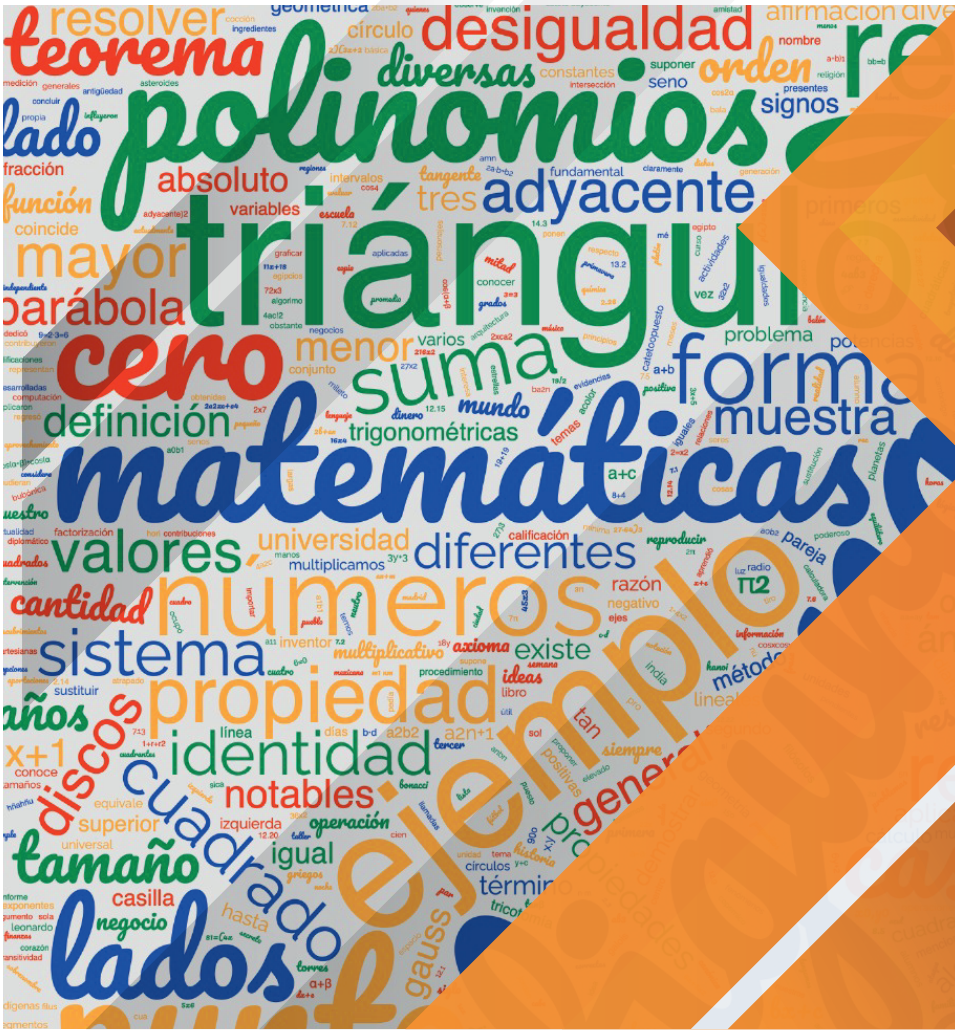
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

DCNI
División de Ciencias Naturales e Ingeniería

Matemáticas para todos, con ejercicios y notas históricas

Autor:
Juan Manuel Romero Sanpedro



Docencia

Matemáticas para todos, con ejercicios y notas históricas

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Matemáticas para todos con ejercicios y notas históricas / Juan Manuel Romero Sanpedro – Ciudad de México : UAM, Unidad Cuajimalpa, 2023.

446 p. : il. col., diagrs., gráficas, tablas ; 24 cm.

ISBN: 978-607-28-2848-3

Dewey LC:

© 2023 Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa
Avenida Vasco de Quiroga 4871
Col. Santa Fe Cuajimalpa, delegación Cuajimalpa de Morelos
C. P. 05348, Ciudad de México (Tel: 5814 6500)
www.cua.uam.mx

Primera edición: 2023

Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida mediante ningún sistema método electrónico o mecánico sin el consentimiento por escrito de los titulares de los derechos.

Versión electrónica. Hecho en México
Electronic version. Made in Mexico

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Juan Manuel Romero Sanpedro

Matemáticas para todos, con ejercicios y notas históricas

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Índice general

1. Axiomas de los números reales y sus aplicaciones **11**
1.1. Suma o adición 11
1.2. Multiplicación o producto 13
1.2.1. Suma y producto 15
1.3. Axiomas 16
1.4. El cero, un número especial 18
1.4.1. El cero es único 18
1.4.2. Multiplicación por cero 19
1.4.3. División por cero, una operación prohibida 19
1.4.4. El cero como producto de dos números 20
1.5. El inverso de un número es único 22
1.5.1. El inverso de un producto de dos número reales 22
1.6. El 1 y el -1 dos números especiales 24
1.6.1. Leyes de los signos 24
1.6.2. El inverso multiplicativo de -1 27
1.6.3. El signo en una fracción 27
1.7. Operaciones con fracciones 28
1.7.1. Multiplicación de quebrados 29
1.7.2. El inverso del inverso 30
1.7.3. División de fracciones, la *ley del sandwich* 31
1.7.4. Suma de fracciones, caso particular 32
1.7.5. Caso general de suma de fracciones, *la ley de la sonrisa* 33
1.8. La suma de los primero cien números 34
1.9. Sucesión de Fibonacci 35
1.10. Ejercicios 38

2. Ecuaciones lineales **39**
2.1. Ecuación lineal de una variable 39
2.2. Sistemas de ecuaciones 41
2.2.1. Solución por sustitución 41

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

2.3. Método de igualación 45
2.4. Método de reducción o de Gauss-Jordan 49
2.5. Ejercicios 52

3. Orden en los números reales **53**
3.1. Transitividad 57
3.2. Suma del mismo número en una desigualdad 58
3.3. Producto por números positivos 59
3.4. Inversos aditivos 61
3.5. Multiplicación por números negativos 62
3.6. Suma de desigualdades 63
3.7. Menor o igual 64
3.8. Intervalos 65
3.9. Ejercicios 66

4. Valor absoluto **67**
4.1. Valor absoluto de un producto 68
4.2. Inverso aditivo 70
4.3. Desigualdad del triángulo 70
4.4. Intervalos usando valor absoluto 72
4.5. Ejercicios 74

5. El cuadrado de un número real **75**
5.1. El cuadrado de un número real es siempre positivo 75
5.2. El cuadrado de un producto 76
5.3. El cuadrado de una fracción 77
5.4. El cuadrado y su representación geométrica 78
5.5. El cuadrado de una suma 80
5.6. El cuadrado de una resta 82
5.7. Diferencia de cuadrados 83
5.8. Ejercicios 86

6. Raíz cuadrada **87**
6.1. Definición 87
6.2. Raíz cuadrada de un producto 89
6.3. Raíz cuadrada de una fracción 90
6.4. Raíz cuadrada de un número al cuadrado 91
6.5. Ejercicios 92

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

7. Ecuación cuadrática **93**
7.1. Primera deducción 93
7.2. Segunda deducción 95
7.3. Tercera deducción 96
7.4. Ejemplos 100
7.5. El discriminante de una ecuación cuadrática 104
7.6. La proporción dorada 106
7.6.1. Rectángulo dorado 107
7.7. Ejercicios 109

8. Teorema de Pitágoras **111**
8.1. Ejemplos 113
8.2. Ejercicios 116

9. Plano cartesiano **119**
9.1. Ejercicios 127

10. Trigonometría **129**
10.1. Funciones seno y coseno 129
10.2. Ángulos notables 130
10.2.1. Ángulo= $0^o = 0$ 131
10.2.2. Ángulo = $90^o = \frac{\pi}{2}$ 131
10.2.3. Ángulo= $45^o = \frac{\pi}{4}$ 132
10.2.4. Ángulo= $30^o = \frac{\pi}{6}$ 134
10.2.5. Ángulo= $60^o = \frac{\pi}{3}$ 135
10.3. Teorema de los cosenos 136
10.3.1. Ejemplos 139
10.4. Coordenadas polares 141
10.5. Coseno de la resta de dos ángulos 142
10.6. Seno de la suma de dos ángulos 145
10.7. Coseno de la suma de dos ángulos 147
10.8. Seno de la resta de dos ángulos 147
10.9. Funciones trigonométricas 148
10.10Identidades trigonométricas 149
10.11. Identidades trigonométricas y águlos notables 153
10.12Ejercicios 154

11. Rectas **155**
11.1. Ecuación de la recta 155
11.2. Pendiente de recta 156
11.3. Ángulo entre rectas 157

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

11.4. Distancia entre un punto y una recta 159
11.5. Ejercicios 162

12. Cónicas **163**
12.1. Parábola 163
12.2. Caso general 166
12.3. Elipse 169
12.4. Caso general 173
12.4.1. Círculo 177
12.4.2. Ejemplos 178
12.5. Hipérbola 179
12.6. Caso general 183
12.7. Ejercicios 186

13. Leyes de potencia **187**
13.1. Potencia n 187
13.2. Potencia de un producto 188
13.3. Suma de potencias 189
13.4. Potencia de fracciones 190
13.5. Producto de potencias 190
13.6. Binomio de Newton y triángulo de Pascal 191
13.7. Productos notables, resta de dos potencias 196
13.8. Productos notables, suma de potencias impares 198
13.9. Suma especial 199
13.10Torres de Hanoi 199
13.11Ajedrez y suma especial 201
13.12Ejercicios 203

14. Operaciones con polinomios **204**
14.1. Suma 205
14.2. Producto 206
14.3. División de polinomios, el algoritmo de Euclides 207
14.3.1. Algoritmo de la división de los números enteros 208
14.3.2. Algoritmo de la división para los polinomios 209
14.4. Residuo cero 213
14.5. Raíces de polinomios 215
14.6. Ejercicios 219

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

15.Factorización de polinomios **220**
15.1. Polinomios de segundo grado 220
15.1.1. Caso $P(x) = bx^2 + cx$ 220
15.1.2. Usando productos notables 221
15.1.3. Caso $P(x) = x^2 + bx + c$ 223
15.1.4. Casos particulares de $P(x) = ax^2 + bx + c$ 223
15.1.5. Caso general de $P(x) = ax^2 + bx + c$ 223
15.2. Polinomios de orden superior, reducción a polinomios de orden 2225
15.2.1. Usando ley distributiva 225
15.2.2. Cambio de variable 227
15.3. Productos notables 229
15.4. División de polinomios 231
15.5. Ejercicios 236

16.Radicales **238**
16.1. Raíz de una raíz 239
16.2. Radicales y el producto 240
16.3. Radicales y el inverso 241
16.4. Radicales y fracciones 242
16.5. Radicales y exponentes como operación inversa 243
16.6. Exponentes fraccionarios 244
16.7. Radicales y la ley de la suma de potencias 245
16.8. Ejercicios 246

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Dedicatoria

Antes de la llegada de los españoles, en lo que hoy llamamos México existían culturas que desarrollaron diversas áreas de las matemáticas como la geometría, el álgebra, la teoría de números, por ejemplo. En la conquista y el período colonial mucho de ese desarrollo se perdió. En la historia de México, los pueblos indígenas han sido expuestos a diferentes movimientos armados como lo fueron la Independencia de México, la intervención norteamericana, la intervención francesa y la Revolución mexicana. Si México es independiente de las potencias extrajeras es en gran medida gracias a que los pueblos indígenas estuvieron involucrados de manera activa por la libertad de este país. No obstante, en la actualidad los pueblos indígenas son la clase más discriminada de México y por este motivo, más que regresar su mirada al desarrollo de las ciencias y las matemáticas, desde hace varios siglos la gran preocupación de los pueblos indígenas se centra en sobrevivir y evitar su desaparición.

Este libro está dedicado a los pueblos indígenas de México.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Introducción

Es complicado generar una definición de lo que son las matemáticas. Sin embargo, podemos decir que han sido una invención para entender y describir el mundo. Para sobrevivir, nuestros antepasados tuvieron que crear estrategias para cazar animales y después dividir el botín. En esas actividades, que fueron enseñadas de generación en generación, empezaron a surgir las matemáticas. En épocas de escasez y en territorios poco fértiles, el hombre primitivo tuvo que aprender a administrar sus víveres para sobrevivir. De esta manera, por sobrevivencia, aprendió a dividir porciones grandes en porciones pequeñas y consumirlas poco a poco. Cuando el hombre dejó de ser nómada se vio en la necesidad de construir casas y dividir territorios, por lo que empezó a desarrollar la geometría. Las matemáticas también surgieron cuando nuestros antepasados trataron de entender la belleza de una flor o cuando voltearon al cielo en una noche estrellada y quisieron entender los astros.

