciones de movimiento de la teoría newtoniana, lagrangiana, de la relatividad general y de la mecánica cuántica (siguiendo el camino de Feynman); es la presuposición detrás de esas derivaciones y detrás del teorema de Noether. La acción de Hilbert-Einstein es considerada el camino más elegante para llegar a las ecuaciones de campo, pues muestra la unidad de la teoría y sus invariantes.

Para obtener las ecuaciones de campo en ausencia de materia y energía (en el vacío), se toma S como la integral de una función escalar llamada lagrangiano \mathcal{L} que representa la densidad de energía por unidad de volumen.

$$S = \int \mathcal{L} d^4V,$$

El lagrangiano \mathcal{L} más sencillo que podemos proponer es una función escalar de la métrica y de sus derivadas: el escalar de Ricci R . Por su parte, el elemento del 4-volumen puede escribirse como la raíz del determinante (negativo) del tensor métrico, quedando la acción como:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x,$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico, y $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$ es la constante gravitacional de Einstein.

Los métodos variacionales solo fueron aplicados hasta principios del siglo XX. Anteriormente las leyes eran inferidas por otros métodos como la inducción. En la clasificación de Friedman la acción del Lagrangiano no se contempla en el análisis. Sin embargo, como veremos en las clasificaciones de teorías alternas en el Capítulo 4, la acción juega un papel fundamental en la distinción entre clases de teorías.

Formulaciones y notaciones. Una misma teoría puede ser formulada de diversas maneras y utilizar una variedad de notaciones, dependiendo del autor, e incluso dentro de un mismo texto, cada una de ellas con sus ventajas y desventajas. En materia de teorías del espacio-tiempo, encontramos la formulación diferencial mediante la cual podemos obtener ecuaciones de campo; la formulación integral, que nos brinda el principio de mínima acción; la de segundo orden, que en materia de gravitación se le conoce como formulación mediante parámetros post-newtonianos (PPN) y que abordaremos brevemente en el Capítulo 4; y la formulación covariante. La formulación diferencial puede obtenerse de la formulación integral si se aceptan ciertas consideraciones de continuidad y diferenciabilidad. Por ello la formulación integral es

más general. “La formulación integral es importante por razones semánticas y metodológicas, ya que contribuye a determinar el significado de primitivos y es susceptible a pruebas directas” Bunge (1967). La formulación de segundo orden permite trabajar los detalles de las teorías, pues hace contacto con los formalismos lagrangianos y hamiltonianos, que emplean potenciales medibles y no campos de fuerzas.

La formulación covariante la encontramos con dos notaciones: La primera corresponde a la notación propia del análisis tensorial, el método adoptado por Einstein, que depende de las coordenadas y es la que encontramos frecuentemente en libros de texto. Se trabaja con las componentes de los objetos geométricos postulados por la teoría en un sistema de coordenadas particular. Los componentes del objeto forman una k -tupla de funciones evaluadas en \mathbb{R} . Por ejemplo, el tensor métrico g consta de una 16-tupla de componentes $\langle g_{ij} \rangle$, mientras que los componentes de la conexión afín Γ forman una 64-tupla $\langle \Gamma_{ij}^k \rangle$.

La formulación independiente de coordenadas o intrínseca es propia de la geometría diferencial y toma los objetos de la teoría como varios tipos de mapeos abstractos. Los vectores tangentes son mapeos de funciones evaluadas en los reales a números reales; la conexión afín es un mapeo de campos vectoriales a campos vectoriales y los tensores métricos son mapeos de pares de vectores a números reales. Cuando la teoría se formula de esta manera, no se hace referencia a los sistemas de coordenadas, de manera que las ecuaciones seleccionan clases de posibles modelos dinámicos $\langle M, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi, T_\sigma \rangle$. Aquí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son objetos geométricos postulados por la teoría T . T_σ es el campo vectorial tangente a la clase de curvas σ en M . $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ satisfacen las ecuaciones de campo de T y T_σ satisface las leyes de movimiento de T . La teoría selecciona estas clases de modelos independientemente de la coordinatización que se haga de la variedad diferenciable M .

Un punto más a considerar en la formulación de la teoría es la selección que se hace del signo de los objetos geométricos como los tensores métrico, de curvatura y de Einstein. Aunque sus implicaciones físicas parecen no ser relevantes, sí es necesario apuntarla para mantener coherencia en los cálculos y seguir a diversos autores. Por ejemplo, la signatura del tensor métrico se indica explícitamente: $\langle +, -, -, - \rangle$, señalando que la coordenada temporal es positiva y las espaciales son negativas, o de forma abreviada: $\langle 1, 3 \rangle$. De esto veremos más en la Sección 3.6.

Las cantidades geométricas y físicas pueden ser categorizadas considerando los grados de libertad inherentes a su descripción: Los escalares son tensores de rango $(0,0)$; los vectores en geometría diferencial son tensores de rango $(1,0)$ y corresponden a vectores contravariantes en el análisis tensorial; los tensores de rango $(0,1)$ son llamados uno-formas en geometría diferencial y vectores covariantes en el análisis tensorial. Un tensor de rango (m,n) , desde el punto de vista del análisis tensorial, que define los tensores en términos de sus componentes, puede decirse que m corresponde al rango contravariante y n al rango covariante.

Otra notación que se encuentra frecuentemente en los textos fue ideada por Einstein, al representar las derivadas parciales de un campo tensorial con una coma y las derivadas covariantes con un punto y coma. Esta notación es una convención que implica la suma sobre un conjunto de términos indexados y permite abreviar expresiones.

La conexión plana y la conexión covariante se encuentran ambas como ∇ o $\bar{\nabla}$, según el autor, igualmente como D y \bar{D} ; pero D también se utiliza para la conexión afín y la conexión métrica, y en otros textos es la conexión métrica o de Levi-Civita se simboliza: $\{\overset{\mu}{\nu}\}$ o mediante una Γ , grafía que también es utilizada para representar las componentes de la conexión, los llamados símbolos de Christoffel.¹³ Hoy en día, los símbolos más utilizados para la derivada covariante, la conexión métrica y los símbolos de Christoffel son ∇ , $\{\overset{\mu}{\nu}\}$ y Γ respectivamente.

Al tensor de curvatura, o tensor de Riemann se le expresa en Friedman como $Riem(g)$ o $K \equiv R_{cd}^{ab}$. Este segundo símbolo es actualmente utilizado para identificar el escalar de Kretschmann $K = R_{abcd}R^{abcd}$, donde R_{abcd} es el tensor de curvatura de Riemann; sin embargo aquí seguiré la notación de Friedman, señalando que cuando la curvatura es cero, podemos encontrar las siguientes expresiones: $Riem(g) = 0$, $Riem(\eta) = 0$, $K = 0$, $Riem(h) = 0$.¹⁴ Fue importante identificar que K proviene o puede definirse en términos de la conexión afín y sus atributos son anteriores a la inclusión del tensor métrico, de tal manera que $K = 0$ es el mismo atributo compartido entre el espacio de Minkowski, el galileano, el newtoniano y, como veremos, a las teorías bimétricas y estratificadas. Ha sido necesario estandarizar la notación de manera que se puedan seguir los textos consultados, por un lado, se mantenga coherencia con otros textos más recientes y se ocupen símbolos que no causen problemas en el procesamiento de datos, así como de lectura accesible para el público. Por estas razones, por ejemplo, el símbolo $\{\overset{\mu}{\nu}\}$ no fue utilizado.

La notación utilizada en este texto es la siguiente:

Γ :	Conexión afín
Γ :	Símbolo de Christoffel
D :	Conexión métrica o de Levi-Civita
D :	Derivada covariante o gradiente
\bar{D} :	Conexión plana
δ :	Coderivada o divergente
d :	Derivada exterior o rotacional
∂_i :	Uno-forma
K :	Tensor de Curvatura de Riemann

Esta notación sigue sin ser apropiada para el análisis de datos, pues al exportar archivos en formato, digamos *excel* a un *csv*, las itálicas y las negritas no se distinguen de las fuentes normales, mientras que los gorrillos pueden causar errores. Estos caracteres se agregan al final de la visualización utilizando bibliotecas como *Mathjax*. Por estas razones en muchas ocasiones se optará por introducir texto.

¹³Sobre la naturaleza de estos símbolos véase (Patiño y Söhle, 2015).

¹⁴El tensor de Riemann en su expresión más general: $R_{\nu\sigma\tau}^{\mu} = \Gamma_{\nu\tau,\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma,\tau}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} \Gamma_{\nu\tau}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\tau}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}$ es un tensor de rango 4 con $4^4 = 256$ componentes. Si se toman en cuenta varias propiedades de simetría, entre ellas la antisimetría entre los índices σ y τ , puede mostrarse que solo 80 componentes son independientes. Cuando $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ es una conexión métrica como la que caracteriza a la relatividad general, el número de componentes independientes se reduce a 20. Una versión simplificada del tensor de Riemann es el tensor de Ricci, que se define al contraer dos de los índices del tensor de Riemann.

Con frecuencia –será por economía–, las reconstrucciones no especifican algunos elementos en los modelos, como pueden ser ciertas caracterizaciones o tipificaciones, o éstas están descritas un tanto aparte. En otras ocasiones, se ocupan nombres que no representan del todo la naturaleza del modelo. Esto puede ser causa de errores en la distinción entre teorías.

En caso de que dos objetos coincidan exactamente en intensidad será importante hacer una exploración de atributos. Por ejemplo, con frecuencia se encuentra el mismo modelo para el espacio pseudo-riemanniano y el lorentziano: $\langle M, \mathbf{D}, \mathbf{g} \rangle$, donde \mathbf{D} es la conexión métrica de Levi Civita y \mathbf{g} el tensor métrico, omitiendo una característica importante que les distingue: la definición de la signatura del tensor métrico. Caracterizaciones y tipificaciones son necesarias para distinguir muchos de los objetos a estudiar. La dependencia o no dependencia de cierta variable o el valor impuesto a cierto dominio o contradominio. Para relacionar adecuadamente las diversas teorías fue necesario incorporar al listado de atributos la definición de un objeto geométrico muy general, la conexión afín que, bajo ciertas condiciones y tipificaciones resulta en la conexión métrica, en la conexión plana o en la métrico-afín.

3.4. Retículos para las teorías de espacio-tiempo, siguiendo a Friedman y Dewar

En mi experiencia, son frecuentes las confusiones que se dan en torno a las diferencias que hay entre modelos de espacio-tiempos, a los que se les han dado nombres por razones históricas o de primicia autoral que no necesariamente reflejan la naturaleza propia del modelo. El mismo apellido puede en ocasiones referir a una característica de un modelo y a otra en otro modelo. Además, los términos geometría y espacio-tiempo llegan a utilizarse indistintamente. Por ejemplo, en una búsqueda rápida en el índice de términos al final del texto clásico *Gravitation* de Misner *et al.* (1973), los términos «Lorentzian o Lorentz space-time y Minkowski space-time no vienen indexados. Lo que se encuentra es *Geometría de Minkowski* que referencia a *Geometría Lorentziana*. Bajo *Geometría Lorentziana* encontramos tres referencias: global, en contraste con la geometría euclidiana, y la indicación de que el espacio-tiempo posee una geometría de Lorentz si y solo si el tensor de Riemann se desvanece. Ya dentro del texto se explica que el espacio riemanniano es localmente lorentziano, donde localmente lorentziano significa que la distancia propia o el tiempo propio está dado por la Ec.3.3.1 en algún sistema de coordenadas. Sin embargo, como ya habíamos comentado en la Sección 3.3, esta expresión caracteriza a la geometría de Minkowski. Puntualicemos que la geometría elegida describe clases de espacio-tiempos que son materiales. Por lo que coloquialmente se les intercambia. Pero es la geometría la que les representa, por lo que se esperaría que sus nombres conservaran una relación biyectiva. En la práctica esto no es así, por lo que es importante estar atentos a dichas confusiones que se transfieren a las bases de datos, y definir postura, por ejemplo al asignar nombres a las etiquetas de los objetos. El espacio (o geometría) de Minkowski está caracterizado por las transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones solo pueden aplicarse en el espacio lorentziano de forma local. En el espacio de Minkowski se aplican de forma global. El espacio de Minkowski es un caso particular de los espacios lorentzianos.

Por otro lado, se confunde la distinción entre el espacio-tiempo riemanniano con el pseudo-riemanniano también mal llamado semi-riemanniano, siendo el tensor métrico del primero de signatura siempre positiva, del pseudo-riemanniano no definitivamente positiva y el tercero un

término incorrecto pues no se refiere a la mitad de nada. El pseudo-riemanniano es una clase de modelos mientras que el espacio lorentziano es una subclase de al menos ocho posibles combinaciones de signatura que se pueden elegir para los tensores de Riemann, métrico y de Einstein. La subclase solo exige que la signatura del tensor métrico sea no definitivamente positiva. Es decir que el signo correspondiente a la coordenada temporal se distinga de las coordenadas espaciales. En la Sección 3.6, analizamos estas diversas combinaciones.

Así pues, se requiere un diagrama para distinguir formalmente estos y otros espacios.

En esta sección presentaré dos retículos basados en la clasificación de Friedman de teorías del espacio-tiempo (1983), que incluyen ciertas teorías físicas como la cinemática galileana, la gravitación, la relatividad especial y general; en la clasificación de Dewar (2016) del espacio de Maxwell y de Newton Cartan, y en la clasificación de Sotiriou y Faraoni (2010) para el espacio métrico afín, utilizando la estrategia sustractiva, agregando objetos más generales a los modelos y ciertas restricciones.

La clasificación de Friedman fue seleccionada en gran medida por la forma sintética de presentar estas teorías mediante sus modelos (actuales) y utilizando dos formulaciones: la dependiente de coordenadas y la independiente, propia de geometría diferencial, funcionando como una piedra Rosetta que permitió incorporar fácilmente modelos y atributos de otras reconstrucciones.

Las clases de atributos que conforman los modelos son serie de objetos geométricos φ que dotan de propiedades geométricas a la *variedad diferenciable* M , por una serie de relaciones entre las variables R (caracterizaciones matemáticas que se imponen a los objetos y ecuaciones de campo y de movimiento). Las clases de modelos tienen la forma

$$m : \langle M, \varphi_1, \dots, \varphi_n, R_1, \dots, R_m \rangle .$$

Las relaciones, comprenden ecuaciones de movimiento y de campo, en donde entran también ciertas ecuaciones que restringen el codominio de las funciones, las cuales imponen condiciones sobre el sistema. Les llamaremos condiciones o constricciones.

El contexto inicial (Fig. 3.4.1), comprende solamente modelos del espacio-tiempo, formuladas todas de forma covariante en una variedad de cuatro dimensiones. Este ejercicio permite desmenuzar muchos de los elementos que componen los modelos espacio-temporales. El segundo retículo incluye ya teorías físicas como la cinemática, la gravitación newtoniana y la relatividad general; sin embargo no incluye, por razones de brevedad expositiva, las teorías electromagnéticas que sí son tratadas por Friedman. Tampoco se incluyeron explícitamente a los elementos distinguidos: la constante de gravitación y la velocidad de la luz. El retículo de espacio-tiempos puede verse como el retículo ice-berg del holón de 44 teorías presentado en la Sección 4.6, donde sí incluye explícitamente las constantes fundamentales.

En el nodo superior de la Figura 3.4.2 se encuentra la información topológica compartida por todas las teorías a comparar: la variedad diferenciable M de dimensión $N = 4$. Dos ligas se desprenden de este nodo, la que agrega una conexión afín y la que conecta con el espacio Leibniziano L .

En el espacio Leibniziano (L) no hay una noción de aceleración objetiva. Digamos que se trata del espacio Euclidiano de $3D$ más una cuarta coordenada que es el tiempo, pero que

Caracterización	$D(g)=0$					x	x	x		x	
Tipificación	$\langle 1,3 \rangle$						x	x			
Tipificación	Definitivo-positivo									x	
Tipificación	No-definitivo-positivo					x	x	x	x		
Caracterización	$H^2 \cdot K = H^2$		x								
Caracterización	$(dt \otimes K) = 0$		x								
Caracterización	$D(h) = 0$		x	x	x						
Caracterización	$D(dt) = 0$		x	x	x						
Caracterización	$dt(V) = 1$				x						
Caracterización	$D(V) = 0$				x						
Objeto geométrico	V				x						
Caracterización	$h(dt, w) = 0$	x	x	x	x						
Objeto geométrico	dt	x	x	x	x						
Objeto geométrico	h	x	x	x	x						
Caracterización	Torsion de Cartan=0		x	x	x	x	x	x		x	
Caracterización	Vector de Weyl=0		x	x	x	x	x	x		x	
Caracterización	No metricidad=0		x	x	x	x	x	x		x	
Caracterización	$K=0$			x	x			x			
Objeto geométrico	eta							x			
Tipificación	Independiente								x		
Tipificación	Dependiente					x	x	x		x	
Objeto geométrico	R^2								x		
Objeto geométrico	Escalar de Ricci					x	x	x			
Objeto geométrico	Tensor métrico					x	x	x	x	x	
Objeto geométrico	Conexión métrico-afín								x		
Objeto geométrico	Conexión métrica					x	x	x			
Objeto geométrico	Conexión de Newton-Cartan		x								
Objeto geométrico	Conexión plana			x	x						
Objeto geométrico	Conexión afín		x	x	x	x	x	x	x	x	
Variedad diferenciable	M	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Tipificación	N	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
			Leibniziano	Newton-Cartan	Galileano	Newtoniano	Semi-Riemanniano	Lorentziano	de Minkowski	Métrico-afín	Riemanniano

Figura 3.4.1. Contexto para teorías del espacio-tiempo, obtenido a partir de las clasificaciones de Friedman (1983), Sotiriou y Faraoni (2010) y Dewar (2016).

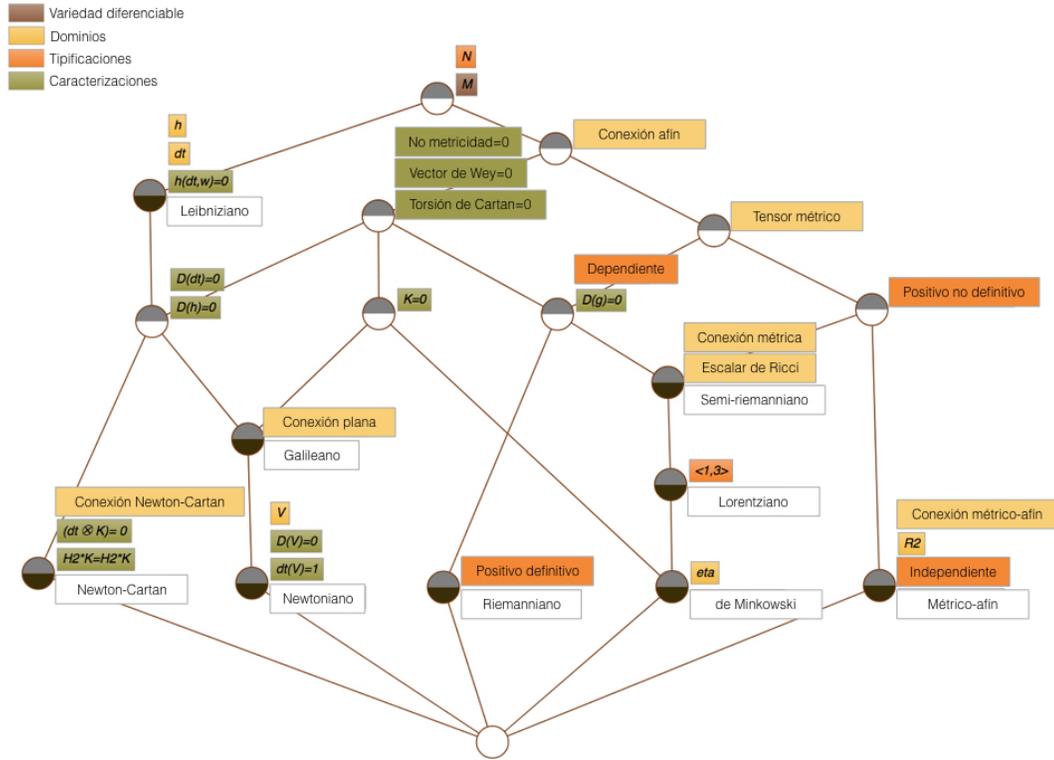


Figura 3.4.2. Retículo conceptual para la red de teorías geométricas del espacio-tiempo.

se encuentra desacoplada. La noción de distancia espacial (métrica) está dada por el tensor h^{ab} de rango $(2,0)$ y signatura $\langle 3,0,1 \rangle$, y un vector t_a que apunta al futuro y que nos da una noción de duración temporal (véase Dewar 2016).

$$L = \langle M(N), dt, h \rangle = \langle \text{Eventos}, \text{Tiempo}, \text{Distancia} \rangle$$

El espacio-tiempo Galileano (GST) añade al modelo Leibniziano una noción de aceleración objetiva de las partículas en el espacio tiempo, y que está dada por la conexión plana \bar{D} .

$$GST = \langle M, dt, h, \bar{D} \rangle = \langle \text{Eventos}, \text{Tiempo}, \text{Distancia}, \text{Aceleración} \rangle$$

Además se requieren ciertas condiciones de compatibilidad como que las distancias no cambien en el tiempo: $\bar{D}(h) = 0$

Es interesante la distinción entre el espacio galileano y el newtoniano (NST), teorizaciones del espacio leibniziano, dado que se incluyen nuevas variables, además de restricciones o

condiciones. El espacio-tiempo Galileano requiere de condiciones de compatibilidad que exigen que la métrica no cambie en el tiempo, mientras que el espacio-tiempo newtoniano incluye además un campo vectorial tangente que proporciona un acordonamiento al espacio-tiempo como marco de referencia del reposo absoluto. Una condición metafísica extra, que ha resultado innecesaria hasta ahora. El espacio-tiempo galileano no sostiene la noción de un marco en reposo absoluto.

$$\mathcal{NST} = \langle M, dt, h, \bar{D}, V \rangle = \langle \text{Eventos}, \text{Tiempo}, \text{Distancia}, \text{Aceleración}, \text{Velocidad}_{\text{absoluta}} \rangle$$

En la literatura se encuentra fácilmente tanto al espacio pseudo-riemanniano como al lorentziano designados como el modelo $\langle M, g \rangle$. Una caracterización más fina delata que el espacio lorentziano sí especifica la signatura: $\langle 1, 3 \rangle$ (véase Nakahara, 2003). En muchas ocasiones éstos se llegan a confundir, por lo que se requiere incluir la signatura y la clase de signatura en el conjunto de intensiones.

El espacio-tiempo de Minkowski puede describirse bajo estos mismos términos si incluimos la condición de que el espacio-tiempo es plano de forma global, acotando el tipo de transformaciones que se pueden hacer a las de Lorentz. Aunque en el espacio-tiempo lorentziano siempre podemos encontrar puntos para los cuales el tensor de curvatura es cero localmente, en el espacio de Minkowski, el tensor de curvatura es cero en todo el espacio siempre. De manera que las transformaciones de Lorentz caracterizan el espacio de Minkowski y no el espacio lorentziano.

La relación entre el espacio lorentziano y el de Minkowski es de especialización, puesto que conserva el mismo dominio y sólo se añade una condición que impone la planitud del espacio-tiempo. La variable η puede tomarse como una redefinición del tensor métrico bajo la condición de que la curvatura sea cero, por lo que no se considera una teorización, dado que sólo se restringió el dominio. Sin embargo, queda la duda de esta consideración cuando el modelo hace uso de ambas variables a la vez, como en el caso de las teorías bimétricas (véase Cap. 4). Debemos pensar sin embargo que esta acción de constreñir nuestro punto de vista, nuestra representación de la física en base al marco de referencia seleccionado es en sí un acto de teorización.

Finalmente, he agregado el espacio-tiempo métrico-afín, caracterizado por poseer una conexión afín más complicada, donde la parte antisimétrica conocida como torsión no se desvanece. Además la conexión métrico-afín es independiente del tensor métrico. Hablaré más sobre las teorías métrico-afines en la Sección 4.2,

Al contexto anterior añadiremos ahora las teorías físicas que analiza Friedman (véase 3.4.3). Resaltemos primero la ubicación de éstas dentro de la red resultante en la Figura 3.4.4 Los nuevos objetos se ubican en niveles inferiores, mientras que los modelos espacio-temporales quedan en niveles superiores, al igual que los objetos geométricos. En la parte superior, se plantea una topología y una geometría, es la punta del ice-berg. Una vez puesto el escenario, se desarrolla la física. Se caracterizan los campos físicos o fuerzas y las ecuaciones de movimiento.

Uno de los artilugios que permitió simplificar este retículo, fue poner la densidad de masa ρ en términos de $T_{\mu\nu}$, siguiendo a Dewar (2018), en su reconstrucción de la gravitación de Maxwell, y en donde la gravitación galileana modelo está presentada de la siguiente manera:

- Un espacio-tiempo galileano $\langle L, \nabla \rangle$
- Un campo vectorial G^a
- Un campo tensorial T^{ab} de rango (2)

y que satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\nabla_a G^a &= -4\pi\rho, \\ \nabla^{[c} G^{a]} &= 0, \\ \nabla_n T^{na} &= \rho G^a,\end{aligned}$$

donde $\rho = T^{ab}t_a t_b$, L representa el espacio leibniziano, G_a el campo gravitacional y T^{ab} el tensor de energía-momento.

La teorización sucederá también al insertar el tensor de energía momento y definir una ecuación de campo, obteniendo la teoría de relatividad general. Ésta vive propiamente en el espacio lorentziano, tomando en cuenta que cualquier distribución de materia que genera la más extraña métrica puede de alguna manera diagonalizarse localmente encontrando un sistema de coordenadas apropiado donde las transformadas de Lorentz sean válidas.

Los atributos de la relatividad general se añaden al modelo del espacio-tiempo lorentziano: el tensor de energía momento, la ecuación geodésica y la ecuación de Einstein. La deformación del espacio-tiempo está íntimamente relacionada con los procesos dinámicos que en él ocurren, es decir, con el tensor de estrés-energía-momento $T_{\mu\nu}$, que no es un término teórico de la TGR sino que involucra magnitudes centrales de la mecánica, la termodinámica y la electrodinámica. $T_{\mu\nu}$ es una matriz compuesta por contribuciones que nos hablan de la densidad de masa-energía, del flujo de energía, de la densidad de momento y el flujo de momento.

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \text{Densidad - de - Masa - Energía} & \text{Flujo - de - Energía} \\ \text{Densidad - de - momento} & \text{Flujo - de - momento} \end{bmatrix}.$$

En la relatividad general, los cuerpos que caen libremente siguen trayectorias geodésicas en la métrica del espacio-tiempo, donde el tensor métrico de Einstein $G_{\mu\nu}$ da la curvatura del espacio-tiempo mismo, en relación directa con el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Digamos que el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

El modelo de la TGR está compuesto por: una variedad diferenciable de dimensión 4, la conexión métrica o de Levi-Civita, el tensor métrico g y el tensor de energía-momento T , la ecuación de Einstein y la ley geodésica (ecuación de movimiento).¹⁵ Cuando no está sujeto a confusión, el modelo de la TGR se denota como: $\langle M, \mathbf{D}, \mathbf{g}, \mathbf{T} \rangle$, donde \mathbf{D} simboliza la conexión métrica. Pero cuando se inserta la TGR dentro de un contexto que compara varias teorías, resulta que por un lado, aparecen atributos más generales, más fundamentales, que

¹⁵En el caso particular de un fluido adiabático e isentrópico donde la entropía es constante como el polvo, la ecuación geodésica no es independiente, sino que se sigue del hecho de que la variación del tensor de energía sea cero: $\nabla^\lambda T_{\mu\nu} = 0$ (véase Mendoza y Silva, 2021).

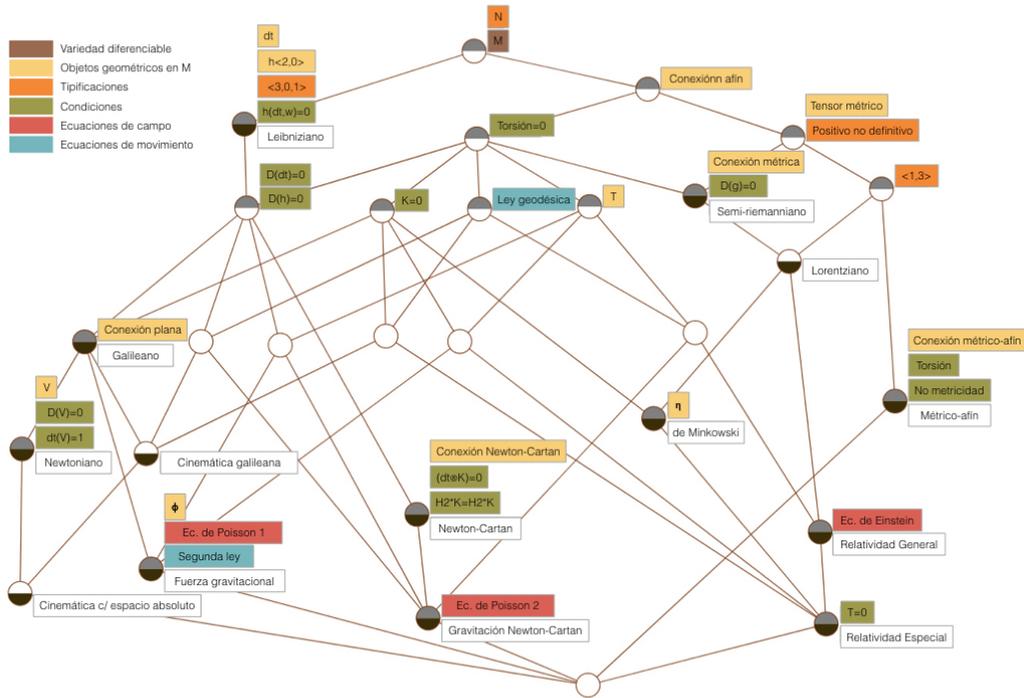


Figura 3.4.4. Retículo conceptual correspondiente a la clasificación de Michael Friedman de teorías del espacio-tiempo, incluyendo las teorías físicas gravitacionales y de relatividad.

no estaban contemplados explícitamente en el modelo, y que tienen propiedades que pueden o no ser condicionadas. Además, la simbología puede no ser compatible. La conexión afín es muy general, y de ella se deducen muchos objetos como los tensores de curvatura y de torsión.¹⁶ La conexión Levi-Civita está tipificada como dependiente de la métrica. Al comparar con teorías que asumen otras propiedades de la conexión afín, por ejemplo, que la torsión no sea cero, o que la conexión no sea dependiente de la métrica, resulta indispensable explicitar la descripción del modelo.

Notemos, que a diferencia de la clasificación de Bunge, aquí la teoría de relatividad especial queda como un modelo especializado de la relatividad general, cuando $T_{\mu\eta} \rightarrow 0$, $K = 0$ y/o $G = 0$. Esto es debido a que se ha seguido una metodología sustractiva, otorgando propiedades extra con objetos geométricos más generales y luego restringiendo los dominios y contradominios.

¹⁶Podemos obtener una única solución para los símbolos de Christoffel si introducimos dos propiedades: Estar libre de torsión, y la compatibilidad métrica.

Una conexión libre de torsión cumple con que $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$

Esa clasificación ofrece criterios sencillos que permiten fácilmente incorporar otras teorías a la red de teorías del espacio-tiempo.

3.5. Clasificación de Bartheleborth

La red teórica de Friedman no nos habla de dónde provienen los términos correspondientes a la densidad de materia o el tensor de energía momento. Thomas Bartheleborth analiza este punto, señalando la complejidad de interdependencia del tensor de energía-momento con la mecánica, la electrodinámica y la termodinámica. Bartheleborth señala en su artículo "Hierarchy versus Holism: a Structuralist view on General Relativity" que el estructuralismo no prohíbe *a priori* loops e interdependencias entre la estructura epistemológica de la ciencia y muestra que cuando se analiza la estructura de la TGR mediante modelos globales es fácil encontrarse con un cierto grado de holismo, pues la métrica, considerada una magnitud fundamental, se convierte en dependiente de teorías de mayor nivel.

En el caso de la relatividad general, todas las magnitudes dependen de manera compleja de todas las demás magnitudes (Bartheleborth, 1993).¹⁷

Para salvar del holismo a la física, argumenta que en la práctica los físicos plantean modelos locales y obtienen valores para la métrica utilizando aproximaciones. La desventaja de utilizar modelos locales es que estos pueden coincidir en tiempo y espacio, y estar en conflicto con sus predicciones. Para evitarlo, se estipulan constricciones, condiciones de coherencia que agrupan a los modelos que las cumplen. Para el caso de la TGR, dichas constricciones son invarianzas que expresan qué modelos con diferentes coordinatizaciones son coherentes. Bartheleborth procede a reconstruir la TGR axiomatizando los modelos locales y sus constricciones para las teorías del espacio-tiempo lorentziano (LST), la mecánica para fluidos perfectos (MPF) y la electrodinámica (GED), e ilustra su reconstrucción con un diagrama que aquí reproduzco en la Fig. 3.5.1.

Lo primero que notamos al leer el diagrama de Bartheleborth es que hay tres tipos de relaciones flechas: una liga de presuposición, las de especialización σ ,¹⁸ y ligaduras (*link*). La relación de "presuposición" no se encuentra explícita en el texto, la de especialización ya la tratamos en el Apartado 2.10, los links se refiere a las leyes puente. Notamos además, que no aparece explícitamente la TGR.

En la Fig. 3.5.2 presento el retículo correspondiente a la axiomatización de Bartheleborth expandiendo los modelos locales que hacen explícitas dichas relaciones, pero sin incluir las constricciones. La termodinámica y la mecánica clásica no aparecen en este diagrama porque no fueron incluidos por el autor en el texto analizado. Podemos observar que los elementos característicos de la TGR, es decir las ecuaciones de campo y movimiento son de hecho la liga señalada entre la MPF y la electrodinámica general con ecuaciones lineales (GEDNL). Bartheleborth argumenta que la TGR, dada la complejidad de los componentes del tensor de energía momento, y la generalidad de sus modelos previos y potenciales, vincula nociones de

¹⁷"In the case of general relativity all magnitudes depend in a complex way on all other magnitudes".

¹⁸No hay que confundir la letra griega sigma que utiliza Friedman para referirse a la clase de curvas, con la letra sigma que refiere a la relación de especialización. Bartheleborth representa la relación de especialización mediante un círculo con chipote.

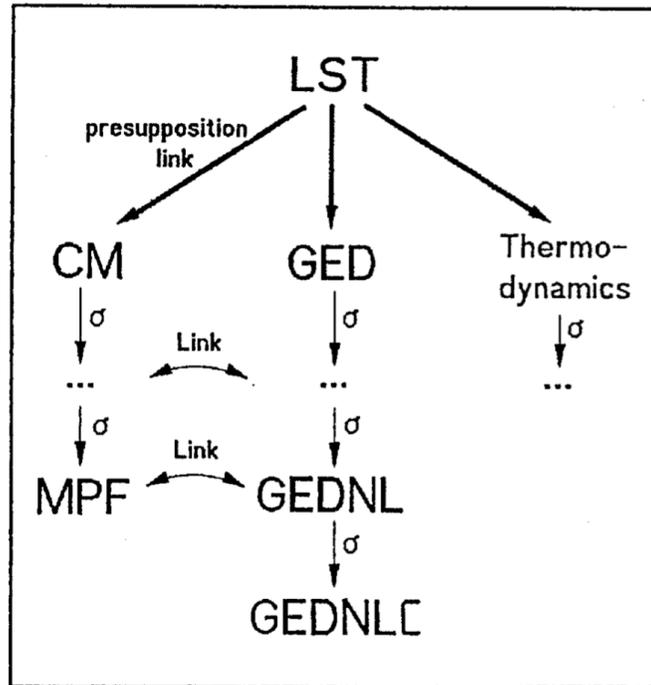


Figura 3.5.1. Diagrama de Bartelborth para la reconstrucción de relatividad general (TGR), donde (LST) es el espacio-tiempo lorentziano, (CM) corresponde a la mecánica clásica, (MPF) a la mecánica de fluidos perfectos, (GED) es la electrodinámica general, (GEDNL) y (GEDNLC) son modelos especializados de GED con ecuaciones lineales y la ley de Clausius-Mossotti.

muchas otras teorías. La condición de ligadura garantiza la compatibilidad cinemática entre modelos de distintos elementos teóricos. En este retículo también podemos apreciar la relación entre modelos potenciales de distintos elementos teóricos, confirmando la relación jerárquica.