Las matemáticas fueron desarrolladas por Culturas de todo el mundo, en efecto mucho resultados de las matemáticas fueron conocidos por los pueblos antiguos que habitaron Babilonia, Egipto, la India, Grecia, Alejandría, China, México o Perú. Si bien la mayoría de los resultados de las matemáticas fueron obtenidos por personajes anónimos o por grupos de personas, existen mujeres y hombres que hicieron aportaciones relevantes. Dentro de las mujeres notables podemos mencionar a Hipatía de Alejandría, Sophie Germain y Emmy Noether, mientras que dentro del grupo de hombres destacan Euclides, Newton y Gauss. Así, las matemáticas son sobre todo una herencia de la humanidad que nos ayudan a entender el mundo.

Las matemáticas son parte de nuestra vida diaria. Por ejemplo, si cocinamos, las matemáticas están presentes cuando elegimos las porciones de los ingredientes de un platillo y el tiempo de cocción. Todos sabemos que si no ponemos las cantidades adecuadas de los ingredientes un platillo, éste nos puede quedar muy salado, dulce, desabrido, picoso e incluso imposible de comer. Además, si el tiempo de cocción no es el adecuado el platillo nos puede quedar crudo o quemado.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

No importa si se trata de una quesadilla o un platillo sofisticado, las matemáticas están presentes en todas las recetas. Las matemáticas también están presente en nuestro cuerpo, por ejemplo en nuestra respiración. Todos sabemos que respiramos a un ritmo particular cuando caminamos, corremos, dormimos o bailamos. Las matemáticas también están presentes cuando bailamos, cantamos, jugamos, caminamos, hacemos un negocio, nos enamoramos, por ejemplo. En síntesis, las matemáticas están presentes en todas nuestras actividades, aunque no nos demos cuenta. Por lo tanto, no importa que somos o que queramos ser, entre más conozcamos de las matemáticas mejor podremos entender y ejerce nuestra profesión u oficio.

Es una idea común que las matemáticas son difíciles de aprender y hay algo de cierto en esa afirmación. Pero también es verdad que la matemáticas son un conjunto de invenciones de seres humanos, por lo que sin la menor duda podemos afirmar que pueden ser aprendidas por cualquier persona. Aprender matemáticas es un proceso semejante a aprender a manejar una bicicleta. Nadie nació sabiendo andar en bicicleta, de la misma forma nadie nació sabiendo matemáticas. Cuando por primera vez intentamos manejar una bicicleta seguramente nos caímos y nos raspamos las rodillas y las manos. Posiblemente nos desesperábamos porque mientras los demás podían disfrutar de la bicicleta nosotros fallábamos en nuestros intentos y quizá pasábamos más tiempo en el suelo que sobre la bicicleta, pero después de varios intentos pudimos dominar la bicicleta y disfrutarla como los demás. De la misma forma, si se nos dificulta aprender las matemáticas, solo es cuestión de hacer más intentos hasta dominarlas. Cuando aprendimos a manejar una bicicleta, nos dimos cuenta que nos ayuda a ir otros lugares y ver las cosas de otra manera. Lo mismo sucede cuando aprendemos matemáticas, pues las matemáticas nos ayudan a viajar a otras áreas del conocimiento y a ver la vida de otra forma. Las matemáticas nos ayudan a entender el movimiento de los planetas, la estructura de la música, la estructura arquitectónica de las construcciones, las composiciones poéticas, entre muchas otras acciones de la vida. Además, las matemáticas nos ayudan en la mayoría de las profesiones y oficios.

La idea de estas notas es presentar las matemáticas mínimas que todas las personas deberían de saber. Este conocimiento mínimo coincide con el necesario para iniciar una carrera universitaria. En cada tema se buscó mostrar que las fórmulas tiene un origen y se pueden deducir de principios básicos. Se muestran los fundamentos que sustentan los resultados matemáticos y no solo se dan fórmulas. En la medida de lo posible, en cada tema se presentan ejercicios y aplicaciones. Además, se presenta la historia de los personajes que contribuyeron a desarrollar las ideas en cada tema.

Se buscó que en cada capítulo se abordaran pocos temas para que el lector adquiera el conocimiento poco a poco y no se sienta abrumado por la cantidad de material. Estas notas se han usado en el curso de **Taller de Matemáticas** para regularizar a alumnos que inician sus estudios universitarios en las carreras de Matemáticas Aplicadas, Ingeniería en Computación, Ingeniería Biológica, Biología Molecular y Tecnologías de la Información de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Cuajimalpa. Se espera que el presente escrito sea de utilidad para los alumnos que cursan **Taller de Matemática** en la universidad antes mencionada, o que desean tener una cultura elemental en matemáticas.

El autor es originario del pueblo Hñahñu del Valle del Mezquital del Estado de Hidalgo, los antepasado de este pueblo habitaron el territorio de México varios milenios antes de la era cristiana. En español al pueblo Hñahñu se le llama Otomí, que es una variante de la palabra náhuatl *otómitl*, que significa *quien camina con flechas* o *flechador de pájaros*. Es doctor en Física por la Universidad Nacional Autónoma de México y Profesor de Tiempo Completo de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Cuajimalpa. Ha realizado investigación en disciplinas como física cuántica, biofísica y finanzas. Sobre estos temas ha publicados diversos artículos en revistas internacionales. Hasta diciembre del 2021 perteneció al Sistema Nacional de Investigadores Nivel II de México.

Capítulo 1

Axiomas de los números reales y sus aplicaciones

La primera parte del curso se basa en entender los principios del álgebra, que se resumen en las propiedades de los números:

1.1. Suma o adición

Primero veamos las propiedades de la suma. La primera propiedad de la suma nos dice que, dados dos números, el orden de los sumando no altera la suma :

$$\boxed{a+b=b+a.} \tag{1.1}$$

A esta propiedad se le llama conmutativa.

Por ejemplo

$$3+2=5$$

y

$$2+3=5,$$

por lo tanto

$$3+2=2+3=5.$$

La segunda propiedad de la suma nos dice que si sumamos tres números, a, b y c, no importa que par de números sumamos primero, es decir,

$$\boxed{a+(b+c)=(a+b)+c.} \tag{1.2}$$

A esta propiedad se le llama asociativa.

Por ejemplo

$$2 + (4 + 5) = 2 + 9 = 11$$

y

$$(2 + 4) + 5 = 6 + 5 = 11,$$

entonces

$$2 + (4 + 5) = (2 + 4) + 5 = 11.$$

La tercera propiedad nos dice que existe un número que al sumarle un número a nos da como resultado el mismo número a, es decir

$$\boxed{a + 0 = a,} \tag{1.3}$$

A esta propiedad se le llama la existencia del neutro aditivo, que es el cero.

Por ejemplo

$$7 + 0 = 7.$$

La primera cultura que ocupó el cero fue la de los Mayas, por lo que el cero es una aportación mexicana a las matemáticas.

La cuarta propiedad de la suma, nos dice que dado un número a existe otro, $-a$, que lo aniquila, es decir tal que

$$\boxed{a + (-a) = 0.} \tag{1.4}$$

A esta propiedad se le llama la existencia del inverso aditivo.

En la mayoría de los caso, la expresión

$$a + (-a)$$

se escribe simplemente como

$$\boxed{a - a.}$$

Por lo que la suma del inverso de un número a con su inverso $-a$ se puede expresar de las siguientes formas

$$\boxed{\begin{aligned}(-a)+a&=0,\\ -a+a&=0,\\ a-a&=0.\end{aligned}}$$

Por ejemplo, la suma de 7 con su inverso -7 se puede expresar como

$$\begin{aligned}7+(-7)&=0,\\ (-7)+7&=0,\\ -7+7&=0,\\ 7-7&=0.\end{aligned}$$

1.2. Multiplicación o producto

Ahora veamos la propiedades de la multiplicación. Esta operación tiene propiedades muy parecidas a las de la suma. Tenemos la propiedad conmutativa

$$\boxed{a\cdot b=b\cdot a,} \tag{1.5}$$

que nos dice que el orden de los factores no altera el producto.

Por ejemplo

$$5\cdot 7=35$$

y

$$7\cdot 5=35,$$

entonces

$$5\cdot 7=7\cdot 5=35.$$

Otra propiedad es la llamada propiedad asociativa, la cual nos dice que para cualquier tres números a,b,c se cumple la igualdad

$$\boxed{a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.} \tag{1.6}$$

Por ejemplo

$$3 \cdot (7 \cdot 2) = 3 \cdot (14) = 42$$

y

$$(3 \cdot 7) \cdot 2 = 21 \cdot 2 = 42,$$

es decir

$$3 \cdot (7 \cdot 2) = (3 \cdot 7) \cdot 2 = 42.$$

Tenemos un neutro multiplicativo, que es el número 1, el cual satisface que para cualquier número a se tiene

$$\boxed{a \cdot 1 = a.} \tag{1.7}$$

Por ejemplo,

$$9 \cdot 1 = 9.$$

Tenemos otra propiedad que nos indica que si a no es el cero, entonces existe el inverso multiplicativo de a, que llamaremo a^{-1} el cual cumple

$$\boxed{a \cdot a^{-1} = 1.} \tag{1.8}$$

A esta propiedad se le llama existencia de inverso multiplicativo.

El inverso multiplicativo a^{-1} también se puede expresar como

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}.}$$

Así la propiedad $a \cdot a^{-1} = 1$ también se puede expresar como

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{a}\right) &= 1, \\ \left(\frac{1}{a}\right) a &= 1, \\ \frac{a}{a} &= 1. \end{aligned}$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5^{-1} &= 1, \\ 5\left(\frac{1}{5}\right) &= 1, \\ \left(\frac{1}{5}\right)5 &= 1, \\ \frac{5}{5} &= 1. \end{aligned}$$

1.2.1. Suma y producto

Además tenemos una propiedad que relaciona la suma con el producto de la forma

$$\boxed{(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.} \tag{1.9}$$

A esta propiedad se le llama distributiva.

Por ejemplo

$$(5+3)\cdot 7 = 8\cdot 7 = 56$$

y

$$5\cdot 7 + 3\cdot 7 = 35 + 21 = 56,$$

de donde

$$(5+3)\cdot 7 = 5\cdot 7 + 3\cdot 7 = 56.$$

Note que ocupando la propiedad conmutativa de la suma (1.1) la propiedad distributiva se puede escribir como

$$(a+b)\cdot c = c\cdot(a+b) = a\cdot c + b\cdot c = c\cdot a + c\cdot b,$$

es decir

$$\boxed{c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.} \tag{1.10}$$

Por ejemplo

$$3\cdot(2+9) = 3\cdot 11 = 33$$

y

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 6 + 27 = 33,$$

de donde

$$3 \cdot (2 + 9) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 33.$$

1.3. Axiomas

El conjunto de números que se ocupan en diversas aplicaciones de la vida diaria se llaman números reales. Todas las propiedades de los números reales enlistadas en las ecuaciones del (1.1) al (1.9) surgieron de aplicaciones de la vida diaria. Esas propiedades, y otras, fueron descubiertas de manera independiente por diversas culturas en diferentes partes del mundo y en diferentes momentos históricos. En efecto, hay evidencia del manejo de los números y sus propiedades en culturas antiguas de los egipcios, árabes, mayas, chinos, indios y griegos. Cada una de esas culturas expresó los mismos resultados matemáticos con símbolos de su propio idioma

Buscando tener un lenguaje universal en las matemáticas, se han creado símbolos que tengan el mismo significado en todos los idiomas y con ellos escribir los resultados de las matemáticas. La idea es que cualquier persona entienda los resultados de las matemáticas, sin importar su idioma. Por ejemplo, el conjunto de los números reales se denotan con el símbolo $\mathbb{R}$, la frase *para todo* se denota con el símbolo $\forall$, la frase *pertenece* se denota con $\in$, mientras que la frase *existe* se denota con el símbolo $\exists$.

Por ejemplo, sabemos que al sumar dos números reales nos da otro número real, esta propiedad se llama **cerradura de la suma** y se puede escribir como

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a + b \in \mathbb{R}.}$$

También sabemos que al multiplicar dos números reales nos da otro número real, que se puede escribir como

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b \in \mathbb{R}.}$$

A esta propiedad se le llama **cerradura del producto**.

Usando los símbolos $\mathbb{R}, \forall, \in$ y $\exists$ las propiedades de los números reales (1.1)-(1.9) se pueden escribir como

1) **Conmutatividad de la suma**

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a + b = b + a,} \tag{1.11}$$

2) **Asociatividad de la suma**

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a + b) + c = a + (b + c),} \tag{1.12}$$

3) **Existencia del neutro aditivo**

$$\boxed{\exists \quad 0 \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \qquad 0 + a = a,} \tag{1.13}$$

4) **Existencia del inverso aditivo**

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \exists - a \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad a + (-a) = 0,} \tag{1.14}$$

5) **Conmutatividad del producto**

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b = b \cdot a,} \tag{1.15}$$

6) **Asociatividad del producto**

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),} \tag{1.16}$$

7) **Existencia del neutro multiplicativo**

$$\boxed{\exists \quad 1 \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \qquad 1 \cdot a = a,} \tag{1.17}$$

8) **Existencia del inverso multiplicativo**

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad a \cdot a^{-1} = 1,} \tag{1.18}$$

9) **Propiedad distributiva**

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.} \tag{1.19}$$

A estas propiedades se les llama Axiomas, pues de ellas se pueden deducir el resto de las propiedades de los números reales; dichas propiedades son fundamentales para entender los números reales y diversos resultados de las matemáticas.

Identificar las propiedades fundamentales de los números reales y escribir éstas en un lenguaje universal fue un gran logro para las matemáticas, en el que contribuyeron diversos matemáticos y filósofos, uno de los más notables fue Giuseppe Peano.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Giuseppe Peano (1858-1932)

Fue un matemático italiano que realizó contribuciones relevantes a los fundamentos de las matemáticas. Hijo de granjeros, de niño tenía que caminar cinco kilómetros al día para asistir a la escuela. Realizó sus estudios en la Universidad de Turín y se interesó en construir un lenguaje escrito con carácter universal para las matemáticas, con el fin de que todos los matemáticos de mundo lo pudieran entender y usar sin importar que hablaran diferentes idiomas. En este sentido inventó su propia notación, la cual actualmente se sigue sigue usando en la lógica. También se interesó en dar fundamentos sólidos a las matemáticas, por lo que incursionó en la lógica y en la teoría de conjuntos. Es considerado uno de los padres de la Lógica Matemática. Siendo muy joven inició el proyecto llamado *Formulario*, una obra en la cual buscó tener todas las demostraciones y fórmulas matemáticas conocidas hasta su tiempo.También realizó contribuciones al cálculo y a la geometría. Debido a que no le gustaba la calidad de las impresiones de los libros de matemáticas, fundó su propia imprenta. Peano estaba interesado en la enseñanza de las matemáticas por lo que escribió diversos libros que influyeron a estudiantes italianos de todos los niveles educativos. Murió de un ataque al corazón en 1932.

1.4. El cero, un número especial

1.4.1. El cero es único

El cero es un número muy especial y es importante en diferentes áreas de las matemáticas. De hecho, el cero es único, es decir no hay otro número que tenga sus propiedades.

Como vimos anteriormente la principal propiedad del cero es que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad a + 0 = a.$$

Supongamos que existe otro número real $\tilde{0}$ que tiene la misma propiedad que el cero, es decir que cumple

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + \tilde{0} = a.$$

En particular, como el cero es un número real, se debe cumplir

$$0 + \tilde{0} = 0,$$

además como $\tilde{0}$ es un número real también se debe cumplir

$$\tilde{0} + 0 = \tilde{0}.$$

Además, ocupando que la suma de números reales es conmutativa se cumple

$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0},$$

de donde

$$0 = \tilde{0}.$$

Así, el único número real que tiene las propiedades del cero es el cero.

1.4.2. Multiplicación por cero

Hay un resultado muy conocido de los números que no está en la lista de los axiomas. Este propiedad nos indica que para cualquier número a se cumple

$$\boxed{a \cdot 0 = 0.}$$

Dicha propiedad no está enlistada porque la podemos deducir.

En efecto, sabemos que $1 - 1 = 0$ y $a - a = 0$. Esto lo sabemos porque 1 y a son números y tiene inverso aditivo de acuerdo a la propiedad (1.14). Entonces, ocupando la propiedad distributiva (1.19)

$$0 \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 1 \cdot a - 1 \cdot a = a - a = 0.$$

Por lo tanto,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0. \tag{1.20}$$

1.4.3. División por cero, una operación prohibida

Algo notable sobre los inversos multiplicativos es que el cero no tiene inverso multiplicativo. Podríamos estar tentados a suponer que

$$\frac{0}{0} = 1.$$

Pero esto puede sonar absurdo. Es como decir que si que tenemos cero manzanas y cero personas, entonces les toca de a una manzana por persona.

Veamos que es absurdo suponer que

$$0 \cdot 0^{-1} = \frac{0}{0} = 1.$$

Sabemos que

$$5 \cdot 0 = 0,$$

entonces, considerando que es cierto que $0 \cdot 0^{-1} = 1$, se encuentra

$$(5 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 1,$$

es decir

$$(5 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 1.$$

Ahora, ocupando la ley asociativa de la multiplicación (1.16), se tiene

$$1 = (5 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 5 \cdot (0 \cdot 0^{-1}) = 5 \cdot 1 = 5,$$

es decir,

$$5 = 1,$$

lo cual es absurdo. Note que pasa lo mismo si en lugar de tomar el 5 tomamos cualquier otro número.

Además, note que ocupando el resultado (1.20), si 0^{-1} es un número entonces

$$0 \cdot 0^{-1} = 0.$$

Esta resultado también está en contradicción con el hecho de suponer $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Así, no podemos suponer que existe el inverso multiplicativo del cero, $0^{-1} = \frac{1}{0}$, ni que es un número.

¿Qué es 0^{-1}? Es una buena pregunta que resolveremos más adelante.

1.4.4. El cero como producto de dos números

Ya mostramos que para cualquier número, a, se cumple $a \cdot 0 = 0$. Ahora veremos que si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Si A o B son cero, usando el resultado (1.20) es claro que se cumple que la igualdad $A \cdot B = 0$.

Ahora, supongamos que $A \cdot B = 0$ y $A \neq 0$. Entonces por el axioma del inverso multiplicativo A tiene inverso multiplicativo, es decir existe un número A^{-1} tal que $A^{-1}A = 1$. De donde

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot 0 = 0,$$

además, ocupando la propiedad asociativa de la multiplicación se tienen

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A)B = 1 \cdot B = B = 0.$$

Por lo tanto, si $A \cdot B = 0$ y $A \neq 0$, debe ocurrir que $B = 0$.

Ahora supongamos que

$$A \cdot B = 0 \quad \text{y} \quad B \neq 0,$$

esto indica que B tiene inverso multiplicativo B^{-1}. De donde

$$(A \cdot B) \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0,$$

adicionalmente usando la propiedad asociativa de la multiplicación se tienen

$$A \cdot (B \cdot B^{-1}) = A \cdot 1 = A = 0.$$

Por lo tanto, si $A \cdot B = 0$ y $B \neq 0$, debe ocurrir que $A = 0$.

Esto quiere decir que se cumple

$$\boxed{A \cdot B = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0,}$$

el símbolo

$$\Longrightarrow$$

significa *entonces* o *implica*.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

1.5. El inverso de un número es único

Supongamos que a es un número diferente de cero, de acuerdo a los axiomas de los números reales, existe un número real a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1. \tag{1.21}$$

Mostraremos que a^{-1} es el único número real que cumple la propiedad (1.21).

Supongamos que existe otro número real $\tilde{a} \neq a^{-1}$ que cumple

$$a \cdot \tilde{a} = 1. \tag{1.22}$$

entonces, multiplicando esta ecuación por a^{-1} se obtiene

$$a^{-1}\left(a \cdot \tilde{a}\right) = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1},$$

además ocupando la asociatividad del producto se obtiene

$$\left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot \tilde{a} = a^{-1},$$

de donde

$$1 \cdot \tilde{a} = a^{-1},$$

es decir

$$\tilde{a} = a^{-1}.$$

Note que esta conclusión es un absurdo, pues supusimos que $\tilde{a}$ es diferente de a. Por lo que no existe $\tilde{a}$ diferente de a que cumpla (1.22).

1.5.1. El inverso de un producto de dos número reales

Supongamos que tenemos dos números diferentes de cero

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0.$$

Debido a que son números son diferentes de cero, existen sus inversos multiplicativos. Es decir, deben existir números reales

$$a^{-1}, \qquad b^{-1},$$

tales que

$$a \cdot a^{-1} = 1, \qquad b \cdot b^{-1} = 1.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora veamos qué número es

$$(ab)^{-1}.$$

Note que este número debe cumplir que

$$(a \cdot b)(ab)^{-1} = 1. \tag{1.23}$$

Además, usando las leyes asociativas y conmutativas del producto se encuentra

$$(a \cdot b)\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) = \left(a \cdot a^{-1}\right)\left(b \cdot b^{-1}\right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

de donde,

$$1 = (a \cdot b)\left(a^{-1}b^{-1}\right).$$

Usando esta igualdad, la propiedad asociativa del producto y la ecuación (1.23), se encuentra

$$\begin{aligned}\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) &= \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot 1 = \left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right)\left[(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1}\right] \\ &= \left[\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot (a \cdot b)\right](a \cdot b)^{-1} = 1 \cdot (a \cdot b)^{-1} \\ &= (a \cdot b)^{-1},\end{aligned}$$

así

$$\boxed{\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) = (a \cdot b)^{-1},}$$

que se puede escribir como

$$\boxed{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a \cdot b}.}$$

Por ejemplo,

$$(2)^{-1}(9)^{-1} = (2 \cdot 9)^{-1} = (18)^{-1} = \frac{1}{18},$$

este resultado también se puede escribir como

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{18}.$$

1.6. El 1 y el -1, dos números especiales

Además del cero, el 1 y -1 también son números especiales e importantes. Las propiedades de estos dos número nos ayudan a resolver diversos problemas aplicados.

La primera propiedad notable de -1 es que este es el inverso aditivo de 1, note que también se puede decir que 1 es el inverso aditivo de -1. En ambos casos se cumple

$$1 + (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Usando esta identidad, se puede mostrar que para toda $a \in \mathbb{R}$ se encuentra

$$\boxed{-1 \cdot a = -a.} \tag{1.24}$$

En efecto, observe que para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

es decir

$$a + (-1) \cdot a = 0,$$

por lo que sumando en ambos lados de la ecuación el términos $-a$ se llega a

$$(-a) + a + (-1) \cdot a = (-a) + 0 = -a,$$

es decir

$$0 + (-1) \cdot a = -a,$$

de donde

$$(-1) \cdot a = -a.$$

1.6.1. Leyes de los signos

Las llamadas leyes de los signos es básicamente la tabla de multiplicar 1 y -1, esto dos números se pueden expresar de la forma

$$1 = (+1) = (+), \qquad -1 = (-).$$

Ahora, es claro que

$$1 \cdot 1 = (+1) \cdot (+1) = 1,$$

que se suele escribir como

$$\boxed{(+)(+) = (+).}$$

También es claro que

$$(1) \cdot (-1) = (-1),$$

que es equivalente a la expresión

$$(+1) \cdot (-1) = (-1)$$

una forma alternativa de escribir esta igualdad es

$$\boxed{(+)(-) = (-).}$$

Además, usando la propiedad conmutativa se tiene

$$(-1) \cdot (1) = (-1)(+1) = (-1),$$

esta expresión también la podemos escribir como

$$\boxed{(-)(+) = (-).}$$

Antes de continuar veamos el producto

$$(-1) \cdot (-1),$$

primero notemos que

$$\begin{aligned} (-1) + (-1) \cdot (-1) &= (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (1 + (-1)) \\ &= (-1) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

es decir

$$-1+(-1)(-1)=0.$$

Ocupando esta última expresión y la ley asociativa de la suma se encuentra

$$\begin{aligned} 1 &= 1+0=1+[-1+(-1)(-1)]=(1-1)+(-1)(-1) \\ &= 0+(-1)(-1)=(-1)(-1), \end{aligned}$$

de donde

$$(-1)(-1)=1,$$

que se puede expresar como

$$\boxed{(-)(-)=(+).}$$

Así, las leyes de los signos son:

$$\begin{aligned} (+)(+) &= (+), \qquad (-)(+)=(-), \\ (+)(-) &= (-), \qquad (-)(-)=(+). \end{aligned}$$

Estas reglas se pueden recordar de forma más simple si relacionan con cosas de la vida real como la amistad. Por ejemplo, sabemos que al amigo de un amigo es nuestro amigo, eso equivale a la regla

$$(+)(+)=(+).$$

También sabemos que al amigo de un enemigo podría ser nuestro enemigo, eso equivale a la regla

$$(+)(-)=(-).$$

Además, sabemos que el enemigo de un amigo podría ser nuestro enemigo, eso equivale a la regla

$$(-)(+)=(-).$$

De forma similar, sabemos que el enemigo de un enemigo podría ser nuestro amigo, eso equivale a la regla

$$(-)(-)=(+).$$

Esta similitud se muestra en las siguientes tablas

Signos	+	−
+	+	−
−	−	+

Amistad	Amigo	Enemigo
Amigo	Amigo	Enemigo
Enemigo	Enemigo	Amigo

1.6.2. El inverso multiplicativo de -1

Sabemos que dado un número a diferentes de cero existe su inverso multiplicativo a^{-1} tal que

$$\boxed{a \cdot a^{-1} = \frac{a}{a}.}$$

Por los axiomas de los números reales sabemos que

$$1 \cdot (1)^{-1} = 1.$$

Así el inverso multiplicativo de 1 es el mismo 1, es decir

$$1 = (1)^{-1} = \frac{1}{1}.$$

Además, por las leyes de los signos tenemos que

$$(-1)(-1) = +1 = 1,$$

de donde el inverso multiplicativo de -1 es el mismo -1, es decir

$$-1 = (-1)^{-1} = \frac{1}{-1}.$$

1.6.3. El signo en una fracción

Ahora, usando que el inverso multiplicativo de -1 es el mismo -1, probaremos que en una fracción negativa no importa en que parte de la fracción esté el signo. En concreto probaremos la identidad

$$\boxed{-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.} \tag{1.25}$$

Primero notemos que

$$\frac{-a}{b} = (-a) \cdot b^{-1} = ((-1) \cdot a) \cdot b^{-1} = (-1)(a \cdot b^{-1}) = -\left(\frac{a}{b}\right),$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{-b} &= a \cdot (-b)^{-1} = a \cdot ((-1) \cdot b)^{-1} = a \cdot \left((-1)^{-1} \cdot b^{-1}\right) \\ &= a \cdot \left((-1) \cdot b^{-1}\right) = a \cdot (-1) \cdot b^{-1} \ = (-1)(a \cdot b^{-1}) \\ &= -(a \cdot b^{-1}) = -\left(\frac{a}{b}\right), \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right).$$

Así la propiedad (1.25) es correcta.