3.6. Teorías equivalentes

Las diversas estrategias de construcción, la selección de ciertos principios como fundamentales y las diversas formulaciones que podemos utilizar para plantear una teoría nos llevan a explorar algunos retículos de teorías consideradas equivalentes y a preguntarnos sobre estructuras subyacentes y aquellas del mundo que se pretende modelar. Hay teorías que en cierto sentido consideramos como equivalentes dado que nos generan las mismas consecuencias, pero que están escritas de forma distinta. Por ejemplo, la mecánica cuántica se presenta en dos formulaciones: la de Heisenberg, por medio de la mecánica de matrices, y la de Shrödinger, basada en mecánica ondulatoria. Igualmente las teorías lagrangiana y hamiltoniana, la relatividad general presentada en términos de tensores o de espinores, incluso la geometría euclídeana, presentada a partir de puntos o de líneas. La equivalencia entre teorías depende

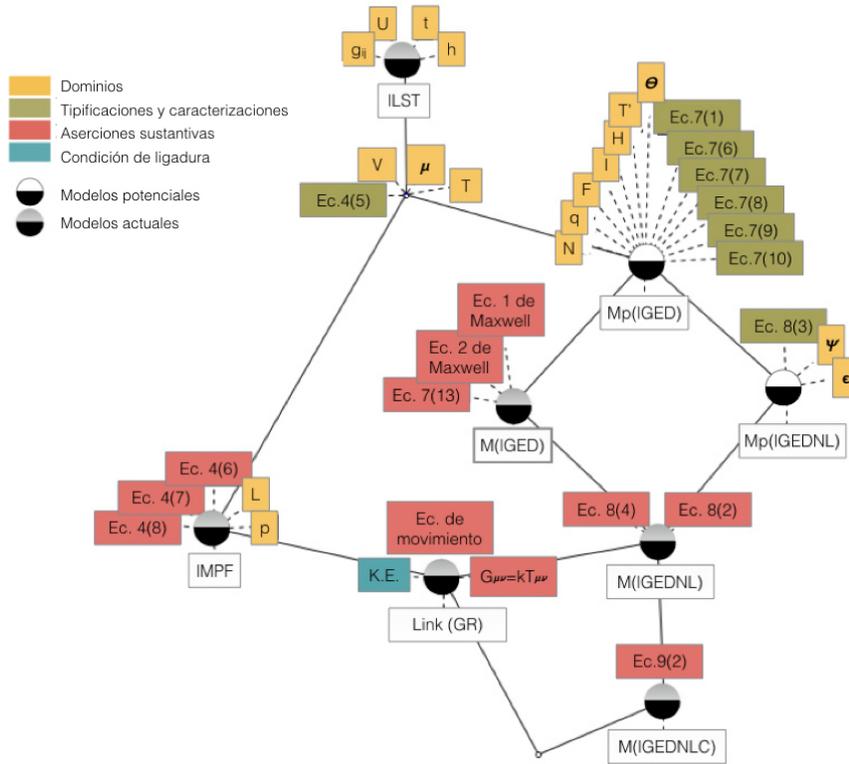


Figura 3.5.2. Retículo para la reconstrucción de Bartelborth de GR. U : Conjunto de puntos; t : Topología en U ; h : Conjunto abierto; $h(U)g_{ij}$: Función matriz diferenciable, simétrica y no degenerativa; T : Tensor de energía momento; μ : Densidad de masa en reposo; V : Campo de 4-velocidad del fluido; p : Presión del fluido; L : Divergencia del tensor energía-momento; θ : temperatura del medio; T : Tensor de energía-momento electromagnético; q : densidad de carga eléctrica; l : análogo en 4D del componente conductivo de la corriente eléctrica; F : Campo Electromagnético; H : Tensor de Inducción; N : números naturales; Ψ : permeabilidad recíproca; ϵ : función eléctrica; $K.E.$: Condición de equivalencia cinemática $G = kT$; Ecuación de Einstein; IMPF: Modelo local de fluidos perfectos; ILST: Modelo local de espacio-tiempo Lorentziano; Mp(GED): Modelo potencial de Electrodinámica General; M(GED): Modelo de Electrodinámica General Mp(GEDNL): Modelo potencial de GED con ecuaciones lineales; M(GEDNL): Modelo de GED con ecuaciones lineales; M(GEDNLC): Modelo de GED con la ley de Clausius-Mossotti.

tanto de la formulación de las mismas, de la selección de atributos como fundamentales, así como del criterio de equivalencia que se ocupe. ¿Qué clase de equivalencia podemos visualizar mediante la metodología seleccionada?

Barret (2018) señala que los diversos criterios de equivalencia que se han propuesto actúan de distinta manera según como estén formuladas las teorías. La equivalencia definicional, introducida por Glymour (1971) nos dice que dos teorías son equivalentes si es posible definir todo el vocabulario de una en términos de la otra. Aquí, las teorías dicen intuitivamente lo mismo, pero utilizando vocabulario distinto. Este criterio resulta muy estricto y difícil de aplicar a teorías planteadas fuera de la lógica de primer orden.

Para los seguidores de la corriente semántica dos teorías T_1 y T_2 son equivalentes si para cada modelo de T_1 hay un modelo isomórfico en T_2 y viceversa. Este criterio también califica de inequivalentes a una gran cantidad de teorías que podríamos considerar de alguna manera equivalentes, como las descripciones lagrangiana y hamiltoniana de una teoría en específico.

La equivalencia categórica, en cambio, trata de equivalentes a dos teorías si los modelos de la primera pueden ser traducidos o convertidos en modelos de la segunda, y viceversa. Estas traducciones son inversas la una de la otra hasta isomorfismos. En otras palabras, dos teorías son categóricamente equivalentes si sus categorías de modelo son isomórficas. En los años setenta, Geroch (1972) formuló la teoría einsteniana de una manera puramente algebraica utilizando una estructura basada en funciones escalares. La relatividad general y el álgebra de Einstein son teorías categóricamente equivalentes (Rosenstock *et al.*, 2015).

Los retículos en las Fig.3.6.1 y 3.6.2 relacionan modelos equivalentes de la relatividad general, identificados por el primer autor y fecha de publicación a partir de la tabla encontrada en la última página de *Gravitation* de Misner *et al.* (1973). La selección de la signatura al definir cierto objeto invariante, como los tensores o los espinores se hace por conveniencia, siguiendo o no la regla de la mano derecha para multiplicar vectores. La regla de la mano derecha o izquierda permite establecer una orientación específica y por tanto definir elementos de línea orientados. Por otro lado, la notación varía para los índices superiores o inferiores que identifican ya sea sistemas de coordenadas o de componentes utilizando letras griegas o latinas, y cuya elección suele venir por tradición según el libro que se siga. En el correspondiente contexto formal, cinco casos fueron omitidos ya que los datos están incompletos. De las 8 posibles combinaciones de signatura, una no es utilizada, cuando el tensor métrico es positivo, el de Riemann es negativo y el de Einstein es positivo. Todas las demás posibilidades de signatura han sido exploradas. Si tomamos en cuenta también la notación, encontramos doce modelos equivalentes, todas ellas con las mismas consecuencias empíricas.¹⁹ Lo importante es que al manipular las ecuaciones se mantenga la congruencia con las reglas que se han definido para los operadores utilizados. Es decir que se use siempre la misma regla de multiplicación. Se recomienda incluso utilizar aquellas combinaciones que sigan las reglas convencionales para no complicarse la vida. Todos estos aspectos son, frecuentemente, motivo de errores y confusión por parte de los aprendices en la materia. Hay registrados doce modos de seleccionar el modelo actual en base a estos atributos, la signatura y el alfabeto, que son caracterizaciones de los dominios. Todos ellos, notemos, cuentan con el mismo modelo potencial. No son especializaciones, son modelos actuales con la signatura bien definida. Todos ellos viven en el espacio lorentziano de cuatro dimensiones donde la matriz del tensor métrico se puede

¹⁹Esto no es así para las teorías llamadas $f(R)$, donde sí hay diferencias en las predicciones al cambiar la signatura.

diagonalizar, pero solo en la localidad. Puede verse que todas cuentan con los mismos atributos y clases, la misma estructura, solo variando ciertas caracterizaciones.

De manera que $g_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, que equivale a la signatura $\langle 1, 3 \rangle$, tiene un componente positivo y tres negativos. Es la signatura utilizada por Einstein (1950), Landau (1971), Trautman (1965), Bunge (1967), Friedman (1983) y Mendoza (2012), entre otros. Sigue la regla de la mano derecha. En cambio, $g_{ij} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, que equivale a la signatura $\langle 3, 1 \rangle$, tiene tres componentes positivos y uno negativo. Es la utilizada por Hawking (1973), Misner, Thorn y Wheeler (1973) entre otros. Requiere seguir una regla de la mano izquierda. Esta elección resulta conveniente cuando se trata de representar otros objetos geométricos llamados espinores.

Barrett (2018) argumenta que, bajo el criterio de isomorfismo entre modelos, estos modelos de relatividad general no son equivalentes, pues las variedades dotadas de una métrica sólo pueden ser isomórficas si sus métricas tienen la misma signatura. Sin embargo esto parece solo ser el caso en que se trata con espinores, más aún, podríamos decir que son definicionalmente equivalentes, dado que constan de los mismos dominios y existe manera de pasar de un modelo a otro al hacer, justamente, ajustes de signos y traducción de notación.

El contexto en la Figura 3.6.3 relaciona la teoría newtoniana con las teorías de dinámica analítica y sus principales componentes; Bunge se refiere así a las formulaciones hamiltoniana, lagrangiana y la de Hamilton-Jacobi. El retículo de la Fig. 3.6.4 se obtuvo mediante FCA a partir de una tabla en el *Foundations of Physics* (p.123), –nuevamente, las tablas son siempre una invitación para dibujar redes. Es común que las teorías generales de dinámica analítica sean vistas como formulaciones alternativas a la teoría newtoniana, pues parecen contar las mismas historias. Estas formulaciones están basadas en marcos muy generales, clasificadas dentro de la protofísica, y que generan consecuencias diversas según se les interprete. La dinámica analítica habla de sistemas físicos y no necesariamente de partículas, que pueden incluir campos electromagnéticos o potenciales energéticos. Estos mismos marcos pueden aplicarse a otros campos de la ciencia. La función lagrangiana por ejemplo, puede ser interpretada como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema, dando como resultado las leyes de la mecánica de partículas. Una interpretación alternativa resulta en las ecuaciones de transferencia en redes eléctricas o en cierta teoría de dinámica de poblaciones.

En la teoría hamiltoniana no se trabaja en el espacio euclidiano, sino en el *espacio fase*, una construcción matemática que representa las posiciones generalizadas y sus momentos conjugados correspondientes, es decir, los distintos estados de un sistema físico. El espacio de estados de un sistema es un espacio matemático en el que se representan todos los posibles estados fundamentales de un sistema. En la teoría newtoniana, un sistema con n partículas tendrá un espacio de estados de $6n$ dimensiones, una por cada coordenada de posición y de momento de cada partícula. Cada punto en este espacio multidimensional representa un posible estado total del sistema. La teoría hamiltoniana generaliza este sistema de posiciones y momentos.

En la teoría lagrangiana, las coordenadas son generalizadas y representan posición y velocidad. El espacio de estados es también $6n$ dimensional, tres dimensiones para las posiciones

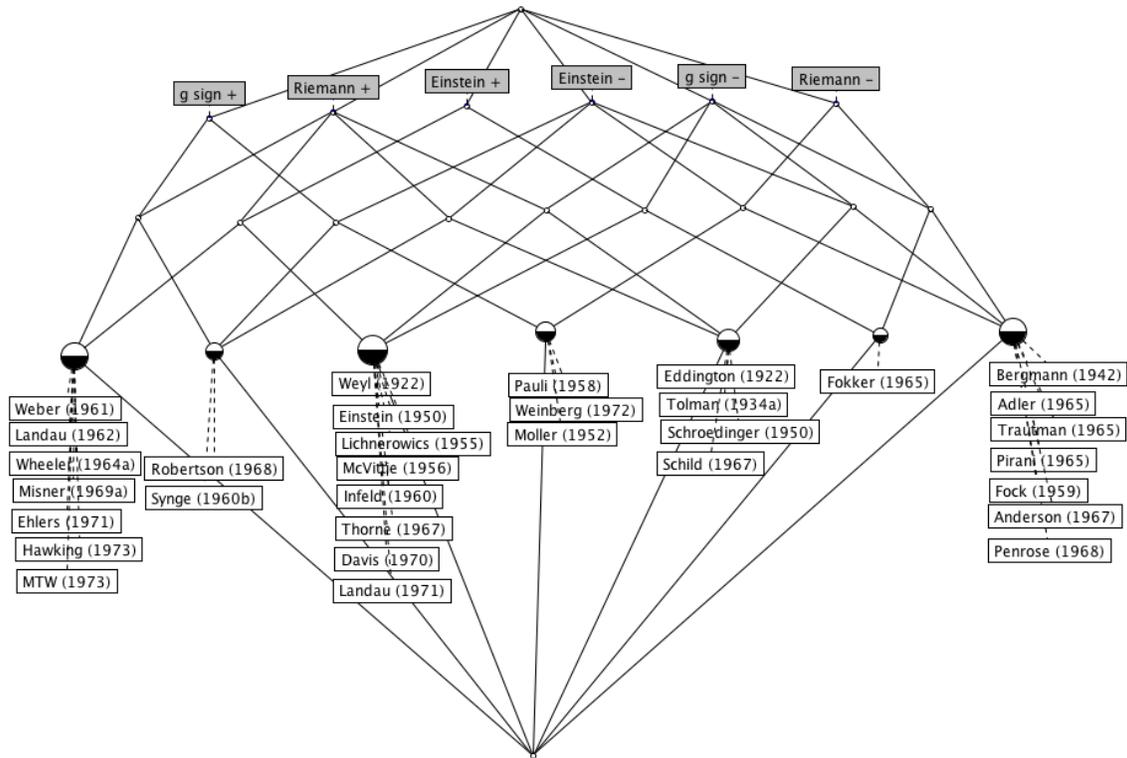


Figura 3.6.1. Siete de las ocho posibles combinaciones de firmas son utilizadas por distintos grupos de autores al desarrollar la relatividad general clásica, según la tabla en Misner *et al.* (1973).

generalizadas y tres para las velocidades generalizadas.²⁰ Para determinar el comportamiento del sistema necesitamos una función escalar llamada el lagrangiano \mathcal{L} . Las ecuaciones de movimiento, o de conservación de energía, se obtienen al aplicar los llamados principios de mínima acción o de acción extrema o estable, que suponen que un sistema material evoluciona siguiendo trayectorias por las que el gasto de energía es mínimo.

La mecánica hamiltoniana trabaja con posiciones y momentos generalizados, variables que configuran un espacio caracterizado mediante ciertas transformaciones. Para predecir el comportamiento del sistema requerimos del hamiltoniano, una función escalar H que es igual a la energía total del sistema cuando la energía es constante.

Observamos en el retículo de la Figura 3.6.4 que el único componente en común para estas teorías es el tiempo, considerando que no se incluyó la información de la sección *background*, la cual ya está representada en la Figura 2.4.1.

²⁰A este espacio de primeras derivadas generalizadas se le conoce como el fibrado tangente (*tangent bundle*) del espacio de configuración.

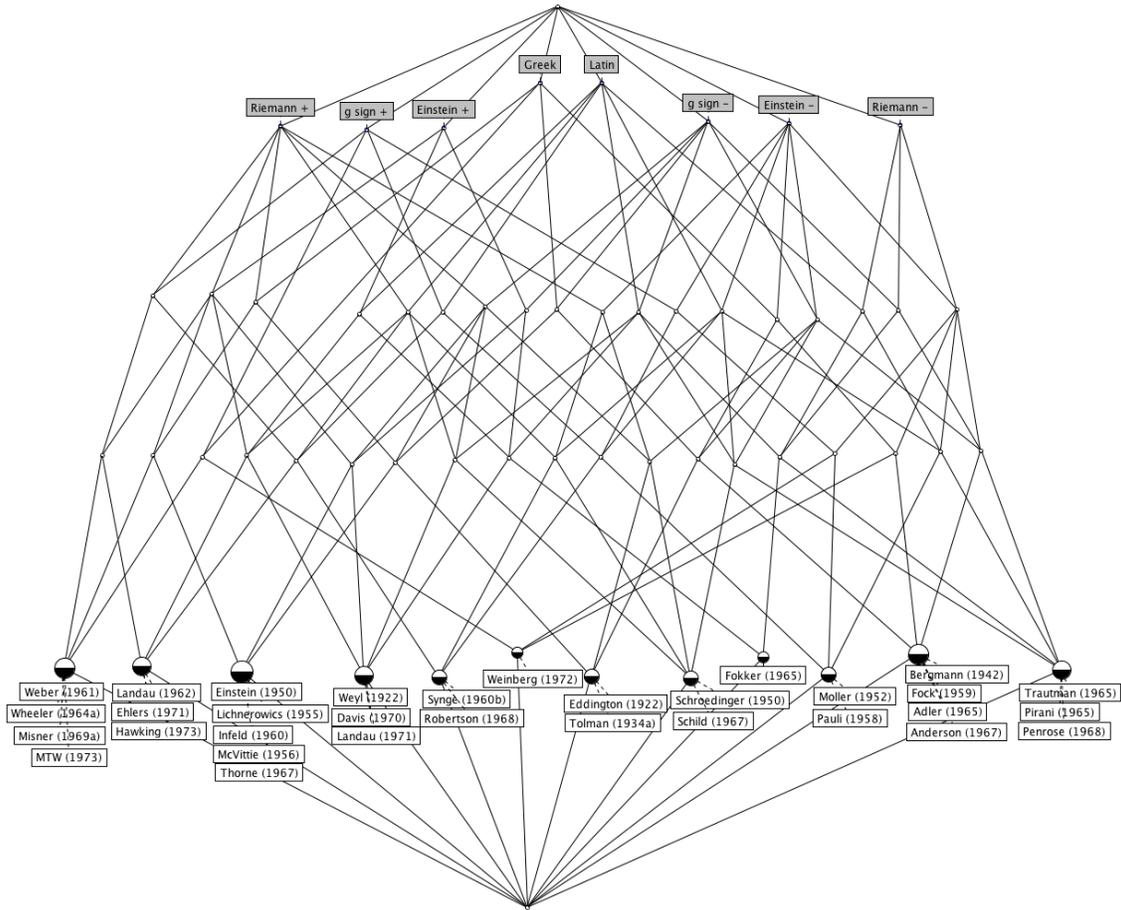


Figura 3.6.2. Este retículo nos muestra la variedad de modelos actuales definicionalmente equivalentes, por variaciones en la notación, ya sea griega o latina, y las firmas seleccionadas por distintos autores para el tensor métrico, el tensor de Riemann y el tensor de Einstein. Datos obtenidos de Misner *et al.* (1973). Podemos ver, sin embargo, que todas ellas tienen la misma estructura.

Las ecuaciones de movimiento lagrangianas pueden ser recuperadas de las ecuaciones hamiltonianas y viceversa a partir de la transformada de Legendre.²¹ Es por ello que muchos las consideran como variaciones notacionales, diferentes presentaciones matemáticas de una misma teoría que probablemente les subyace.

²¹Dos funciones diferenciables son una transformada de Legendre si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra.

Ecuación 5					x
Ecuación 4				x	
Ecuación 3			x		
Ecuación 2		x			
Ecuación 1	x				
Fuerza entre partículas	x				
Fuerza aplicada	x				
Masa	x				
Coordenadas materiales	x				
Marco de referencia	x				
Espacio euclidiano	x				
Sistema de partículas	x				
Lagrangiano					x
Acción				x	
Poisson			x		
Espacio fase		x	x		
Espacio de configuración				x	x
Hamiltoniano		x	x		
Sistema físico		x	x	x	x
Postulado Tiempo	x	x	x	x	x
	Newtoniana	Hamiltoniana	General	Jacobiana	Lagrangiana

Figura 3.6.3. Contexto que relaciona las teorías de dinámica analítica y la teoría newtoniana, donde Σ : Sistema físico, T : Tiempo, E^3 : Espacio euclidiano, P : Sistema de partículas, Φ : Espacio fase, Q : Espacio de configuración, H : Hamiltoniano, L : Lagrangiano, S : Acción, K : Marco de Referencia, X : Coordenadas materiales, M : Masa, F^e : Fuerza externa, F^i : Fuerza entre partículas, Ec.1: $\phi = P \cdot \nabla H$, Ec.2: $q = \frac{\delta H}{\delta p}$, Ec.3: $p = -\frac{\delta H}{\delta q}$, Ec.4: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = 0$, Ec.5: $\frac{\delta D}{\delta t} + H = 0$, Ec.6: $\dot{p} = F^e + F^i$.

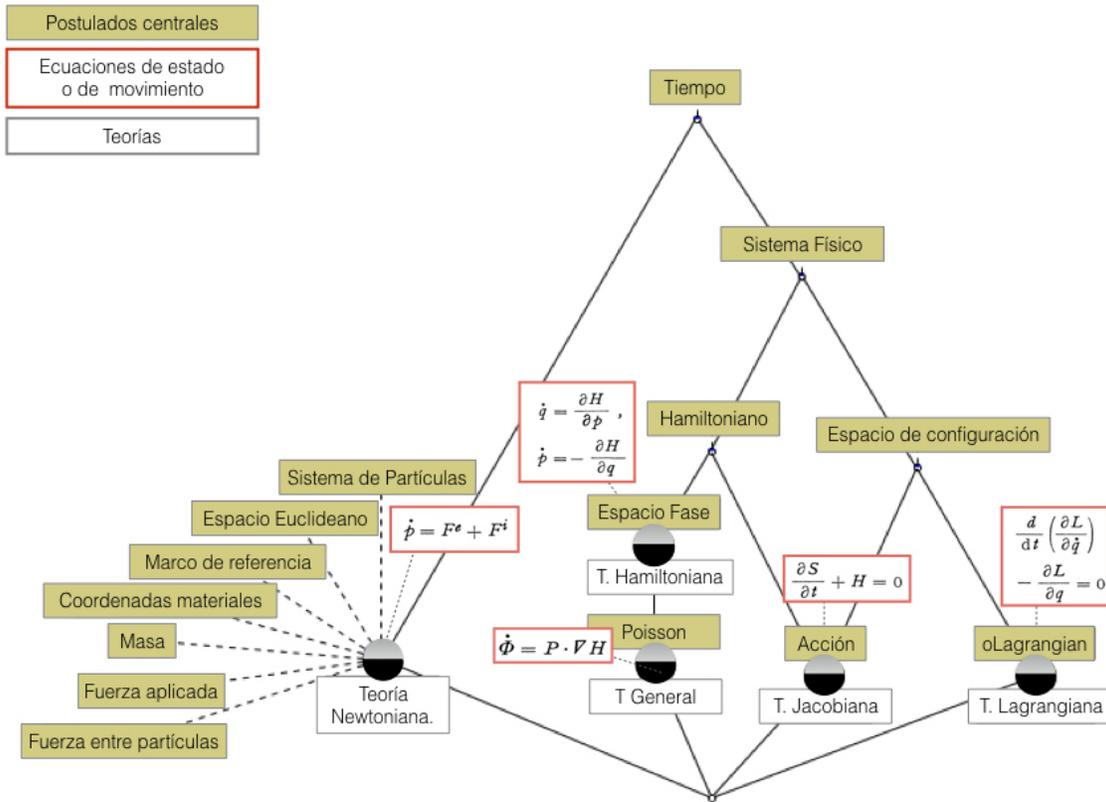


Figura 3.6.4. Rectículo conceptual que compara las teorías de dinámica analítica y la teoría newtoniana.

A primera vista pareciera que estas dos teorías simplemente utilizan distintas variables para describir los estados fundamentales de los sistemas, y que ello conlleva a espacios de estado distintos y ecuaciones de movimiento distintas, aunque producen las mismas consecuencias. Como sucede cuando utilizamos coordenadas polares en vez de las cartesianas para describir el espacio euclideo. Meras descripciones con cierto punto de vista. Sin embargo, existen diferencias estructurales entre el espacio de configuración (el fibrado tangente), y el espacio fase (o fibrado cotangente). Ambos son fibrados, funciones suprayectivas que llevan un espacio topológico en otro espacio topológico bajo ciertas condiciones de localidad. Sin embargo hay que notar que el fibrado tangente tiene una estructura métrica. Esto lo sabemos al notar cuáles objetos o relaciones permanecen invariantes al hacer transformaciones de coordenadas. La ecuación de movimiento lagrangiana es invariante ante ciertas transformaciones, y la cantidad que permanece invariante es el cuadrado del elemento de línea riemanniano. Por ello se puede decir que el espacio de estados de la teoría lagrangiana, el espacio de configuración, tiene la estructura del espacio riemanniano, definido por una métrica. Por el

contrario, el espacio de estados de la teoría hamiltoniana no tiene una estructura métrica, sino una simpléctica, que determina un elemento de volumen en una variedad diferenciable, pero no una medida de distancia. Bajo las transformaciones canónicas de las ecuaciones de movimiento hamiltonianas, hay una forma diferencial fundamental que es invariante: la forma simpléctica (North, 2009).

Barret hace notar que no es lo mismo comparar el fibrado tangente con el fibrado cotangente, que resulta en una equivalencia categórica, a comparar el fibrado tangente con la variedad simpléctica, que resulta en una inequivalencia categórica. Así mismo, las formulaciones de campos vectoriales lagrangiana y hamiltoniana no cumplen ni con la equivalencia definicional, ni con la de modelos isomórficos, y que la transformada de Legendre no respeta constricciones cinemáticas de la mecánica lagrangiana. La transformación de Legendre se representa gráficamente y de manera natural mediante funtores en la teoría de categorías, cuestión que podríamos explorar, sin embargo estos aspectos superan el alcance de esta tesis. Tampoco entra dentro de la metodología planteada visualizar relaciones de transformación interteóricas, como relaciones de equivalencia entre modelos. Pero sí es posible, desmenuzar las tipificaciones que caracterizan las teorías y comprobar si alguna es o no especialización de la otra, o en qué puntos difieren. Sin embargo no hay un criterio proveniente del FCA que nos indique si dos teorías son empíricamente equivalentes, o no, sólo si comparten la misma estructura.

North concluye que el espacio fase, y por tanto la teoría Hamiltoniana es más fundamental que el espacio de configuración, y que ésta es una representación geométrica, independiente de coordenadas, de la mecánica clásica. Esto sugiere que la mecánica clásica vive igualmente en una geometría simpléctica.

La estructura métrica viene con, o determina a, o presupone una estructura de volumen, pero no de forma inversa (de la misma manera que el espacio métrico viene con, o determina a, o presupone, una topología y no lo contrario [...]). Intuitivamente, al conocer las distancias entre puntos en un espacio nos dará los volúmenes de las regiones, pero los volúmenes no nos determinarán distancias. La estructura métrica agrega un nivel de estructura (North, 2009).²²

Este nivel extra de estructura sí podría ser visualizado en un retículo semántico donde los atributos se desmenucen indicando las estructuras que permanecen invariantes. La diferencia estructural entre teorías que hemos tomado por equivalentes nos hace pensar en cuál es de hecho la estructura del mundo que estamos pretendiendo modelar. Un principio de parsimonia, aplicado no entidades, sino a estructuras, lleva a la conclusión de que la estructura simpléctica es más fundamental pues no cuenta con una métrica. La argumentación de North lleva a pensar en la posibilidad de que estas teorías no sean siquiera empíricamente equivalentes.

²²“Metric structure comes with, or determines, or presupposes, a volume structure, but not the other way around (in the same way that a metric space comes with, or determines, or presupposes, a topology, and not the other way around [...]). Intuitively, knowing the distances between the points in a space will give you the volumes of the regions, but the volumes will not determine the distances. Metric structure adds a further level of structure”.

3.7. Recapitulación

He presentado en este tercer capítulo seis retículos conceptuales de las teorías del espacio-tiempo y un brevísimo recuento del significado de sus atributos y aspectos en el proceso de su construcción y de los contextos mismos. Aspectos que deben tomarse en cuenta al definir atributos, como lo son las formulaciones y notaciones, y otros, como las caracterizaciones y tipificaciones que son necesarios para distinguir modelos. La lectura de los retículos nos permite identificar rápidamente los aspectos topológicos y geométricos ubicados en la parte superior y los aspectos físicos y más especializados en la parte inferior, así como las semejanzas y diferencias estructurales entre teorías equivalentes.

Los primeros dos retículos de esta sección, basados en la clasificación de teorías del espacio-tiempo de Friedman (1983), y Dewar (2016), y en la noción de espacio métrico-afín de Sotitiou y Faraoni (2010), mostraron la necesidad de especificar en la lista de atributos ciertas condiciones y tipificaciones como lo es la signatura y la dependencia a ciertas variables para poder distinguir los modelos. Las clases de atributos identificadas para estos dos retículos son $\langle M, OG, Tip, C, Con, EC, EM \rangle$, donde M es la variedad diferenciable, OG son los objetos geométricos, Tip son las tipificaciones de los dominios, C son las caracterizaciones de los dominios, mientras que Con son las constricciones, EC son las ecuaciones de campo, EM son las ecuaciones de movimiento.

Además se implementó una estrategia sustractiva al incluir en los modelos la conexión afín Γ más general para luego imponer restricciones (caracterizaciones) sobre los dominios y codominios, como lo veremos en la Sección 4.2 con la condición de que la torsión sea igual a cero.

Podemos identificar que en la parte superior de los retículos se encuentran los conceptos-atributo correspondientes a la topología y geometría física, la profísica, diría Bunge, o los modelos previos (en el caso de los conceptos-objeto ubicados en la parte media), mientras que los atributos físicos se encuentran en niveles inferiores del diagrama. Podemos observar ligas que coinciden con la relación de especialización entre los espacios pseudo-riemanniano, lorentziano y de Minkowski, y la relación de teorización entre los espacio-tiempos y las teorías físicas, como sucede entre espacio lorentziano y la TGR. Resaltamos la importancia de incluir explícitamente las tipificaciones, caracterizaciones y constricciones pues ello permite distinguir modelos, como en el caso de la signatura del tensor métrico que permitió distinguir al espacio pseudo-riemanniano del lorentziano, y del riemanniano.

Otro punto que es importante resaltar es el de la variedad de las notaciones que encontramos en los distintos textos e incluso variaciones dentro de los mismos textos. Homogenizar y hacer compatibles las notaciones entre reconstrucciones, así como con los símbolos aceptados por los programas de análisis de datos requiere atención.

El retículo basado en la reconstrucción de Bartelborth (1993) que plantea la TGR como un vínculo interteórico, muestra más detalladamente la ubicación de ésta, así como la de los modelos potenciales de dos elementos teóricos donde uno es especialización del otro. Vemos que en este caso, $Mp(IGEDNL) \subseteq Mp(IGED)$, lo que vuelve a mostrar que la definición de relación de especialización, tal como está planteada en Balzer *et al.* (2012), y (Diez y Moulines, 2008) no es del todo correcta.

Teorías alternativas a la visión estándar

En este cuarto capítulo presentaré cinco retículos de tres grupos de teorías de gravitación que se han explorado como alternativas a la relatividad general: las teorías métricas, las teorías llamadas $f(R)$ (léase f de R), y las teorías de dinámica newtoniana modificada (MoND). La clasificación de las teorías métricas la encontramos en *Theory and Experiment in Gravitational Physics* de Clifford Will (1993) de donde extraemos dos retículos: el correspondiente a una formulación lagrangiana, y el que relaciona los parámetros post-newtonianos que caracterizan los potenciales predichos por las teorías y permiten validar o invalidar teorías. Una nueva codificación permitirá señalar esta cuestión, que ante la pluralidad de teorías resulta ineludible. Los datos fueron obtenidos en su mayoría a partir de textos escritos por físicos, y no cuentan con el lenguaje y tipo de análisis reconstructivo de los libros analizados en los dos capítulos anteriores. Sin embargo, nos hemos dado cuenta del tipo de elementos que podemos esperar y muchos de ellos son conocidos y los podemos identificar, así como los distintos formalismos. Contamos además con conceptos previamente analizados sobre los que podemos montar estas teorías: el espacio lorentziano, el de Minkowski y el métrico-afín. Intentaremos entonces conformar un gran retículo que conjunte la clasificación de Friedman con la de Will en su formalismo lagrangiano, la clasificación de Sotiriou y Faraoni de teorías $f(R)$ en (2010), y las teorías de gravedad modificada de Mendoza (2012); Carranza y Mendoza (2013); Barrientos y Mendoza (2016); Barrientos *et al.* (2018); Barrientos y Mendoza (2018). A éste gran retículo le he llamado holón por su gran tamaño y por funcionar como el repositorio de todo lo que se puede ir agregando, y veremos de qué manera puede compararse con el holón planteado por los estructuralistas. El holón nos dará una perspectiva sintética muy distinta de lo acostumbrado en el campo de estudio y de las zonas que pueden estar enmarañadas y que valdría la pena desentrañar, así como empezar a detectar otros patrones, lo que puede traducirse en cierto entendimiento de la cuestión.

4.1. Teorías métricas y parámetros post-newtonianos

Tras el impasse de al menos 30 años que provocó la segunda guerra mundial, los estudios en gravitación retomaron un gran impulso gracias en gran medida a observaciones astronómicas y al financiamiento otorgado a los programas de exploración espacial. En 1959 el planeta Venus fue bombardeado con pulsos de ondas de radio con el fin de medir el tiempo que tarda el eco en regresar a la Tierra. En 1960 Robert Pound y Glen Rebka reportaron haber medido así el corrimiento al rojo gravitacional, la tercera de las predicciones de la teoría de Einstein que hasta entonces pudo ser comprobada. Los relojes atómicos, los láseres, los gravitómetros hechos con superconductores y demás tecnología cuántica permitió obtener mediciones de

alta precisión y medir las distancias interplanetarias, convirtiendo al Sistema Solar en un laboratorio para probar la gravitación relativista.

En 1963 Mathews, Sandage, Schmidt y Greenstein identificaron ópticamente una serie de objetos con fuertes corrimientos al rojo en sus líneas espectrales, emitiendo enormes pulsaciones energéticas (1047 erg s^{-1}) con períodos de días, incluso horas. Estas observaciones abrieron un nuevo campo de aplicación para la relatividad general: la astrofísica relativista que estudia objetos muy compactos como púlsares, quásares, estrellas de neutrones y agujeros negros (véase Will, 1993).