Por ejemplo,

$$\frac{-2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},$$

de la misma forma

$$\frac{2}{-6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

1.7. Operaciones con fracciones

Ahora veremos algunas operaciones con fracciones. Estas operaciones no son diferentes a las usuales, pues dado un número $a \neq 0$, su inverso multiplicativo es

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a},}$$

el cual es otro número. La principal propiedad de a^{-1} es que

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Algunas veces en lugar de escribir $b \cdot a^{-1}$ escribiremos

$$\boxed{b \cdot a^{-1} = b\frac{1}{a} = \frac{1}{a}b = \frac{b}{a},}$$

esto es convención y no debe causar confusión.

1.7.1. Multiplicación de quebrados

Ahora supongamos que tenemos las fracciones

$$\frac{a}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} \qquad \text{con} \qquad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

y queremos multiplicarlas. Esta operación se puede hacer con las mismas leyes de los números que hemos visto.

Primero notemos que usando la ley asociativa y conmutativa para el producto se obtiene

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \left(ab^{-1}\right)\left(c \cdot d^{-1}\right) = (a \cdot c)\left(b^{-1}d^{-1}\right),$$

además considerando la identidad $(b^{-1}d^{-1}) = (b \cdot d)^{-1}$ se encuentra

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = (a \cdot c)\left(b^{-1}d^{-1}\right) = (a \cdot c)(b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{bd},$$

por lo tanto

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.}$$

Por ejemplo

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14}.$$

Como otro ejemplo podemos ver que

$$\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{(-3) \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{-27}{20} = -\frac{27}{20}.$$

1.7.2. El inverso del inverso

Ahora nos preguntamos qué es

$$\frac{1}{\frac{1}{b}}.$$

Considerando las definiciones tenemos

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{b^{-1}} = \left(b^{-1}\right)^{-1},$$

es decir

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \left(b^{-1}\right)^{-1},$$

es el inverso del inverso de b. Por lo que, $(b^{-1})^{-1}$ es un número que al multiplicarlo por b^{-1} no da uno, es decir

$$b^{-1} \cdot \left(b^{-1}\right)^{-1} = 1.$$

Usando esta última ecuación y la ley asociativa del producto tenemos

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 = b \cdot \left(b^{-1} \cdot \left(b^{-1}\right)^{-1}\right) = \left(b \cdot b^{-1}\right)\left(b^{-1}\right)^{-1} \\ &= 1 \cdot \left(b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{b = \left(b^{-1}\right)^{-1}.}$$

Esta expresión también se puede escribir como

$$\boxed{\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)} = b.}$$

Por ejemplo

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

También podemos ver que

$$\frac{1}{\frac{1}{-7}} = -7.$$

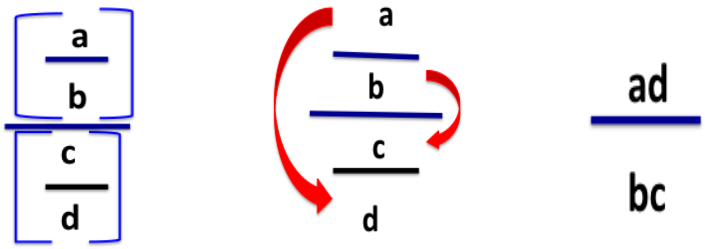


Figura 1.1: *Ley del sandwich.*

1.7.3. División de fracciones, la *ley del sandwich*

Para hacer la división de dos fracciones se debe hacer la operación

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}}$$

debemos ocupar el inverso pues

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} &= \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c\cdot d^{-1}\right)^{-1}\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c^{-1}\cdot\left(d^{-1}\right)^{-1}\right)\\ &= \left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c^{-1}\cdot d\right),\end{aligned}$$

así

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c^{-1}\cdot d\right).$$

Note que ocupando la ley asociativa del producto se tiene

$$\left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c^{-1}\cdot d\right) = (a\cdot d)\left(c^{-1}\cdot b^{-1}\right) = (a\cdot d)(c\cdot b)^{-1},$$

es decir

$$\left(a\cdot b^{-1}\right)\left(c^{-1}\cdot d\right) = \frac{a\cdot d}{c\cdot b}.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a\cdot d}{c\cdot b}.}$$

Esta expresión se conoce coloquialmente como la *ley del sandwich*. En la Figura 1.1 se ilustra esta operación

Por ejemplo,

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}.$$

Como otro ejemplo consideremos

$$\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{9}} = \frac{(-3) \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{-3 \cdot 9}{20} = \frac{-27}{20} = -\frac{27}{20}.$$

También veamos el ejemplo

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{-11}{6}} = \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot (-11)} = \frac{24}{-7 \cdot 11} = \frac{24}{-77} = -\frac{24}{77}.$$

1.7.4. Suma de fracciones, caso particular

Supongamos que queremos hacer la suma de las fracciones de la forma particular

$$\frac{a}{c}, \qquad \frac{b}{c}, \qquad c \neq 0.$$

Para realizar esta operación podemos ocupar la ley de distributiva, en efecto

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} = (a+b) \cdot c^{-1} = (a+b)\frac{1}{c} = \frac{a+b}{c},$$

es decir

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}.$$

También podemos ver que

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{9} = \frac{4-11}{9} = \frac{-7}{9} = -\frac{7}{9}.$$

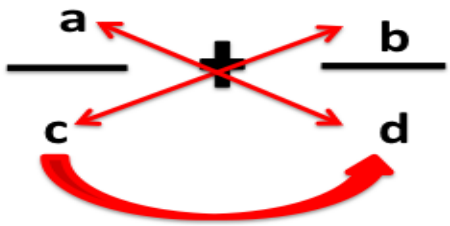


Figura 1.2: *Ley de la sonrisa.*

1.7.5. Caso general de suma de fracciones, *la ley de la sonrisa*

Ahora veremos como se suman fracciones, esto equivale a hacer la operación

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}.$$

Primero notemos que

$$1=\frac{d}{d} \qquad \text{y} \qquad 1=\frac{b}{b},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\cdot 1+\frac{c}{d}\cdot 1\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}+\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}\\ &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}\\ &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}\\ &= \frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}.}$$

A esta ley se conoce coloquialmente como *la ley de la sonrisa*. En la Figura 1.2 se ilustra esta operación

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Por ejemplo

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+4\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}.$$

También podemos ver que

$$\frac{4}{3}-\frac{8}{5}=\frac{4\cdot 5-3\cdot 8}{3\cdot 5}=\frac{20-24}{15}=\frac{-4}{15}=-\frac{4}{15}.$$

Como otro ejemplo consideremos

$$\frac{-7}{9}+\frac{11}{6}=\frac{(-7)\cdot 6+9\cdot 11}{9\cdot 6}=\frac{-42+99}{54}=\frac{57}{54}.$$

1.8. La suma de los primero cien números

Para no trabajar, algunos maestros en lugar de dar clase suelen dejar tareas aburridas y largas para poder descansar. Así era el maestro de matemáticas del niño Gauss. Les dejo sumar los primeros 100 números, esperando que se tardaran varias horas, incluso días. Para la sorpresa del maestro, el niño Gauss en pocos minutos dijo que el resultado es 5050. ¿Cómo lo hizo el niño Gauss?

La suma de los primeros 100 números es

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+\cdots+97+98+99+100=? \qquad (1.26)$$

Primero hay que notar que

$$\begin{aligned}
99+1 &= 100,\\
98+2 &= 100,\\
97+3 &= 100,\\
96+4 &= 100,\\
\vdots &= \vdots\\
52+48 &= 100,\\
51+49 &= 100.
\end{aligned}$$

Se puede observar que en la suma (1.26) tenemos 49 pares de números que al sumarlos nos como resultado 100. Así, al arreglar los términos, la suma de los primeros 100 números (1.26) da

$$\begin{aligned}
&1+2+3\cdots+97+98+99+100\\
&=(1+99)+(2+98)+(3+97)+\cdots+(49+51)+50+100\\
&=49\cdot 100+150=5050.
\end{aligned}$$

Carl F. Gauss (1777-1855)

Fue un matemático alemán que contribuyó enormemente a las matemáticas. Sus padres fueron un par de campesinos alemanes que no sabían leer ni escribir. Cuando apenas era un niño un profesor rural le ayudó a mejorar su alemán y descubrió su talento para las matemáticas. Dicho profesor lo recomendó para que pudiera continuar sus estudios. Gauss realizó sus estudios de matemáticas en la universidad de Götingen, en donde llegó a ser profesor. Como matemático, Gauss descubrió la llamada distribución gaussiana que se usa para modelar fenómenos naturales, sociales, económicos, financieros, etc.; también descubrió la llamada ley de Gauss que se usa para describir fenómenos eléctricos y gravitacionales; su ley de mínimos cuadrados tiene diversas aplicaciones en diferentes disciplinas. Gauss murió de un ataque al corazón en 1855. Gauss fue hijo de dos humildes campesinos alemanes, pero logró destacar gracias a su talento e incansable trabajo, por lo que hoy se le conoce como el Príncipe de las Matemáticas. El reino de Gauss no fue de este mundo, si no el de los números, la geometría y las ecuaciones. Como hijo de campesinos sembró y cultivó resultados importantes en diversos campo de las matemáticas.

1.9. Sucesión de Fibonacci

Las matemáticas son importantes porque nos ayudan a describir diferentes fenómenos. Por ejemplo, supongamos que tenemos una pareja de conejos recién nacidos, pero éstos no se pueden reproducir hasta que tengan dos meses de edad. Así, podemos suponer que cada mes, a partir del segundo, nace una nueva pareja de conejos. Si cada pareja de conejos se reproduce de la misma manera que la pareja inicial ¿cuántas parejas habrá al principio de cada mes?

En el primer mes tenemos una sola pareja, que no puede reproducirse $a_1 = 1$. En el segundo mes tenemos la misma pareja, pero ya puede reproducirse $a_2 = \mathbf{1}$. Para el tercer mes tendremos dos parejas, una que se puede reproducir $\mathbf{1}$ y otra recién nacida 1, es decir tendremos $a_3 = 2 = \mathbf{1} + 1$. Para el cuarto mes tenemos $\mathbf{2}$ parejas que se pueden reproducir más una recién nacida, es decir tenemos $a_4 = 3 = \mathbf{2} + 1$. Para el quinto mes tenemos $\mathbf{3}$ parejas que se pueden reproducir más 2 recién nacidas, es decir $a_5 = 5 = \mathbf{3} + 2$. Para el

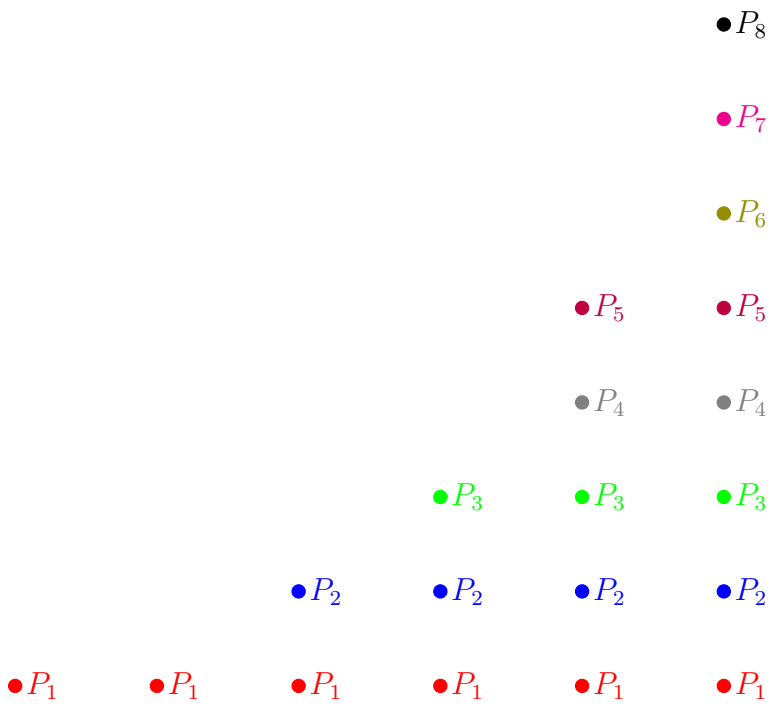


Figura 1.3: Reproducción de conejos y sucesión de Fibonacci. P_1 es la pareja inicial. P_2 es la primera paraja de hijos de P_1. P_3 es la segunda pareja de hijos de P_1. P_4 es la tercera pareja de hijos de P_1 y P_5 es la primera pareja de hijos de P_2. P_6 es la cuarta pareja de hijos de P_1 y P_7 es la segunda pareja de hijos de P_2 y P_8 es la primera pareja de hijos de P_3.

sexto mes tenemos **5** parejas que se pueden reproducir y 3 tres recién nacidad, es decir $a_6 = 8 = \mathbf{5} + 3$. Para el séptimo mes tenemos **8** parejas que se pueden reproducir y 5 recién nacidas, es decir $a_7 = 13 = \mathbf{8} + 5$. Para el octavo mes tenemos **13** parejas que se pueden reproducir más 8 recién nacidas, $a_8 = 21 = \mathbf{13} + 8$. Para el noveno més tenemos **21** que se pueden reproducir y 13 recién nacidas, es decir tenemos $a_9 = 34 = \mathbf{21} + 13$. Para el decimo mes tenemos **34** parejas que se pueden reproducir más 21 recién nacidas, en total tenemos $a_{10} = 55 = \mathbf{34} + 21$. Para el onceavo mes tenemos **55** parejas que se pueden reproducir más 34 recién nacidas, en total tenemos $a_{11} = 89 = \mathbf{55} + 34$. Para el doceavo mes tenemos **89** parejas que se pueden reproducir más 55 recién nacidas, en total tenemos $a_{12} = 144 = \mathbf{89} + 55$.

En la Figura 1.3 se ilustra la reproducción de conejos.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Note que

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, a_2 = 1, \\
a_3 &= 2 = a_2 + a_1, \\
a_4 &= 3 = a_3 + a_2, \\
a_5 &= 5 = a_4 + a_3, \\
a_6 &= 8 = a_5 + a_4, \\
a_7 &= 13 = a_6 + a_5, \\
a_8 &= 21 = a_7 + a_6, \\
a_9 &= 34 = a_8 + a_7, \\
a_{10} &= 55 = a_9 + a_8, \\
a_{11} &= 89 = a_{10} + a_9, \\
a_{12} &= 144 = a_{11} + a_{10}.
\end{aligned}$$

En general, para ver cuántas parejas de conejo hay en el mes $n+1$ se tiene

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}. \tag{1.27}$$

Esta es la llamada sucesión de Fibonacci y aparece de manera recurrente en la naturaleza.

Leonardo de Pisa (1170-1250)

También conocido como Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Filus Bonacci o simplemente Fibonacci. Fue hijo del diplomático Guglielmo de Pisa, a quien apodaban Bonacci por ser bien in-tencionado. Leonardo de Pisa heredó el sobrenombre como Fibonacci, debido a que *filus Bonacci* significa hijo de Bonacci. Nació en Italia en plena Edad Media, época en la que Europa estaba sumergida una profunda etapa de fanatismo religioso e ignorancia. Sin embargo, gracias al trabajo de diplomático de su padre, fue educado en un puerto del norte de África y pudo realizar varios viajes. Por esa razón aprendió las matemáticas desarrolladas en los países árabes, la India e incluso la desarrollada en China. En el año 1200 regresó a Italia y empezó a escribir diferentes libros de las matemáticas que había aprendido y también sobre algunas de sus aportaciones. Realizó diversas contribuciones en teoría de números, geometría, ecuaciones lineales y ecuaciones de tercer grado, pero es recordado por la sucesión que lleva su sobrenombre. Cabe señalar que dicha sucesión ya era conocida en la India por el año 200 después de Cristo y

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es atribuida al matemático indio Pingala. La sucesión de Fibonacci tiene aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas, computación, teoría de juegos y diversas ciencias, tales como física, biología y química.

1.10. Ejercicios

1.- Resuelve la siguiente operación:

$$\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{7}{9}} =?$$

2.- Resuelve la siguiente operación:

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} =?$$

3.- Resuelve la siguiente operación:

$$\frac{\frac{3}{5}}{4} + \frac{3}{2} =?$$

4.- Resuelve la siguiente operación:

$$\frac{\frac{5}{3}}{7} - \frac{3}{2^{-1}} =?$$

5.- ¿Qué es lo que está mal en la siguiente deducción?

$$\begin{aligned} 0 \cdot 5 &= 0, \\ \frac{0 \cdot 5}{0} &= \frac{0}{0} = 1, \\ \frac{\not{0} \cdot 5}{\not{0}} &= 1, \\ 1 \cdot 5 &= 1, \\ 5 &= 1. \end{aligned}$$

6.- Usando el argumento de Gauss, obtener la suma de los primeros 181 números.

7.- Usando el argumento de Gauss, muestre que la suma de los primeros n números es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8.- Suponiendo que la sucesión de Fibonacci es correcta, ¿Cuántas parejas de conejos se tendrían a los 18 meses.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 2

Ecuaciones lineales

Diversas actividades de la vida diaria como el comercio, la medición de terrenos, la repartición de ganancias, la medición del tiempo, etc. están relacionadas con la resolución de ecuaciones, en particular ecuaciones lineales.

En este capítulo veremos como resolver una ecuación lineal y un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2.1. Ecuación lineal de una variable

Una ecuación lineal de una variable tiene la forma

$$\boxed{ax + b = 0,} \tag{2.1}$$

donde se supone que a y b son constantes conocidas, con $a \neq 0$. En este problema debemos determinar el valor de x para que se cumpla la ecuación (2.1).

Sumando de ambos lados de la ecuación (2.1) el inverso aditivo de b, se obtiene

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b),$$

es decir

$$ax + 0 = -b,$$

así

$$ax = -b. \tag{2.2}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Además, multiplicando en ambos lados de la ecuación (2.2) por el inverso multiplicativo de a, se obtiene

$$a^{-1}ax = -a^{-1}b,$$

de donde

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}.}$$

Esta es la solución de la ecuación (2.1).

Por ejemplo consideremos la ecuación

$$3x + 5 = 0, \tag{2.3}$$

en este caso tenemos

$$3x = -5,$$

por lo que

$$x = -\frac{5}{3}. \tag{2.4}$$

Para comprobar que hemos obtenido la solución correcta debemos sustituir la solución (2.4) en la ecuación (2.3), en efecto encontramos que

$$3\left(\frac{-5}{3}\right) + 5 = \frac{(3)\cdot(-5)}{3} + 5 = -5 + 5 = 0.$$

Por lo tanto, la solución obtenida es correcta.

Como otro ejemplo veamos la ecuación

$$\frac{5}{2}x + 6 = 0, \tag{2.5}$$

en este caso tenemos

$$\frac{5}{2}x = -6,$$

por lo que

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) x = -2 \cdot 6 = -12,$$

de donde

$$5x = -12,$$

entonces

$$x = -\frac{12}{5}. \tag{2.6}$$

Para comprobar que la solución obtenida es correcta, debemos sustituir la solución (2.6) en la ecuación (2.5), que nos da

$$\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{12}{5}\right) + 6 = -\frac{(5)\cdot(12)}{2\cdot 5} + 6 = -\frac{60}{10} + 60 = 6 - 6 = 0.$$

Así, la solución obtenida es correcta.

2.2. Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 tiene la forma

$$\boxed{\begin{aligned} ax + by &= c, \\ dx + ey &= f, \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(2.7) \\ &(2.8) \end{aligned}$$

donde se supone que a, b, c, d, e y f son constantes conocidas.

Existen diversos métodos para resolver este sistema de ecuaciones, todos son igualmente eficientes. En esta sección veremos tres de estos métodos.

2.2.1. Solución por sustitución

En este método despejamos una variable de una ecuación y la sustituimos en la ecuación restante. Por ejemplo, sumando el inverso aditivo de by a la ecuación (2.7) se obtiene

$$ax + by - by = c - by,$$

es decir

$$ax = c - by.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora, multiplicando por ambos lados de esta última ecuación por inverso aditivo de a, obtenemos

$$a^{-1}ax = a^{-1}(c - by),$$

es decir

$$x = \frac{c - by}{a}. \tag{2.9}$$

Ahora podemos sustituir el valor de x en la ecuación (2.8). Haciendo este procedimiento la ecuación (2.8) toma la forma

$$d\left(\frac{c - by}{a}\right) + ey = f. \ / \tag{2.10}$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dc - dby + aey}{a} = f,$$

además multiplicando a esta ecuación por ambos por a, llegamos a

$$dc + y(ae - db) = af.$$

Esta última ecuación es una ecuación lineal para la variable y. Usando el procedimiento para resolver ecuaciones lineales de una variable, llegamos a

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}. \tag{2.11}$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuación (2.9), encontramos

$$x = \frac{c - b\left(\frac{af-dc}{ae-db}\right)}{a}.$$

Ocupando las reglas para sumar con fracciones, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{c - b\left(\frac{af-dc}{ae-db}\right)}{a} = \frac{c(ae - db) - b(af - dc)))}{a(ae - db)} \\ &= \frac{cae - cdb - baf + bdc}{a(ae - db)} \\ &= \frac{a(ce - bf)}{a(ae - db)} \\ &= \frac{(ce - bf)}{(ae - db)}, \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$x = \frac{(ce - bf)}{(ae - db)}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (2.7)-(2.8) tiene como solución los valores

$$\boxed{x = \frac{(ce - bf)}{(ae - db)}, \qquad y = \frac{af - dc}{ae - db}.} \tag{2.12}$$

Para ver como actúa este método resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4, && (2.13)\\ 5x + 6y &= 7. && (2.14) \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos

$$3x + 2y = 4,$$

de esta ecuación despejaremos la variable x, de donde

$$3x = 4 - 2y,$$

así

$$x = \frac{4 - 2y}{3}. \tag{2.15}$$

Usando esta variable en la ecuación (2.14), tenemos

$$5\left(\frac{4 - 2y}{3}\right) + 6y = 7,$$

por lo que

$$\frac{5}{3}(4 - 2y) + 6y = 7,$$

de donde, usando las leyes para sumar fracciones, se llega a

$$\frac{5(4 - 2y) + 3 \cdot 6y}{3} = \frac{20 - 10y + 18y}{3},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

que implica

$$\frac{20+8y}{3}=7,$$

entonces, multiplicando ambos lados por 3, se llega a

$$3\frac{20+8y}{3}=3\cdot 7=21,$$

es decir

$$20+8y=21,$$

de esta ecuación se deduce que

$$8y=21-20=1,$$

por lo tanto

$$y=\frac{1}{8}.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuación (2.15), se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{4-\frac{2}{8}}{3}=\frac{4-\frac{1}{4}}{3}=\frac{\frac{16-1}{4}}{3}=\frac{\frac{15}{4}}{3}=\frac{15}{4\cdot 3} \\ &= \frac{15}{12}. \end{aligned}$$

Así, la solución del sistema de ecuaciones (2.13)-(2.14) es

$$x=\frac{15}{12},\qquad y=\frac{1}{8}.$$

Para comprobar que hemos obtenido la solución correcta, sustituiremos esos valores en las ecuaciones (2.13)-(2.14), de donde obtenemos

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{15}{12}\right)+2\left(\frac{1}{8}\right) &= 4, \\ 5\left(\frac{15}{12}\right)+6\left(\frac{1}{8}\right) &= 7, \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{15}{3\cdot 4}\right)+2\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right) &= \left(\frac{15}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)=4, \\ 5\left(\frac{3\cdot 5}{3\cdot 4}\right)+2\cdot 3\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right) &= 5\left(\frac{5}{4}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)=7, \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{16}{4} &= 4, \\ \frac{25}{4}+\frac{3}{4} &= \frac{28}{4}=7. \end{aligned}$$

Por lo que que la solución obtenida es correcta.