Durante aquellos años de carrera espacial y guerra fría también se propusieron más de una docena de teorías alternas a la TGR, algunas de ellas produciendo resultados viables como la teoría escalar-tensorial de Brans-Dicke o la teoría de espinores de Penrose. En los años 60 era evidente la necesidad de establecer criterios empíricos para clasificar las teorías y comprobar su viabilidad ante el crecimiento de la astrofísica relativista.

Robert Dicke realizó una serie de experimentos de alta precisión y los dividió en dos tipos: los que prueban los fundamentos de la teoría, como el que la gravedad sea un fenómeno debido a la curvatura del espacio-tiempo, mediante experimentos como el de Eötvös, el de Hughes-Drever y el corrimiento al rojo gravitacional. El otro tipo de experimentos son los que distinguen entre teorías métricas. Dicke planteó un marco para las teorías de gravitación que hace dos suposiciones matemáticas fundamentales:

1. El espacio-tiempo es una variedad diferenciable, donde cada punto en la variedad corresponde a un evento físico. La variedad no necesita tener *a priori* una métrica o una conexión afín. La esperanza es que el experimento nos forzará a concluir que tiene ambas.
2. Las ecuaciones de movimiento y las entidades matemáticas en ellas deben ser expresadas en una forma que sea independiente de las coordenadas utilizadas en particular. Es decir, en forma covariante.

E impone dos constricciones:

1. La gravedad debe ser asociada con uno o más campos de carácter tensorial, ya sea escalares, vectoriales o tensoriales (de varios rangos).
2. Las ecuaciones dinámicas que gobiernan la gravedad deben ser deducibles de un principio de invariancia en la acción.

Los postulados de las teorías métricas exigen que la materia responda únicamente a la métrica. Pueden existir otros campos, incluso campos generados por la materia misma, pero estos no entran en las ecuaciones de movimiento; sólo ayudan a generar la métrica, pero no actúan directamente con la materia. Por tanto, lo que distingue una teoría de otra es la manera particular en que la materia y otros campos gravitacionales generan la métrica. Hay que señalar que encontramos al menos tres interpretaciones de lo que es una “teoría métrica”: La de Dicke implica que se cumpla el principio de equivalencia fuerte;¹ una teoría “puramente métrica” refiere a las descripciones donde las interacciones gravitacionales son

¹Einstein era de la opinión de que las teorías escalares con covarianza de Lorentz en espacio-tiempos planos no reproducían esta equivalencia.

producto únicamente de la dinámica del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sin introducir otros campos extra como escalares o vectoriales. La tercera: la exigencia de que las partículas libres sigan curvas geodésicas.

Desde el punto de vista de las teorías métricas, la física newtoniana puede verse como una aproximación de primer orden en donde el campo gravitacional es débil, la cual explica el movimiento del Sistema Solar y sus efectos más relevantes con una precisión de una parte en 10^5 . Éste es el límite newtoniano. Cálculos más precisos de la métrica, necesarios para dar cuenta de efectos como la precesión de la órbita de Mercurio (0.43 arc sec/siglo), requieren aproximaciones de orden mayor, es decir, de una teoría "post"-newtoniana.

Para distinguir y evaluar la viabilidad de las teorías métricas fue que se desarrolló el formalismo conocido como PPN (*Parametrized Post-Newtonian formalism*) que caracteriza el límite post-newtoniano en el campo débil de baja velocidad con un conjunto de diez parámetros evaluados en los reales. Este límite no es adecuado para discutir la radiación gravitacional, en donde se trata con sistemas a velocidades relativistas; ni sistemas compactos como púlsares binarios, donde se asume un campo fuerte; tampoco es adecuado a nivel cosmológico, en donde se hacen suposiciones distintas.

La primera parametrización post newtoniana fue formulada por Sir Arthur Eddington en 1922. Ken Nordtvedt, Clifford Will (1970; 1972; 1972) y Wei-Tou Ni (1973) retomaron el proyecto al inicio de los años setenta y propusieron nueve parámetros más que responden a preguntas tales como ¿Cuánta curvatura g_{ij} es producida en el espacio-tiempo por una masa dada en reposo? o ¿Cuánta gravedad es producida por una unidad de energía cinética? El desarrollo del formalismo PPN permitió descubrir nuevos efectos, como el efecto Nordvedt que es una violación de la igualdad de aceleración de objetos masivos en un campo externo, así como diseñar nuevos experimentos en el Sistema Solar para medir los parámetros y comparar teorías. Además algunos experimentos pueden informarnos sobre el tipo de variables que las teorías pueden contener.

Las teorías conformemente planas de Nordström (1912), Einstein y Fokker (1914), Littlewood y Bergmann (1953; 1956), y Ni (1972) fallan pruebas de dilación del tiempo y deflexión de la luz. La teoría cuasilinear de Whitehead (1922) predice una dependencia temporal para las mareas oceánicas, lo que contradice la experiencia, mientras que la teoría de Desser-Laurent (1968), Bollini, Giambiagi y Tiomno (1970) predice la existencia de un marco de referencia preferencial. Las teorías estratificadas incluyen un fondo plano η , una métrica g , un campo escalar dinámico ϕ , un campo vectorial dinámico K , un campo tensorial simétrico B , y un campo escalar no dinámico t que selecciona secciones espaciales preferentes en el Universo, llamadas "strata" que son ortogonales a la flecha del tiempo ∇t . La teoría de Ni (1973), y la de Lee, Lightman y Ni (1974) predicen efectos de marcos preferenciales para los corrimientos del perihelio de las órbitas planetarias. Las teorías estratificadas con rebanadas ortogonales son casos especiales de las teorías estratificadas que no incluyen el campo vectorial K y son consideradas inviables pues predicen la existencia de un marco de referencia preferente. Las teorías estratificadas y bimétricas se consideran válidas para el Sistema Solar, y por tanto han sido retomadas para explorar la hipótesis de la velocidad de la luz variable, la hipótesis del campo físico y para explicar los nuevos fenómenos como el aplanamiento de las curvas de rotación de galaxias.

Pascual Jordan y Claus Müller en Princeton (1947) así como Yves Thiry (1948) y su grupo en París (1951) consideraron un campo escalar que estuviese de acuerdo con la hipótesis de los grandes números propuesta por Arthur Eddington (1936) y Paul Dirac (1937; 1938; 1974). La hipótesis supone que la aparición de ciertos números del orden de 10^{40} , como la razón entre la fuerza electromagnética y la gravitación entre dos protones, 10^{80} que es el número de protones en el Universo y 10^{120} , el orden de la estimación de la acción para el Universo observable, no son coincidencias numéricas si no consecuencia de una relación intrínseca entre la edad del Universo, y las constantes fundamentales. A partir de estos números Dirac concluye que la constante de gravitación es inversamente proporcional a la edad del Universo: $G \approx 1/t$, mientras que la masa total de las partículas que contiene el Universo visible es proporcional al cuadrado de la edad del Universo: $m \approx t^2$. Dirac plantea que algunas constantes fundamentales dependen del tiempo cósmico (véase Barrow, 2002). Dado que G es la constante que más incertidumbre tiene en su medición, se supuso que ésta varía con el tiempo cosmológico, y por ello pueda ser reemplazada por un campo escalar.

El interés de Thiry era de una naturaleza más formal, y refiriéndose específicamente a la teoría unificada de Kalusa comenta:

En cuanto a las teorías de campo unitarias, parece que su estudio matemático ha sido bastante descuidado [...]. Pensamos que es útil intentar un estudio matemático sistemático de una teoría de campo unitaria, y descubrir si dicha teoría es capaz de presentar la misma coherencia que la relatividad general (Thiry, 1948 en Goenner, 2012).²

Jordan fue el primero en trabajar las teorías escalares-vectoriales en la Universidad de Princeton. En 1948 su colega Peter Bergmann comentó que había estado trabajando por varios años con Einstein en una teoría con un campo de quince variables sin obtener ningún resultado publicable. Unos veinte años más tarde, Bergmann (1970) presentó una versión más general con el mismo lagrangiano que Jordan. Sin embargo, es la teoría propuesta por Carl Brans (1961) en su tesis de doctorado, dirigida por Richard Dicke, la más famosa de las teorías escalares-tensoriales. Su aproximación está basada en su interpretación del Principio de Mach que plantea básicamente que las fuerzas inerciales observadas localmente en un laboratorio acelerado pueden ser interpretadas como efectos gravitacionales cuyo origen se encuentra en la materia distante acelerada con respecto al laboratorio. Esta teoría espera probar solamente la versión débil del principio de equivalencia. La formulación presentada por Wagoner (1970) es una generalización de estas teorías escalares-tensoriales. Jacob Bekenstein (1977) propuso una Teoría de Masa Variable (VMT) donde se permite la variación en el espacio-tiempo de la masa en reposo de las partículas elementales vía un campo escalar; mientras que Barker (1978) propuso para ello una G constante. Una generalización todavía mayor es la de Horndeski (1974) y dos de Will y Nordtvedt (1972; 1972). Las teorías escalares-tensoriales se encuentran extremadamente constreñidas por las observaciones realizadas con sondas espaciales en el Sistema Solar. Sobra decir que la TGR pasa todas estas pruebas con medalla de oro. Algunas

²“As to unitary field theories, it seems that their mathematical study has been quite neglected [...]. We thought it useful to try a systematic mathematical study of a unitary field theory, and to find out whether such a theory is able to present the same coherence like general relativity”.

Table 5.1. *Metric theories of gravity and their PPN parameter values*

Theory and its gravitational fields	Arbitrary functions or constants	Cosmological matching parameters	PPN parameters ^a					
			γ	β	ξ	α_1	α_2	(α_3, ζ)
(a) Purely dynamical theories								
(i) General relativity (\mathbf{g})	none	none	1	1	0	0	0	0
(ii) Scalar-tensor (\mathbf{g}, ϕ)								
BWN	$\omega(\phi)$	ϕ_0	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	$1+\Lambda$	0	0	0	0
Bekenstein's VMT	$\omega(\phi), r, q$	ϕ_0	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	$1+\Lambda$	0	0	0	0
Brans-Dicke	ω	ϕ_0	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$	1	0	0	0	0
(iii) Vector-tensor (\mathbf{g}, \mathbf{K})								
General	$\omega, \eta, \epsilon, \tau$	K	γ'	β'	0	α'_1	α'_2	0
Hellings-Nordtvedt	ω	K	γ'	β'	0	α'_1	α'_2	0
Will-Nordtvedt	none	K	1	1	0	0	$K^2/(1+\frac{1}{2}K^2)$	0
(b) Theories with prior geometry								
(iv) Bimetric theories								
Rosen (\mathbf{g}, η)	none	c_0, c_1	1	1	0	0	$(c_0/c_1) - 1$	0
Rastall ($\mathbf{g}, \eta, \mathbf{K}$)	none	K	1	1	0	0	α'_2	0
BSSL ($\mathbf{g}, \eta, \mathbf{B}$)	a, f, k	ω_0, ω_1	γ'	β'	0	α'_1	α'_2	0
(v) Stratified theories								
LLN ($\mathbf{g}, \eta, t, \phi, \mathbf{K}, \mathbf{B}$)	$f_1(\phi), f_2(\phi), f_3(\phi), e, \kappa_1, \kappa_2$	c_0, c_1, a, b, c, d	ac_0/c_1	β'	ξ'	α'_1	α'_2	0
Ni ($\mathbf{g}, \eta, t, \phi, \mathbf{K}$)	$f_1(\phi), f_2(\phi), f_3(\phi), e$	c_0, c_1, a, b, c, d	ac_0/c_1	bc_0	0	α'_1	α'_2	0

^a Prime over a PPN parameter (e.g., γ') denotes a complicated function of arbitrary constants and cosmological matching parameters. See text for explicit formulae.

Figura 4.1.1. Tabla de valores para los parámetros PPN, tal como se le encuentra en *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Will, 1993).

teorías métricas producen los mismos límites que la TGR, pero no necesariamente coinciden con otras predicciones relacionadas con púlsares binarios, cosmología, radiación gravitacional, estrellas de neutrones y agujeros negros.

La pregunta sobre la viabilidad de las teorías es ineludible, por lo que veremos cómo representar este aspecto dentro de las visualizaciones. Sin embargo, interesa apuntar cuatro criterios para evaluar la viabilidad de las teorías, mencionados por Dicke en *Les Houches Lectures*, republicados en Dicke (2019) y comentados en Will (1993):

1. La teoría debe ser completa. Esto es, debe poder predecir el resultado de cualquier experimento desde primeros principios, incorporando el conjunto de leyes de la electrodinámica y la mecánica cuántica de ser necesario. La presencia de elementos "absolutos" y de parámetros arbitrarios es una señal de incompletud. Sobra decir, que ninguna teoría está, a la fecha, completada.
2. Debe ser autoconsistente. Las predicciones de los resultados de cada experimento deben ser únicas.
3. Debe ser relativista. Es decir, que en el límite de cero gravedad, las leyes de la física deben reducirse a las leyes de la relatividad especial.

Parameter	What it measures, relative to general relativity ^a	Value in general relativity	Value in semiconservative theories	Value in fully conservative theories
γ	How much space-curvature is produced by unit rest mass?	1	γ	γ
β	How much "nonlinearity" is there in the superposition law for gravity?	1	β	β
ζ	Are there preferred-location effects?	0	ζ	ζ
α_1	Are there preferred-frame effects?	0	α_1	0
α_2		0	α_2	0
α_3		0	0	0
ζ_1	Is there violation of conservation of total momentum?	0	0	0
ζ_2		0	0	0
ζ_3		0	0	0
ζ_4		0	0	0

^a These descriptions are valid only in the standard PPN gauge, and should not be construed as covariant statements. For examples of the misunderstandings that can arise if this caution is not heeded, especially in the case of β , see Deser and Laurent (1973), and Duff (1974).

Figura 4.1.2. Tabla de valores de los parámetros PPN en teorías conservativas y semi-conservativas tal como se le encuentra en *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Will, 1993).

4. Deben tener el límite newtoniano correcto. Es decir, en el ámbito de bajas velocidades y campo débil, la teoría debe reducirse a la teoría newtoniana.

A la fecha, ninguna teoría se considera completa, pues no se han incorporado las leyes de la cuántica, y tampoco se han explicado satisfactoriamente muchos fenómenos. El segundo criterio lo cumplen bastantes teorías, en general mediante la imposición de constricciones y funciones especiales. Las consideraciones 3 y 4 suponen que en ámbitos particulares la teoría gravitatoria debe reducirse a otra.

4.1.1. Clasificación de teorías métricas de Will. En esta sección presentaré dos redes, correspondientes a las teorías métricas que clasificó Clifford Will en su libro *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (1981) (Will, 1993). En el capítulo cuarto y quinto Will explica el formalismo PPN y proporciona un "recetario" para calcular los límites post-newtonianos de cualquier teoría métrica de gravedad. El proceso consiste en identificar las variables, establecer las condiciones cosmológicas de frontera, expandir en series post-newtonianas alrededor de

Table 1

g	Ec 5-26	x																	
g	Ec 5-37		x	x	x	x	x												
g	Ec 5-57								x	x	x								
g	Ec 5-78													x					
g	Ec 5-86																x		
g	Ec 5-99																	x	x
g	Ec 5-72													x					
g	Ec 5-92																		x
γ	$\gamma = 1$	x												x	x	x			
γ	$\gamma = 1 + \omega/2 + \omega$		x	x	x	x	x												
γ	$\gamma = Ec\ 5-59$								x										
γ	$\gamma = Ec\ 5-64$									x									
γ	$\gamma = ac_0/c_1$																	x	x
γ	$\gamma = Ec\ 5-88$																	x	
β	$\beta = 1$	x					x	x					x	x	x				
β	$\beta = 1 + A$		x	x	x														
β	$\beta = Ec\ 5-59$								x										
β	$\beta = Ec\ 5-64$									x									
β	$\beta = Ec\ 5-100$																		x
β	$\beta = Ec\ 5-88$																		x
β	b_{c_0}																		x
ξ	$\xi = 0$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ξ	$\xi^2 = Ec\ 100$																		x
α	$\alpha_1 = 0$	x	x	x	x	x							x	x	x				
α	$\alpha_1 = Ec\ 5-64$									x									
α	$\alpha_1 = Ec\ 5-59$								x										
α	$\alpha_1 = Ec\ 5-102$																		x
α	$\alpha_1 = Ec\ 5-103$																		x
α	$\alpha_1 = Ec\ 5-88$																		x
α	$\alpha_2 = 0$	x	x	x	x	x													
α	$\alpha_2 = Ec\ 5-59$								x										
α	$\alpha_2 = Ec\ 5-64$									x									
α	$\alpha_2 = Ec\ 5-79$																		x
α	$\alpha_2 = Ec\ 5-102$																		x
α	$\alpha_2 = Ec\ 5-88$																		x
α	$\alpha_2 = K^2/(1 + 1/2 K^2)$													x					
α	$\alpha_2 = (c_0/c_1) - 1$																		x
α	$\alpha_3 = 0$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ζ	$\zeta = 0$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Parámetros PPN/ Teorías Métricas																		
	Relatividad General																		
	Escalar-tensorial BWN																		
	Escalar-tensorial VMT																		
	Escalar-tensorial Barker																		
	Escalar-tensorial- Brans-Dicke																		
	Escalar-tensorial- Brans-Dicke, $w = -1$																		
	Vectorial-tensorial- General																		
	Vectorial-tensorial- Hellings-Nordtvedt																		
	Vectorial-tensorial- Will-Nordtvedt																		
	Bimétrica Rosen																		
	Bimétrica Rastall																		
	Bimétrica BSLL																		
	Estratificada LLN																		
	Estratificada NI																		

Figura 4.1.3. Contexto para parámetros post-newtonianos. Los números de Ecuación refieren a las fórmulas señaladas en el texto de Will.

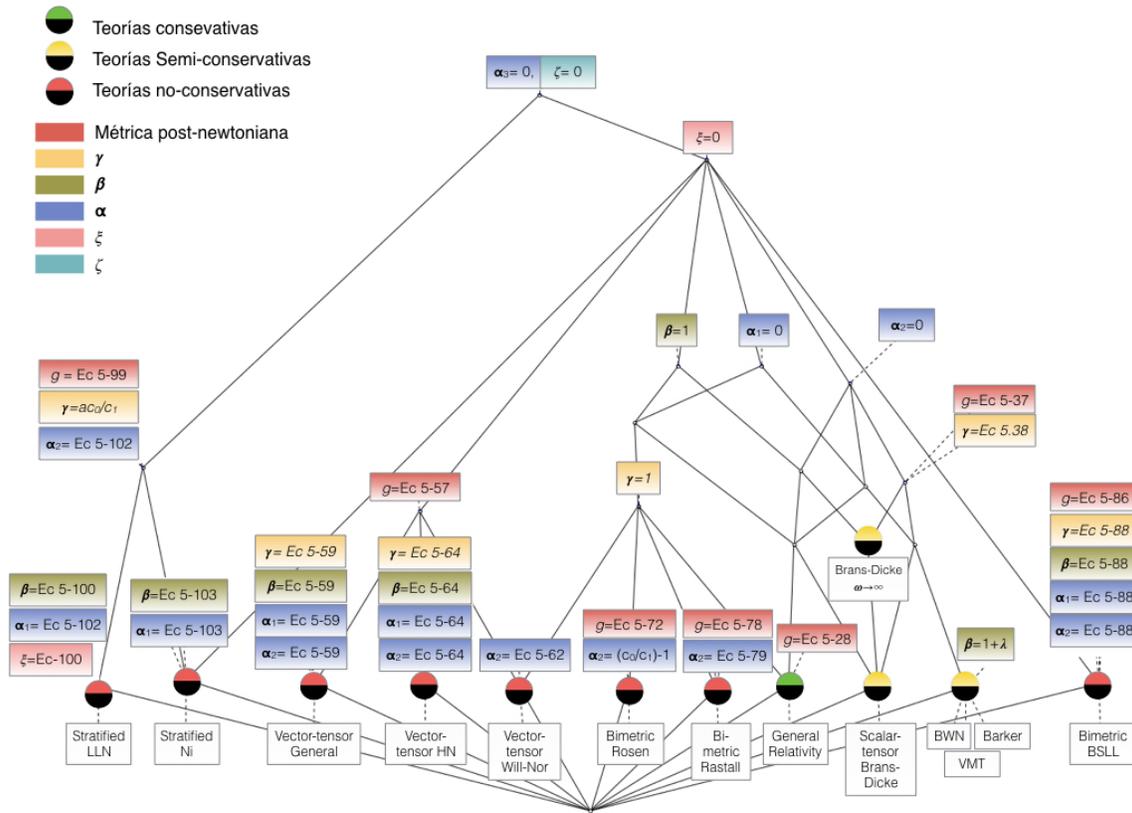


Figura 4.1.4. Retículo conceptual para las teorías métricas viables y su métrica post-newtoniana obtenida mediante FCA con datos de Will (1993). Los números de ecuación en las etiquetas refieren a dicho texto.

valores asintóticos, substituir las formas obtenidas en las ecuaciones de campo, resolver las ecuaciones, convertir a coordenadas cuasi-cartesianas y obtener los valores para los parámetros post-newtonianos. De este recetario y las tablas reproducidas en las Figuras 4.1.1 y 4.1.2 he extraído dos contextos para 14 teorías viables (Figs. 4.1.3 y 4.1.5). El primero, relaciona las teorías en términos de sus parámetros post-newtonianos, en donde se liga a los conceptos-objeto a una la clase de teoría: conservativas, semi-conservativas o no conservativas. Ésta es la información proporcionada por los expertos. El segundo les relaciona de acuerdo a la formulación lagrangiana.

Podremos notar que, en el contexto de la formulación lagrangiana, la clasificación de atributos ha cambiado. Además de los campos (las variables u objetos geométricos), se han añadido la clase de funciones y constantes arbitrarias, los parámetros cosmológicos, y la acción. Todo esto, siguiendo la clasificación de Will. Encontramos que las teorías bimétricas

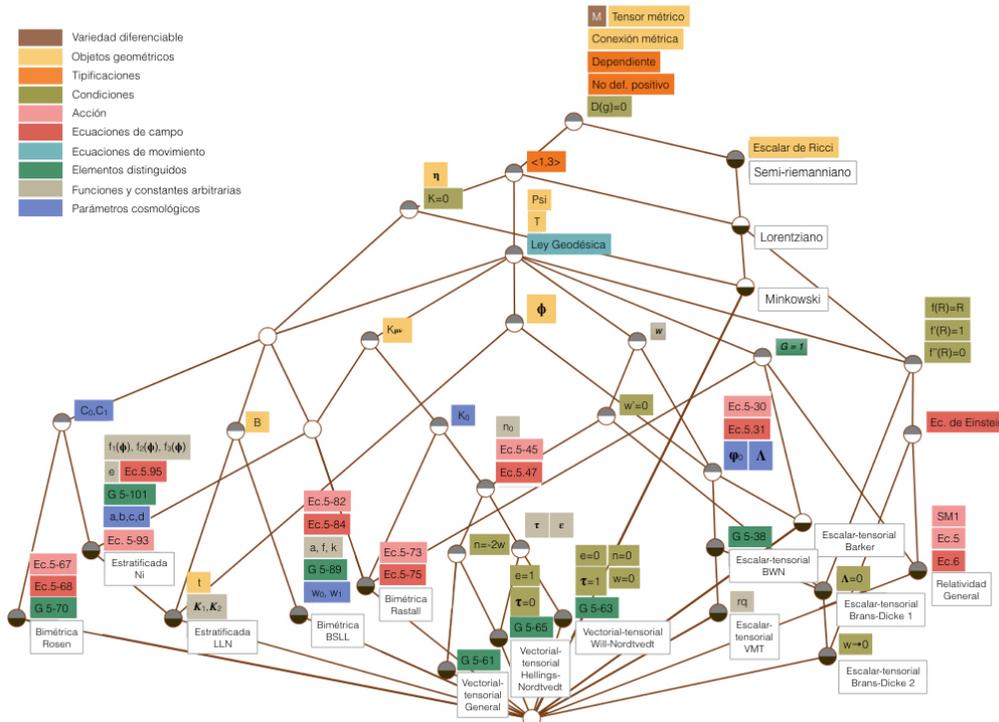


Figura 4.1.6. Retículo conceptual para las teorías métricas viables bajo el formalismo lagrangiano, obtenida mediante FCA con datos de (Will, 1993).

y estratificadas no parecen depender del escalar de Ricci, el cual sí está definido en el espacio lorentziano, por lo que recurrimos a verificar mediante las siguientes preguntas al experto:

- 1.- El *Escala de Ricci* es atributo de todo *Espacio pseudo-riemanniano*?
- 2.- Las teorías estratificadas y bimétricas poseen el atributo *Escala de Ricci*?

El formalismo PPN está diseñado para mediciones en el Sistema Solar. Actualmente se trabaja en establecer parámetros a nivel galáctico y cosmológico para poder calificar más teorías gravitacionales.

4.2. Exploraciones con funciones de la curvatura: las teorías $f(R)$

Apenas unos años de publicada la TGR, Weyl (1919) y Eddington (1923) exploraron funciones del escalar de curvatura como meras curiosidades matemáticas. Con ese mismo espíritu, Einstein (1925) exploró lo que ahora se conoce como variación de la acción a la Palatini, donde la métrica y la conexión son consideradas como variables independientes y por tanto uno puede variar la acción con respecto a ambas. A pesar de que los dos principios variacionales nos llevan a las mismas ecuaciones cuando el lagrangiano es lineal al escalar de Ricci R , esto no es cierto para cualquier otra función de R .

Las motivaciones del nuevo período vinieron en los años sesenta cuando Utiyama mostró que si la acción de Hilbert-Einstein tenía invariantes de curvatura de mayor orden con respecto a R , ésta podía ser renormalizable.³ Estas correcciones parecían ser relevantes sólomente para regímenes de gravedad fuerte (cercanos a los hoyos negros) o a escalas de Planck, como en el universo temprano. Es en 1980, cuando Starobinsky aplica esta opción para modelar un escenario de inflación que evitara las singularidades, que las teorías de mayor orden cobraron interés. La actual homogeneidad que se observa en el universo no puede ser explicada más que suponiendo que por un momento el espacio-tiempo se expandió a una velocidad mucho mayor que la de la luz. A este período de tiempo se le llama el período de inflación. Las teorías $f(R)$ tratan de preservar los mismos principios con los cuales fue formulada la TGR sin agregar campos extra: el principio de equivalencia fuerte, y el movimiento de partículas siguiendo geodésicas del espacio-tiempo. Son teorías métricas “puras”.

4.2.1. La Clasificación de Sotiriou. El retículo que presento aquí para las teorías $f(R)$ está basado en el artículo “ $f(R)$ theories of gravity” de Sotiriou y Faraoni (2010). En este texto y en (Sotiriou, 2006) los autores ilustran su clasificación con un diagrama que reproduzco en la Figura 4.2.1 y que me permito comparar con el retículo resultante de un análisis de conceptos formales (Fig. 4.2.3). La versión aquí expresada todavía no incluye las teorías de Brans Dicke que Sotiriou contempla, aunque sí contempla los modelos en una métrica de Minkowski y la métrica de de-Sitter en un espacio vacío $T_{\mu\nu} = 0$. Aún así, podemos observar considerables diferencias entre ellas. En una primera lectura de la Figura 4.2.1, pareciera que el elemento “ $f(R)$ Gravity” fuera utilizado como título que indica que las teorías $f(R)$ se dividen en dos grupos, aquellas teorías que consideran una conexión afín independiente del tensor métrico, en oposición a la conexión de Levi-Civita que sí es dependiente. Sin embargo en el texto el autor aclara que ello representa la acción más general. Ésta acción se indica explícitamente en el retículo como SM2 y refiere a la ecuación 30 del texto referido:

$$S_{ma} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi).$$

Las teorías métricas y palatini de primer orden resultan en la misma ecuación de campo, la ecuación de Einstein (Ec. 10 en Sotiriou), así como en la misma ecuación de movimiento, por lo que se les considera formulaciones equivalentes. En la Fig. 4.2.1, la TGR está representando ambas formulaciones, mientras que la Fig. 4.2.3 se les distingue. Las teorías de orden más elevado, también tratadas en el texto de Sotiriou no fueron contempladas en su diagrama. El retículo para teorías $f(R)$ muestra cómo los objetos geométricos más generales conforman la clase de teorías $f(R)$ métrico-afín, de donde se especializan tres clases de teorías: las “métricas”, las “palatini” y las “métrico-afín” que a su vez tienen versiones de distinto orden.

³En ocasiones se utiliza la teoría de perturbaciones para calcular cantidades que de otra manera pueden resultar en infinitos y singularidades. La técnica de renormalización consiste en re-definir variables en términos de parámetros de escala arbitrarios, fijarlos a mano con el fin de eliminar artificialmente el comportamiento problemático en las ecuaciones, resolver las ecuaciones y re-escalar de vuelta los parámetros para obtener una solución completa. Las teorías mal llamadas no-renormalizables necesitan de un número infinito de términos para cancelar las divergencias, esto no quiere decir que sea imposible hacerlo.

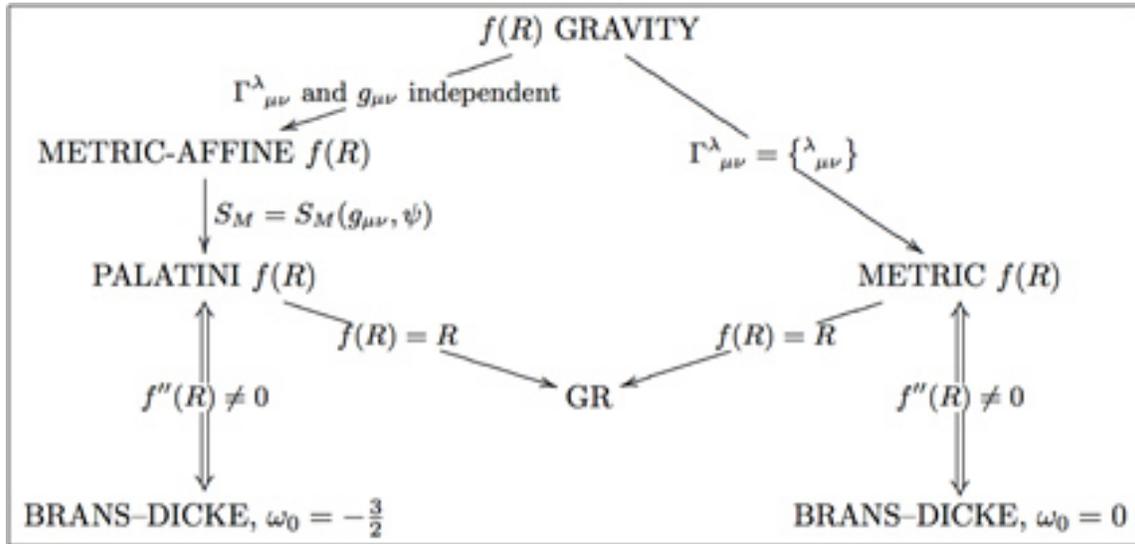


Figura 4.2.1. Diagrama propuesto por Sotiriou y Faraoni (2010)

Aquí también se utilizan modelos locales con constricciones y coordenadas holonómicas, con una visión realista respecto a los objetos geométricos.

En este retículo, se incluyen tres modelos especializados de la relatividad general donde se impone la condición de que el escalar de Ricci sea constante, ya sea $R = 0$ para la relatividad especial, $R < 0$, para el espacio-tiempo anti-DeSitter o $R > 0$ para el espacio-tiempo de DeSitter. La relatividad especial también se obtiene cuando la constante de gravitación $G = 0$ o $T \rightarrow 0$.

Para facilitar la comparación con el diagrama de Sotiriou y Faraoni, los modelos de espacio-tiempo y algunos atributos como la constante de gravitación no fueron considerados para este retículo. Al incluirlos, conformamos un contexto que sirve de punto de partida (el subcontexto) desde donde iniciar una exploración de atributos con la cual podremos incertar otras teorías $f(R)$ llamadas teorías extendidas. Éstas han sido desarrolladas en respuesta a una serie de fenómenos inesperados detectados en el último cuarto del siglo XX, y al que dedicamos la siguiente sección.

4.3. Oscuridad y modificaciones a la dinámica newtoniana

Nuevos fenómenos dan lugar a nuevas teorías. En los años ochenta y noventa, una serie de nuevos fenómenos no esperados, conocidos como materia oscura y energía oscura, fueron más que evidentes. En muchos ámbitos y múltiples observaciones, la dinámica galáctica difiere con las predicciones teóricas tanto newtonianas como relativistas. Las enormes inconsistencias resultaron ineludibles y dieron lugar a toda una serie de posibles explicaciones, modelos de materia exótica y teorías alternativas de gravitación que proponen cambios fundamentales. Las teorías de dinámica modificada (MoND, o *mondianas*) son de particular interés, pues

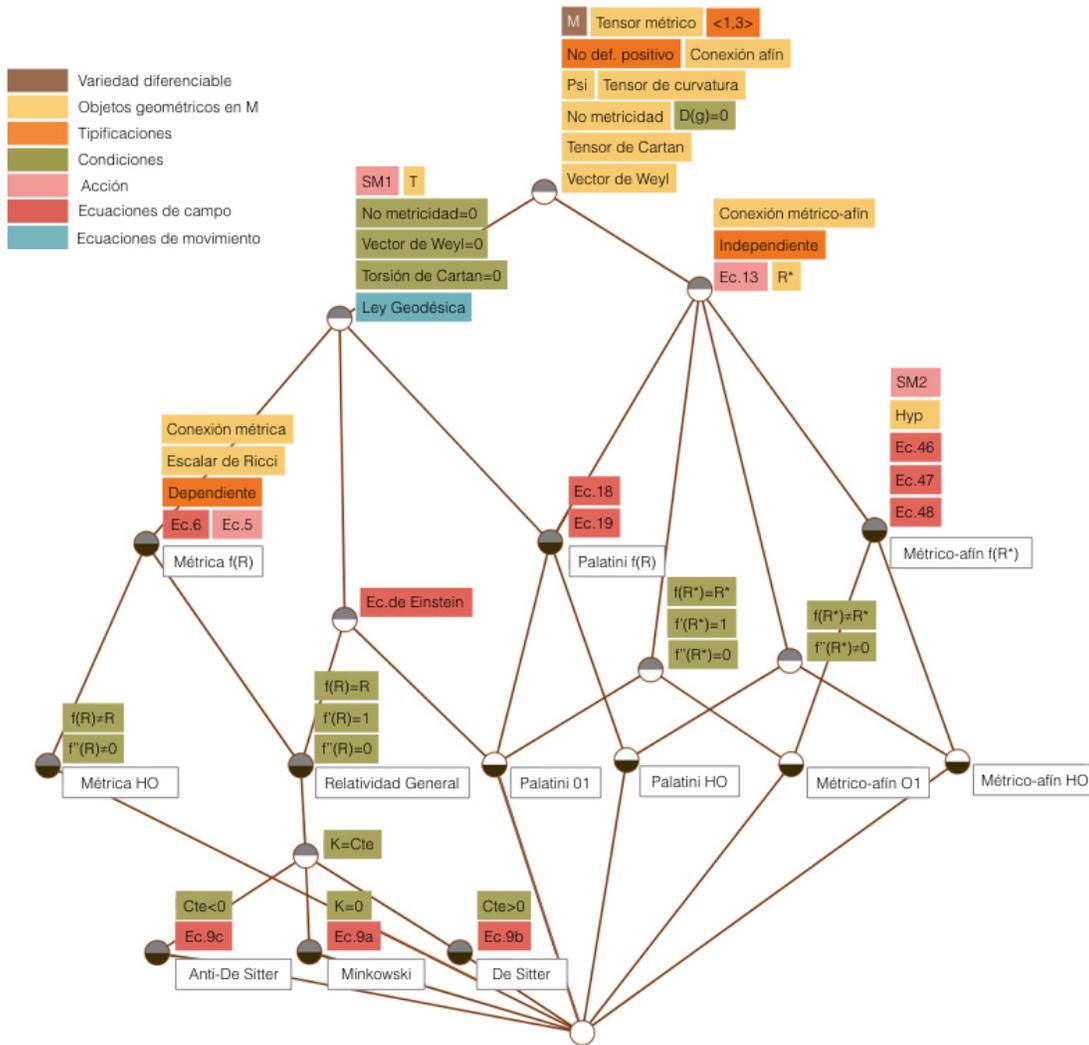


Figura 4.2.3. Retículo conceptual para teorías $f(R)$, basada en la clasificación de Sotiriou y Faraoni (2010).

fijan su atención en una nueva constante fundamental, la aceleración de Milgrom, y proponen un cambio fundamental, que es la no-localidad, algo que parece estarse cuestionando también en los círculos de estudio filosófico de la mecánica cuántica. Centraremos la atención en la “gravitación extendida relativista” propuesta por Sergio Mendoza, astrónomo del IA-UNAM y colaboradores, y por la que hay particular interés de ubicar en el mapa que estamos construyendo, distinguiéndola de las teorías $f(R)$ y las métrico afín.

4.3.1. Materia oscura. El problema de la masa faltante involucra discrepancias entre las predicciones teóricas y las observaciones astronómicas a nivel galáctico y cosmológico. El primero en notar estas inconsistencias fue el astrónomo danés Jan Oort (1932), quien midió los movimientos de estrellas en la vecindad local. En 1933 el astrofísico suizo Fritz Zwicky llegó a esta conclusión al estudiar el cúmulo galáctico Coma, pero no fue sino hasta los años sesenta cuando Vera Rubin y Kent Ford comenzaron a hacer mediciones detalladas de las curvas de rotación de multitud de galaxias que el problema se hizo evidente: existe una discrepancia entre las predicciones de la teoría newtoniana y las observaciones (véase Sanders, 2010). Sorpresivamente, y en todos los casos, la velocidad de rotación no seguía una caída kepleriana; es decir, la velocidad de las estrellas no disminuye conforme la distancia al centro de la galaxia aumenta, como sucede con la velocidad de los planetas que giran alrededor del Sol. En cambio, la velocidad permanece constante. La forma particular que toma la gráfica de estos valores es conocida como el aplanamiento de las curvas de rotación. En 1980 Rubin, Ford y Thonnard publicaron un concluyente estudio de las propiedades rotacionales de 21 galaxias con un amplio rango de luminosidades y radios en el que se mostraba que todas las galaxias padecían de la misma anomalía (Rubin *et al.*, 1980).

Una primera y natural hipótesis para explicar el aplanamiento de las curvas de rotación galáctica es mantener la suposición de validez de las leyes de Newton, así como de la TGR y suponer la existencia de materia indetectada. En 1945, ésta fue una hipótesis exitosa para Urbain Le Verrier y John Couch Adams, quienes de forma independiente consideraron en sus cálculos la posible existencia de un octavo planeta para explicar las desviaciones dinámicas de la órbita de Urano. Dichas desviaciones habían sido detectadas desde 1827 por el astrónomo francés Alexis Bouvard. El problema actual es un tanto distinto pues la cantidad de materia faltante es muy alta, alrededor del 85 % de la materia total. Demasiado como para ser compensada por materia fría no luminosa como polvo u objetos muy compactos y masivos como agujeros negros, estrellas de neutrones y estrellas enanas marrones. Los llamados MACHO's (Massive Compact Halo Objects) han sido descartados dado que las inspecciones de microlentes gravitacionales en la Vía Láctea muestran una baja cantidad de ellos y los bariones requeridos no cuadran con el modelo de nucleosíntesis temprana, la abundancia de elementos calculada y las oscilaciones acústicas bariónicas. Otras partículas alternativas han sido propuestas como neutrinos, neutrinos masivos, neutrinos estériles, así como modelos de campos escalares: axiones, solitones, wimpzillas y condensados de Bosé-Einstein (véase por ejemplo, Bond *et al.* (1980), White *et al.* (1983), Blumenthal *et al.* (1984) o Lovell *et al.* (2012)). El modelo más aceptado es el de las partículas frías o de baja velocidad, pertenecientes al modelo de partículas supersimétricas (SUSY) que no entra dentro del modelo de partículas estándar. Estas partículas con propiedades en cierto sentido *ad hoc* son probadas en modelos de simulación computarizada de la estructura cósmica y galáctica con la esperanza de poder ajustar los parámetros libres para cuadrar las representaciones obtenidas con las observaciones astronómicas. La "simulación del milenio" realizada por Carlos Frenk y colaboradores, visualiza

la evolución de 10 mil millones de partículas virtuales (unas 20 millones de galaxias) en un cubo de dos millones de años luz y que se recorren en un video de dos minutos.⁴

El modelo estándar de materia oscura fría (CDM) ha dado mayor peso a los datos muy precisos de las mediciones de la radiación de fondo cósmico obtenidas con las sondas WMAP y Planck que a los modelos galácticos; trabajando, por decirlo de alguna manera, desde el ámbito cosmológico hacia abajo, hacia el ámbito galáctico, en donde tienen los mayores problemas para encontrar adecuaciones empíricas. Aún así, sólo la detección directa y la manipulación de dichas partículas probarán su existencia y la validez del modelo que hasta hace poco parecía infalsable. Los experimentos para realizar dichas detecciones, sin embargo, requieren de inversiones millonarias en equipo e infraestructura como aceleradores de partículas y detectores subterráneos o a grandes alturas.

4.3.2. Energía oscura. La expansión acelerada del universo se identificó a partir de las observaciones de supernovas tipo 1a, realizadas en 1998-99 por Saul Perlmutter, Brian Schmidt, Adam Riess y sus grupos de trabajo, a quienes se les otorgó el premio Nóbel de física en el año 2011. Se trata de un fenómeno sumamente sorprendente y misterioso conocido como energía oscura; una fuerza repulsiva "antigravitacional" que funciona a distancias extragalácticas y para la cual existen pocas explicaciones. La más socorrida y que adopta el modelo estándar es la constante cosmológica Λ ligada a la propuesta de una constante cosmológica que formuló Einstein en 1917 en un intento por conservar un universo estático. Tras las mediciones por Edwin Hubble de la expansión del universo en 1929, Einstein se retractó de su hipótesis *ad hoc*, llamándola el peor error de su vida (Barrow, 2009). Otros modelos que están tomando popularidad son los de campos escalares como la quinta-esencia que se conjugan con los modelos de campos escalares de materia oscura.

4.3.3. La Ley Tully y Fisher y la constante de Milgrom. Otro resultado empírico de menor fama pero que también rompe con las expectativas newtonianas es la relación que se ha encontrado entre la masa de las galaxias y sus propias velocidades de rotación. Siguiendo la tercera ley de Kepler y las predicciones newtonianas, la masa de las galaxias debería ser proporcional al cuadrado de la velocidad por el radio $M \propto v^2 r$, como sucede en el Sistema Solar. Sin embargo, la relación encontrada mediante múltiples mediciones en distintas longitudes de onda, tomando en cuenta la proyección en la velocidad de las estrellas, la aportación del gas y el polvo, y demás particularidades de los actuales modelos galácticos, se ha encontrado que la masa es de hecho proporcional a la velocidad elevada a la cuarta potencia: $M \propto v^4$, y no depende de la distancia. Esta relación es muy valorada y de gran utilidad en astronomía pues permite calcular distancias a muchas escalas (véase McGaugh *et al.*, 2000 y Espinosa, 2019).

En 1983, Mordehai Milgrom, físico israelí, buscó resolver el problema de la materia faltante siguiendo el camino alternativo de modificar las leyes de Newton cuando los sistemas sufren aceleraciones muy pequeñas, menores a cierta aceleración crítica, y mediante la Tully-Fisher estimó dicha aceleración:

⁴Véase también Peebles (2013) y Sanders (2010), éste último libro aborda de manera muy comprensible y amplia el problema de la materia oscura.

$$a_0 \sim 1,2 \times 10^{-10} m/s^2$$

Las más recientes calibraciones nos informan que la constante de proporcionalidad en la relación de Tully y Fisher es de hecho la aceleración de Milgrom multiplicada por la constante de gravitación G :

$$v^4 = a_0 MG.$$

Haciendo una sencilla sustitución de la velocidad por su correspondiente valor en términos del período orbital y el radio en la ley Tully-Fisher, podemos encontrar una relación semejante a la tercera ley de Kepler. Para los ámbitos de baja aceleración en un sistema de masa M , la proporción entre el período orbital y el radio es constante:

$$T/r = 2\pi / (a_0 GM)^{1/4}$$

Con el descubrimiento de nuevas leyes empíricas en los ámbitos galácticos, por ejemplo, para sistemas en equilibrio rotacional, como la ley Tully-Fisher, la ley de Freeman, la ley Faber-Jackson, la ley de Sancisi, entre otras, y con la evidencia de que se puede predecir la dinámica de estos sistemas si se considera normal que hay un cambio en cierto punto crítico, es que se desarrollaron las teorías de gravedad modificada.

4.4. Teorías MoND y la gravedad extendida

Las teorías de dinámica newtoniana modificada (MoND, por sus siglas en inglés, o *mondianas*) se basan en la observación de que la dinámica galáctica depende del régimen de aceleración particular que experimentan los cuerpos, el cual depende de la densidad superficial del sistema. En sistemas que experimentan aceleraciones menores a dicha aceleración crítica fundamental, conocida como la aceleración de Milgrom, los sistemas son afectados de tal manera que la aceleración gravitacional sufrida por una partícula de prueba a suficiente distancia es mayor que el valor newtoniano (Bruneton y Esposito-Farèse, 2007).

Las modificaciones a la segunda ley de Newton y/o modificaciones a la inercia, o a la ley de gravitación son resueltas con la inclusión de términos dependientes de la constante de Milgrom y en su mayoría por la adición de campos extra, retomando los modelos de teorías viables probadas en otras épocas como lo son la formulación bimétrica, la estratificada o la más famosa, la teoría tensorial-vectorial-escalar (TEVES) (Bekenstein y Milgrom, 1984; Bekenstein, 2004).

Muchas de las teorías *mondianas* no cumplen con la versión fuerte del principio de equivalencia, y predicen que la dinámica gravitacional de los subsistemas ha de ser afectada por un campo externo producido por el sistema mayor en el cual se encuentre inmerso. Por ejemplo, el efecto que la Vía Láctea habría de producir en el Sistema Solar, en una galaxia satélite o en un sistema de estrellas binarias. Este efecto de campo externo, sin embargo, no ha sido observado (véase Hernández, 2021; Blanchet y Novak, 2011; Famaey y McGaugh, 2012; Lüghausen et al., 2014).

A diferencia de la teoría estándar y el modelo de materia oscura que da un gran peso a las mediciones cosmológicas, las teorías *mondianas* trabajan de abajo hacia arriba, analizando

los datos de sistemas cercanos como las galaxias enanas esferoidales que son satélites de la Vía Láctea, muy difusos, los cúmulos globulares y las galaxias espirales. Dos estudios del movimiento de estrellas binarias con masas semejantes a la del Sol, y alejadas más de 7000 UA⁵ muestra que la anomalía se encuentra también en estos sistemas de muy baja masa, para los cuales no existen modelos de halos de materia oscura que expliquen la dinámica observada (véase Hernández, 2021). En años recientes, los modelos cosmológicos también han sido trabajados (véase Carranza y Mendoza, 2013).

En el 2011, los astrónomos mexicanos Xavier Hernández, Sergio Mendoza, Tula Bernal y Juan Carlos Hidalgo propusieron una modificación, no a la primera o segunda ley de Newton como lo hizo Milgrom, sino extender la ley universal agregando un nuevo término que podemos llamar fuerza mundiana (Mendoza *et al.*, 2011),

$$F_M = \frac{(GMa_0)^{1/2}}{r}$$

y que es relevante cuando $a < a_0$.

La extensión a ley universal de gravitación es un modelo especializado de la mecánica newtoniana que amplía el espectro de aplicación de la teoría, que estaba siendo restringida (sin saberlo) empíricamente a los ámbitos de aceleraciones no bajas, pero además supone como una nueva propiedad universal dentro del fenómeno gravitatorio: la de experimentar un cambio en la fuerza al pasar el punto de aceleración crítica a_0 (Hernandez, 2012).⁶

Un estudio de sistemas a lo largo de siete órdenes de magnitud, desde estrellas binarias extendidas, pasando por galaxias y cúmulos de galaxias, muestra que en todos los casos el cambio de fuerza sucede cuando los sistemas tienen un radio mayor al radio de Milgrom, (Durazo *et al.*, 2017)

$$r_m = (GM/a_0)^{1/2}$$

⁵Unidades Astronómicas.

⁶Esta propiedad universal nos remite a la propiedad universal observada en mecánica estadística, donde los sistemas poseen una escala límite a partir de la cual es posible renormalizar las leyes de fuerza. En mecánica estadística, se le llama universalidad al hecho de que para una gran cantidad de sistemas, existen propiedades que son independientes de sus detalles dinámicos.

Para salvar el carácter universal en el fenómeno gravitatorio sería necesario hacer alguno de los siguientes ajustes: a) Delimitar el conjunto de entidades T para los cuales se refiere la propiedad de gravitar según la ley de Newton. b) Pensar que nuestra apreciación del quiebre de la universalidad es equivocado y que existen factores que distorsionan nuestra apreciación. (i.e. materia oscura). c) Replantear la ley de gravitación de manera que el alcance de la propiedad sea igual a T (todas las entidades con masa). (i.e. extensiones a la ley de Newton).

El conjunto de constructos/entidades son los objetos a los cuales el predicado se refiere, ya sean verdaderos o no. En este caso, todos los objetos del universo que tienen la propiedad de tener masa. La fuerza de atracción gravitacional es universal en el conjunto de todas las entidades que tienen masa si y sólo si la colección de individuos para los cuales es válida la ley de fuerza es igual al conjunto de dichas entidades (véase Bunge, 1976, Cap. II, xxix, b). La universalidad de la ley de Newton se rompe al hallarse la siguiente condición: que la colección de individuos para los cuales es válida la ley de fuerza no sea igual al conjunto de todas las entidades con masa.

y que los sistemas siguen la ley empírica de Freeman 1970, que nota que la densidad superficial nunca excede a_0/G .

La gravedad extendida newtoniana se presenta también en términos de fuerzas y proporciona un nuevo límite al que debe aproximarse una versión relativista. La propuesta de los astrónomos permite describir cualitativamente la dinámica de todo tipo de sistemas galácticos con simetría esférica (Hidalgo *et al.* 2012), incluyendo galaxias enanas esferoidales que tanto problema dan al modelo Λ CDM, así como predecir la fenomenología de las estrellas binarias extendidas que son ejemplo de un experimento crucial (Hernandez *et al.*, 2012). Esta versión aún requiere dar una explicación del porqué sucede dicho cambio abrupto justamente en a_0 . La ecuación tipo Poisson se encuentra en Barrientos y Mendoza (2018).

La gravedad extendida relativista también es compatible con las observaciones de lentes gravitacionales y con la presente aceleración del universo (energía oscura), además de proveer una buena solución al problema de los valores iniciales de la formación de estructura cósmica (Carranza y Mendoza, 2013), (Hernandez y Jimenez, 2013). Por otro lado, no predice necesariamente el efecto de campo externo (véase Capozziello y De Laurentis, Capozziello y De Laurentis, 2013). David Merrit, en su estudio filosófico de las teorías MoND señala las predicciones de nuevos fenómenos que la teoría *mondiana* ha logrado, a diferencia de la teoría estándar, un criterio muy fuerte para considerar valiosa la propuesta y un programa de investigación en franco desarrollo (Merritt, 2020).

Interesa por tanto ubicar estas teorías dentro de nuestro esquema mediante una exploración de atributos y consultas a los expertos (véase la Sec. 1.7), partiendo del contexto generado en la sección 4.2 de teorías $f(R)$, que será nuestro subcontexto. La intención es incluir cuatro modelos de la teoría MoND que etiquetaré como *MoND local* (Barrientos y Mendoza, 2018),⁷ *MoND local $f(R, T)$* (Barrientos *et al.*, 2018), *MoND No local Palatini* (Barrientos y Mendoza, 2016) y *MoND No local métrica* (Carranza, Mendoza y Torres, 2013). Estos modelos “extendidos” se relacionan cercanamente con las teorías $f(R)$ en tanto que sólo modifican la curvatura del espacio tiempo sin agregar campos como sucede con las teorías escalares, vectoriales y tensoriales, pero sí aceptando acoplamientos de curvatura y métrica.

A continuación calculamos la lista de implicaciones del subcontexto que puede consultarse en los anexos, y seleccionamos las implicaciones que fueron declaradas no válidas por el Dr. Sergio Mendoza y los mismos textos referidos.

De las 52 implicaciones arrojadas por el explorador de conceptos, tenemos diez con respuesta negativa: 0, 9, 16, 17, 26, 37, 38 39, 41 y 42.

Número:	<Cantidad de objetos>	Premisa ==>	Conclusión
0:	<12>	==>	N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion,
9:	<6>	N, M, g, Phi, Independent, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==>	Gamma*, R*, Ec 13,
16:	<9>	N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, ==>	T, SM1, Non metricity = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,

⁷Prepublicado en 2013 y publicado en 2018.

- 17: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Phi, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, SM1, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 26: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Phi, SM1, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 37: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Phi, Dependent, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, SM1, Ec 5, Ec 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 38: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Phi, R, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, Dependent, SM1, Ec 5, Ec 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 39: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Phi, T, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies SM1, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 41: $\langle 6 \rangle$ N, M, Gamma, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, R, Dependent, SM1, Ec 5, Ec 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 42: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, \implies T, SM1, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Geodesic law,

Ya desde la primera implicación (la número 0) el experto nos dice que hay más objetos que poseen los atributos de la conclusión; en este caso, los modelos que deseamos agregar. La implicación 9 llama a agregar el modelo MoND no local a la Palatini y sus atributos, la implicación 37 y 38 se responde agregando los modelos MoND métricos, basados en el escalar de Ricci. Todas las demás implicaciones respondidas negativamente requieren la inclusión de los cuatro modelos estudiados. Una vez agregados los modelos y nuevos atributos es conveniente volver a hacer la exploración de atributos, recordando la finalidad de ir agregando objetos y atributos: comparar éstos y no otros modelos, pues como veremos son muchísimas las variantes que aún se podrían agregar al contexto, sin mencionar modelos más especializados.

Conociendo la clase de atributos que poseen los modelos anteriormente estudiados, procedemos preguntando cuáles son las ecuaciones de campo y de movimiento de los modelos presentados, así como el dominio de las funciones en la acción correspondiente, confirmar si poseen algún elemento distinguido. Finalmente, ubicar las formas más generales de la acción y las caracterizaciones particulares.

Los cuatro modelos de gravedad extendida relativista aquí analizados son todos *mondianos*, pues incluyen la aceleración de Milgrom como constante fundamental y la escala dada por la densidad superficial de los sistemas. Se les identifica rápidamente en el extremo inferior derecho del retículo de la Figura 4.4.2 Podemos notar que ninguno sigue la ley geodésica y todos tienen como atributo al tensor métrico y torsión igual a cero, aunque en la versión Palatini la conexión puede ser expresada de forma independiente a g . La acción de la versión Palatini sigue la forma más general de funciones dependientes del escalar de Ricci afín R^* .

Observamos también el papel clasificatorio de los atributos etiquetados en color rosado, correspondientes a la acción. SM1 y SM2 nos dicen, de manera muy general, de qué cantidades depende la acción:

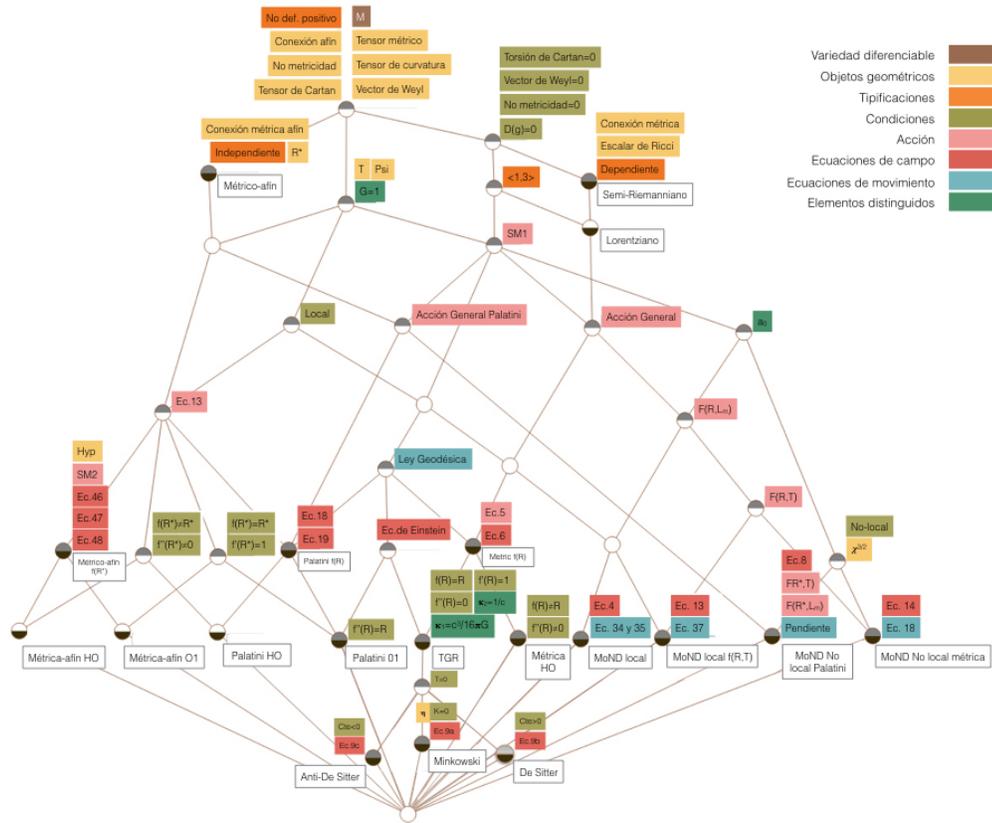


Figura 4.4.2. Retículo que compara cuatro modelos de la teoría MoND, conocidos como de gravedad extendida en sus versiones relativistas métrica, a la Palatini y no local, en relación con las teorías métricas-afín vistas en la sección 4.2. Datos obtenidos de Barrientos y Mendoza (2016, 2018); Barrientos *et al.* (2018); Carranza y Mendoza (2013).

SM1: $S_M = S(g_{\mu\nu}, \psi)$, nos dice que el término de materia depende tanto del tensor métrico, como de los campos de materia.

SM2: $S_M = S(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi)$, nos dice que el término de materia depende además de la conexión afín. Éstas ya las hemos visto en la Sección 4.2.1. Podría decirse que estos dos atributos son tipificaciones de la acción.

Siguiendo la forma más general de una acción métrica:

$$S = \int F(R, \mathcal{L}_M) \sqrt{-g} d^4x,$$

podemos ir especificando los modelos al ir restringiendo el dominio de la acción, por ejemplo, aquellos modelos cuya acción sea función del escalar de Ricci y del lagrangiano de materia

$F(R, \mathcal{L}_M)$ y subsecuentemente, aquellos que dependen específicamente del escalar de Ricci y de la traza del tensor de energía momento $F(R, T)$.

Las ecuaciones correspondientes, que se indican en las etiquetas del retículo con el número de ecuación del texto original, son las siguientes:

Ecuaciones de campo y de movimiento para el modelo MoND local métrico:⁸

Ec. 4:

$$F_R R_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \nabla_\mu - \nabla_\alpha \nabla_\beta) F_R - \frac{1}{2} (F - F_{\mathcal{L}}) g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\mathcal{L}} T_{\alpha\beta}$$

Ec. 34 y 35:

$$\frac{dx^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) \nabla^\mu \ln \left[(16\pi\kappa\kappa' + f_\xi) \frac{d\mathcal{L}}{d\rho} \right]$$

Ecuaciones de campo y de movimiento para el modelo MoND local $F(R, T)$:⁹

Ec. 13:

$$R_\nu^\mu(h) = \frac{\kappa^2}{f_R^2} \left(\tau_\nu^\mu + \frac{f(R, T)}{2\kappa^2} \delta_\nu^\mu \right)$$

Ec. 37:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = f^\mu$$

Ecuación de campo para el modelo MoND no local Palatini:^{10,11}

Ec. 8:

$$f'(\chi) \chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\chi) g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G L_M^2}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Ecuaciones de campo y de movimiento para el modelo MoND no local métrico:¹²

Ec. 14:

$$\left(\frac{f_R}{L_M^2} \right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2L_M^2} f g_{\mu\nu} + [g_{\mu\nu} \Delta - \Delta_\mu \Delta_\nu] \left(\frac{f_R}{L_M^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \left(\frac{f}{L_M^2} \right)_T [T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}]$$

Ec. 18:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \left(\frac{f}{L_M^2} \right)_T \left\{ \frac{8\pi G}{c^4} - \left(\frac{f}{L_M^2} \right)_T \right\}^{-1} \times \left[(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln \left(\frac{f}{L_M^2} \right)_T (R, T) + \nabla^\mu \theta_{\mu\nu} \right] \neq 0$$

Llaman la atención dos modelos que tienen como atributos la no localidad y un nuevo tensor, que llamaré el tensor de Mendoza, introducido por primera vez en (Mendoza *et al.*, 2012; Mendoza, 2012). Este tensor implica ya una teorización al depender de la constante de Milgrom y la masa:

⁸Barrientos y Mendoza, 2018.

⁹Barrientos *et al.*, 2018.

¹⁰Barrientos y Mendoza, 2016.

¹¹La ecuación geodésica correspondiente depende de cantidades en dos marcos, el de Jordan y el de Einstein, por lo que la ecuación resulta muy complicada y engorrosa, y por tanto no ha sido obtenida.

¹²Carranza, Mendoza y Torres, 2013.

$$\chi_{\mu\nu} := L_M^2 R_{\mu\nu}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $L_M^2 = \frac{8(GM)^3}{c^4 a_0}$ es la longitud de Mendoza, que puede igualmente escribirse como: $L_M^2 = \zeta \sqrt{\ell_M r_s}$, donde $\zeta = \frac{2\sqrt{2}}{9}$ es una constante, $\ell_M = \sqrt{\frac{GM}{a_0}}$ es el radio de Milgrom, y $r_s = \frac{GM}{c^2}$ es el radio de Schwarzschild.

Habitualmente, el Lagrangiano depende de cantidades definidas puntualmente como la densidad, la presión o el escalar de Ricci. Matemáticamente, la no localidad significa que el Lagrangiano depende de cantidades definidas, no de manera puntual, sino que abarcan un volumen. Por ejemplo, si el Lagrangiano depende de alguna integral, es no local. En estos casos, el Lagrangiano depende de la masa, es decir, hay que integrar sobre la densidad. Para Deffayet y colaboradores, estos aspectos nos hablan de una teorización más allá de la manipulación de términos geométricos con ligas a la mecánica cuántica.

Las nuevas características que aporta la no localidad a la construcción de modelos son que los operadores diferenciales inversos reducen el número de derivadas y que el gradiente del volumen invariante del cono de luz pasado nos permite definir un 4-vector tipo tiempo con el que podemos seleccionar componentes particulares de la curvatura.

La primera característica es necesaria porque [...] los escalares de curvatura involucran potencias de dos derivadas (o factores de $1/r$) actuando sobre un campo débil, mientras que la corrección MoND [...] que buscamos realizar como escalar involucra potencias de una única derivada de un campo débil. La segunda propiedad es necesaria para obtener los campos débiles correctos. En este punto es necesaria una digresión filosófica. No sostenemos que la física no sea local en el nivel fundamental; creemos más bien que la no localidad entra a través de correcciones cuánticas a las ecuaciones de campo efectivo de los bucles de gravitones sin masa. Estos no inducen ninguna no localidad macroscópica en el fondo del espacio plano porque sus interacciones son suprimidas por derivadas (Deffayet *et al.*, 2011, p.9).¹³

Nuestras construcciones involucran dos bloques de construcción no locales: el escalar inverso d'Alembertiano y el campo vectorial de tiempo $u^\mu[g](x)$ formado a partir de normalizar el gradiente del volumen del cono de luz pasado o el estrechamente relacionado inverso del operador de Paneitz. A diferencia

¹³“The new features that nonlocality brings to model building are that inverse differential operators reduce the number of derivatives, and that the gradient of the invariant volume of the past light-cone allows us to define a timelike 4-vector with which we can select particular components of the curvature. The first feature is necessary because [...] curvature scalars involve powers of two derivatives (or factors of $1/r$) acting on a weak field, whereas the MOND correction [] we seek to realize as a scalar involves powers of only a single derivative of a weak field. The second property is needed to get the right weak fields. A philosophical digression is necessary at this point. We do not maintain that physics is nonlocal at the fundamental level; we believe rather that nonlocality enters through quantum corrections to the effective field equations from loops of massless gravitons. These induce no macroscopic nonlocality in flat space background because their interactions are suppressed by derivatives

de TeVeS, el campo vectorial tipo tiempo de nuestra clase de modelos no es una variable independiente sino más bien una función no local de la métrica en sí. En nuestra opinión, esta no localidad no es fundamental, sino que debería verse más bien como el resultado de correcciones cuánticas (quizás desde la época de la inflación primordial) a las ecuaciones de campo efectivas. Por lo tanto, siempre se debe tener en cuenta que nuestra clase de modelos implica que el universo se libera en algún estado inicial preparado en un tiempo finito (Deffayet *et al.*, 2011, p. 15).¹⁴

En este punto todo es especulación, sin embargo nos acerca a las discusiones que se tienen actualmente en filosofía de la mecánica cuántica sobre sus anomalías y sus múltiples representaciones y que comienzan a cuestionar también la localidad de los fenómenos.

En este contexto formal fue conveniente explicitar el atributo de localidad –además del de no localidad–, un atributo que estaba implícito en los retículos anteriores y que se incluye para diferenciar mejor las teorías locales de las no locales. De igual manera se agrega la constante de gravitación para contrastarla con la aceleración de Milgrom, y las teorías espacio-temporales lorentziana y pseudo-riemanniana.

4.5. Sobre las constantes fundamentales y los sistemas de unidades físicas

Las teorías físicas pueden también clasificarse a partir de sus constantes fundamentales. Estas son constantes que entran dentro de enunciados legales de las teorías más básicas como la cuántica, la gravitación y la relatividad y que en el estructuralismo se les considera elementos distinguidos. Se trata de variables que toman siempre un valor exacto ya sea como cantidades de alguna variable física o números producto de razones entre cantidades. Las constantes adimensionales como la constante de estructura fina $\alpha \approx 1/137$ que cuantifica la fuerza de las interacciones electromagnética entre partículas cargadas, toman el mismo valor independientemente del sistema de unidades, y en ese sentido son todas universales. En cambio, las constantes dimensionales refieren a propiedades de clases de sistemas físicos cuyo valor, que es constante en el tiempo, depende del sistema de unidades seleccionadas. Por ejemplo, el valor de la constante de gravitación en el Sistema Internacional es de $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$. En astrofísica, donde las distancias se miden en parsecs (pc), las velocidades en km/s^2 y las masas en unidades solares M_{\odot} , el valor es $G = 4,3009 \times 10^{-3} pc / M_{\odot} (\text{km}/\text{s}^2)$, mientras que en el sistema de unidades naturales de Planck, las constantes están normalizadas, siendo $G = 1$.

No todas las constantes referenciales son universales, también las hay específicas de algún sistema en particular, como lo es la velocidad del sonido o el calor específico de algún material. Las constantes son características de ciertos dominios. La extensión de dicho dominio nos

¹⁴“[...] our constructions involve two nonlocal building blocks: the 15 inverse scalar d’Alembertian and the timelike vector field $u^{\mu}[g](x)$ formed from normalizing the gradient of either the volume of the past light-cone or the closely related inverse of the Paneitz operator. Unlike TeVeS, the timelike vector field of our class of models is not an independent variable but rather a nonlocal functional of the metric itself. In our view this nonlocality is not fundamental but should be viewed rather as the result of quantum corrections (perhaps from the epoch of primordial inflation) to the effective field equations. So one should always bear in mind that our class of models involves the universe being released in some prepared initial state at a finite time”.

dice qué tan universal o menos universal es una constante, pues algunas como la carga del electrón e , pertenecen a la microfísica, otras, como la constante de Boltzmann pertenece a la macrofísica, y otras como la G y la c son supuestos como independientes del nivel, al menos, hasta ahora.

De acuerdo con el sistema internacional de unidades (SI), son siete las unidades de medida básicas: el kilogramo, el segundo, el metro, el ampere, el grado Kelvin, la candela y el mol. Estas unidades se definen a partir de combinaciones de cantidades y razones medidas, exactas y constantes: la carga del electrón e ($[e] = [C] = [As]$), el número de Avogadro N_A ($[N_A] = [mol^{-1}]$),¹⁵ el factor de proporcionalidad entre la energía cinética de un gas y su temperatura: la constante de Boltzmann k_B ($[k_B] = [J/K] = [ML^2/Tt^2]$), el quantum de acción de Planck h ($[h] = [Et] = [ML^2/t]$), la velocidad límite de propagación de señales c ($[c] = [L/t]$), o la frecuencia de oscilación de un átomo de Cesium en su estado base que define el segundo $\Delta\nu_{Cs}$ ($[\Delta\nu_{Cs}] = [s^{-1}]$).

El SI pasó por una revisión durante la segunda década del siglo XXI por parte del Comité Internacional de Pesos y Medidas, logrando que todas las unidades, incluido el kilogramo quedaran definidos a partir de constantes fundamentales que pueden ser obtenidas mediante experimentos, y no a partir de objetos físicos ejemplares. En la Figura 4.5 se muestran dos representaciones de las relaciones entre las unidades del SI. La primera, realizada por Pisanty, y publicada por (Lockwood y Rowell, 2016), presenta una configuración circular con nodos desconectados. El retículo propuesto como alternativa acentúa el nivel jerárquico de las constantes como atributos y de las unidades como objetos. El contexto se extrajo a partir de las relaciones señaladas en el diagrama de Pisanty, y se presenta con los mismos colores para facilitar su comparación.

Otros sistemas de unidades no incluyen k_B ni N_A entre sus componentes axiomáticos, pues consideran que son derivables del conjunto base y no describen propiedades del universo sino factores de proporcionalidad. Observamos que en la selección axiomática de las constantes del SI a partir de las cuales se derivan las demás unidades del sistema internacional no aparece la constante de gravitación.