2.3. Método de igualación

Otro método para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 es el llamado de igualación, el cual consiste en despejar la misma variable en ambas ecuaciones e igualar el resultado. Consideremos de nuevo el sistema de ecuaciones

$$ax + by = c, \tag{2.16}$$
$$dx + ey = f, \tag{2.17}$$

si despejamos de ambas ecuaciones la variable x llegamos a

$$\begin{aligned} x &= \frac{c-by}{a}, \\ x &= \frac{f-ey}{d}. \end{aligned}$$

Al igualar estas dos ecuaciones encontramos

$$x = \frac{c-by}{a} = \frac{f-ey}{d},$$

al multiplicar por ad a ambos lados de esta última ecuación obtenemos

$$d(c-by) = a(f-ey),$$

es decir

$$dc - dby = af - aey,$$

de este resultado podemos deducir la igualdad

$$aey - dby = af - dc,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

que se puede escribir como

$$y(ae - db) = af - dc.$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

Ahora si despejamos la variable y ambas ecuaciones del sistema (2.16)-(2.17) llegamos a

$$\begin{aligned} y &= \frac{c - ax}{b}, \\ y &= \frac{f - dx}{e}. \end{aligned}$$

Al igualar estas dos ecuaciones encontramos

$$y = \frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e},$$

al multiplicar por be a ambos lados de esta última ecuación obtenemos

$$e(c - ax) = b(f - dx),$$

es decir

$$ec - eax = bf - bdx,$$

de este resultado podemos deducir la igualdad

$$bdx - eax = bf - ec,$$

que se puede escribir como

$$x(bd - ea) = bf - ec.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{bf - ec}{db - ea} = \frac{ec - bf}{ea - db}.$$

Así, el sistema de ecuaciones (2.16)-(2.17) tiene como solución los valores

$$x = \frac{(ce - bf)}{(ae - db)}, \qquad y = \frac{af - dc}{ae - db}. \tag{2.18}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Note que este resultado coincide con la solución obtenida con el método por sustitución (2.12).

Como ejemplo resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 9, && (2.19)\\ 2x + 7y &= 4. && (2.20) \end{aligned}$$

De cada ecuación despejaremos la variable x, como primer paso hacemos

$$\begin{aligned} 3x &= 9 - 5y,\\ 2x &= 4 - 7y, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{9-5y}{3},\\ x &= \frac{4-7y}{2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$x = \frac{9-5y}{3} = x = \frac{4-7y}{2},$$

es decir

$$\frac{9-5y}{3} = \frac{4-7y}{2}$$

así

$$\frac{9}{3} - y\frac{5}{3} = \frac{4}{2} - y\frac{7}{2}$$

que se puede escribir como

$$3 - y\frac{5}{3} = 2 - y\frac{7}{2},$$

que implica

$$y\frac{7}{2} - y\frac{5}{3} = 2 - 3 = -1,$$

además

$$y\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right) = y\left(\frac{7\cdot 3 - 5\cdot 2}{2\cdot 3}\right) = y\frac{21-10}{6} = y\frac{11}{6} = -1,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

entonces

$$y = -\frac{6}{11}. \tag{2.21}$$

Usando esta variable en la ecuación (2.20), tenemos

$$2x + 7\left(-\frac{6}{11}\right) = 4,$$

por lo que

$$\frac{2 \cdot 11x + (7)(-6)}{11} = \frac{22x - 42}{11} = 4,$$

de donde

$$11\frac{22x - 42}{11} = 4 \cdot 11,$$

es decir

$$22x - 42 = 44,$$

así

$$22x = 44 + 42 = 86,$$

entonces

$$x = \frac{86}{22} = \frac{43}{11}.$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones (2.19)-(2.20) es

$$x = \frac{43}{11}, \qquad y = -\frac{6}{11}.$$

Comprobemos que esta solución es correcta, sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.19)-(2.20), obtenemos

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{43}{11}\right) + 5\left(-\frac{6}{11}\right) &= 9, \\ 2\left(\frac{43}{11}\right) + 7\left(-\frac{6}{11}\right) &= 4, \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 43 - 5 \cdot 6}{11} &= 9, \\ \frac{2 \cdot 43 - 7 \cdot 6}{11} &= 4, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{99}{11} &= 9, \\ \frac{44}{11} &= 4, \end{aligned}$$

Así la solución obtenida es correcta.

2.4. Método de reducción o de Gauss-Jordan

Otro método para resolver un sistema de ecuaciones lineales está dado por el método de reducción. De nuevo consideremos el sistema de ecuaciones

$$ax + by = c, \tag{2.22}$$
$$dx + ey = f. \tag{2.23}$$

Multipliquemos por d a la ecuación (2.22) y por a a la ecuación (2.23), así obtenemos

$$dax + dby = dc, \tag{2.24}$$
$$adx + aey = af. \tag{2.25}$$

Al restar estas dos últimas dos ecuaciones llegamos a

$$(db - ae)y = dc - af,$$

por lo que encontramos el valor de y, el cual es

$$y = \frac{dc - af}{db - ae} = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

Ahora multipliquemos por e a la ecuación (2.22) y por b a la ecuación (2.23), así obtenemos

$$\begin{aligned} eax + eby &= ec, \\ bdx + bey &= bf. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Al restar estas dos últimas dos ecuaciones llegamos a

$$(ea - bd)x = ec - bf,$$

por lo que

$$x = \frac{ec - bf}{ea - bd}.$$

Por lo que, el sistema de ecuaciones (2.22)-(2.23) tiene como solución los valores

$$x = \frac{(ce - bf)}{(ae - db)}, \qquad y = \frac{af - dc}{ae - db}.$$

Note que este resultado coincide con la solución obtenida con el método de sustitución (2.12) e igualación (2.18).

Por ejemplo, consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4, && (2.26)\\ 5x - 6y &= 2. && (2.27) \end{aligned}$$

Primero multiplicamos por 5 a la primera ecuación y por -3 a la segunda ecuación, por lo que

$$\begin{aligned} 15x + 10y &= 20,\\ -15 + 18y &= -6, \end{aligned}$$

sumado estas dos ecuaciones llegamos a

$$28y = 14,$$

por lo que

$$y = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

Ahora multiplicando por -6 la ecuación (2.26) y por -2 la ecuación (2.27) se obtiene

$$\begin{aligned} -18x - 12y &= -24,\\ -10 + 12y &= -4, \end{aligned}$$

sumando estas ecuaciones se obtiene

$$-28x = -28,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

de donde

$$x = \frac{-28}{-28} = 1.$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones (2.26)-(2.27) es

$$x = 1, \qquad y = \frac{1}{2}.$$

Para comprobar que esta solución es correcta, sustituyamos estos valores en las ecuaciones (2.26)-(2.27), de donde

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 + 1 = 4, \\ 5 \cdot 1 - 6\left(\frac{1}{2}\right) &= 5 - 3 \cdot 2\left(\frac{1}{2}\right) = 5 - 3 = 2. \end{aligned}$$

Así la solución obtenida es correcta.

Vale la pena mencionar que el método de Gauss-Jordan se puede generalizar fácilmente en sistemas de ecuaciones lineales de cualquier orden.

A lo largo de la historia de la humanidad, pueblos de diversas épocas y partes del mundo encontraron diferentes métodos para resolver ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Particularmente, en las llamadas *tablillas de Croquetta* existen evidencias de que los sumerios sabían resolver ecuaciones lineales desde 2100 años antes que Cristo, es decir, más de 4000 años antes de nuestra época. También existen evidencias de que los egipcios sabían resolver dichas ecuaciones desde al menos 1650 años antes que Cristo. En China por el año 152 antes de Cristo se escribió el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, obra del matemático Chuan Tsanom, en donde se muestran métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Notablemente en la obra de Chuan Tsanom se muestra el método que hoy conocemos como de Gauss-Jordan.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Wilhelm Jordan (1842-1899)

Fue un ingeniero alemán. Sus libros son considerados clásicos en su área y han sido usado como texto en diferentes partes del mundo, más de un siglo después de haber sido escrito. En dichos libros Jordan introduce lo que hoy se conoce como método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Realizó sus estudios en el Instituto Politécnico de Stuttgart. Además de la ingeniería, tenía pasión por los viajes y un espíritu aventurero que lo llevó a realizar expediciones a África. Terminó su vida como profesor en la Universidad Técnica de Hannover.

2.5. Ejercicios

1.- Resuelva la ecuación

$$\frac{3}{2}x + 7 = 0.$$

2.- Resuelve la siguiente ecuación lineal

$$3x - 4 = 5 - 6x.$$

3.- Resuelva la ecuación

$$\frac{x+2}{2x+1} + 2 = 1.$$

4.- Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{13+2x}{4x+1} = \frac{3}{4}.$$

5.- Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4, \\ 2x - 3y &= 1. \end{aligned}$$

6.- Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x - 2y &= \frac{1}{9}, \\ x + \frac{4}{5}y &= 7. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 3

Orden en los números reales

En capítulos anteriores aprendimos que el cero es número especial e hicimos algunas observaciones sobre sus propiedades. El cero tiene otra propiedad importante, la cual nos permite dividir a todos los número reales en dos partes. Esta propiedad también se presenta en la vida diaria.

Para fijar ideas, supongamos que tenemos 5000 pesos y queremos poner un negocio de venta de helados. También supongamos que con esos 5000 pesos compramos mercancía para hacer 200 helados. En el momento que compramos la mercancía tendremos cero pesos, matemáticamente la compra de mercancía significó una pérdida de 5000 pesos, pensándola como una resta. Ahora, para recuperar el dinero debemos vender los helados. Si cada helado lo vendemos en 40 pesos, al final de la venta tendremos 8000 pesos, así al término de la venta tendremos 3000 pesos de ganancia. Pero si vendemos los helados en 15 pesos al término de la venta tendremos 3000 pesos, por lo que tendremos una pérdida de 2000 pesos o -2000 de ganancia. Mientras que si vendemos los helados a 25 pesos, al final de la venta tendremos 5000 pesos, por lo que tendremos 0 pesos de ganancia.

Como podemos ver, después de vender los helados solo tenemos tres opciones: no tener ganancias, que significa 0 ganancias; tener pérdidas, que lo podemos representar con un número negativo; la tercera opción es tener ganancias, que lo podemos representar con un número positivo. En este caso el número cero divide las ganancias de las pérdidas. Para ilustrar estas ideas de una forma visual, consideremos la recta de la figura (3.1), los números que están a la derecha del cero representan las ganancias, mientras que los números que están a la izquierda del cero representan las pérdidas o ganancias negativas.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

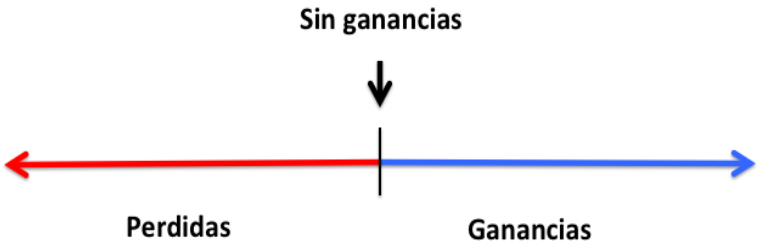


Figura 3.1: Ganancias y pérdidas en un negocio.

En general, consideremos en la recta de la Figura 3.2, a los números que están a la derecha del cero les llamamos positivos y los detonamos como $\mathbb{R}^+$, mientras que a los números que están a la izquierda del cero les llamamos negativos y los denotamos como $\mathbb{R}^-$.

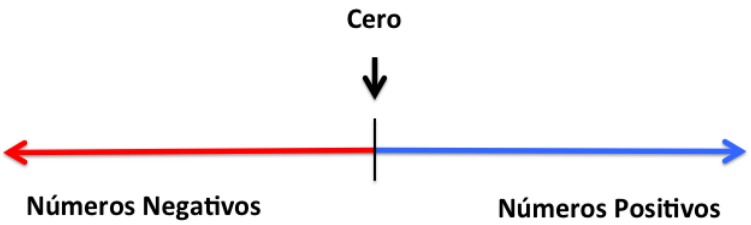


Figura 3.2: Recta numérica.