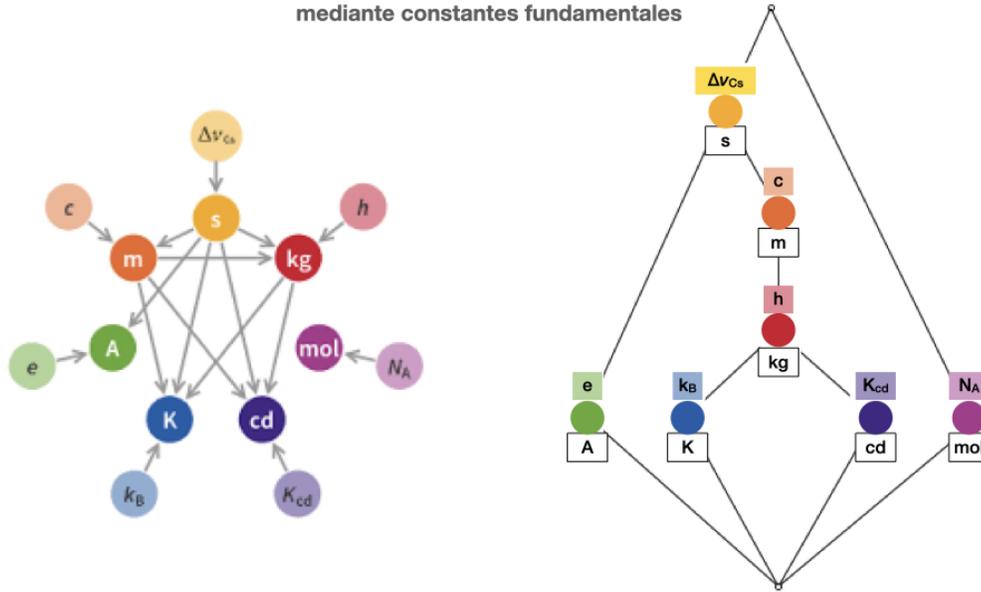
En 1899 Max Planck propuso un sistema de unidades básico de distancia, tiempo, masa y temperatura a partir del cual pueden deducirse todas las demás cantidades, basado en las constantes c, G, h, k , de manera que éstas puedan normalizarse a 1.

Estas cantidades conservan su importancia natural mientras la ley de la gravitación y la de la propagación de la luz en el vacío y los dos principios de la termodinámica sigan siendo válidos; por lo tanto, deben ser siempre iguales, cuando se miden según las inteligencias más diferentes según los métodos más diferentes (Max Plank en Barrow, 2002).¹⁶

¹⁵Un mol de una sustancia es la cantidad de ella que contiene un número específico de entidades elementales. Aunque es una cantidad de sustancia, no podemos expresarlo como una masa (por ejemplo, gramos) hasta que se especifique cuál es la entidad elemental; pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas (Resnick y Halliday, 1974).

¹⁶"*These quantities retain their natural significance as long as the law of gravitation and that of the propagation of light in a vacuum and the two principles of thermodynamics remain valid; they therefore must be found always*

2 representaciones de las definiciones del Sistema Internacional de Unidades mediante constantes fundamentales



Red dirigida, propuesta de Pisanty (2016)

Retículo jerárquico, propuesta de Espinosa (2021)

Figura 4.5.1. Dos representaciones de las relaciones entre unidades del Sistema Internacional mediante constantes fundamentales. Los colores en el retículo siguen la selección de Pisanty para facilitar la comparación entre diagramas.

El primer estudio dedicado al sistema conformado por las tres constantes fundamentales c , G y \hbar data del 1928, cuando G. Gamow, D. Ivanenko y L.D. Landau hipotetizaron qué sucedería si alguno de dichos valores fuera distinto. En los años treinta M.P. Bronshtein dió una clasificación detallada de las teorías físicas basado en estas tres constantes y sus unidades con el fin de cuantizar la gravitación. Para representar gráficamente las ideas de Bronshtein, A.L. Zel'manov dibujó en los años sesenta el cubo de las teorías físicas (Fig. 4.5), que podemos encontrar reproducido en (Okun, 1991) y (Barrow, 2002). Este cubo consiste en tres ejes ortogonales $(G, 1/c, \hbar)$. En el origen $(0,0,0)$, se ubica la mecánica clásica de partículas que se aplica a los ámbitos en donde la gravitación es despreciable, la velocidad

to be the same, when measured by the most widely differing intelligences according to the most widely differing methods".

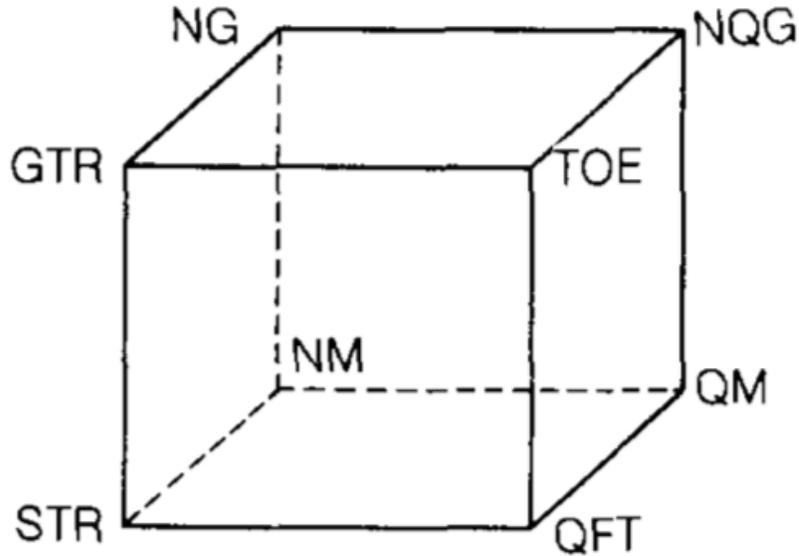


Figura 4.5.2. El cubo de las teorías físicas de A.L. Zel'manov. Aquí NM: Newtonian Mechanics; NG: Newtonian Gravity; STR: Special Theory of Relativity; QM: Quantum Mechanics; GTR: General Theory of Relativity; NQG: Non relativistic Quantum Gravity; QFT: Quantum Field Theory; TOE: Theory of Everything.

de la luz tiende al infinito ($1/c = 0$), y la constante de Planck no entra en las ecuaciones. Estas tres constantes son independientes, de manera que podemos modelar teorías en las que, como un switch sus valores se encuentran prendidos o apagados. Para la gravedad newtoniana tenemos $(G, 0, 0)$; relatividad especial está en $(0, 1/c, 0)$; la relatividad general en $(G, 1/c, 0)$; la mecánica cuántica no relativista está en $(0, 0, \hbar)$; la teoría cuántica de campos en $(0, 1/c, \hbar)$, y la teoría del todo (TOE) queda ubicada en la esquina correspondiente a $(G, 1/c, \hbar)$. Esta representación mediante ejes puede llevar al lector a interpretar un gradiente en los valores de las constantes. Esto no es así, se trata de valores binarios. Una representación alternativa y más poderosa es la de los retículos.

La Figura 4.5 representa el cubo de teorías físicas pero no mediante ejes coordenados, sino utilizando el criterio jerárquico que ubica a la mecánica de partículas (MCP) en el nodo supremo y a TOE en el nodo ínfimo. Ya no hay, por así decirlo, un origen. Esta representación permite incluir otras teorías que abarcan nuevos ámbitos como el de las bajas aceleraciones, y otras constantes fundamentales.

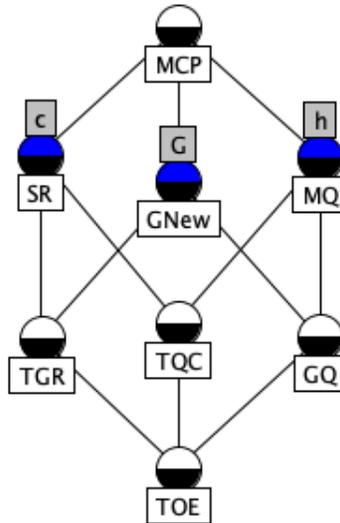


Figura 4.5.3. Retículo del cubo de teorías físicas. A diferencia de un cubo con ejes coordenados, donde la mecánica clásica se encuentra en «el origen» (0,0,0), ésta se encuentra en el nodo supremo, mientras que la teoría del todo (TOE) está en el nodo ínfimo. Las etiquetas siguen la notación que se ha venido ocupando en esta tesis, siendo MCP: Mecánica Clásica de Partículas, GNew: Gravedad Newtoniana, SR: Relatividad Especial, MQ: mecánica cuántica, TGR: Teoría General de Relatividad, TQC: Teoría Cuántica de Campos, GQ: Gravedad Cuántica no relativista, TOE: Teoría del Todo.

El cubo de Zel'manov (también llamado cubo de Okún o cubo de teorías físicas), no incluye a la constante de Boltzman por considerarse no fundamental al servir solamente para transformar energía en temperatura.

Podemos hacer relucir las constantes fundamentales en los retículos conceptuales al señalarlas como elementos especiales que como atributos se distinguen de las ecuaciones en donde aparecen. Esto es importante, pues a través de estas constantes es que se agrega a la teoría el componente empírico. Contestando la pregunta de Morman, es en la inclusión de estas constantes fundamentales que las teorías matemáticas se distinguen de las teorías físicas. Es la puerta empírica, son los límites que impone la realidad.

No debemos olvidar, sin embargo, que la naturaleza de G es conspicua. Pensemos en el problema de dos masas en el espacio vacío, orbitándose mutuamente bajo la influencia de la atracción gravitacional. Las variables en este problema son las dos masas m_1 y m_2 , la distancia

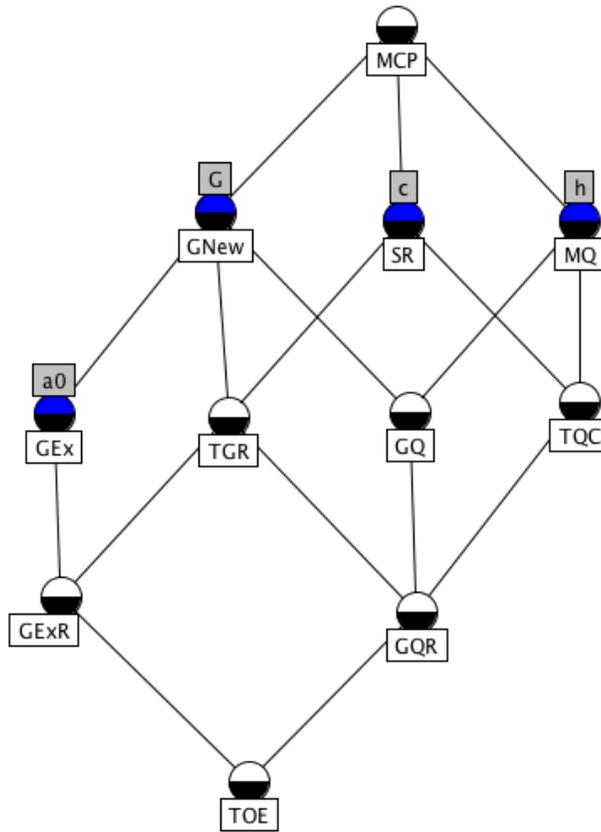


Figura 4.5.4. Retículo de constantes fundamentales que incluye la constante de Milgrom a_0 y otros dos modelos de teorías: la gravedad extendida y la gravedad extendida relativista. La gravedad cuántica relativista (GQR) sustituye a la teoría del todo del cubo, quedando la nueva TOE en el nodo ínfimo, la cual, tampoco existe, pero que tendría que incluir todas las constantes fundamentales, es decir, todos los ámbitos.

r y el tiempo t . Un sencillo análisis dimensional nos dice que para encontrar una función que relacione el tiempo con las demás variables, $t = f(m_1, m_2, r)$ debemos incluir de manera un tanto arbitraria, una constante con las dimensiones inversas, pues ninguna de las variables tiene dimensiones temporales. Esto haría pensar que no se está considerando alguna variable que afecte el problema. Bridgman expresa su incomodidad ante tal arbitrariedad:

Sin embargo, nos queda un sentimiento incómodo porque no vemos muy bien cuál fue el problema con nuestro argumento, y nos preocupa la premonición de que en algún momento en el futuro tal vez pueda haber una constante dimensional que no fuimos lo suficientemente inteligentes de imaginar, y que puede no proclamar la imposibilidad de descuidarlo en tonos tan intransigentes como la constante gravitacional en el ejemplo. Tememos que en tal caso obtengamos la respuesta incorrecta y no lo sepamos hasta que se caiga un puente de Quebec (Bridgman, 1920).¹⁷

Los retículos obtenidos mediante FCA permiten relacionar conceptos multidimensionales, de manera que podemos añadir más constantes fundamentales sin perder la lógica de las relaciones que el cubo pretende plantear. No necesitamos limitarnos a estas 3 constantes y podemos analizar otros patrones, relaciones, simetrías y asimetrías en la estructura de nuestras teorías. La simetría del cubo nos ha cautivado, y sin embargo nos puede estar constriñendo la imaginación para concebir modelos físicos y nuevos ámbitos de aplicación.

En la Figura 4.5 se incluyen como objetos tres teorías físicas más que incluyen en su descripción los ámbitos de bajas aceleraciones tanto de forma relativista como no relativista, y el atributo: la aceleración de Milgrom. Una nueva teoría del todo deberá incluir esta constante también, sustituyendo la gravedad cuántica relativista (GQR) en el lugar que ocupaba TOE en el cubo de Zel'manov. Los modelos etiquetados como GEx y GExR representan un montón de propuestas que toman como fundamental la aceleración de milgrom considerando el régimen de bajas aceleraciones un ámbito distinto de aplicación (véase la clasificación de teorías MoND en el *Review* de Famaey y McGaugh, 2012). Esta constante a_0 no es sólo una cantidad derivada de las mediciones en galaxias elípticas, también puede ser derivado teóricamente a partir de relaciones bien conocidas entre las demás constantes y otras coincidencias encontradas como lo muestran Bernal *et al.* (2011). En este artículo los autores proponen dos expresiones equivalentes para la a_0 :

$$2\pi a_0 = \frac{Gm_p^3 c^2}{(10h)^2},$$

donde m_p equivale a la masa del protón. Esta expresión es válida para todo tipo de sistema astrofísico, compuesto de gas y estrellas y a lo largo de catorce órdenes de magnitud. La segunda:

$$2\pi a_0 \approx \frac{GM_U}{R_H^2},$$

donde M_U es la masa del Universo y R_H es el radio de Hubble. Estas expresiones hacen uso de relaciones y coincidencias encontradas entre las constantes fundamentales y los sistemas astrofísicos. Ya en 1983 Milgrom había notado que $a_0 \approx cH_0$, donde H_0 es la constante de

¹⁷“We are nevertheless left with an uncomfortable feeling because we do not see quite what was the matter with our argument, and we are disturbed by the foreboding that at some time in the future there may perhaps be a dimensional constant which we are not clever enough to think of, and which may not proclaim the impossibility of neglecting it in quite such uncompromising tones as the gravitational constant in the example. We are afraid that in such a case we will get the incorrect answer, and not know it until a Quebec bridge falls down”.

expansión del Universo propuesta por Hubble. Ésta puede ser una curiosa coincidencia del momento particular que vivimos o indicar una evolución temporal. La relación apunta a que el Universo es el único sistema que funciona en el régimen relativista y de bajas aceleraciones a la vez, y por tanto la cosmología requiere de una teoría adecuada para su estudio.

4.6. Holón de teorías del espacio-tiempo

Al parecer, hemos encontrado una buena cantidad de modelos y teorías alternas representadas bajo el mismo formalismo lagrangiano, covariante, que comparten muchísimos atributos, escritos en el lenguaje de la geometría diferencial libre de coordenadas. Aquí se incluyen la clasificación de Friedman, la de Sotiriou y Faraoni, la de Dewar, la de Will y la de Mendoza. Esto nos permite conformar un gran contexto e identificar algunos patrones en el retículo que llamaré holón y que sirve como receptáculo de todos aquellos modelos comparables. Este holón y sus partes: la punta del ice-berg y sus racimos, conforman un andamiaje a partir del cual se pueden plantear más exploraciones conceptuales.

La clasificación final requiere que los modelos estén comprendidos por una variedad diferenciable, una serie de objetos geométricos (llámense variables o campos), cuyos dominios están tipificados y caracterizados, y cuyos codominios cumplen una serie de condiciones o constricciones; la acción, las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de campo, los elementos distinguidos, (constantes fundamentales, ciertas funciones especiales y parámetros cosmológicos) que permiten diferenciar unos modelos de otros

$$m : \{M, OG, Tip, C, Con, A, EC, EM, ED, f, p\}.$$

La distribución de modelos y atributos tiene dos lecturas: una vertical y otra horizontal. La vertical, jerárquica ya la hemos explicado en el capítulo 1, donde los atributos más generales propios de la topología y la geometría, los modelos previos y los modelos de espacio-tiempo quedan en la parte superior, mientras que los físicos y las ecuaciones de campo y de movimiento quedan en la parte más especializada, la parte inferior. Pero también observamos que hay una direccionalidad horizontal correlacionada con el tiempo histórico en que fue concebida o publicada cada teoría. Los modelos en el extremo izquierdo corresponden a los modelos newtoniano y galileanos, previos al siglo XX; las teorías métricas desarrolladas en los años cincuenta y setenta les siguen a la derecha y en la parte central; las teorías más modernas, las mondiañas, las $f(R)$ y las métrico afin se encuentran al extremo derecho. Esto es en parte un acomodo consciente por parte del visualizador, que busca asistir al lector respetando estas convenciones gráficas, pero también depende de la cercanía conceptual, que al parecer da saltos más parsimoniosos. Otra indicación temporal puede darse al dejar los modelos más antiguos con alturas superiores y los más recientes en alturas inferiores. Esto sigue siendo parte del diseño. Sin embargo, hay agrupamientos y estructuras en los retículos que dirigen estas tendencias. En las Figuras 4.6.3 al 4.6.9 podemos observar cómo se van acomodando las clases de teorías.

Los retículos interactivos que encontramos en el Exploratorium permiten señalar otros agrupamientos interesantes, por ejemplo: aquellas teorías con curvatura igual a cero, teorías

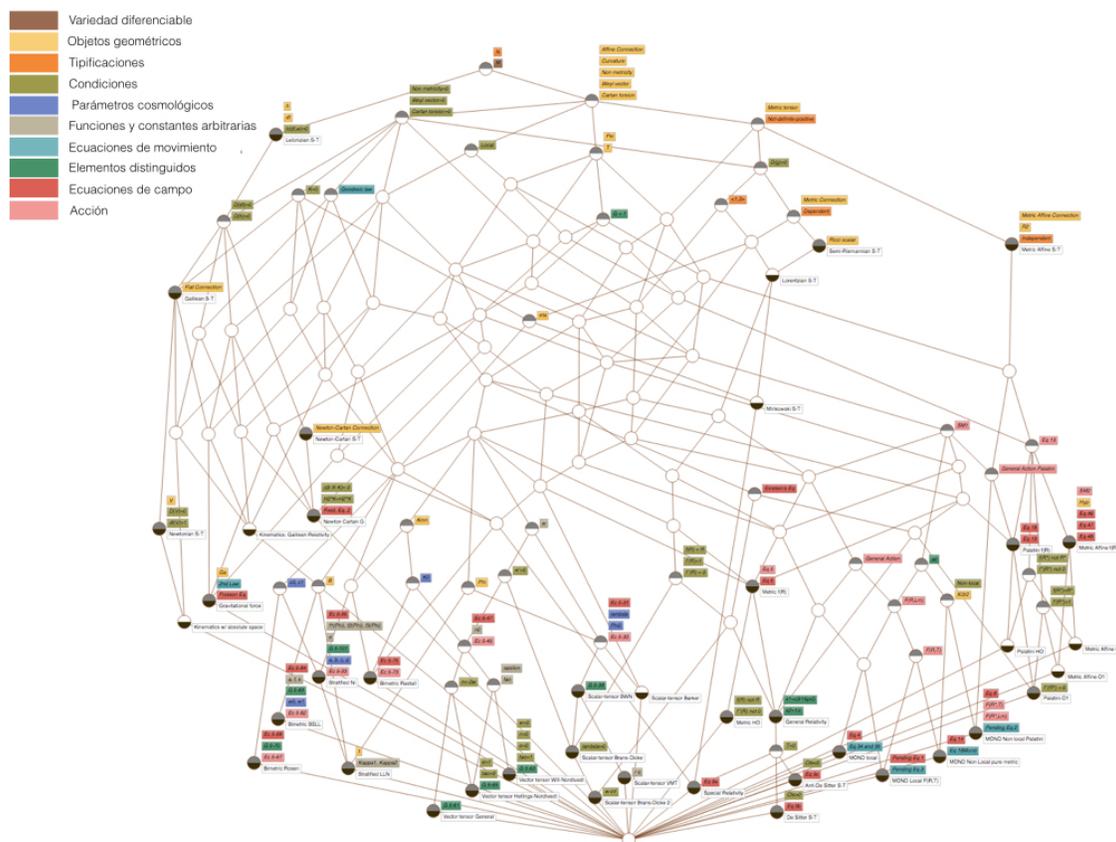


Figura 4.6.2. Holón de teorías del espacio-tiempo y la gravitación. Sirve como receptáculo de las teorías de gravitación representadas en la formulación lagrangiana covariante en 4 dimensiones y escritas en el lenguaje de la geometría diferencial. Explórese en la página web: remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium.

con la constante de gravitación $G = 1$, teorías con o sin torsión, o las varias interpretaciones de “teoría métrica”.

4.7. Otras teorías alternas a la relatividad general

Hemos revisado ya suficientes ejemplos para ilustrar las posibilidades de representación gráfica de teorías físicas mediante el FCA. Éstas no son todas las teorías gravitatorias. Incluimos aquí –y sólo por completez–, un resumen de otras teorías gravitatorias que se han planteado durante el siglo XX y que aparecen indicadas en el “Manzano de la gravitación” (Figura 0.3.4), pero que no hemos llegado a visualizar.

Exploraciones no métricas. Poincaré propuso abiertamente la idea de unificar la gravitación con el electromagnetismo, en sus lecturas “On the dynamics of the electron” (1905) y “New conceptions of matter” (1912) (1999; 2012; 1995). Siguiendo esta iniciativa dentro de

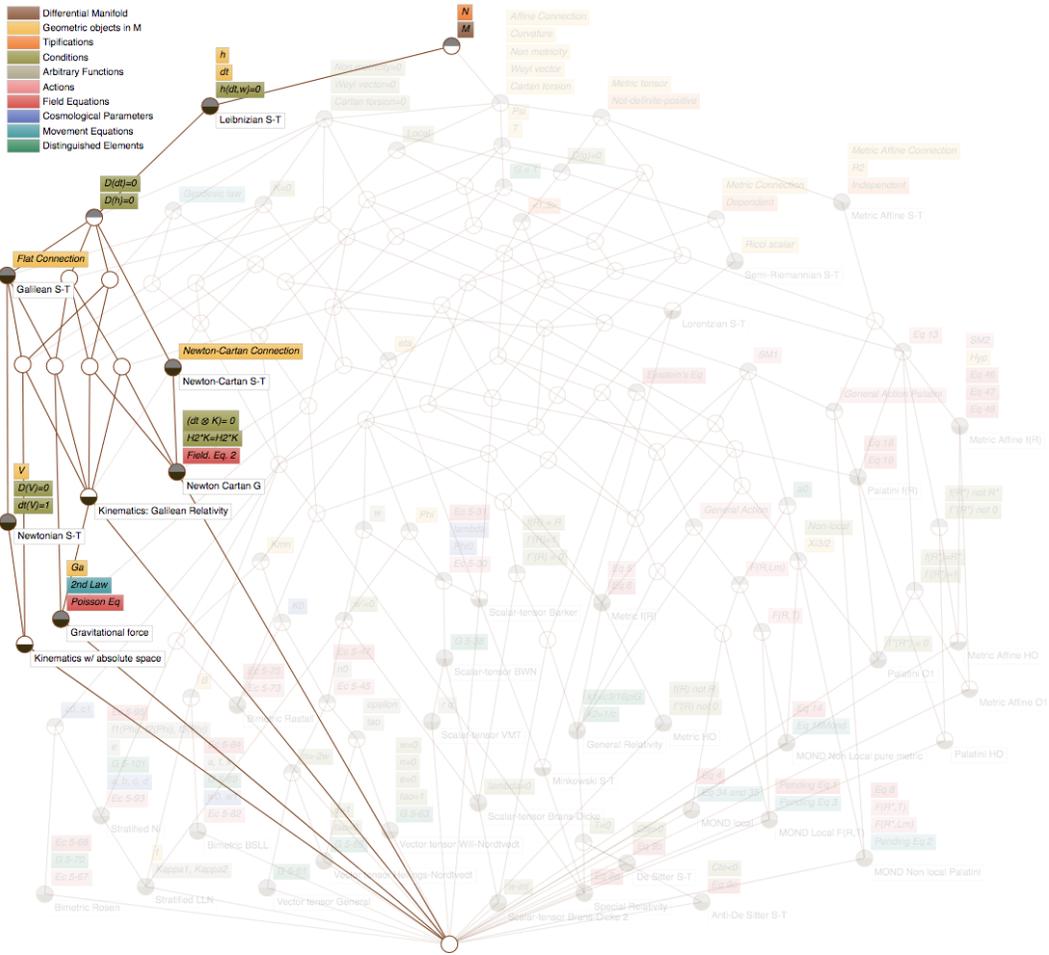


Figura 4.6.3. Teorías leibnizianas

una visión convencionalista es que surgen cuatro ramificaciones en las que se exploran, principalmente representaciones matemáticas alternativas en donde se trata el fenómeno a partir de sus simetrías y de la teoría de grupos. Igualmente se vio con otro enfoque el papel que juegan los objetos de medición como lo son el tensor métrico y la conexión afin, obteniendo geometrías más generales y teorías con invarianza de norma, torsión o dimensiones extra.

Teorías con campo gravitacional físico. La teoría gravitatoria de campo físico (FTG) fue desarrollada después de la segunda Guerra Mundial por George Birkhoff, un físico americano que presentó su propuesta en un congreso científico llevado a cabo en Tonanzintla, Puebla, en 1943 (Galindo *et al.*, 2013). El objetivo de Birkhoff era ya el de unificar la gravitación con el electromagnetismo. Su trabajo logró inspirar a personajes como Marcos Moshinsky,

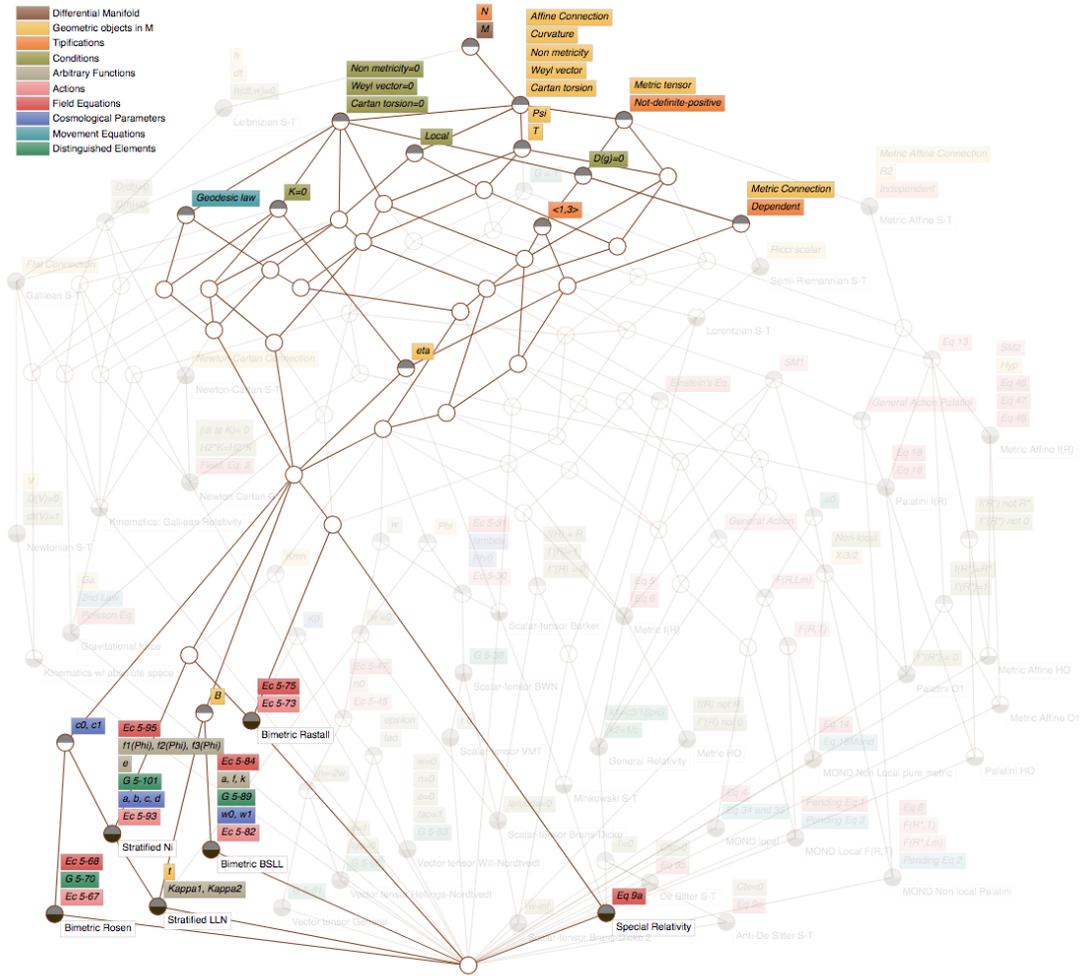


Figura 4.6.4. Teorías bimétricas y estratificadas

uno de los más renombrados físicos mexicanos, quien incorporó a la teoría un principio de universalidad que especifica que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, distinguiendo entre movimiento inercial y movimiento acelerado. En 1961, Thirring y Kalman incorporaron un principio de simetría que dio consistencia a la FTG (Thirring, 1961; Kalman, 1961; Baryshev, 1999). La energía del campo gravitacional es un concepto fundamental para la FTG, especialmente en su aproximación a la cuántica, conocida como Gravidinámica, desarrollada por Richard Feynman (1963) y Steven Weinberg (1965). Es justamente en el campo fuerte donde las diferencias en FTG y TGR se vuelven relevantes. En los años ochenta, el físico ruso Anatoly Logunov propuso otra teoría que también considera una naturaleza física

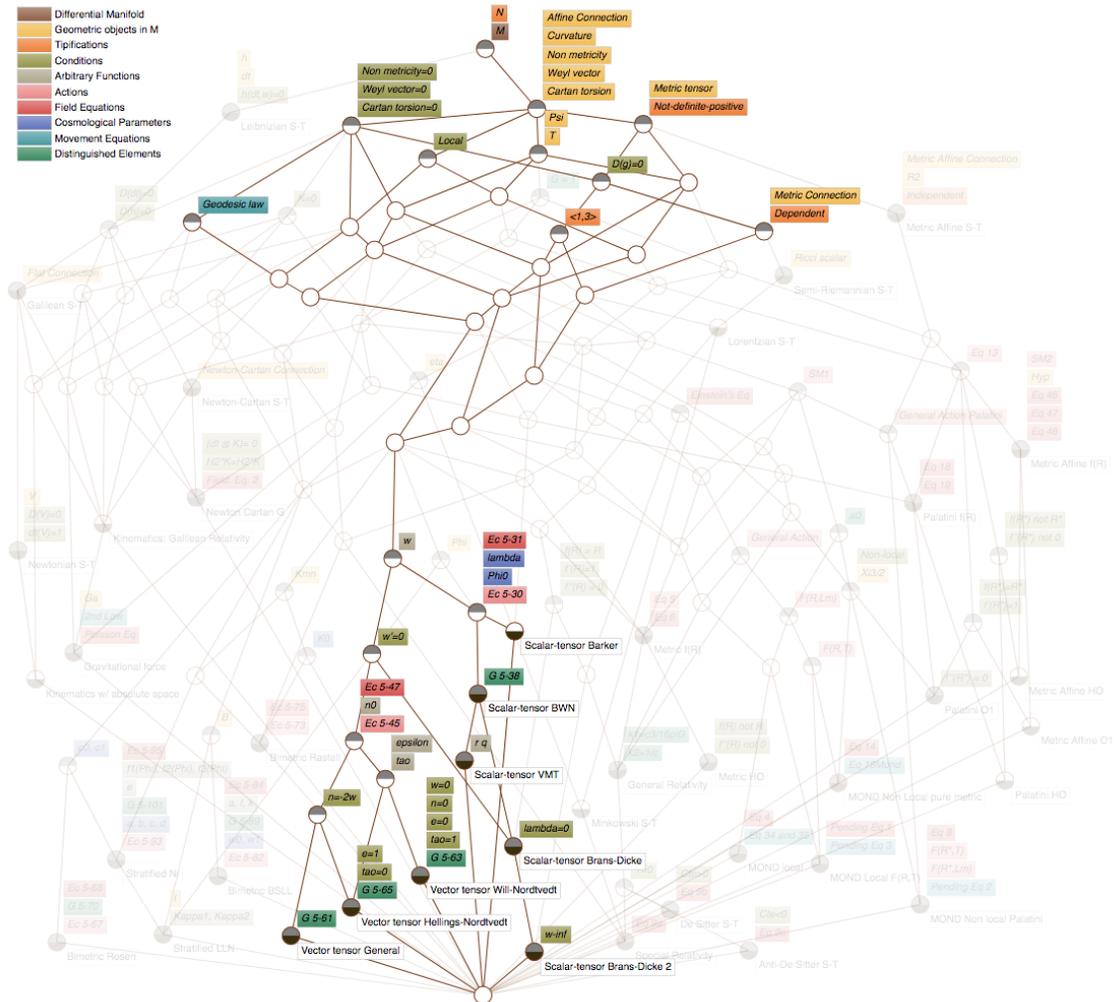


Figura 4.6.5. Teorías vectoriales y tensoriales

para el campo gravitatorio. Logunov tomó la teoría bimétrica de Rosen y aplicó un principio de geometrización que plantea que aunque la materia se encuentre en un espacio plano de Minkowski, ésta se mueve efectivamente en un espacio riemanniano. La llamada teoría relativista de gravitación supone la existencia de un gravitón masivo como partícula intermediaria de la fuerza gravitatoria (Logunov y Mestvirishvili 1984; 1986) . Según el reporte de Turyshev (2009), la teoría de Logunov tiene una buena adecuación empírica con los experimentos en el Sistema Solar y datos de púlsares binarios; no predice agujeros negros ni singularidades en el Big Bang. En cambio, el universo que predice es plano, infinito y oscilante.

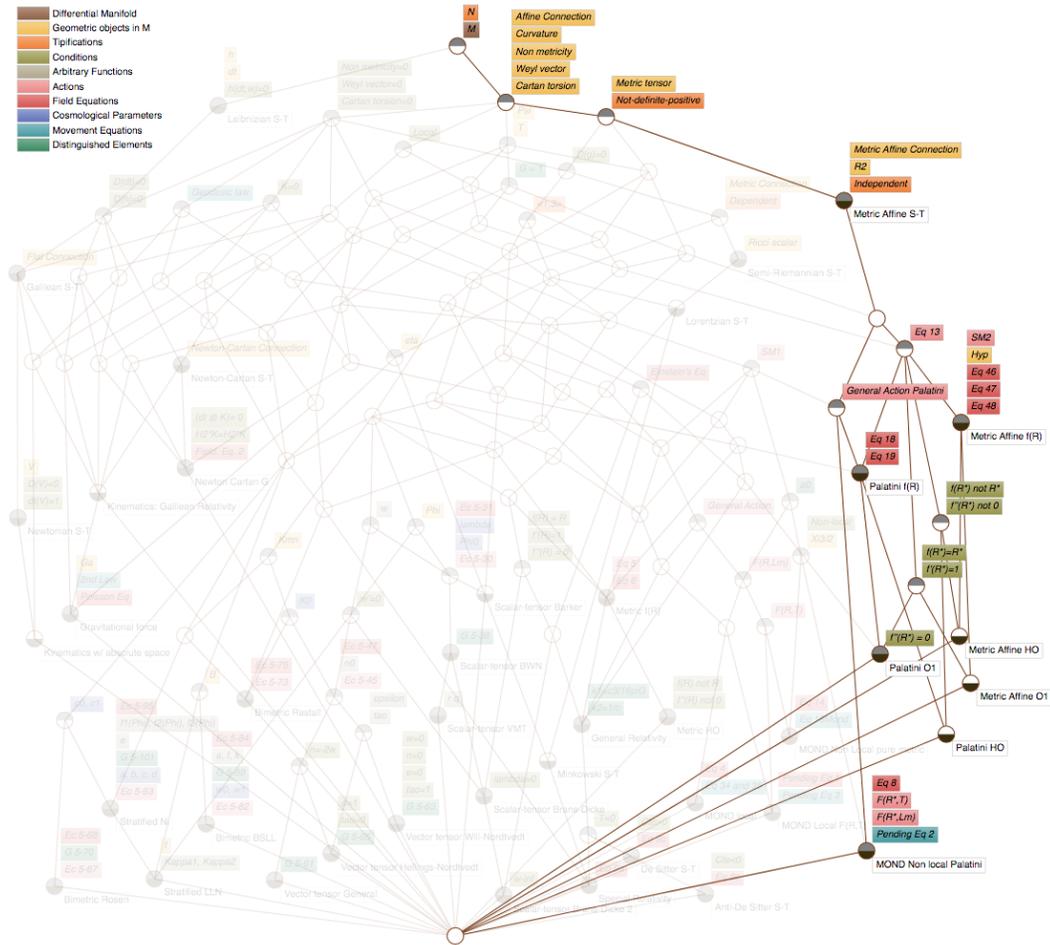


Figura 4.6.7. Teorías métrico-afín

y siendo el espín de carácter dipolar, las contribuciones se cancelan en promedio. Esto no es así para la masa (energía-momento); pero en el nivel micro, el momento angular del espín se vuelve relevante y puede caracterizar a la materia de una manera dinámica, proporcionando, hipotéticamente, un campo gravitacional. La reinterpretación de Kibble (1961) y Sciama (1964) relaciona la torsión con el espín, lo cual puede ser relevante en escenarios como el de la gran explosión o cerca de estrellas de neutrones. Esta teoría más general, conocida también como U4 por montarse sobre un espacio-tiempo con torsión, ha sido probada válida dentro en el Sistema Solar.

Teorías de gravedad con invarianza de norma (teorías gauge). La invarianza ante transformaciones conformes representa cambios en las unidades de longitud y tiempo que difieren

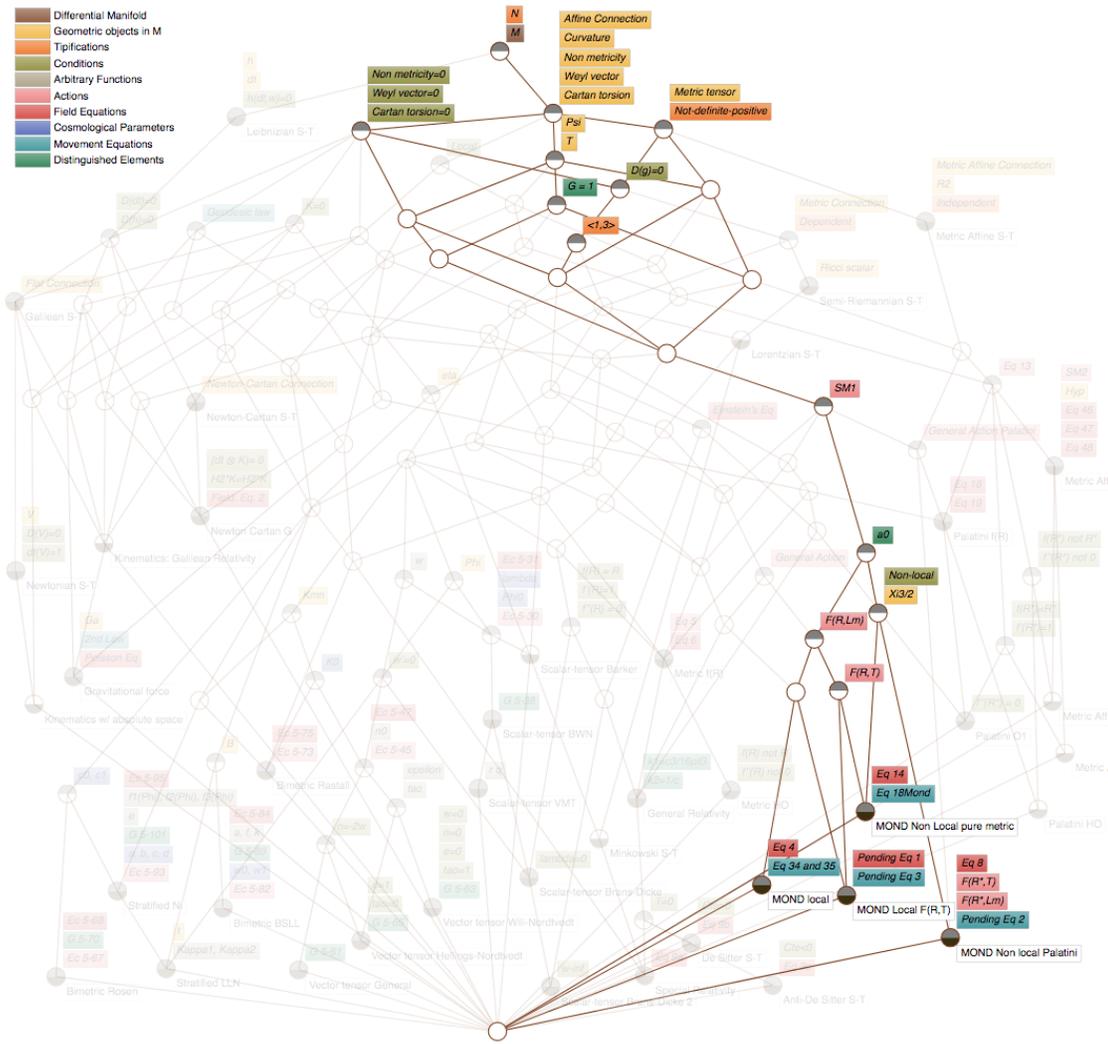


Figura 4.6.8. Teorías MoND

de punto a punto en la variedad que representa el espacio-tiempo. Estas transformaciones fueron desarrolladas originalmente con propósitos cartográficos. En 1919 Herman Weyl las propuso intentando unificar la gravitación con el magnetismo. La geometría de Weyl es una generalización de la geometría Riemanniana pues no postula que la derivada covariante del tensor métrico g deba ser igual a cero. La belleza de la teoría de Weyl, reconocida así por Einstein, no fue suficiente para describir adecuadamente el mundo físico, pues las partículas

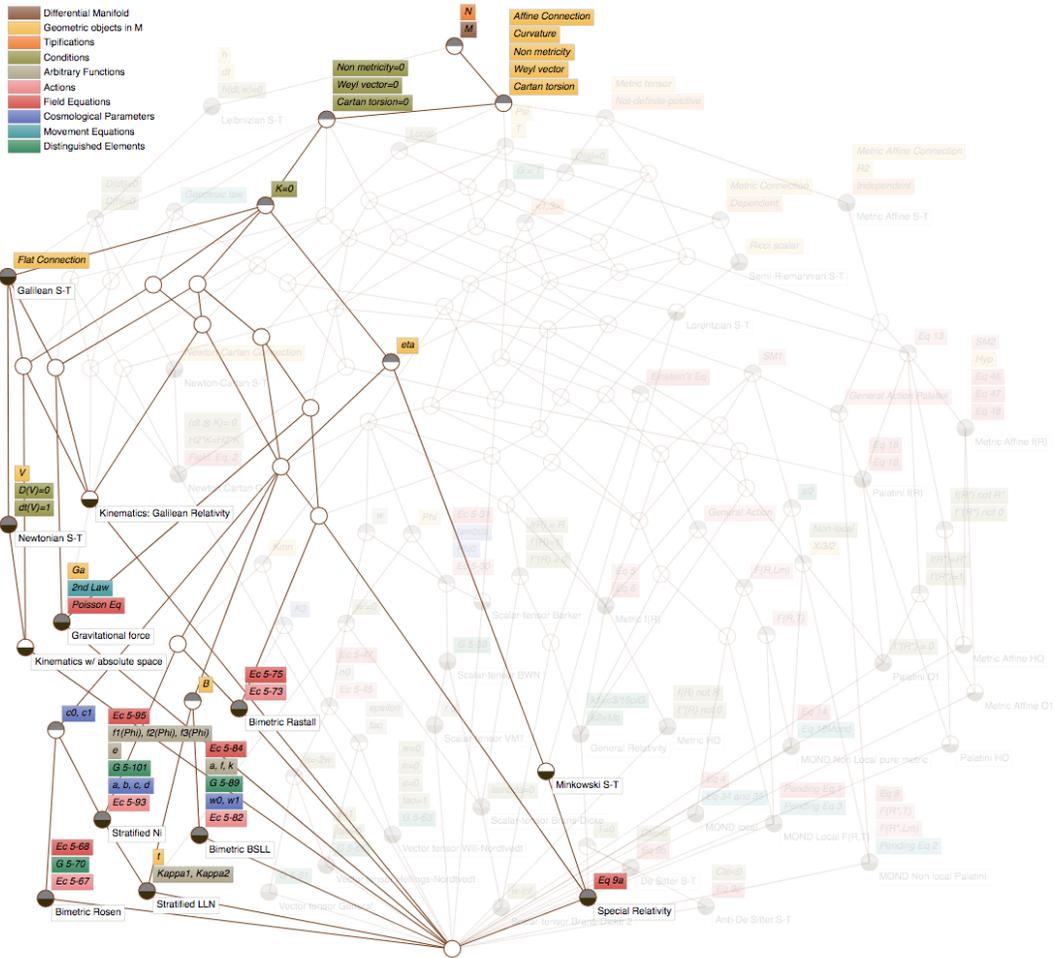


Figura 4.6.9. Teorías con curvatura igual a cero.

sin carga resultaban influenciadas por los campos electromagnéticos y relojes idénticos caminarían a distinto paso cuando uno de ellos se moviera en una trayectoria cerrada bajo la presencia de campos electromagnéticos (véase Norton, 1992).

La teoría de invarianza de norma se desarrolló en los años siguientes, basándose en la teoría de grupos y sus transformaciones. Esto permite deducir ecuaciones que describen interacciones en cualquier espacio abstracto con base en sus simetrías, sin la necesidad de imponer un sistema de coordenadas. Ryoyu Utiyama (1956) mostró que la relatividad general es una teoría de norma asociada al grupo de transformaciones de Lorentz en un espacio de Minkowski, donde el campo gravitacional es un campo con spin 2, descrito por un tensor de rango 4. Aquí la corriente del momento angular está asociada con el grupo de Lorentz, el cual no puede

representar por sí misma la fuente de gravedad (véase Hacyan, 2009; Kastrup, 2008; Romero *et al.*, 2012).

Teleparalelismo. Entre 1928 y 1931, Einstein trabajó infructuosamente en el problema de la unificación haciendo uso de un campo de tétradas que permite hacer comparaciones a distancia de la dirección de los vectores tangentes en diferentes puntos de la variedad. El teleparalelismo es una teoría libre de curvatura inmersa en el espacio-tiempo de Weitzenböck. Su resultado involucra dos conexiones diferentes sin una interpretación bien definida (Sauer, 2006). La contribución de la torsión a la gravedad implica diferencias conceptuales importantes: la torsión actúa como una fuerza y no como un efecto geometrizable; como consecuencia, las partículas en movimiento no siguen geodésicas sino ecuaciones de fuerza. La nueva teoría teleparalela puede ser interpretada como una teoría de norma abeliana para el grupo de traslación que no requiere universalidad o la validez del principio de equivalencia para describir el fenómeno gravitatorio.

Gravedad Métrica-Afín. Friedrich Hehl *et al.* (1976) propuso extender los conceptos de relatividad general al dominio microfísico para facilitar una comparación y de ser posible, una liga a las teorías para la fuerza fuerte, débil y electromagnética, expresando dichas concepciones en términos de la conexión afín. La teoría métrico-afín de gravitación (MAG) es el resultado de esta línea de investigación, la cual considera a la curvatura, la torsión y la no-metricidad (la derivada covariante de la métrica) distintos de cero (véase Obukhov *et al.*, 1997).

Teoría no simétrica. La teoría no-simétrica de gravitación (NST) del canadiense John Moffat reinterpreta una incorrecta teoría unificadora propuesta por Einstein en 1946, como una generalización puramente gravitacional. NST está basada en una geometría no riemanniana donde el tensor métrico simétrico es remplazado por un tensor que es la suma de los tensores simétricos y antisimétricos. La NST presenta inestabilidades y soluciones patológicas para las ecuaciones de campo, en desacuerdo con los datos observacionales (véase Moffat, 2008).

Dimensiones extra. En 1919, el físico polaco-germano Theodor Kaluza propuso unificar las dos fuerzas conocidas agregando una quinta dimensión al tensor métrico en una geometría riemanniana ordinaria. Esta quinta dimensión está concebida como un espacio cilíndrico con un radio comparable a la longitud de Planck, y por tanto invisible. Kaluza envió su propuesta a Einstein, con la esperanza de que lo recomendara para su publicación, pero Einstein esperó para ello dos años. Una razón plausible para explicar dicha demora es que la métrica de Kaluza no es un tensor y su determinante es extremadamente complicado (O’Raifeartaigh y Straumann, 1998). No fue sino hasta 1926 cuando el físico sueco Oskar Klein (1926), de manera independiente, resolvió los problemas de la teoría de Kaluza, proponiendo una forma métrica alternativa con un determinante proporcional al determinante del tensor métrico utilizado en la TGR.

Teoría de Gravedad Conforme. Mannheim, Kazanas (1994) han trabajado una versión menos radical a la teoría de Weyl con la finalidad de resolver los misterios de la materia oscura y la energía oscura. Su teoría se desembaraza del campo electromagnético que incluye Weyl y recupera la geometría riemanniana estándar, reteniendo la métrica como el campo gravitacional, pero le otorga una simetría adicional más allá de la invarianza de coordenadas

como simetría conforme. La imposición de dicha simetría lleva a seleccionar una única acción gravitacional llamada la acción de Weyl, y prohíbe la presencia de cualquier término cosmológico. Fue esta propiedad de la gravedad conforme lo que atrajo a Mannheim en primer lugar. La “gravedad conforme” también prohíbe una masa fundamental de Planck y por ello excluye cualquier constante fundamental de Newton y la acción de Hilbert-Einstein. Mannheim argumenta que su teoría no puede ser rechazada bajo esos argumentos, pues contiene la solución de Schwarzschild que recupera la fenomenología estándar para el Sistema Solar. Esta teoría también considera el efecto cosmológico global en la dinámica de las galaxias ya que una partícula de prueba a las afueras de una galaxia no sólo sentiría el campo local producido por la materia luminosa dentro de la galaxia, sino que también estaría afectada por el campo producido por el resto del Universo. Un efecto similar al del campo externo mondiano o a una interpretación del principio de Mach. La visión de Mannheim es que la hipótesis *ad hoc* de la materia oscura es un artefacto ingeniado para tratar de describir un fenómeno global en puros términos locales.

Teoría de Gravedad Modificada (MOG). En el año 2003, John Moffat buscó una alternativa más sencilla a su teoría no simétrica (NSGT) que pudiera explicar los problemas de materia oscura y energía oscura. Para lograrlo, sustituyó el efecto de fuerza de la torsión por un campo adicional simétrico (skew symmetric field). Y para adecuarse a los datos del Sistema Solar postuló que la constante gravitacional G variaba en el tiempo y el espacio. Es por ello que su teoría puede asociarse con la teoría de Brans-Dicke. Moffat llamó a su teoría: *Metric-Skew-Tensor Gravity* (MSTG) que es matemáticamente muy complicada, por lo que en el año 2005 propuso una versión más simple llamada *Scalar-Tensor-Vector Theory* (STVG) compuesta por una métrica simétrica, un campo vectorial llamado de phiones que es el portador de la quinta fuerza de la teoría, y tres campos escalares que describen las variaciones de la constante gravitacional, el acoplamiento del campo de phiones a la materia y la masa efectiva del campo de phiones. La fuerza repulsiva que produce el campo de phiones, combinada con la constante gravitacional variable lleva a una modificación de la segunda ley de Newton. Esta nueva ley agrega una aceleración repulsiva asociada al potencial de Yukawa. Cuando el parámetro de alcance λ del potencial es infinitamente grande, el potencial se reduce a la ley de Newton. Para una λ finita, el potencial de Yukawa se desvanece exponencialmente conforme la distancia a la fuente aumenta. De acuerdo con Moffat, STVG es estable, no tiene modos de energía negativos y está libre de singularidades patológicas. Estas dos teorías juntas se conocen como *Modified Gravity* (MOG) ya que sus predicciones difieren sólo en el campo fuerte, mientras que sus predicciones para el Sistema Solar, la astrofísica y cosmología son las mismas.

Formalismo ADM. Como en la mecánica clásica, la relatividad general también puede ser formulada a partir de un Hamiltoniano, donde las variables dinámicas son el tensor métrico de un espacio-tiempo foliado en tres dimensiones y sus correspondientes momentos conjugados. El formalismo ADM, llamado así en honor a sus desarrolladores: los físicos americanos Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles Misner, ha evolucionado principalmente en dos direcciones: la relatividad numérica que aplica algoritmos y métodos numéricos en super computadoras para estudiar espacio-tiempos de formas desconocidas; y hacia la gravedad cuántica (Arnowitt *et al.*, 2008) y (Witten, 1962).

Hacia la Gravedad Cuántica. Entre las varias aproximaciones que existen a la deseada gravedad cuántica, resaltan dos caminos mayormente explorados: Uno, supone un espacio de fondo ficticio separado del campo gravitacional el cual es la suma de dos componentes: el fondo y el campo cuántico. Esta sería la aproximación abordada por la teoría de cuerdas, la cual se apoya en la propuesta de Kaluza y Klein de dimensiones extra. El segundo camino para reconstruir la teoría cuántica de campos sin un espacio de fondo propone que el espacio mismo sea cuantizado. Charles Misner propuso que los cálculos fueran realizados sumando sobre todos los espacio-tiempos posibles, aplicando el formalismo ADM; y junto con John Wheeler (1955) pensó que el espacio-tiempo debía poseer una estructura parecida a la espuma (foam) a escalas muy pequeñas. Wheeler y Bryce Dewitt (1967) propusieron una función de onda sobre las geometrías que expresara la probabilidad de tener cierta geometría espacio-temporal preferente. La *gravedad cuántica de bucles* es una descripción matemática que utiliza una formulación novedosa de la TGR dada por Abhay Ashtekar (1987), en la que la conexión del campo de Ashtekar reemplaza el potencial gravitacional de Einstein en términos de excitaciones elementales cuánticas llamadas bucles (*loops*) (véase Rovelli, 2003).

Conclusiones y resultados: El Exploratorium

Los estudios de la ciencia, aquellos que toman datos metacientíficos para determinar la composición, relaciones y evolución de algún aspecto de esta labor humana se pueden apoyar en las representaciones gráficas para facilitar su entendimiento. La estructura de las teorías científicas, tomada como el conjunto de relaciones entre sus componentes, es compleja y se le puede representar por partes y de distintas maneras, dependiendo del punto de vista filosófico que se adopte y la clase de datos que se tomen en cuenta. Estos datos pueden ser bibliográficos, históricos, geográficos, autorales, o como en nuestro caso, conceptuales, siendo parte de la composición interna de las teorías en sí. La bibliometría y ciencimetría se ocupan de analizar algunas de estas primeras clases de datos, incluso la aparición y detección de términos en textos científicos, pero la composición interna de las teorías, a la fecha, solo ha podido ser analizada mediante cuidadosas reconstrucciones metacientíficas hechas por filósofos de la ciencia y por los científicos mismos y no mediante la minería automática de datos. La inteligencia artificial (IA) requiere partir de contextos formales ya probados para avanzar en la exploración de objetos y atributos, y de pautas para el reconocimiento de clases, etc. La visión semántica-conjuntista y modeloteórica ha servido para conformar dichos contextos formales.

Como hemos visto, las aproximaciones semánticas, fundacionistas y modelo-teóricas de las teorías científicas son compatibles con el análisis de conceptos formales (FCA) que identifica conceptos a partir de contextos y los ordena jerárquicamente, proporcionando una representación gráfica multidimensional llamada retículo conceptual. Seleccionando los modelos actuales como nuestros objetos y asignando grupos de axiomas como atributos podemos encontrar conceptos correspondientes a modelos previos y potenciales.

Los atributos están etiquetados mediante los primitivos, ya sean conjuntos o familias de funciones que mediante palabras significativas refieren a conjuntos de axiomas donde se expresan las tipificaciones de las funciones, sus dominios y rango. Otros atributos refieren a conjuntos de axiomas que describen las condiciones (o constricciones) de aplicación de las funciones, caracterizaciones matemáticas, a los elementos distinguidos o las relaciones entre los dominios, en particular las ecuaciones de campo y de movimiento. Los modelos han sido obtenidos a partir de reconocidas reconstrucciones y clasificaciones realizadas por físicos y filósofos de la ciencia con una visión semántica, y han podido ser conjuntados en contextos de mayor dimensión al incluir en ellos objetos matemáticos muy generales como la conexión afin acompañados por ciertas condiciones que restringen su aplicación, siguiendo el método sustractivo de construcción.

Las relaciones de orden parcial que tienen una lectura en sentido vertical, nos muestran también hay racimos y otros patrones en el sentido horizontal.

Como resultado final, se ha levantado la página web remo.cua.uam.mx/vis/Exploratorium con diez retículos conceptuales interactivos que clasifican 44 modelos de teorías: protofísica, teorías del espacio-tiempo, teorías de dinámica analítica, teorías básicas (siguiendo a Bunge), teorías clásicas (siguiendo a Friedman), teorías métricas, teorías métrico-afín y $f(R)$, teorías modificadas de dinámica newtoniana (MoND) y el holón que las conjunta. El retículo del espacio-tiempo representa lo que se conoce como el retículo ice-berg del holón, es decir, el pico superior del holón donde se localizan los atributos más fundamentales y comunes a todas las teorías. Estos son los atributos que caracterizan la topología y geometría de los espacios-tiempo. Los atributos que caracterizan a las teorías físicas se encuentran en nodos inferiores. En la parte media, se encuentran clases de teorías físicas y teorías no especializadas, mientras que los modelos más especializados se encuentran en racimos inferiores a los modelos actuales.

Las clases de atributos se codifican con etiquetas coloreadas, mientras que los objetos se localizan en nodos conocidos como conceptos-objeto y se les identifica mediante etiquetas de color blanco. Otra codificación es la que se observa en los círculos que representan los nodos. Un círculo cuya parte superior está coloreada de gris indica que posee un nuevo atributo. Un círculo con la parte inferior coloreada de negro indica que se trata de un concepto-objeto. Otras codificaciones pueden ser asignadas a partir, por ejemplo de su grado de adecuación empírica como se hizo en el retículo de la Figura 4.1.1.3. El radio de los nodos también puede variarse para representar otras cualidades como la cantidad de adeptos a una teoría o de citas, o por la centralidad de los nodos... aunque aquí no hemos utilizado ese recurso.

Las diversas clasificaciones en la literatura ocupan criterios distintos para formular las teorías. Estas pueden estar escritas en el lenguaje del cálculo tensorial, dependiente de las coordenadas, o en el lenguaje de la geometría diferencial, donde los objetos geométricos no son dependientes de las coordenadas. Existen formas de pasar de una formulación a otra, y estos criterios deben ser considerados al conjuntar clasificaciones. Otros criterios están basados en la localidad, y la interpretación absoluta o relacionista de los objetos geométricos. La formulación en común que ha sido seleccionada es la de la geometría diferencial, que no depende de las coordenadas, con consideraciones locales, una visión absolutista y jerárquica. Las ecuaciones de campo, son acompañadas en muchos casos, cuando así es proporcionada por el reconstructor por su formulación Lagrangiana, dado que dicha formulación es la más popular entre los textos examinados y permite identificar ciertas características generales que son compartidas por clases de teorías.

El holón proporciona un andamiaje apropiado para incluir fácilmente más teorías que se encuentren descritas con la misma formulación. Este ha sido el caso de cuatro teorías MoND, cuya inclusión como último ejercicio del proyecto ha sido facilitado al contarse ya con dicho andamiaje y por una serie de preguntas sencillas de exploración de objetos y atributos, metodología propia del FCA. Como resultado de dicha exploración se identificó que una de las ecuaciones de movimiento no estaban incluidas en los artículos originales que proponen dichas teorías. Además, se puede observar fácilmente que éstas se encuentran más vinculadas con las teorías métrico-afín y $f(R)$. Incluso se puede percibir una direccionalidad horizontal en el acomodo de los grupos de teorías que sugiere un orden temporal.

En los retículos de teorías del espacio-tiempo, así como de teorías clásicas es fácil señalar algunas relaciones de especialización y teorización caracterizadas por la visión estructuralista y que podemos precisar. La primera se da cuando a un modelo se le agregan condiciones adicionales para su aplicación. Así sucede entre el espacio-tiempo lorentziano y el de Minkowski, teniendo el segundo la condición de que la curvatura es igual a cero en todos los puntos de la variedad. La relación de teorización se observa entre las teorías del espacio-tiempo y las de gravitación, cuando un nuevo dominio es añadido a la teoría. De manera que los modelos de espacio-tiempo son modelos previos de los modelos actuales de teorías físicas. Esto también se observa entre el espacio-tiempo Galileano y el Newtoniano, teniendo el segundo un campo vectorial adicional que fija el cero en el supuesto espacio-absoluto.

Al dar *click* en un nodo, el retículo interactivo resaltaré las ligas y nodos superiores e inferiores a dicho nodo, indicando los atributos y objetos correspondientes a dicho concepto. Cuando se hace click en un concepto-objeto, es decir en el nodo que tiene la etiqueta de cierto modelo, los nodos superiores corresponderán a los conceptos fundamentales del modelo (los axiomas) y los atributos fundamentales del modelo, mientras que los nodos inferiores representarán modelos especializados de los modelos actuales. De tal manera que la composición de lo que es una teoría queda clara: una teoría está conformada por el conjunto de sus fundamentos (nodos superiores al modelo actual) y el conjunto de sus modelos especializados (nodos inferiores al modelo actual).

Otra cualidad de los retículos interactivos es que se ha añadido información adicional sobre los atributos y ésta sale a la luz al señalarse con el cursor la etiqueta correspondiente. La información adicional da una pequeña explicación sobre el atributo, esto puede ser el nombre explícito de cierto objeto, ciertos axiomas adicionales que caracterizan cierto dominio o incluso una imagen ilustrativa. En el caso del retículo de teorías básicas del Foundations of Physics, la información desplegada son los axiomas correspondientes, de manera que funcione como un acompañamiento a la lectura del libro, utilizando la misma numeración referencial. Las ligas internas que llevan de una etiqueta a su caja de información pueden ser utilizadas también para mostrar el significado o procedencia de los términos, en el sentido de la visión sintáctica, pero esto no ha sido realmente estudiado, sino que queda como una posible ampliación de esta clase de estudios.

Este estudio requiere de una prueba de concepto, que puede hacerse mediante consultas a expertos. El conjunto de implicaciones y asociaciones obtenidas mediante el *Concept Explorer* para el contexto de la Fig. 3.4 se encuentran en el Anexo 5. Las pruebas de concepto, es decir, la revisión de los resultados, se realiza mediante la metodología del FCA de exploración de atributos. Se trata de una serie de preguntas sobre la validez de las implicaciones generadas por el contexto. Esta labor es tediosa si se hace completa y desde cero, y ningún experto se ha ofrecido a hacer toda la exploración. Sin embargo, la metodología permite asumir ciertas implicaciones como válidas y limitar los cuestionamientos a ciertas preguntas que por inspección saltan a la vista como posibles dudas. Aquí algunas de las preguntas interesantes que han generado discusiones entre físicos y público de conferencias que se han ofrecido en el transcurso de esta investigación:

¿Cuál es la diferencia entre el espacio-tiempo pseudo-riemanniano y el lorentziano?

R: La signatura en el espacio-tiempo pseudo-riemanniano es no definitivamente positiva, esta cualidad se mantiene en el espacio lorentziano, pero además está bien definida (véanse dichas diferencias en mayor detalle en la Sección 3.6 y en Esposito, 1992).

¿Cuál es la diferencia entre el espacio-tiempo lorentziano y el de Minkowski?

R: La condición de que la curvatura sea cero en todos los puntos en el espacio de Minkowski, mientras que esta condición solo se puede dar en la localidad de un espacio lorentziano.

Fue particularmente emocionante presenciar una discusión de pasillo entre dos astrónomos del IA-UNAM, respecto a este asunto, pues terminó por convencernos respecto a los atributos que distinguen estos modelos.

En particular interesa resaltar los patrones que se observan en el holón, la ubicación jerárquica de los modelos, las ramificaciones, etc.

Con la finalidad de probar la eficacia de los retículos como instrumentos facilitadores del entendimiento de la composición y estructura interna e interteórica de las teorías se está diseñando un cuestionario para ser aplicado a estudiantes de física. Dicho cuestionario evalúa si existe un mejor entendimiento de lo que conforma una teoría, su composición, las relaciones interteóricas y los componentes en común que distinguen ciertas clases de teorías. Los primeros resultados de estas pesquisas indican que en primera instancia hay una mejor comprensión de que existe una pluralidad de teorías y permite al alumno saber en dónde está parado y cuáles son los fundamentos de las teorías que ocupan en sus modelos de trabajo, por ejemplo los modelos cosmológicos. Otros beneficios de la visualización es que es fácil identificar teorías equivalentes que comparten mismas ecuaciones de campo; las variadas formas de caracterizar teorías métricas, o de localizar teorías que siguen alguna característica como puede ser la ley geodésica o que ocupan cierta constante fundamental.

Las visualizaciones muestran la jerarquía en las clases de conceptos y de modelos; la interactividad permite señalar sub-conceptos y supra-conceptos, nodos interesantes y atributos en común, grupos teóricos e información adicional sobre las etiquetas. Éstas representan una parte de la estructura interna e interteórica de una amplia parcela del campo de las teorías de gravitación y son un excelente acompañamiento a la lectura de los libros fuente.

En conferencias y entrevistas con académicos y estudiantes de diversas áreas he observado gusto por el tema y apreciación de la visualización, y su exposición ha propiciado interesantes discusiones, algunas muy memorables. Se percibe mayor interés cuando la presentación es directamente en la computadora o en pantallas interactivas, permitiendo al usuario explorar, junto con el presentador de forma dirigida. Una vez que se entiende la lógica del retículo y la visualización, el impulso es a querer agregar su propio modelo. Incluso algunos dedicados más bien a la cuántica, al explorar el retículo de la profísica han iniciado sentidas discusiones respecto a los fundamentos de las teorías alternas que existen en ese campo. En palabras de Carlos Bunge, "Frente a [estos ordenamientos] las 'bibliografías' son intentos burdos y no confiables. Lo que tú has trazado es, para ciertas áreas, un anteproyecto de investigación a escala planetaria".

Entre los alcances de este proyecto están los de incluir teorías que están siendo propuestas actualmente así como modelos cosmológicos que ocupan alguna de estas teorías de gravitación; es decir, aprovechar el andamiaje construido para ubicar los fundamentos de ciertos

modelos de interés. Además, la metodología no es propia de las teorías físicas, pues hay estudios que la han aprovechado para representar teorías biológicas y genéticas. De manera que es factible pensar que puede ser utilizada para representar múltiples campos de estudio científico. Es posible comparar retículos que están basados en otras visiones modelo-teóricas que caracterizan las teorías científicas no solo utilizando clases de modelos o modelos actuales, sino con elementos teóricos completos: ET: {clases de modelos, ligaduras, comunidades científicas, datos históricos} a la manera estructuralista, o como paradigmas, a la manera de Kuhn compuestos por P: {modelos, leyes, valores, ejemplares} o como teorías compuestas por T: {afordancias, conceptos bisagra, modelos icónicos} a la manera de Rom Harré, etc. Las posibilidades de aplicación de esta metodología son muy amplias y producen representaciones muy ilustrativas que complementan nuestra comprensión de la composición de las teorías y sus relaciones.

Sin embargo, la metodología tiene algunas limitaciones, pues existen relaciones que no se representan bien en los retículos, como pueden ser las transformaciones entre modelos, como lo son las transformaciones de Galileo, de Lorentz o de Lagrange. Para ello, se recomienda utilizar la teoría de categorías que representa bien estos morfismos. Aunque podemos hacer acomodos de alturas y lateralidad de los nodos siguiendo lógicas temporales, lo cierto es que los retículos no representan exactamente la evolución diacrónica de las teorías, ni su validez experimental o campo de acción aplicativa, información toda valiosa para los físicos que se agrega a la visualización, pero que no es proporcionada por el contexto original. Nuevamente, debe insistirse en la complementariedad de las representaciones gráficas, pues al incluirse demasiada información, el resultado puede ser más confuso que aclarador.

Éste ha sido un trabajo de rastreo, ordenamiento y visualización de los conceptos más fundamentales en muchos sentidos, no sólo de las teorías del espacio y el tiempo, también de las representaciones a base de bolitas y palitos, de listas y conjuntos, del concepto mismo de concepto, de modelo y de teoría; y en ello hemos visitado cantidad de discusiones clásicas, muchas de las cuales siguen vigentes en la física, la cosmología, la filosofía y las teorías de las representaciones gráficas.

Anexos

Axiomatización de Newton de la MCP

Definición: I. La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen.

Definición: II. La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente

Definición: III. La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Definición: IV. La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Definición: V. La fuerza centrípeta es aquella en virtud de la cual los cuerpos son atraídos, empujados, o de algún modo tienden hacia un punto como a un centro.

Definición: VI. Magnitud absoluta de la fuerza centrípeta es la medida mayor o menor de la misma según la eficacia de la causa que la expande desde un centro en todas las direcciones en torno.

Definición: VII. La magnitud acelerativa de la fuerza centrípeta es su medida proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.

Definición: VIII. La magnitud motriz de la fuerza centrípeta es la medida de la misma proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

Ley: I. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

Ley: II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime

Ley: III. Con la acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

Newton no define los conceptos de tiempo y el espacio, lugar y movimiento, pues considera que son conocidísimos para todos, y se limita a discutir su carácter absoluto en un escolio posterior a las definiciones. Estos axiomas fueron obtenidos de la recopilación de Hawking (2003).

Axiomatización de un espacio métrico de dos dimensiones

Definición axiomática: U es un espacio métrico en dos dimensiones si:

D1. Para cada dos puntos x, y en U ,

- (a) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;
 (b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
 D2. Para cada tres puntos x, y, z en U ,
 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.
 (Bunge, 1967)

Axiomatización de Bunge de la MCP

Esta teoría está sostenida por una base formal y por la protofísica. Tiene una base primitiva, dos definiciones, 12 axiomas y dos definiciones axiomáticas (que dependen de los axiomas anteriores). Ejemplifica además con 9 teoremas y algunas definiciones derivadas de ellos. El fondo o base formal está compuesto por la lógica elemental, la teoría elemental de conjuntos, nociones de topología elemental, la teoría de espacios vectoriales y por fragmentos de análisis vectorial, álgebra y teoría de números. La protofísica de la MCP es la cronología (en particular la teoría del tiempo universal), la geometría física euclidiana y la teoría general de sistemas (Bunge, 1967).

Base primitiva.