Supongamos que I representa la cantidad de dinero que invertimos en un negocio y V es lo que se obtiene de las ventas de ese negocio. Podemos ver que solo tenemos tres opciones: tener ganancias (ganancias positivas), que el dinero de las ventas sean igual a lo invertido (ganancias iguales a cero) o que haya pérdidas (ganancias negativas). Las ganancias las podemos definir como

$$G = V - I.$$

Así para el número G tenemos tres opciones: ganancias positivas

$$G \in \mathbb{R}^+,$$

ganancias iguales a cero

$$G = 0$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

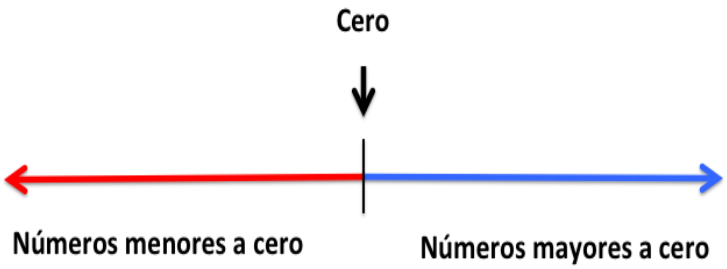


Figura 3.3: Orden en los números reales.

o ganancias negativas

$$G \in \mathbb{R}^{-}.$$

Cuando tenemos pérdidas, es decir, cuando hay ganancias negativas, se puede expresar de la forma

$$G \notin \mathbb{R}^{+}$$

o como

$$-G \in \mathbb{R}^{+}.$$

Supongamos que tenemos dos negocios, en este caso cada negocio nos puede dar ganancia positiva, ganancia cero o ganancia negativa. Denotemos la ganancia de un de los negocios con G_1 y la ganancia del otro negocio con G_2. Se puede observar que si los dos negocios tienen ganancias positivas, entonces las suma de las dos ganancias deben ser positivas, es decir,

$$G_1 \in \mathbb{R}^{+} \quad \text{y} \quad G_2 \in \mathbb{R}^{+} \qquad \Longrightarrow \qquad G_1 + G_2 \in \mathbb{R}^{+}.$$

También podemos ver que multiplicar ganancias positivas, nos a darán ganancias positivas, es decir

$$G_1 \in \mathbb{R}^{+} \text{ y } G_2 \in \mathbb{R}^{+} \Longrightarrow G_1 \cdot G_2 \in \mathbb{R}^{+}.$$

Basados en este tipo de aplicaciones se pueden postular tres axiomas:

1.- *Axioma de la tricotomía.* Si x número real, es decir si $x \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones:

$$x \in \mathbb{R}^{+}, \tag{3.1}$$
$$x = 0, \tag{3.2}$$
$$-x \in \mathbb{R}^{+}. \tag{3.3}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

2.- *La suma de los números positivos es cerrada*

$$\text{si} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad y \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad x + y \in \mathbb{R}^+.$$

3.- *El producto de los números positivos es cerrado*

$$\text{si} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad y \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad x \cdot y \in \mathbb{R}^+.$$

Note que debido a que el axioma de la tricotomía nos indica que solo se cumple una de las condiciones (3.1)-(3.3), entonces si $x \in \mathbb{R}^+$, se debe cumplir que $-x \notin \mathbb{R}^+$. De la misma forma si $-x \in \mathbb{R}^+$, se debe satisfacer que $x \notin \mathbb{R}^+$. Es decir, si un número x es positivo, su inverso aditivo $-x$ no puede ser positivo. De la misma, si el inverso aditivo $-x$ es positivo, entonces el número $x = -(-x)$ no puede ser positivo.

Ahora, supongamos que a y b son dos números reales se dice que b es menor que a si $a - b$ es un número positivo, en este caso se escribe

$$b < a.$$

Así, otra forma de dar esta defincón es

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad b < a \quad \text{si} \quad a - b \in \mathbb{R}^+.$$

Se puede observar que considerando el axioma de la tricotomía para el número $a - b$ se cumple una y solo una de las afirmaciones:

$$\begin{aligned} &a - b \in \mathbb{R}^+, \\ &a - b = 0, \\ &-(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta la definición de $a < b$, se debe cumplir una y solo una de las afirmaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} &a < b, \\ &a = b, \\ &b < a. \end{aligned}}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Como podemos ver, debido a que los números reales cumplen las condiciones del axioma de la tricotomía (3.1)-(3.3), siempre podemos decir cuándo dos números son iguales o, cuándo un número es mayor o menor que otro. Así, el axioma de la tricotomía nos permite tener un orden en los números. Esta propiedad es importante para diversas aplicaciones, en particular cuando queremos ver si tenemos pérdidas o ganancias en un negocio.

Además, note que si

$$0 < a,$$

entonces $(a-0) = a \in \mathbb{R}^+$. Es decir, si $a > 0$, entonces a es un número positivo. También se puede ver que si

$$a < 0,$$

entonces $(0 - a) = -a \in \mathbb{R}^+$, por lo que $a \in \mathbb{R}^-$. En otras palabras, si $a < 0$, entonces a es un número negativo.

Por lo tanto, otra forma de escribir el axioma de la tricotomía es que para cualquier número real se cumple una y solo una de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 0 &< a \qquad \left(a \in \mathbb{R}^+\right), \\ 0 &= a, \\ a &< 0 \qquad \left(a \in \mathbb{R}^-\right). \end{aligned}$$

3.1. Transitividad

Ahora veamos que pasa con el orden cuando tenemos tres números. En este caso se cumple la propiedad llamada de transitividad, la cual establece el resultado

$$\boxed{a < b \quad \text{y} \quad b < c \qquad \Longrightarrow \qquad a < c.}$$

Para probar esta propiedad primero notemos que las desigualdades

$$a < b \qquad \text{y} \qquad b < c,$$

implican

$$b - a \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad c - b \in \mathbb{R}^+.$$

Ahora, considerando el axioma de la cerradura de suma de dos números reales, se cumple que

$$(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

además se cumple

$$(b-a)+(c-b)=c-a+b-b=c-a,$$

por lo tanto

$$c-a\in\mathbb{R}^{+},$$

de donde

$$a<c, \tag{3.4}$$

que es lo que se quería demostrar.

Por ejemplo, sabemos que

$$3<5 \quad \text{y} \quad 5<7$$

y claramente se cumple

$$3<7.$$

Como otro ejemplo, notemos que

$$-6<-2 \quad \text{y} \quad -2<1$$

y claramente se cumple

$$-6<1.$$

3.2. Suma del mismo número en una desigualdad

También tenemos una propiedad que establece que al sumar el mismo número en las dos partes de una desigualdad, la desigualdad se respeta. En concreto, esta propiedad establece que

si $a<b$, entonces $\forall c\in\mathbb{R}$ $a+c<b+c$.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Para probar esta propiedad notemos que debido a que $a < b$, se debe cumplir que $b - a \in \mathbb{R}^+$. Ahora, considerando que $c - c = 0$ y usando la ley de los signos, tenemos que

$$b - a = b - a + c - c = b + c - a - c = (b + c) - (a + c)$$

por lo que

$$b - a = (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+,$$

de donde

$$b + c < a + c,$$

que es lo queríamos demostrar.

Por ejemplo es claro que

$$3 < 7,$$

si sumamos el número 10 de ambos lados de la desigualdad se cumple

$$10 + 3 < 10 + 7,$$

es decir

$$13 < 17.$$

Como otro ejemplo notemos que

$$4 < 9,$$

si sumamos el número -15 de ambos lados de la desigualdad se cumple

$$-15 + 4 < -15 + 9,$$

es decir

$$-11 < -6.$$

3.3. Producto por números positivos

Otra propiedad para las desigualdades establece que la multiplicación por un número positivo respeta una desigualdad. Concretamente, esta propiedad establece que

si	$a < b$	y	$c \in \mathbb{R}^+$,	entonces	$a \cdot c < b \cdot c.$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Para probar esta afirmación podemos observar que debido a que $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$. Además, recordemos que producto de dos números positivos es otro número positivo, entonces debido a que $c \in \mathbb{R}^+$, se debe cumplir que

$$(b - a)c \in \mathbb{R}^+.$$

Adicionalmente sabemos que

$$(b - a)c = b \cdot c - a \cdot c,$$

por lo que

$$b \cdot c - a \cdot c \in \mathbb{R}^+,$$

de donde

$$a \cdot c < b \cdot c,$$

que es lo que se quería demostrar.

Por ejemplo es claro que

$$5 < 8,$$

si multiplicamos por número 3 de ambos lados de la desigualdad se cumple

$$3 \cdot 5 < 8 \cdot 5,$$

es decir

$$15 < 40.$$

Como otro ejemplo notemos que

$$-4 < 3,$$

multiplicando por número 5 en ambos lados de la desigualdad se cumple

$$5 \cdot (-4) < 5 \cdot 3,$$

es decir

$$-20 < 15.$$

También consideremos la desigualdad

$$-7 < -3,$$

multiplicando por número 2 en ambos lados de la desigualdad se cumple

$$2 \cdot (-4) < 2 \cdot (-3),$$

es decir

$$-8 < -6.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

3.4. Inversos aditivos

Ahora veremos una propiedad que establece que

$$\boxed{\text{si} \quad a < b, \quad \text{entonces} \quad -b < -a.}$$

Para demostrar esta afirmación, se puede observar que debido a que

$$a < b,$$

se cumple

$$b - a \in \mathbb{R}^+.$$

Ahora, notemos que, usando las leyes de los signos, tenemos que

$$b - a = -a + b = (-a) - (-b),$$

por lo que

$$(-a) - (b) \in \mathbb{R}^+,$$

de donde

$$-b < -a,$$

que es lo que se quería demostrar.

Por ejemplo es claro que

$$3 < 7,$$

y también se cumple

$$-7 < -3.$$

En otro ejemplo, notemos que

$$-5 < 2,$$

y también se cumple

$$-2 < 5.$$

Adicionalmente consideremos la desigualdad

$$-9 < -5,$$

se puede notar que se cumple

$$5 < 9.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

3.5. Multiplicación por números negativos

Otra propiedad importante afirma que la multiplicación por un número negativo cambia el orden de la desigualdad. Concretamente, esta propiedad establece que

si $a < b$ y $c \neq 0$, $c \notin \mathbb{R}^+$, entonces $b \cdot c < a \cdot c$.

Se puede notar que debido a que $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$. Además, como $c \notin \mathbb{R}^+$ y $c \neq 0$, entonces $-c \in \mathbb{R}^+$. Por lo que considerando qué producto de dos números positivos es otro número positivo, se debe cumplir que

$$(b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+.$$

Adicionalmente sabemos que

$$(b - a)(-c) = -b \cdot c + a \cdot c = a \cdot c - b \cdot c,$$

por lo que

$$a \cdot c - c \cdot c \in \mathbb{R}^+,$$

de donde

$$b \cdot c < a \cdot c,$$

que es lo que se quería demostrar.

Por ejemplo, claramente se cumple

$$4 < 10.$$

Además si multiplicamos -3 por 4 y 10 se tiene $-3 \cdot 4 = -12$ y $-3 \cdot 10 = -30$, además se cumple la desigualdad

$$-30 < -12,$$

es decir

$$-3 \cdot 10 < -3 \cdot 4.$$

Como otro ejemplo podemos ver que se cumple

$$-3 < 5,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

si multiplicamos -2 por -3 y 5 se tiene $-2\cdot(-3)=6$ y $-2\cdot 5=-10$, además se cumple la desigualdad

$$-10<6,$$

es decir

$$-2\cdot 5<-2\cdot(-3).$$

También podemos observar que se satisface

$$-9<-2,$$

si multiplicamos -4 por -9 y -2 se tiene $-4\cdot(-9)=36$ y $-4\cdot(-2)=8$, además se cumple la desigualdad

$$8<36,$$

es decir

$$-4\cdot(-2)<-2\cdot(-9).$$

3.6. Suma de desigualdades

Ahora veremos que la suma de dos desigualdades respeta el orden, en otras palabras es propiedad establece que

si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$.

Para demostrar esta afirmación, se puede observar que debido a que

$$a<b \quad \text{y} \quad c<d,$$

entonces se cumple

$$b-a\in\mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad d-c\in\mathbb{R}^+,$$

por lo que

$$(b-a)+(d-c)\in\mathbb{R}^+.$$

Además como

$$(b-a)+(d-c)=(b+d)-(a+c),$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

se satisface

$$(b+d)-(a+c) \in \mathbb{R}^+,$$

de donde

$$a+c<b+d,$$

que es lo que se quería demostrar.

Por ejemplo,

$$2<5 \qquad \text{y} \qquad 4<7,$$

además

$$2+4=6 \qquad \text{y} \qquad 5+7=12,$$

y se cumple

$$6<12,$$

es decir

$$2+4<5+7.$$

En este otro ejemplo, se puede observar que

$$-5<6 \qquad \text{y} \qquad -7<-4,$$

además

$$-5-7=-12 \qquad \text{y} \qquad 6-4=2,$$

y se cumple

$$-12<2,$$

es decir

$$-5-7<6-4.$$

3.7. Menor o igual

En muchos problemas de la vida diaria no se tienen una desigualdad estricta, también se puede tener la igualdad. En ese caso se usa el símbolo

$$\leq$$

que significa menor o igual.

Por ejemplo, el récord mundial de salto de longitud de mujeres es 7,52 metros. Entonces, si L es la longitud que salta otra competidora, podemos decir que L es menor o igual a 7,52 metros es decir

$$L \leq 7{,}52 \quad \text{metros}.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

3.8. Intervalos

En muchos problemas aplicados no es posible dar un número exacto como solución de un problema, solo se puede dar un conjunto de números. En estos casos es conveniente usar desigualdades y es conveniente definir el concepto de intervalo.

Sea $a < b$, se dice que x está en el intervalo

$$(a, b)$$

si

$$a < x \qquad \text{y} \qquad x < b,$$

estas dos últimas dos desigualdades también se pueden escribir de forma compacta como

$$a < x < b.$$

Así, también se puede decir que x está en el intervalo (a, b) si

$$a < x < b.$$

Por ejemplo, es complicado decir como será el clima del día siguiente. Pero sí podemos decir en qué rangos puede estar la temperatura. Por ejemplo, en la ciudad de México se puede decir que en primavera la temperatura T está entre $23°C$ y $27°C$. Usando desigualdades, este rango de temperatura se puede escribir como

$$23°C < T < 27°C,$$

que significa que la temperatura es mayor a $23°C$ y menor a $27°C$.