Primitivos cronométricos:

- E^3 :: Espacio en tres dimensiones (conjunto)
 T :: Tiempo (conjunto)

Primitivos cinemáticos:

- P :: Partículas prueba (conjunto).¹
 K :: Marco de referencia (conjunto)
 $\{X\}$:: Coordenada material (familia de funciones)

Primitivos dinámicos:

- $\{M\}$:: Masa (familia de funciones)
 $\{F_e\}$:: $P \times K \times E^3 \times T \rightarrow$ Fuerza externa (familia de funciones) $f : P \times T \times N \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\{F_i\}$:: $P \times P \times K \times E^3 \times T$: Fuerza entre partículas (familia de funciones)

A partir de dichos primitivos se plantean las siguientes dos definiciones:

- Df.1:: Velocidad instantánea de $p \in P$, en $t \in T$, relativo a $k \in K$: $v(p, t, k) \equiv dX(p, t, k)/dt \equiv \dot{X}(p, t, k)$
 Df.2:: Momento lineal de $p \in P$, en $t \in T$, relativo a $k \in K$: $\wp(p, t, k) \equiv M(p) \cdot v(p, t, k)$

Axiomas.

Axiomas Cronométricos:²

PM-1.1:

- a): T es un intervalo de línea real.
 b): Cada $t \in T$ refiere a un instante de tiempo.

¹Bunge utiliza las letras σ, Σ para denominar a las partículas. Utilizaremos P para homologar la notación con los estructuralistas. Bunge utiliza p para denominar el momento lineal, aquí usaremos \wp .

²Bunge señala que la teoría del tiempo universal que subyace a la mecánica de partículas es un modelo o interpretación de la teoría matemática de los números reales, pero que bien podría tratarse de la teoría UT (Universal Time) propuesta por Noll en 1967, "la primera teoría relacional del tiempo exacta".

c): La relación \leq que ordena a T significa “antes que” o “simultáneo a”.

PM-1.2:

a): E^3 es un espacio Euclidiano tridimensional.

b): E^3 mapea el espacio ordinario.

Axiomas Cinemáticos:

PM-2.1:

a): P es un conjunto enumerable no vacío.³

b): Cada $p \in P$ representa una partícula.

PM-2.2:

a): Por cada dos t y $t' \in T$ distintos, si $p \in P$ en t , entonces $p \in P$ en t' también.

PM-2.3:

a): K es un conjunto no vacío enumerable.

b): Cada $k \in K$ es un sistema rígido de corpúsculos donde por lo menos cuatro caen en los vértices de un triedro regular.

c): Para cada $k \in K$ existe un sistema cartesiano de ejes $e = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ tal que $e \triangleq k$.

d): Ninguna $k \in K$ interactúa con ninguna $p \in P$ que no sea parte de k .

PM-2.4:

a): Para cada $p \in P$ y cada $k \in K$, cada $X \in \{X\}$ es una función real valuada en los reales de T a E^3 .

b): Para cada $p \in P$ y cada $k \in K$, \dot{X} es una función continua y valuada en los reales que va de T a E^3 .

c): $X(p, t, k)$ representa la posición de p , relativa al marco k , en el instante t .

d): Cada quintupla $\langle p, X_1, X_2, X_3, t \rangle$ representa un evento.

e): Para cualquier $p \in P$ y $k \in K$ dadas, el conjunto $\{X(p, k, t) \mid t \in T\}$ representa la trayectoria (o movimiento) de p .

PM-2.5:

a): Por cada dos partículas $p, p' \in P$ y cada $k \in K$ y cada $t \in T$, si $\dot{X}(p, k, t) = \dot{X}(p', k, t)$, entonces $p = p'$.

Axiomas Dinámicos:

PM-3.1:

a): M es una función de P al conjunto de los \mathbb{R}^+

b): El valor de M en $p \in P$ representa la masa inercial de p .⁴

PM-3.2:

a): Si $p_i \in P$ para cada $i \in N$ entonces $M(\sum p_i) = \sum M(p_i)$.

PM-3.3:

a): Cada $F^e \in \{F^e\}$ es un vector real valuado en $P \times K \times E^3 \times T$.

³Es decir, las partículas son eternas. Esto no sucede en microfísica, pero es requerido en la MP para garantizar que se puedan hacer predicciones y retrodicciones.

⁴Coloquialmente se dice que M está dada por el conjunto P , sin embargo, la relación $M(p) = m \in \mathbb{R}^+$ establecida en PM 3.1 no es una definición, pues M no es un mapa biyectivo de P , dado que podemos encontrar diferentes partículas con la misma masa. M , en cambio, manda puntos de P a los reales.

b): El valor de $F^e \in \{F^e\}$ en cualquier séxtupla $\langle p, k, x_1, x_2, x_3, t \rangle$ representa una fuerza externa actuando sobre p , relativa al marco k , en el lugar x y en el instante t .

PM-3.4:

a): Cada $F^i \in \{F^i\}$ es un vector real valuado en $P \times P \times K \times E^3 \times T$.

b): El valor de $F^i \in \{F^i\}$ en cualquier séptupla $\langle p, k, x_1, x_2, x_3, t \rangle$ representa una fuerza ejercida por p' sobre p , relativa al marco k , en x y t .

PM-3.5:

a): Para cada $p \in P$, cada $t \in T$, para cada $F^e \in \{F^e\}$ y cada $F^i \in \{F^i\}$, existe al menos un $k \in K$ tal que: $\wp(p, t, k) = Fe(p, t, k) + \sum Fi(p, p', t, k)$ con $p \neq p'$ (Segunda ley de Newton).

b): $F^i(p, p', t, k) = -F^i(p', p, t, k)$ (Tercera ley de Newton).

- Def. axiomática 1: Un marco de referencia $k \in K$ es llamado galileano o inercial, si satisface los axiomas precedentes.
- Def. axiomática 2: Un sistema de partículas $p^N = \sum p_i$ de N partículas es llamado un sistema mecánico clásico de partículas prueba si cada parte p_i de p^N satisface los axiomas precedentes.

Reconstrucción Balzer et al. de la MCP

$M_p(MCP)$:: x es una mecánica clásica de partículas potencial ($x \in M_p(MCP)$)

sys existen $P, T, S, c_1, c_2, s, m, f$ tales que:

$x = \langle P, T, S, N, \mathbb{R}, c_1, c_2, s, m, f \rangle$:

D_1 :: P, T, S son conjuntos no-vacíos, P es finito

D_2 :: $c_1: T \rightarrow \mathbb{R}$ y $c_2: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ son biyectivas

D_3 :: $s: P \times T \rightarrow S$ y $c_2 \circ s_p \circ \check{c}_1$ es continua para toda $p \in P$

D_4 :: $m: P \rightarrow \mathbb{R}^+$

D_5 :: $f: P \times T \times N \rightarrow \mathbb{R}^3$

$AUX(MCP)$:: Si $x = \langle P, T, S, N, \mathbb{R}, c_1, c_2, s, m, f \rangle$ es una mecánica clásica de partículas potencial, entonces

D_6 :: para $p \in P$, $r_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $r_p = c_2 \circ s_p \circ \check{c}_1$

D_7 :: $r: P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $r(p, \alpha) = r_p(\alpha)$

:

$M(MCP)$:: x es una mecánica clásica de partículas ($x \in M(MCP)$)

sys existen $P, T, S, c_1, c_2, s, m, f$ tales que:

$x = \langle P, T, S, N, \mathbb{R}, c_1, c_2, s, m, f \rangle$:

$x \in M_p(MCP)$:

R_1 :: $m(p)D^2r(p, \alpha) = \sum f(p, c_1(\check{\alpha}), i)$ para toda $p \in P$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. (Segunda ley de Newton)

donde:

\mathbb{N} :: el conjunto de los números naturales que proporciona el índice a la i -ésima fuerza

$\mathbb{R}::$	el conjunto de los números reales
$P::$	el conjunto de partículas o puntos de masa
$T::$	el conjunto de puntos de tiempo
$S::$	el conjunto de puntos de espacio
$c_1::$	coordinatización del tiempo
$c_2::$	coordinatización del espacio
$s::$	función de posición
$m::$	función de masa
$f::$	función fuerza
$F::$	fuerza externa
$r::$	función distancia
$\alpha::$	i-ésima fuerza componente que actúa sobre p.

Implicaciones y asociaciones

Implicaciones obtenidas a partir del contexto formal (Fig.3.4.1) para teorías del espacio-tiempo.

Implicaciones:: 38

Número: <Cantidad de objetos> Premisa ==> Conclusión

- 0: <9> ==> N,M,
- 1: <2> N,M,Flat Connection, ==> Affine Connection,K=0,Non metricity=0,Weyl vector=0,Cartan torsion=0,h,dt,h(dt,w)=0,D(dt)=0,D(h)=0,
- 2: <1> N,M,Newton-Cartan Connection, ==> Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,h,dt,h(dt,w)=0,D(dt)=0, D(h)=0, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2 * K = H^2 * K$,
- 3: <1> N,M,Metric Affine Connection, ==> Affine Connection, Metric tensor,R2, Independent, Not-definite-positive,
- 4: <5> N,M,Metric tensor, ==> Affine Connection,
- 5: <1> N,M,R2, ==> Affine Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Independent, Not-definite-positive,
- 6: <1> N,M,Independent, ==> Affine Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, R2, Not-definite-positive,
- 7: <3> N,M,K=0, ==> Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 8: <7> N,M,Non metricity=0, ==> Affine Connection, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 9: <7> N,M,Weyl vector=0, ==> Affine Connection, Non metricity=0, Cartan torsion=0,
- 10: <7> N,M,Cartan torsion=0, ==> Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0,
- 11: <4> N,M,h, ==> dt,h(dt,w)=0,
- 12: <4> N,M,dt, ==> h,h(dt,w)=0,
- 13: <4> N,M,h(dt,w)=0, ==> h,dt,

- 14: $\langle 3 \rangle$ N,M,Affine Connection,h,dt,h(dt,w)=0, \implies Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(dt)=0, D(h)=0$,
- 15: $\langle 1 \rangle$ N,M,V, \implies Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(V)=0, dt(V)=1, D(dt)=0, D(h)=0$,
- 16: $\langle 1 \rangle$ N,M, $D(V)=0$, \implies Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, V, $dt(V)=1, D(dt)=0, D(h)=0$,
- 17: $\langle 1 \rangle$ N,M, $dt(V)=1$, \implies Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, V, $D(V)=0, D(dt)=0, D(h)=0$,
- 18: $\langle 3 \rangle$ N,M, $D(dt)=0$, \implies Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(h)=0$,
- 19: $\langle 3 \rangle$ N,M, $D(h)=0$, \implies Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(dt)=0$,
- 20: $\langle 2 \rangle$ N,M, Affine Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(dt)=0, D(h)=0$, \implies Flat Connection,
- 21: $\langle 1 \rangle$ N,M, $(dt \otimes K) = 0$, \implies Affine Connection, Newton-Cartan Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(dt)=0, D(h)=0, H^2K=H^2K$,
- 22: $\langle 1 \rangle$ N, M, $H^2K=H^2K$, \implies Affine Connection, Newton-Cartan Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(dt)=0, D(h)=0, (dt \otimes K) = 0$,
- 23: $\langle 4 \rangle$ N,M, Not-definite-positive, \implies Affine Connection, Metric tensor,
- 24: $\langle 4 \rangle$ N,M, $D(g)=0$, \implies Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 25: $\langle 3 \rangle$ N,M, Metric Connection, \implies Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 26: $\langle 3 \rangle$ N,M, Ricci scalar, \implies Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 27: $\langle 4 \rangle$ N,M, Dependent, \implies Affine Connection, Metric tensor, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$,
- 28: $\langle 1 \rangle$ N,M, eta, \implies Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$, $D(g)=0$,
- 29: $\langle 4 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, \implies Dependent, $D(g)=0$,
- 30: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Flat Connection, Newton-Cartan Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, h(dt,w)=0, $D(dt)=0, D(h)=0, (dt \otimes K) = 0, H^2K=H^2K$, \implies Metric Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, R^2 , Dependent, Independent, eta, V, $D(V)=0, dt(V)=1$, Not-definite-positive, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$, $D(g)=0$,

- 31: $\langle 1 \rangle$ N,M, Definite-positive, \implies Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$,
- 32: $\langle 2 \rangle$ N, M, $\langle 1,3 \rangle$, \implies Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 33: $\langle 1 \rangle$ N, M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$, \implies Metric Connection, Ricci scalar, eta, Not-definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
- 34: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $D(g)=0$, \implies Flat Connection, Newton-Cartan Connection, Metric Connection, Metric Affine Connection, Ricci scalar, R^2 , Independent, eta, $K=0$, V, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $((dt \otimes K) = 0$, $H^2*K=H^2*K$, Not-definite-positive, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
- 35: $\langle 3 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$, \implies Metric Connection, Ricci scalar,
- 36: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, R^2 , Dependent, Independent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$, \implies Flat Connection, Newton-Cartan Connection, eta, $K=0$, h, dt, $h(dt,w)=0$, V, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2*K=H^2*K$, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
- 37: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, Definite-positive, $(g)=0$, \implies Flat Connection, Newton-Cartan Connection, Metric Affine Connection, R^2 , Independent, eta, $K=0$, h, dt, $h(dt,w)=0$, V, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2*K=H^2*K$, $\langle 1,3 \rangle$,

Asociaciones obtenidas a partir del contexto para teorías del espacio-tiempo de la Figura 3.4.1.

Asociaciones:: 42

- Número: $\langle \text{soporte} \rangle$ Premisa, [Confianza] \implies \langle Cantidad de objetos \rangle Conclusion
- 0: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Flat Connection, Newton-Cartan Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2*K=H^2*K$, [1.] \implies $\langle 0 \rangle$ Metric Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, R^2 , Dependent, Independent, eta, V, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, Not-definite-positive, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$, $D(g)=0$,
 - 1: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, R^2 , Dependent, Independent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$, [1.] \implies $\langle 0 \rangle$ Flat Connection, Newton-Cartan Connection, eta, $K=0$, h, dt, $h(dt,w)=0$, V, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2*K=H^2*K$, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
 - 2: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive,

- Definite-positive, $D(g)=0$, [1.] \implies $\langle 0 \rangle$ Flat Connection, Newton-Cartan Connection, Metric Affine Connection, R^2 , Independent, η , $K=0$, h , dt , $h(dt,w)=0$, V , $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2K=H^2K$, $\langle 1,3 \rangle$,
- 3: $\langle 1 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$, [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Metric Connection, Ricci scalar, η , Not-definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
- 4: $\langle 0 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt , $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $D(g)=0$, [1.] \implies $\langle 0 \rangle$ Flat Connection, Newton-Cartan Connection, Metric Connection, Metric Affine Connection, Ricci scalar, R^2 , Independent, $\eta, K=0$, V , $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $(dt \otimes K) = 0$, $H^2K=H^2K$, Not-definite-positive, Definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$,
- 5: $\langle 3 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$, [1.] \implies $\langle 3 \rangle$ Metric Connection, Ricci scalar,
- 6: $\langle 4 \rangle$ N,M, Affine Connection, Metric tensor, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, [1.] \implies $\langle 4 \rangle$ Dependent, $D(g)=0$,
- 7: $\langle 2 \rangle$ N,M, Affine Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h , dt , $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, [1.] \implies $\langle 2 \rangle$ Flat Connection,
- 8: $\langle 3 \rangle$ N,M, Affine Connection, h , dt , $h(dt,w)=0$, [1.] \implies $\langle 3 \rangle$ Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(dt)=0$, $D(h)=0$,
- 9: $\langle 2 \rangle$ N,M, Flat Connection, [1.] \implies $\langle 2 \rangle$ Affine Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $h, dt, h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$,
- 10: $\langle 1 \rangle$ N,M, Newton-Cartan Connection, [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $h, dt, h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \otimes K) = 0 = 0, H^2K=H^2K$,
- 11: $\langle 3 \rangle$ N,M, Metric Connection, [1.] \implies $\langle 3 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 12: $\langle 1 \rangle$ N,M, Metric Affine Connection, [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor, R^2 , Independent, Not-definite-positive,
- 13: $\langle 5 \rangle$ N,M, Metric tensor, [1.] \implies $\langle 5 \rangle$ Affine Connection,
- 14: $\langle 3 \rangle$ N,M, Ricci scalar, [1.] \implies $\langle 3 \rangle$ Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 15: $\langle 1 \rangle$ N, M, R^2 , [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Affine Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, Independent, Not-definite-positive,
- 16: $\langle 4 \rangle$ N, M, Dependent, [1.] \implies $\langle 4 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$,
- 17: $\langle 1 \rangle$ N, M, Independent, [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Affine Connection, Metric Affine Connection, Metric tensor, R^2 , Not-definite-positive,
- 18: $\langle 1 \rangle$ N, M, η , [1.] \implies $\langle 1 \rangle$ Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $\langle 1,3 \rangle$, $D(g)=0$,

- 19: $\langle 3 \rangle$ N, M, $K=0$, [1.] $\implies \langle 3 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 20: $\langle 7 \rangle$ N, M, Non metricity=0, [1.] $\implies \langle 7 \rangle$ Affine Connection, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 21: $\langle 7 \rangle$ N, M, Weyl vector=0, [1.] $\implies \langle 7 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Cartan torsion=0,
- 22: $\langle 7 \rangle$ N, M, Cartan torsion=0, [1.] $\implies \langle 7 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0,
- 23: $\langle 4 \rangle$ N, M, h, [1.] $\implies \langle 4 \rangle$ dt, $h(dt,w)=0$,
- 24: $\langle 4 \rangle$ N, M, dt, [1.] $\implies \langle 4 \rangle$ h, $h(dt,w)=0$,
- 25: $\langle 4 \rangle$ N, M, $h(dt,w)=0$, [1.] $\implies \langle 4 \rangle$ h,dt,
- 26: $\langle 1 \rangle$ N, M, V, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(V)=0$, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$,
- 27: $\langle 1 \rangle$ N, M, $D(V)=0$, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, V, $dt(V)=1$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$,
- 28: $\langle 1 \rangle$ N, M, $dt(V)=1$, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Flat Connection, $K=0$, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, V, $D(V)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$,
- 29: $\langle 3 \rangle$ N, M, $D(dt)=0$, [1.] $\implies \langle 3 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(h)=0$,
- 30: $\langle 3 \rangle$ N, M, $D(h)=0$, [1.] $\implies \langle 3 \rangle$ Affine Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$,
- 31: $\langle 1 \rangle$ N, M, $(dt \otimes K) = 0$, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Newton-Cartan Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $H^2 * K = H^2 * K$,
- 32: $\langle 1 \rangle$ N, M, $H^2 * K = H^2 * K$, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Newton-Cartan Connection, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, h, dt, $h(dt,w)=0$, $D(dt)=0$, $D(h)=0$, $(dt \circlearrowleft K) = 0$,
- 33: $\langle 4 \rangle$ N, M, Not-definite-positive, [1.] $\implies \langle 4 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor,
- 34: $\langle 1 \rangle$ N, M, Definite-positive, [1.] $\implies \langle 1 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, $D(g)=0$,
- 35: $\langle 2 \rangle$ N, M, $\langle 1,3 \rangle$, [1.] $\implies \langle 2 \rangle$ Affine Connection, Metric Connection, Metric tensor, Ricci scalar, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, Not-definite-positive, $D(g)=0$,
- 36: $\langle 4 \rangle$ N, M, $D(g)=0$, [1.] $\implies \langle 4 \rangle$ Affine Connection, Metric tensor, Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,
- 37: $\langle 9 \rangle$ [1.] $\implies \langle 9 \rangle$ N,M,
- 38: $\langle 9 \rangle$ N, M, [0.888889] $\implies \langle 8 \rangle$ Affine Connection,
- 39: $\langle 8 \rangle$ N, M, Affine Connection, [0.875] $\implies \langle 7 \rangle$ Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0,

- 40: <5> N, M, Affine Connection, Metric tensor, [0.8] ==> <4> Dependent, Non metricity=0, Weyl vector=0, Cartan torsion=0, D(g)=0,
 41: <5> N, M, Affine Connection, Metric tensor, [0.8] ==> <4> Not-definite-positive.

Implicaciones obtenidas a partir del contexto para teorías f(R)
 Número de implicaciones: 53

- Número: <Cantidad de objetos> Premisa ==> Conclusión
- 0: <12> ==> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion,
 1: <3> N, M, g, Phi, Hyp, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*,R*, Independent, SM2, Eq 13,Eq 46,Eq 47,Eq 48,
 2: <6> N, M, g, Phi, Eq 13, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*,R*, Independent,
 3: <3> N, M, g, Phi, SM2, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*,R*, Independent,Eq 13,Hyp, Eq 46,Eq 47,Eq 48,
 4: <2> N, M, g, Phi, f''(R*) not 0, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, R*, Independent, f(R*) not R*, Eq 13,
 5: <2> N, M,g,Phi,f''(R*) = 0, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*,R*, Independent,f(R*) = R*,f'(R*) = 1,Eq 13,
 6: <2> N, M, g, Phi, f'(R*) = 1, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, R*, Independent, f(R*) = R*, f''(R*) = 0, Eq 13,
 7: <2> N, M, g, Phi, f(R*) not R*, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, R*, Independent, f''(R*) not 0, Eq 13,
 8: <2> N, M, g, Phi, f(R*) = R*, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, R*, Independent, f'(R*) = 1, f''(R*) = 0,Eq 13,
 9: <6> N, M, g, Phi, Independent, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, R*, Eq 13,
 10: <6> N, M, g, Phi, R*, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> Gamma*, Independent, Eq 13,
 11: <6> N, M, Gamma*, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, ==> R*, Independent, Eq 13,
 12: <3> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, Eq 46, ==> Gamma*, R*, Independent, SM2, Eq 13, Hyp, Eq 47, Eq 48,
 13: <3> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, Eq 47, ==> Gamma*, R*, Independent, SM2, Eq 13, Hyp, Eq 46, Eq 48,
 14: <3> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion,Eq 48, ==> Gamma*, R*, Independent, SM2, Eq 13, Hyp, Eq 46, Eq 47,
 15: <9> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, Geodesic law, ==> T, SM1, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0,
 16: <9> N, M, g, Phi, Non metricity, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, ==> T, SM1, Non metricity = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
 17: <9> N, M, g, Phi, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Cartan torsion, ==> T, SM1, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,

- 18: $\langle 5 \rangle$ N, M, g, Phi, Einstein's Eq, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, SM1, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 19: $\langle 3 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 19, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma*, T, R*, Independent, SM1, Eq 13, Eq 18, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 20: $\langle 3 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 18, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma*, T, R*, Independent, SM1, Eq 13, Eq 19, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 21: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 9c, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = C, C < 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 22: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 9b, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = C, C > 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 23: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 9a, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = 0, R = C$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 24: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 6, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, SM1, Eq 5, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 25: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Phi, Eq 5, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, SM1, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 26: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Phi, SM1, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 27: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, $C > 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = C$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9b, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 28: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, $C < 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = C$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9c, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 29: $\langle 3 \rangle$ N, M, g, Phi, $R = C$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 30: $\langle 1 \rangle$ N, M, g, Phi, $R = 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R, Dependent, $f(R) = R, f'(R) = 1, f''(R) = 0, T = 0, R = C$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9a, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,

- 31: $\langle 3 \rangle$ $N, M, g, \Phi, T = 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f(R) = R, f'(R)=1, f''(R) = 0, R = C$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 32: $\langle 1 \rangle$ $N, M, g, \Phi, f''(R) \neq 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f(R) \neq R$, SM1, Eq 5, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 33: $\langle 4 \rangle$ $N, M, g, \Phi, f''(R) = 0$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f(R) = R, f'(R)=1$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 34: $\langle 4 \rangle$ $N, M, g, \Phi, f'(R)=1$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f(R) = R, f''(R) = 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 35: $\langle 1 \rangle$ $N, M, g, \Phi, f(R) \neq R$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f''(R) \neq 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 36: $\langle 4 \rangle$ $N, M, g, \Phi, f(R) = R$, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f'(R)=1, f''(R) = 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 37: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Φ , Dependent, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , SM1, Eq 5, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 38: $\langle 6 \rangle$ N, M, g, Φ, R , Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T , Dependent, SM1, Eq 5, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 39: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Φ, T , Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies SM1, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 40: $\langle 0 \rangle$ $N, M, \Gamma^*, g, \Phi, R^*, I$ independent, $f(R^*) = R^*, f(R^*) \neq R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f'''(R^*) \neq 0$, Eq 13, Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies Gamma, T, R , Dependent, $f(R) = R, f(R) \neq R, f'(R)=1, f''(R) = 0, f'''(R) \neq 0, T = 0, R = 0, R = C, C < 0, C > 0$, SM1, SM2, Eq 5, Eq 6, Eq 9a, Eq 9b, Eq 9c, Eq 18, Eq 19, Einstein's Eq, Hyp, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Eq 46, Eq 47, Eq 48, Geodesic law,
- 41: $\langle 6 \rangle$ N, M, Γ, g, Φ , Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, \implies T, R , Dependent, SM1, Eq 5, Eq 6, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Cartan torsion = 0, Geodesic law,
- 42: $\langle 9 \rangle$ N, M, g, Φ , Non metricity, Weyl vector, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, \implies $T, SM1$, Non metricity = 0, Weyl vector = 0, Geodesic law,
- 43: $\langle 3 \rangle$ $N, M, \Gamma^*, g, \Phi, T, R^*$, Independent, SM1, Eq 13, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, \implies Eq 18, Eq 19,
- 44: $\langle 1 \rangle$ $N, M, \Gamma^*, g, \Phi, T, R^*$, Independent, SM1, Eq 13, Eq 18, Eq 19, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, \implies $f(R^*) = R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0$,

- 45: $\langle 1 \rangle$ N,M, $\Gamma^*, g, \Phi, T, R^*$, Independent, $f(R^*) = R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0$, SM1, Eq 13, Eq 18, Eq 19, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, \implies Einstein's Eq,
- 46: $\langle 4 \rangle$ N,M, Γ, g, Φ, T, R , Dependent, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies f(R) = R, f'(R)=1, f''(R) = 0$,
- 47: $\langle 0 \rangle$ N,M, Γ, g, Φ, T, R , Dependent, $f(R) = R, f'(R)=1, f''(R) = 0, T = 0, R = C, C < 0, C > 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9b, Eq 9c, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies \Gamma^*, R^*$, Independent, $f(R) \text{ not } R, f''(R) \text{ not } 0, f(R^*) = R^*, f'(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, R = 0$, SM2, Eq 13, Eq 9a, Eq 18, Eq 19, Hyp, Eq 46, Eq 47, Eq 48,
- 48: $\langle 0 \rangle$ N,M, Γ, g, Φ, T, R , Dependent, $f(R) = R, f'(R)=1, f''(R) = 0, T = 0, R = 0, R = C, C > 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9a, Eq 9b, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies \Gamma^*, R^*$, Independent, $f(R) \text{ not } R, f''(R) \text{ not } 0, f(R^*) = R^*, f'(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, C < 0$, SM2, Eq 13, Eq 9c, Eq 18, Eq 19, Hyp, Eq 46, Eq 47, Eq 48,
- 49: $\langle 0 \rangle$ N,M, Γ, g, Φ, T, R , Dependent, $f(R) = R, f'(R)=1, f''(R) = 0, T = 0, R = 0, R = C, C < 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Eq 9a, Eq 9c, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies \Gamma^*, R^*$, Independent, $f(R) \text{ not } R, f''(R) \text{ not } 0, f(R^*) = R^*, f'(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, C > 0$, SM2, Eq 13, Eq 9b, Eq 18, Eq 19, Hyp, Eq 46, Eq 47, Eq 48,
- 50: $\langle 0 \rangle$ N,M, Γ, g, Φ, T, R , Dependent, $f(R) = R, f(R) \text{ not } R, f'(R)=1, f''(R) = 0, f''(R) \text{ not } 0$, SM1, Eq 5, Eq 6, Einstein's Eq, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies \Gamma^*, R^*$, Independent, $f(R^*) = R^*, f(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, T = 0, R = 0, R = C, C < 0, C > 0$, SM2, Eq 13, Eq 9a, Eq 9b, Eq 9c, Eq 18, Eq 19, Hyp, Eq 46, Eq 47, Eq 48,
- 51: $\langle 0 \rangle$ N,M, $\Gamma, \Gamma^*, g, \Phi, T, R, R^*$, Dependent, Independent, SM1, Eq 5, Eq 13, Eq 6, Eq 18, Eq 19, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Geodesic law, $\implies f(R) = R, f(R) \text{ not } R, f'(R)=1, f''(R) = 0, f''(R) \text{ not } 0, f(R^*) = R^*, f(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, T = 0, R = 0, R = C, C < 0, C > 0$, SM2, Eq 9a, Eq 9b, Eq 9c, Einstein's Eq, Hyp, Eq 46, Eq 47, Eq 48,
- 52: $\langle 0 \rangle$ N,M, $\Gamma^*, g, \Phi, T, R^*$, Independent, SM1, SM2, Eq 13, Eq 18, Eq 19, Hyp, Non metricity, Non metricity = 0, Weyl vector, Weyl vector = 0, Cartan torsion, Cartan torsion = 0, Eq 46, Eq 47, Eq 48, Geodesic law, $\implies \Gamma, R$, Dependent, $f(R) = R, f(R) \text{ not } R, f'(R)=1, f''(R) = 0, f''(R) \text{ not } 0, f(R^*) = R^*, f(R^*) \text{ not } R^*, f'(R^*) = 1, f''(R^*) = 0, f''(R^*) \text{ not } 0, T = 0, R = 0, R = C, C < 0, C > 0$, Eq 5, Eq 6, Eq 9a, Eq 9b, Eq 9c, Einstein's Eq,

:

Glosario

Agrupar (clustering): dividir un conjunto de objetos en conjuntos de objetos similares.

Agrupamiento jerárquico: un sistema de conjuntos anidados de objetos similares.

Análisis de Conceptos Formales: teoría que provee descripciones para agrupamientos jerárquicos conceptuales, basada en la teoría de retículos.

Árbol: tipo de red, con la característica de que sus elementos se sujetan de un elemento previo, a excepción del primer elemento.

Axioma: enunciado necesario para generar, en conjunto con otros axiomas, una teoría.

Campo vectorial: distribución espacial de una magnitud vectorial como la velocidad y la aceleración de un sistema físico.

Campo tensorial: distribución espacial de una magnitud tensorial como lo es un campo físico.

Conexión afín: regla muy general que nos va a decir cómo nos aproximamos de un punto a otro $V(P \rightarrow Q)$.

Conexión monótona de Galois: correspondencia entre dos conjuntos parcialmente ordenados consistentes en dos funciones monótonas: $F : A \rightarrow B$ y $G : B \rightarrow A$, tales que para todo $a \in A$ y $b \in B$, tenemos $F(a) \leq b \iff a \leq G(b)$

Contexto formal: Tabla (G, M, I) , donde la relación de incidencia I está dada por el producto cartesiano entre el conjunto de objetos G y el conjunto de atributos M : $I \subseteq G \times M$

Diagrama: es un dibujo geométrico (generalmente acompañado de texto o símbolos) con el que se obtiene una representación gráfica de una proposición, de la resolución de un problema, de las relaciones entre las diferentes partes o elementos de un conjunto o sistema, o de la regularidad en la variación de un fenómeno que permite establecer algún tipo de ley.

Difeomorfismo: mapea curvas suaves en curvas suaves.

Dimensión física: clase de cualidades físicas conmensurables entre sí e inconmensurables entre otras clases.

Dominio: conjunto de valores para los cuales una función está definida.

Escalar: variable que toma valores de una sola dimensión. Se le llama también 0-forma. Un campo escalar es una función que asigna un valor a cada punto del espacio.

Espacio vectorial: espacio conformado por un conjunto de vectores, un conjunto de escalares, una regla de adición y una regla de escalamiento: $V_s = \langle V, S, +, \cdot \rangle$

Ecuación de campo: ecuación diferencial que determina la distribución espacial y la evolución temporal de un campo físico.

Ecuación de movimiento: ecuación que describe el comportamiento de un sistema físico en términos de coordenadas espacio-temporales.

Energía oscura: nombre con el que se refiere a la causante de la reciente aceleración en la expansión del universo.

Espacio de configuración: espacio vectorial definido por coordenadas generalizadas.

Espacio fase: espacio en el que se representan todos los posibles estados de un sistema.

Espacio-tiempo: noción del espacio y el tiempo como entidades mutuamente coordinadas.

Estructura: es la colección de relaciones (en particular vínculos o enlaces) entre los componentes del mismo, así como entre éstos y los elementos del entorno. Aquella puede

llamarse endoestructura y esta última exoestructura del sistema; la estructura total de un sistema es la unión de estos dos conjuntos relacionales.

Estructura de niveles: una estructura ordenada por una relación de precedencia o emergencia.

Función o mapeo: Relación entre dos conjuntos donde los elementos del dominio se relacionan cada uno con un único elemento del codominio.

Gráfica: es una representación de datos, usualmente numéricos, dada mediante conjunto de puntos, líneas, vectores, barras, superficies o símbolos que permiten una manifestación visual de las correlaciones matemáticas o estadísticas que los datos guardan entre sí.

Gravitación: campo de la física que estudia el movimiento de los cuerpos graves.

Imagen: representación visual de un objeto real o imaginario, que puede ser producida mediante dibujo, pintura, fotografía, etc.

Infografía: es una representación visual de un texto o narración, usualmente figurativa, pero que puede incluir gráficas o diagramas, y que tiene una intención.

Isometría: mapea el espacio en sí mismo, conservando distancias y manda círculos en círculos.

Jerarquía: una colección ordenada por una relación de dominación.

Mapa: es una representación gráfica de un territorio físico o abstracto con propiedades métricas que permiten definir distancias, ángulos o superficies.

Materia oscura: materia exótica al modelo estándar de partículas que no interacciona con los campos electromagnéticos, postulada para explicar las anomalías entre la teoría gravitatoria estándar y las observaciones.

Modelo: objeto conceptual cuya intensión contiene los atributos que representan los axiomas de la teoría.

Ordenamiento epistémico: es el acto de ordenar un sistema bajo criterios epistémicos.

Primitivo: término indefinido o sin referencia

Red: esquema que representa relaciones entre componentes usualmente mediante grafos de ligas y nodos.

Red conceptual: red donde los nodos representan conceptos y las ligas representan relaciones semánticas.

Red teórica: red cuyos nodos representan elementos teóricos relacionados por especialización.

Relación: correspondencia entre dos conjuntos.

Relación de cobertura: Sea P un conjunto ordenado y sean x y $y \in P$, decimos que y domina a x , simbolizado como $(y \rightarrow x)$, si $x < y$ y no existe $z \in P$ tal que $x < z < y$.

Relación de especialización: T' es una especialización $T : T' \sigma T_{\text{sys}}$ def (1) $M'_p = M_p$, $M'_{pp} = M_{pp}$, $M' \subseteq M$, $GC' \subseteq GC$ y (2) $I' \subseteq I$.

Relación de teorización o teoricidad: se da entre dos teorías T_0 y T_1 cuando algunos conceptos de T_1 son provistos por T_0 .

Representación: relación que asigna constructos a hechos.

Retículo: un conjunto parcialmente ordenado donde cualquiera dos de sus elementos tienen un único supremo común (join) y un único ínfimo común (meet).

Sistema: un objeto complejo cuyas partes o componentes se relacionan con al menos algún otro componente. Todos los sistemas, a excepción del universo tienen un entorno. Todos los sistemas, excepto las partículas elementales tienen una estructura.

Tensor: Un arreglo multidimensional de números: escalares (tensor de rango 0), vectores (tensor de rango 1), matrices (tensores de rango 2). Se trata de un objeto que es invariante ante cambio de coordenadas y cuyos componentes cambian de forma particular y predecible bajo cambios de coordenadas. Puede definirse también como una colección de vectores y covectores combinados utilizando el producto tensorial.

Tensor métrico: Es un tensor de rango 2, simétrico cuyo producto punto es siempre positivo.

Teoría: Un conjunto de proposiciones que comparten la misma clase de referencia, cerrado respecto a la operación de deducción.

Variedad diferenciable V : Una región no vacía, finita y conectada de M^4 que representa el espacio-tiempo.

Vector: Lista de valores $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_4 \end{bmatrix}$ que suele visualizarse mediante una flecha y repre-

sentar por ejemplo, la velocidad de una partícula.

Vector tangencial: vector tangente a una curva o superficie en un punto dado.

Vínculo interteórico: vínculo entre dos o más teorías que relaciona magnitudes específicas de teorías distintas. Las leyes puente son un tipo de vínculo interteórico.

Visualización: Imagen obtenida por un proceso digital a partir de la representación de datos.

Bibliografía

- Abreu, C., Lorenzano, P., y Moulines, C.U. Bibliography of Structuralism III (1995-2012, and Additions). *Metatheoria—Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia* **3**(2):1–36 (2013)
- Achinstein, P. y Suppe, F. *The Structure of Scientific Theories*. Illini book. University of Illinois Press (1977)
- Andrews, S. In-close, a fast algorithm for computing formal concepts. *International Conference on Conceptual Structures (ICCS)* (2009)
- Angluin, D. Queries and Concept Learning. *Machine Learning* **2**(4):319–342 (1988)
- Aréchiga, V. *Historiografía, newtonismo y alquimia*. Humanidades. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa, México (2016)
- Arnowitz, R., Deser, S., y Misner, C.W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation* **40**:1997–2027 (2008)
- Ashtekar, A. New Hamiltonian formulation of general relativity. *Physical Review D* **36**:1587–1602 (1987)
- Ayer, A.J., Hempel, C.G., y Aldama, L. Problemas y cambios en el criterio empirista de significado. *El positivismo lógico* (1965)
- B., F. y McGaugh, S. Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions. *Living Reviews in Relativity* **15**(10) (2012)
- Balzer, W., Sneed, J.D., y Moulines, C.U. *Structuralist Knowledge Representation: Paradigmatic Examples*. Poznań studies in the philosophy of the sciences and the humanities. Rodopi (2000)
- Balzer, W., Moulines, C., y Sneed, J.D. *Una arquitectónica para la ciencia : el programa estructuralista*. Universidad Nacional de Quilmes (2012)
- Barker, B.M. General scalar-tensor theory of gravity with constant G. *Astrophysical Journal* **219**:5–11 (1978)
- Barrett, T. Equivalent and Inequivalent Formulations of Classical Mechanics. *The British Journal for the Philosophy of Science* **70**(4):1167–1199 (2018)
- Barrientos, E. y Mendoza, S. A relativistic description of MOND using the Palatini formalism in an extended metric theory of gravity. *The European Physical Journal Plus* **131**(10) (2016)
- Barrientos, E. y Mendoza, S. MOND as the weak field limit of an extended metric theory of gravity with a matter-curvature coupling. *Physical Review D* **98**:084033 (2018). 1808. 01386
- Barrientos, E., Lobo, F.S.N., Mendoza, S., Olmo, G.J., y Rubiera-García, D. Metric-affine (R, T) theories of gravity and their applications. *Physical Review D* **97**:104041 (2018).

1803.05525

- Barrow, J.D. *The Constants of Nature: From Alpha to Omega—the Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe*. Pantheon Books (2002)
- Barrow, J.D. *The Book of Nothing: Vacuums, Voids, and the Latest Ideas about the Origins of the Universe*. Vintage. Knopf Doubleday Publishing Group (2009)
- Bartelborth, T. Hierarchy versus holism: a structuralist view on general relativity. *Erkenntnis* **Vol. 39**:383–412 (1993)
- Baryshev, Y.V. Field Theory of Gravitation: Desire and Reality. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints* (1999)
- Bekenstein, J. y Milgrom, M. Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? *Astrophysical Journal* **286**:7–14 (1984)
- Bekenstein, J.D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Physical Review D* **70**(8):083509 (2004). [astro-ph/0403694](#)
- Bekenstein, J. Are particle rest masses variable? Theory and constraints from solar system experiments. *Phys. Rev. D* **15**:1458–1468 (1977)
- Bergmann, O. Scalar Field Theory as a Theory of Gravitation. I. *American Journal of Physics* **24**:38–42 (1956)
- Bernal, T., Capozziello, S., Cristofano, G., y de Laurentis, M. Mond's Acceleration Scale as a Fundamental Quantity. *Modern Physics Letters A* **26**:2677–2687 (2011). 1110.2580
- Beth, E. *The Foundations of Mathematics: A Study in the Philosophy of Science*. Harper torchbooks. North-Holland Publishing Company (1965)
- Beymer, D., Orton, P.Z., y Russell, D. An Eye Tracking Study of How Pictures Influence Online Reading. En C. Baranauskas, P. Palanque, J. Abascal, y S. Barbosa (editores), *Human-Computer Interaction – INTERACT 2007*, págs. 456–460. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2007)
- Birkhoff, G. *Lattice Theory*. Número v. 25, pt. 2 en American Mathematical Society colloquium publications. American Mathematical Society (1940)
- Blagojevic, M. y F., H. *Gauge Theories of Gravitation: A Reader with Commentaries*. Classification of Gauge Theories of Gravity. Imperial College Press (2013)
- Blanchet, L. y Novak, J. External field effect of modified Newtonian dynamics in the Solar system. *MNRAS* **412**:2530–2542 (2011). 1010.1349
- Blumenthal, G.R., Faber, S.M., Primack, J.R., y Rees, M.J. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. *Nature* **311**:517–525 (1984)
- Bollini, C., Giambiagi, J., y Tiomno, J. A linear theory of gravitation. *Lettere al Nuovo Cimento* **3**(3):65–70 (1970)
- Bond, J., Efstathiou, G., y Silk, J. Massive Neutrinos and the Large Scale Structure of the Universe. *Phys. Rev. Lett.* **45**:1980–1984 (1980)
- Borner, K. *Atlas of Science: Visualizing what We Know*. MIT Press (2010)
- Bovens, L., Hofer, C., y Hartmann, S. *Nancy Cartwright's Philosophy of Science*. Routledge Studies in the Philosophy of Science. Taylor & Francis (2008)
- Boylan-Kolchin, M., Bullock, J., y Kaplinghat, M. Too big to fail? The puzzling darkness of massive Milky Way subhaloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **415**(1):L40–L44 (2011)

- Brans, C.H. *Mach's principle and a varying gravitational constant*. Tesis Doctoral, Princeton University (1961)
- Bridgman, P.W. *Dimensional Analysis*. Yale University Press, New Haven (1920)
- Bruneton, J.P. y Esposito-Farèse, G. Field-theoretical formulations of MOND-like gravity. *Physical Review D* **76**(12):124012 (2007)
- Bunge, M. *Foundations of physics*. Springer tracts in natural philosophy. Springer-Verlag (1967)
- Bunge, M. *Problems Concerning Intertheory Relations*, págs. 285–325. Springer Netherlands, Dordrecht (1970)
- Bunge, M. *Tratado de Filosofía Básica*. Epu (1976)
- Bunge, M. Corrections to "Foundations of Physics": Correct and Incorrect. *Synthese* págs. 443–452 (1969)
- Bunge, M. Gravitational waves and spacetime. *Foundations of Science* **23**(2):399–403 (2018)
- Campesino, J. Apuntes para una semiología. *Semiosis (Xalapa, Ver.)* **9**(17):121–144 (2013)
- Capozziello, S. y De Laurentis, M. Extended Gravity: State of the Art and Perspectives. *ArXiv e-prints* (2013)
- Carnap, R. *Foundations of Logic and Mathematics*. International encyclopedia of unified science. University of Chicago Press (1939)
- Carpineto, C. y Romano, G. *Concept Data Analysis: Theory and Applications*. Wiley InterScience online books. John Wiley & Sons (2004)
- Carranza, D.A. y Mendoza, S. and Torres, L.A. A cosmological dust model with extended $f(\chi)$ gravity. *European Physical Journal C* **73**:2282 (2013). 1208.2502
- Casanueva, M. *El modelo en la ciencia y la cultura*, capítulo Los modelos en la filosofía de la ciencia del siglo XX. Siglo XXI Editores, UNAM (2005)
- Casanueva, M. Diagramas y esquemas en y sobre la genética mendeliana. *Metatheoria* **8**(1):83–93 (2016)
- Casanueva, M. y Bolanos, B. *El giro pictórico. Epistemología de la imagen*. Anthropos (2009)
- Casanueva, M. y Madrigal, R. Flujos informativos, mecanismos y modelos en la síntesis de proteínas. *Scientiae Studia* **14**(1):175–97 (2016)
- Castelvecchi, D. y Witze, A. Einstein's gravitational waves found at last. *Nature News* (2016)
- Cohen, I. *Revolution in Science*. ACLS Humanities E-Book. Belknap Press of Harvard University Press (1985)
- contributors Wikipedia. Alternatives to general relativity — Wikipedia, The Free Encyclopedia (2020). [En línea; accessed 4-Nov-2020,13:01 UTC]
- Corry, L. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*. 10. Springer Netherlands (2004)
- Corry, L., Renn, J., y Stachel, J. Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute. *Science* **278**(5341):1270–1273 (1997)
- Covarrubias, G. An axiomatization of general relativity. *International Journal of Theoretical Physics* **32**(11):2135–2154 (1993)
- da Costa, N. *El conocimiento científico*. 2000^a edición. UNAM (1997)
- Davey, B. y Priestley, H. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge mathematical text books. Cambridge University Press (2002)

- de Blok, W.J.G. The Core-Cusp Problem. *Advances in Astronomy* **2010**:1–14 (2010)
- De Langhe, R. The Kuhnian Paradigm. *Topoi* **32**(1):65–73 (2013)
- de Solla Price, D. Networks of Scientific Papers. *Science* **149**(3683):510–515 (1965)
- Deffayet, C., Esposito-Farèse, G., y Woodard, R.P. Nonlocal metric formulations of modified Newtonian dynamics with sufficient lensing. *Physical Review D* **84**(12) (2011)
- Deleuze, G. y Guattari, F. *What is Philosophy? European Perspectives*. Verso (1994)
- Demopoulos, W., Frappier, M., y Bub, J. Poincaré's a Les conceptions nouvelles de la matiere. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **43**(4):221 – 225 (2012)
- Dewar, N. Maxwell-Cartan gravitation. *PhilSci* (2016)
- Dewar, N. Maxwell gravitation. *Philosophy of Science* **85**(2):249–270 (2018)
- Dewitt, B.S. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. *Physical Review* **160**:1113–1148 (1967)
- Dicke, R. Republication of: The theoretical significance of experimental relativity. *General Relativity and Gravitation* **51**(5):1–31 (2019)
- Díez, J. Introducción histórica a la teoría de la metrización: dos líneas de investigación: axiomática y morfismos reales, escalas e invarianzas (I). *Endoxa, Series Filosóficas* (1993)
- Díez, J. Introducción histórica a la teoría de la metrización (II): Suppes y la teoría madura: representación y unicidad. *Endoxa, Series Filosóficas* (1994)
- Diez, J. y Moulines, C. *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Ariel filosofía. Ariel (2008)
- Dirac, P.A.M. The Cosmological constants. *Nature* **139**:323 (1937)
- Dirac, P.A.M. A New Basis for Cosmology. *Royal Society of London Proceedings Series A* **165**:199–208 (1938)
- Dirac, P.A.M. Cosmological Models and the Large Numbers Hypothesis. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **338**(1615):439–446 (1974)
- Duhem, P., Wiener, P., Vuillemin, J., y de Broglie, L. *The Aim and Structure of Physical Theory*. Atheneum paperbacks. Princeton University Press (1991)
- Durazo, R., Hernandez, X., Sodi, B.C., y Sánchez, S. A Universal Velocity Dispersion Profile for Pressure Supported Systems: Evidence for MONDian Gravity across Seven Orders of Magnitude in Mass. *The Astrophysical Journal* **837**(2):179 (2017)
- Eddington, A. *Relativity theory of protons and electrons*. The Macmillan Company (1936)
- Eddington, A. *The Philosophy of Physical Science: Tarner Lectures 1938*. Tarner lectures. Cambridge University Press (1939)
- Einstein, A. y Fokker, A.D. Die Nordstromsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentkalkuls. *Annalen der Physik* **44**:321–328 (1914)
- Elgin, C. Understanding and the facts. *Philosophical Studies* **132**(1):33–42 (2007)
- Espinosa, M. The gravity apple tree. *Journal of Physics: Conference Series* **600**(1):012050 (2015)
- Espinosa, M. Y si no hay materia oscura, qué? *Elemental Watson* **10**(29) (2019)
- Esposito, G. Mathematical Structures of Space-Time. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics* **40**(1):1–30 (1992)

- Ezenarro, E. Lo que nos dio y no nos dio Bourbaki. *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science* **32**(1):25–40 (2017)
- Ferraris, M., Francaviglia, M., y Reina, C. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “Palatini’s method” discovered by Einstein in 1925. *General relativity and gravitation* **14**(3):243–254 (1982)
- Ferreiros, J., Domínguez, J., y Gray, J. *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. OUP Oxford (2006)
- Feynman, R. Quantum theory of gravitation. *Acta Phys. Polon.* **24** (1963)
- Fields, B.D. The Primordial Lithium Problem. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **61**(1):47–68 (2011)
- Flichman, E. Newton’s dynamics, Kuhn, and incommensurability. En *The Proceedings of the Twentieth World Congress of Philosophy*, tomo 10, págs. 89–96 (2001)
- Freeman, K.C. On the Disks of Spiral and S0 Galaxies. *Astrophysical Journal* **160**:811 (1970)
- Friedman, M. *Foundations of Space-Time Theories: Relativistic Physics and Philosophy of Science*. Princeton University Press (1983)
- Galindo, S., Cabrera, C., y Cervantes-Cota, J.L. En busca de los efectos gravitacionales de Birkhoff: la ultracentrifuga transelástica. *Revista Mexicana de Física E* **59**:101 – 114 (2013)
- Galison, P. y Jones, C.A. *Picturing Science, Producing Art*. Taylor & Francis (2014)
- Ganter, B. y Obiedkov, S. *Conceptual Exploration*. Springer Berlin Heidelberg (2016)
- Ganter, B. y Stumme, G. Methods and applications in computer science. *Formal Concept Analysis* **46**:1–117 (2002)
- Ganter, B., Stumme, G., y Wille, R. *Formal Concept Analysis: Foundations and Applications*. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer (2005)
- Ganter, B. y Wille, R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999)
- Gärdenfors, P. *Conceptual spaces: the geometry of thought*. The MIT Press (2000)
- Geroch, R. Einstein algebras. *Communications in Mathematical Physics* **26**(4):271–275 (1972)
- Giovannini, E.N. *David Hilbert y los fundamentos de la geometría (1891-1905)*. College Publications (2015)
- Girvan, M. y Newman, M.E.J. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **99**(12):7821–7826 (2002)
- Goenner, H. Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories. *General Relativity and Gravitation* **44**(8):2077–2097 (2012)
- Gombrich, E.H. *The Visual Image*. Scientific American, sept. Scientific American (1972)
- Gonzalo, A. Perspectivas ontosemánticas en la concepción estructuralista de la ciencia. *Arbor* **187**(747):33–41 (2011)
- Grätzer, G. *General Lattice Theory*. Academic Press, INC, Londres (1978)
- Gronwald, F. y Hehl, F.W. On the gauge aspects of gravity. *International School of Cosmology and Gravitation* **14**:148–198 (1996)
- Guerrero, G. *Enfoque semántico de las teorías, estructuralismo y espacio de estados: coincidencias y divergencias*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid (2003)

- Guigues, J.L. y Duquenne, V. Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. *Mathématiques et Sciences humaines* **95**:5–18 (1986)
- Hacyan, S. Geometry as an object of experience: the missed debate between Poincaré and Einstein. *European Journal of Physics* **30**(2):337 (2009)
- Harré, R. New Tools for Philosophy of Chemistry. *HYLE- International Journal for Philosophy of Chemistry* **20**:77–01 (2014)
- Havas, P. Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity. *Reviews of Modern Physics* **36**(4):938 (1964)
- Hawking, S. (editor). *A hombros de gigantes*. Crítica (2003)
- Hehl, F., von der Heyde, P., Kerlick, G., y Nester, J. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.* **48**:393–416 (1976)
- Heiblum, A. *El Universo Acensuado. Un análisis epistemológico de los escenarios cosmológicos actuales*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional Tres de Febrero, Doctorado en Historia y Filosofía de la Ciencia (2014)
- Hernandez, X. A Phase Space Diagram for Gravity. *Entropy* **14**:848–855 (2012)
- Hernandez, X. y Jimenez, M.A. A first linear cosmological structure formation scenario under extended gravity. *ArXiv e-prints* (2013). 1307.0777
- Hernandez, X., Jiménez, M.A., y Allen, C. Wide binaries as a critical test of classical gravity. *European Physical Journal C* **72**:1884 (2012)
- Hernandez, X., Cookson, S., y Cortes, R. Internal kinematics of GAIA eDR3 wide binaries. *arXiv preprint arXiv:2107.14797* (2021)
- Hidalgo, J.C., Mendoza, S., Hernandez, X., Bernal, T., Jimenez, M.A., y Allen, C. Non-relativistic extended gravity and its applications across different astrophysical scales. En J. Beltrán Jiménez, J.A. Ruiz Cembranos, A. Dobado, A. López Maroto, y A. De la Cruz Dombriz (editores), *American Institute of Physics Conference Series, American Institute of Physics Conference Series*, tomo 1458, págs. 427–430 (2012). 1202.4189
- Horndeski, G. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics* **10**(6):363–384 (1974)
- Ibarra, A. *Varietades de la representación en la ciencia y la filosofía* /. Ariel Practicum. Ariel,, Barcelona : (c2000.). Incluye índices
- Janich, P. *Protophysics of Time, constructive Goundation and History of Time Measurement*. D. Reidel Publishing Company (1985)
- Jordan, P. y Müller, C. Field Equations with a Variable 'Constant' of Gravitation. *Z. Naturforsch.* **2a**:1–2 (1947)
- Kalman, G. Lagrangian Formalism in Relativistic Dynamics. *Phys. Rev.* **123**:384–390 (1961)
- Kastrup, H.A. On the advancements of conformal transformations and their associated symmetries in geometry and theoretical physics. *Annalen der Physik* **520**:631–690 (2008). 0808.2730
- Kibble, T. Lorentz Invariance and the Gravitational Field. *Journal of Mathematical Physics* **2**(2):212–221 (1961)
- Kitcher, P. *The Advancement of Science : Science without Legend, Objectivity without Illusions*. Oxford University Press, USA (1993)

- Klein, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik* **37**(12):895–906 (1926)
- Klimushkin, M., Obiedkov, S., y Roth, C. Approaches to the Selection of Relevant Concepts in the Case of Noisy Data. En L. Kwuida y B. Sertkaya (editores), *Formal Concept Analysis*, págs. 255–266. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2010)
- Klypin, A., Kravtsov, A., Valenzuela, O., y Prada, F. Where Are the Missing Galactic Satellites? *Astrophysical Journal* **522**(1):82–92 (1999)
- Kramer, S. y Ljungberg, C. *Thinking with Diagrams: The Semiotic Basis of Human Cognition*. Semiotics, Communication and Cognition [SCC]. De Gruyter (2016)
- Kroupa, P. The Dark Matter Crisis: Falsification of the Current Standard Model of Cosmology. *Publications of the Astronomical Society of Australia* **29**:395–433 (2012)
- Kuznetsov, S.O. y Makhalova, T. On interestingness measures of formal concepts. *arXiv e-prints* arXiv:1611.02646 (2016). 1611.02646
- Kvanvig, J. *The value of knowledge and the pursuit of understanding*. Cambridge University Press (2003)
- Landry, E. (editor). *Categories for the working philosopher*. Oxford University Press (2017)
- Lawrie, I.D. *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics, Third Edition*. Taylor & Francis (2012)
- Lee, D.L., Lightman, A.P., y Ni, W.T. Conservation laws and variational principles in metric theories of gravity. *Phys. Rev. D* **10**:1685–1700 (1974)
- Lima, M. y Shneiderman, B. *The Book of Trees: Visualizing Branches of Knowledge*. Princeton Architectural Press. Princeton Architectural Press (2014)
- Lipton, P. *Inference to the best explanation*. Taylor & Francis (2004)
- Littlewood, D.E. Conformal transformations and kinematical relativity. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **49**:90–96 (1953)
- Lockwood, D.J. y Rowell, N.L. Quantifying our World. *Physics in Canada* **72**(4) (2016)
- Logunov, A.A. *On the articles by Henri Poincaré: on the dynamics of the electron*. Joint Institute for Nuclear Research (1995)
- Logunov, A.A. y Mestvirishvili, M.A. Relativistic theory of gravitation. *Theoretical and Mathematical Physics* **61**(3):1170–1183 (1984)
- Logunov, A.A. y Mestvirishvili, M.A. Relativistic Theory of Gravitation. *Foundations of Physics* **16**(1):1–26 (1986)
- Lovell, M.R., Eke, V., Frenk, C.S., Gao, L., Jenkins, A., Theuns, T., Wang, J., White, S.D.M., Boyarsky, A., y Ruchayskiy, O. The haloes of bright satellite galaxies in a warm dark matter universe. *MNRAS* **420**:2318–2324 (2012). 1104.2929
- Lughausen, F., Famaey, B., y Kroupa, P. A census of the expected properties of classical Milky Way dwarfs in Milgromian dynamics. *MNRAS* **441**:2497–2507 (2014)
- Madeleine, S. How People Read Short Articles (2018)
- Magueijo, J. *Faster Than the Speed of Light: The Story of a Scientific Speculation*. Perseus Book Group (2003)
- Mannheim, P. y Kazanas, D. Newtonian limit of conformal gravity and the lack of necessity of the second order Poisson equation. *General Relativity and Gravitation* **26**(4):337–361 (1994)

- Marquina, J.E. *La tradición de la investigación newtoniana*. Biblioteca signos. UAM, Unidad Iztapalapa (2006)
- Martínez, S.F. *El giro pictórico, epistemología de la imagen*, capítulo Elementos para una epistemología de los diagramas. Anthropos (2009)
- Maudlin, T. *Philosophy of Physics: Space and Time*. Princeton University Press (2012)
- McGaugh, S.S., Schombert, J.M., Bothun, G.D., y de Blok, W.J. The Baryonic Tully-Fisher Relation. *ApJL* **533**:L99–L102 (2000)
- Méndez, D. y Casanueva, M. Representación de dominios teóricos mediante retículos: el dominio de la herencia biológica durante el periodo 1865-1902. *Agora, Papeles de Filosofía* **31**(2):109–141 (2012)
- Mendoza, S. Extending cosmology: the metric approach. *ArXiv e-prints* (2012)
- Mendoza, S., Hernandez, X., Hidalgo, J.C., y Bernal, T. A natural approach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales. *MNRAS* **411**:226–234 (2011). 1006.5037
- Mendoza, S., Bernal, T., Hidalgo, J.C., y Capozziello, S. MOND as the weak-field limit of an extended metric theory of gravity. En J. Beltrán Jiménez, J.A. Ruiz Cembranos, A. Dobado, A. López Maroto, y A. De la Cruz Dombriz (editores), *Towards New Paradigms, American Institute of Physics Conference Series*, tomo 1458, págs. 483–486 (2012). 1202.3629
- Mendoza, S. y Silva, S. The matter Lagrangian of an ideal fluid. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **18**(04):2150059 (2021)
- Merritt, D. Cosmology and convention. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **57**:41–52 (2017)
- Merritt, D. *A Philosophical Approach to MOND: Assessing the Milgromian Research Program in Cosmology*. Cambridge University Press (2020)
- Miguel, H. Medición de fuerzas y el segundo principio de Newton (2009). Workshop sobre la T-teoricidad en la metateoría estructuralista en la Universidad Nacional de Quilmes, Buenos Aires.
- Miguel, H. La teoría del big bang en la red del conocimiento. En *Elementos de Historia de la Ciencia*, págs. 391–418. Universidad de la República. Comisión Sectorial de Enseñanza (2011)
- Milgrom, M. A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies. *Astrophysical Journal* **270**:371–389 (1983a)
- Milgrom, M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophysical Journal* **270**:365–370 (1983b)
- Misner, C., Thorne, K., y Wheeler, J. *Gravitation*. Número parte 3 en Gravitation. Freeman, W.H. (1973)
- Moffat, W. *Reinventing Gravity: A Physicist Goes Beyond Einstein*. Dundurn (2008)
- Mormann, T. *The Structure of Scientific Theories in Logical Empiricism*, págs. 136–162. Cambridge Companions to Philosophy. Cambridge University Press (2007)
- Moulines, C.U. *Exploraciones metacientíficas*. Alianza Editorial, Madrid (1982a)
- Moulines, C.U. *A Study in Protophysics*, págs. 207–224. Springer Netherlands, Dordrecht (1982b)
- Moulines, C.U. ¿Axiomatizó Newton la mecánica? *Arbor* **128**(501):97 (1987)

- Moulines, C.U. Relaciones interteóricas en perspectiva diacrónica. *Revista de Humanidades de Valparaíso* **4**(8):147–162 (2016)
- Moulines, C. Tipología axiomática de las teorías empíricas. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía* **17**(51):41–69 (1985)
- Nagel, E. *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation*. Hackett Publishing Company (1979)
- Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis (2003)
- Newton, I. y Motte, A. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Kessinger Publishing (2003)
- Ni, W.T. Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity.IV. a Compendium of Metric Theories of Gravity and Their POST Newtonian Limits. *Astrophysical Journal* **176**:769 (1972)
- Ni, W.T. A New Theory of Gravity. *Phys. Rev. D* **7**:2880–2883 (1973)
- Nordstrom, G. Relativittsprinzip und Gravitation. *Physikalische. Zeitschrift* **13** (1912)
- Nordtvedt, J.K. Post-Newtonian Metric for a General Class of Scalar-Tensor Gravitational Theories and Observational Consequences. *Astrophysical Journal* **161**:1059 (1970)
- Nordtvedt, Jr., K. y Will, C.M. Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. II. Experimental Evidence to Rule Out Preferred-Frame Theories of Gravity. *Astrophysical Journal* **177**:775 (1972)
- North, J. The "structure" of physics: A case study. *The Journal of Philosophy* **106**(2):57–88 (2009)
- Norton, J. Geometries in Collision: Einstein, Klein and Riemann. En J.J. Gray (editor), *The Symbolic Universe: Geometry and Physics 1890-1930*, págs. 128 – 144. Oxford University Press, Oxford, New York (1999)
- Norton, J.D. Einstein, Nordstrom and the early demise of scalar, Lorentz-covariant theories of gravitation. *Archive for History of Exact Sciences* **45**(1):17–94 (1992)
- Norton, J. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics* **56**(7):791 (1993)
- Obukhov, Y.N., Vlachynsky, E.J., Esser, W., y Hehl, F.W. Effective Einstein theory from metric-affine gravity models via irreducible decompositions. *Physical Review D* **56**:7769–7778 (1997)
- Okun, L.B. The fundamental constants of physics. *Soviet Physics Uspekhi* **34**(9):818 (1991)
- Oort, J.H. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* **6**:249 (1932)
- O'Raiheartaigh, L. y Straumann, N. Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints* (1998)
- Orlandoni Merli, G. Escalas de medición en Estadística. *Telos* (2010)
- Patiño, L. y Söhle, J. About the tensorial nature of the Christoffel symbols, or lack thereof (2015). 1512.05760
- Peebles, P.J.E. Dark Matter. *ArXiv e-prints* (2013). 1305.6859

- Pernice, K., Whitenton, K., Nielsen, J., y Group, N.N. *How People Read on the Web: The Eyetracking Evidence*. Nielsen Norman Group (2014)
- Piaget, J. *El Estructuralismo*. Colección Qué Sé? Publicaciones Cruz O. (1995)
- Pisanty, E. Unit relations in the new SI. Own work, CC BY-SA 4.0, (2019)
- Poincaré, H. Sur la dynamique de l'Electron. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences* **140**:1504–1508 (1905)
- Popper, K. *The logic of scientific discovery*. Hutchinson (1959)
- Priss, U. Formal concept analysis in information science. *Annual Review of Information Science and Technology* **40**(1):521–543 (2007)
- Radner, M. y Winokur, S. *Analyses of Theories and Methods of Physics and Psychology*. Número v. 4 en Minnesota Studies in the Philosophy of Science. University of Minnesota Press (1970)
- Reichenbach, H. *La Filosofía Científica*. Filosofía Series. Fondo de Cultura Económica (1990)
- Resnick, R. y Halliday, D. *Física*. Compañía Editorial Continental (1974)
- Richardson, M. y Domingos, P. Combining Link and Content Information in Web Search (2004)
- Riemann, B. Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría. En R. Dedekind (editor), *Memorias de la Sociedad de Ciencias de Göttingen*, tomo XIII (1876)
- Rigutto, C. The landscape of online visual communication of science. *JCOM* **16** (02) **C06_en**. (2017)
- Romero, C., Fonseca-Neto, J.B., y Pucheu, M. General relativity and Weyl geometry. *Classical and Quantum Gravity* **29**(15):155015 (2012)
- Romero, G., Pérez Bergliaffa, S., y Vucetich, H. Steps towards an axiomatic pregeometry of space-time. *Int. J. Theor. Phys* **37**:2281 (1998)
- Romero, G.E. Mario Bunge on gravitational waves and the reality of spacetime. *Foundations of Science* **23**(2):405–409 (2018a)
- Romero, G.E. *Scientific Philosophy*. Springer (2018b)
- Rosenstock, S., Barrett, T.W., y Weatherall, J.O. On Einstein Algebras and Relativistic Spacetimes (2015). 1506.00124
- Rovelli, C. Loop quantum gravity. *Physics World* (2003)
- Rubin, V.C., Ford, W. K., J., y Thonnard, N. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). *Astrophysical Journal* **238**:471–487 (1980)
- S., D. y Laurent, B. Gravitation without self-interaction. *Annals of Physics* **50**(1):76 – 101 (1968)
- Salmon, W.C. *Scientific explanation and the causal structure of the world*. Princeton University Press (1984)
- Sanders, R.H. *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective*. Cambridge University Press (2010)
- Sanders, R.H. *Deconstructing Cosmology*. UK, Cambridge Univ. Press (2016)
- Sanmartín, M. *Tratados de lógica: Sobre la interpretación ; Analíticos primeros ; Analíticos segundos*. Biblioteca clásica Gredos. Editorial Gredos (1982)

- Sanmartín, M. y Montoya, J. *Tratados de lógica (Órganon) I: Categorías, Tópicos, Sobre las refutaciones sofísticas*. Biblioteca Clásica. Gredos (2016)
- Santiago, T. *Alcances y límites de la racionalidad en el conocimiento y la sociedad*. Biblioteca de signos. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa (2000)
- Sauer, T. Field equations in teleparallel spacetime: Einstein's fernparallelismus approach towards unified field theory. *Historia Math.* **33**:399–439 (2006). [physics/0405142](#)
- Schlick, M. y Brose, H. *Space and Time in Contemporary Physics: An Introduction to the Theory of Relativity and Gravitation*. Oxford University Press (1920)
- Sciama, D.W. The Physical Structure of General Relativity. *Rev. Mod. Phys.* **36**:463–469 (1964)
- Singh, P.K., A., K.C., y Gani, A. A comprehensive survey on formal concept analysis, its research trends and applications. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **26**:495 – 516 (2016)
- Smogorzhevskii, A.S. *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Lecciones populares de matemáticas. Mir (1978)
- Sneed, J.D. *The logical structure of mathematical physics*, tomo 35. Springer Science & Business Media (2012)
- Sotiriou, T.P. y Faraoni, V. $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics* **82**:451–497 (2010)
- Sotiriou, T.P. $f(R)$ gravity and scalar tensor theory. *Classical and Quantum Gravity* **23**(17):5117–5128 (2006). [gr-qc/0604028](#)
- Stachel, J. New light on the Einstein-Hilbert priority question. *Journal of Astrophysics and Astronomy* **20**(3-4):91–101 (1999)
- Stevens, S.S. *et al.* On the theory of scales of measurement (1946)
- Stjernfelt, F. *Diagrammatology: An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics*. Synthese Library. Springer Netherlands (2007)
- Strauss, M. Corrections to Bunge's foundations of physics (1967). *Synthese* **19**(3-4):433–442 (1969)
- Suppe, F. The search for philosophic understanding of scientific theories. *The structure of scientific theories* **2**:1–241 (1977)
- Suppe, F. *The Semantic Conception of Theories and Scientific Realism*. University of Illinois Press, Urbana (1989)
- Suppes, P. Some Remarks on Problems and Methods in the Philosophy of Science. *Philosophy of Science* **21**(3):242–248 (1954)
- Suppes, P. *Introduction to Logic*. Van Nostrand, New York (1957)
- Thirring, W.E. An alternative approach to the theory of gravitation. *Annals of Physics* **16**:96–117 (1961)
- Thiry, Y. Les équations de la théorie unitaire de Kaluza. *C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci.* **226**:216–218 (1948)
- Thiry, Y. y de Paris, U. *Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ*. Université de Paris (1951)
- Todorov, I.T. Einstein and Hilbert: the creation of general relativity. *arXiv preprint physics/0504179* (2005)

- Trautman, A. Einstein-Cartan Theory. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints* (2006)
- Tufte, E. *The visual display of quantitative information*. Número v. 914 en *The Visual Display of Quantitative Information*. Graphics Press (1983)
- Utiyama, R. Invariant Theoretical Interpretation of Interaction. *Phys. Rev.* **101**:1597–1607 (1956)
- Van Fraassen, B. Aim and Structure of Scientific Theories. En R.B. Marcus, G.J. Dorn, y P. Weingartner (editores), *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, tomo 114, págs. 307 – 318. Elsevier (1986)
- Van Fraassen, B. *La imagen científica / The Scientific Image*. Problemas científicos y filosóficos. Paidós Iberica Ediciones S A (1996)
- Wagoner, R.V. Scalar-Tensor Theory and Gravitational Waves. *Phys. Rev. D* **1**:3209–3216 (1970)
- Weatherall, J. *Category Theory and the Foundations of Classical Space-Time Theories*, capítulo 13, págs. 329–348. Oxford University Press (2017)
- Weinberg, S. Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations. *Phys. Rev.* **138**:B988–B1002 (1965)
- White, S., Frenk, C.S., y Davis, M. Nonlinear evolution of large-scale structure in the universe. *Astrophysical Journal* **271**:417–430 (1983)
- Wikipedia contributors. General relativity priority dispute — Wikipedia, The Free Encyclopedia (2020). [Online; accessed 27-February-2021]
- Will, C.M. y Nordtvedt, J.K. Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism. *Astrophysical Journal* **177**:757 (1972)
- Will, C. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press (1993)
- Wille, R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts. En I. Rival (editor), *Ordered Sets*, págs. 445–470. Springer Netherlands, Dordrecht (1982)
- Wille, R. Restructuring mathematical logic: an approach based on Peirce's pragmatism. En A. Ursini y P. Agliano (editores), *Logic and algebra*, págs. 267–281. Marcel Dekker, New York (1996)
- Witten, L. *Gravitation: An Introduction to Current Research*. Wiley (1962)
- Wolfram, S. *A New Kind of Science*. Wolfram Media (2002)