En general, cuando se establece un negocio es complicado decir cuánto puede ser la ganancia o pérdida; en la mayoría de los casos solo se puede tener un estimado. Para ejemplificar, si en un puesto de verduras se tiene una ganancias de entre 500 pesos o 1000 pesos, usando G para denotar la ganancia del puesto de verdura, se puede decir que ésta se encuentra en el intervalo

$$(500, 100),$$

es decir se cumple

$$500 < G < 100.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

3.9. Ejercicios

1.- Probar que si $a > 0$, entonces

$$a^{-1} = \frac{1}{a} > 0.$$

2.- En una escuela se asignan las notas de los cursos con las siglas NA, S, B y MB. En esta escuela un profesor evalua los exámenes con valores numérico que van del 0 al 10; además estableció que la calificación final C_F del curso sería el promedio numérico de las calificaciones de 4 exámenes parciales y tomarían los siguientes rangos numéricos

$$\begin{aligned} &0 \leq C_F \leq 5{,}9 \quad NA, \\ &6{,}0 \leq C_F \leq 7{,}39 \quad S, \\ &7,4 \leq C_F \leq 8{,}39 \quad B, \\ &8{,}4 \leq C_F \leq 10 \quad MB. \end{aligned}$$

a) Escriba la escala de calificación usando intervalos.

En los primeros 3 exámenes Balam obtuvo las calificaciones 7,3, 8,0 y 8,3 b)

¿En que rango debe estar la calificación del cuarto examen de Balampara

obtener MB?

c) ¿En que rango debe estar la calificación del cuarto examen de Balam para

obtener B?

d) ¿En que rango debe estar la calificación del cuarto examen de Balam para

obtener S?

e) ¿En que rango debe estar la calificación del cuarto examen de Balam para

obtener NA?

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 4

Valor absoluto

En muchos problemas de la vida real no nos importa el signo de los números, sino únicamente su cantidad. Por ejemplo, si alguien quiere correr cien metros, no le importa mucho si corre a la izquierda o a la derecha, solo le importa correr la distancia de cien metros. Como otro ejemplo, una persona se puede enfermar de gripa si hay cambios de temperatura. En este caso no importa si la temperatura baja o sube, el cambio de temperatura influye en el sistema inmunológico y las personas pueden enfermar.

Cuando no nos importa el signo de una cantidad o número, se usa el concepto de valo absoluto el cual siempre es un número real. El valor absoluto de un número real se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

una forma equivalente de definir el valor absoluto es

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, & 0 \leq x, \\ -x, & x < 0. \end{cases}}$$

Por ejemplo, 5 es un número positivo, entonces el valor absoluto de 5 es 5, es decir

$$|5| = 5.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Mientras que -6 es un número negativo, por lo que el valor absoluto de -6 es $-(-6) = 6$, es decir

$$|-6| = -(-6) = 6.$$

4.1. Valor absoluto de un producto

Si a y b son números reales se cumple

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.} \tag{4.1}$$

Probaremos esta propiedad por casos

Caso 1) Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^+$, en este caso $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$ por lo que

$$|a \cdot b| = a \cdot b.$$

Además, $|a| = a$ y $|b| = b$, por lo que $|a| \cdot |b| = a \cdot b$, de donde

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Caso 2) Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}^-$, en este caso $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$ por lo que $|a \cdot b| = a \cdot b$. Además, $|a| = -a$ y $|b| = -b$, entonces

$$|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = (-)(-)a \cdot b = a \cdot b,$$

de donde

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Caso 3) Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^-$ en este caso $a \cdot b \in \mathbb{R}^-$ por lo que

$$|a \cdot b| = -a \cdot b.$$

Además, $|a| = a$ y $|b| = -b$, entonces

$$|a| \cdot |b| = (a) \cdot (-b) = (-)a \cdot b = -a \cdot b,$$

de donde

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Caso 4) Supongamos que $a \in \mathbb{R}^-$ y $b \in \mathbb{R}^+$ en este caso $a \cdot b \in \mathbb{R}^-$ por lo que

$$|a \cdot b| = -a \cdot b.$$

Además, $|a| = -a$ y $|b| = b$, entonces

$$|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (b) = (-)a \cdot b = -a \cdot b,$$

de donde

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Así, la propiedad (4.1) se cumple para cualquier dos números reales.

Note que en particular se cumple

$$\boxed{|-x| = |x|.}$$

En efecto, se cumple $|-x| = |(-1)x| = |-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$.

Por ejemplo

$$|2 \cdot 7| = |14| = 14,$$

además

$$|2| \cdot |7| = 2 \cdot 7 = 14,$$

de donde

$$|2 \cdot 7| = |2| \cdot |7|.$$

Como otro ejemplo podemos ver que

$$|-5 \cdot 8| = |-40| = 40,$$

además

$$|-5| \cdot |8| = 5 \cdot 8 = 40,$$

de donde

$$|-5 \cdot 8| = |-5| \cdot |8|.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

4.2. Inverso aditivo

Una propiedad del valor absoluto de un número es que siempre es mayor o igual al número y a su inverso aditivo, es decir

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad a \leq |a| \quad \text{y} \quad -a \leq |a|.} \tag{4.2}$$

Primero haremos la prueba para números positivos. Se puede observar que si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $|a| = a$, así se cumple $a \leq |a|$. Además si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $-a \in \mathbb{R}^-$ por lo que $-a < a = |a|$, por lo que se cumple $-a \leq |a|$. Por lo tanto para cualquier número positivo se cumple la propiedad (4.2)

Ahora hagamos la prueba para los números negativos. Note si $a \in \mathbb{R}^-$, como $|a|$ es un número positivo se cumple $a < |a|$, por lo que $a \leq |a|$. Además como $a \in \mathbb{R}^-$, se cumple $-a = |a|$ por lo que se cumple $-a \leq |a|$. Así, cualquier número negativo cumple la propiedad (4.2).

4.3. Desigualdad del triángulo

La desigualdad del triángulo nos dice que si a y b son números reales se cumple

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|.} \tag{4.3}$$

Iniciaremos la prueba de esta propiedad para el caso en que la suma de a y b no da un número positivo. Supongamos que

$$(a+b) > 0,$$

de donde

$$|a+b| = a+b,$$

ahora sabemos que siempre se cumple

$$\begin{aligned} a &\leq |a|, \\ b &\leq |b|, \end{aligned}$$

entonces

$$a+b \leq |a| + |b|,$$

por lo que

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Así, se cumple la desigualdad (4.3). Ahora, supongamos que

$$(a+b) < 0,$$

de donde

$$|a+b| = -(a+b),$$

además sabemos que

$$-a \leq |a|,$$
$$-b \leq |b|,$$

entonces

$$-(a+b) \leq |a| + |b|,$$

que implica

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto se cumple que se satisface la desigualdad (4.3)

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Note que una resta $a-b$ siempre se puede escribir como la suma $a+(b)$, por lo que la desigualdad del triángulo implica que

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|,$$

es decir

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |b|.$$

Ahora veamos algunos ejemplos. Consideremos la suma $3+5$, en este caso temos que

$$|3+5| = |8| = 8$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

además

$$|3| + |5| = 3 + 5 = 8,$$

por lo que

$$|3 + 5| = |3| + |5| = 8.$$

También podemos ver que

$$|8 - 2| = |6| = 6$$

además

$$|8| + | - 2| = 8 + 2 = 10.$$

Como $6 < 10$, se cumple

$$|8 - 2| < |8| + | - 2|.$$

En este otro ejemplo, consideremos la resta de 7 con 11, en este caso tenemos

$$|7 - 11| = | - 4| = 4$$

además

$$|7| + | - 11| = 7 + 11 = 18.$$

Como $4 < 18$, se cumple

$$|7 - 11| < |7| + |11|.$$

4.4. Intervalos usando valor absoluto

Con el valor absoluto se pueden definir intervalos. Para fundamentar esta afirmación probaremos que

$$\text{si} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad |x| < a, \qquad \text{entonces} \quad -a < x < a.$$

Primero supongamos que $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces como $|x| < a$ y $x = |x|$ se cumple que $x < a$. Además, tenemos que $-a \in \mathbb{R}^-$ y $x \in \mathbb{R}^+$, de donde $-a < x$. Por lo que se cumple que

$$-a < x \qquad \text{y} \qquad x < a$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$-a < x < a.$$

Ahora supongamos que $x \in \mathbb{R}^-$, entonces en este caso $|x| = -x$ y como $|x| < a$ se cumple

$$-x < a,$$

de donde

$$-a < x.$$

Además como $x \in \mathbb{R}^-$ y $a \in \mathbb{R}^+$ se cumple

$$x < a.$$

Así se cumple que

$$-a < x \qquad \text{y} \qquad x < a.$$

es decir

$$-a < x < a.$$

Así la desigualdad

$$|x| < a$$

representa al intervalo

$$(-a, a).$$

También se puede ver que la desigualdad

$$|x - b| < a$$

implican la

$$-a < x - b < a.$$

que representa los número x que está a una distancia de b menor a a. Este tipo de desigualdades son útiles para representar fluctuaciones sobre un valor.

Por ejemplo, si el precio del petróleo es de 40 dólares con una fluctuación de 25 centavos de dólar, se escribe que el precio de petróleo cumple

$$|x - 40| < 0.25.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

4.5. Ejercicios

1.- Probar que para cual quier número real se cumple

$$|a^2| = |a|^2 = a^2.$$

3.- Obtener

a)$|-7| =?$

b)$-|12| =?$

c)$-|-17| =?$

4.- La altura promedio de los mexicanos es de $1{,}64m$ con una fluctuación de $0{,}25cm$ y mientras que la altura promedio de las mexicanas es de $1{,}58m$ con una fluctuación de $0{,}22cm$.

a) Si Cuauhtémoc es mexicano y h es su altura, usando valor absoluto, ¿qué desigualdad cumple h?

b) Si Meztli es mexicana y h es su altura, usando valor absoluto, ¿qué desigualdad cumple h?

5.- Encontrar los valores de x que cumple

$$|x-4| = 5.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 5

El cuadrado de un número real

Supongamos que a es un número real, entonces al producto de a con a se denota como a^2, es decir

$$\boxed{a \cdot a = a^2.}$$

A esta expresión se le denomina potencia cuadrada de a, el cuadrado de a o la segunda potencia de a.

El cuadrado de un número es importante para diferentes aplicaciones geométricas, algebraicas y en diferentes ciencias. Por lo que es importante entender esta expresión y sus propiedades.

5.1. El cuadrado de un número real es siempre positivo

Anteriormente vimos que si a es un número positivo entonces a^2 es positivo. Además, si a es un número negativo entonces su inverso aditivo $-a$ es positivo, por lo que el número $(-a)^2$ es positivo. Pero como

$$\boxed{(-a)(-a) = (-)(-)a \cdot a = a^2}$$

entonces a^2 positivo.

Por lo tanto

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \qquad a^2 \in \mathbb{R}^+.}$$

Por ejemplo

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

es un número positivo.

Además,

$$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = (-)(-)9 \cdot 9 = 81,$$

que también es un número positivo.

5.2. El cuadrado de un producto

Note que usando la propiedad asociativa del producto de los números reales se encuentra la identidad

$$\boxed{a^2 \cdot b^2 = (a \cdot a)(b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^2.}$$

Por ejemplo,

$$(3)^2 \cdot (5)^2 = 9 \cdot 25 = 225,$$

además

$$(3 \cdot 5)^2 = (15)^2 = 225,$$

así

$$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 225.$$

Como otro ejemplo, podemos ver que

$$(-2)^2 \cdot (7)^2 = 4 \cdot 49 = 196,$$

adicionalmente

$$(-2 \cdot 7)^2 = (-14)^2 = 196,$$

de donde

$$(-2)^2 \cdot (7)^2 = (-2 \cdot 7)^2 = 196.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

También podemos ver que

$$(-5)^2 \cdot (-4)^2 = 25 \cdot 16 = 400$$

además

$$((-5) \cdot (-4))^2 = (20)^2 = 400,$$

entonces

$$(-5)^2 \cdot (-4)^2 = ((-5) \cdot (-4))^2 = 400.$$

5.3. El cuadrado de una fracción

Note que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2},$$

así

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.}$$

Por ejemplo,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}.$$

En otro caso podemos ver que

$$\left(\frac{-2}{7}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{7^2} = \frac{4}{49}.$$

Además

$$\left(a^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} = \left(a^2\right)^{-1},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$\left(a^{-1}\right)^2 = \left(a^2\right)^{-1}.$$

Por ejemplo,

$$\left(5^{-1}\right)^2 = (25)^{-1} = \frac{1}{25}.$$

La expresión $\left(a^{-1}\right)^2$ también se suele escribir como

$$a^{-2},$$

es decir

$$\left(a^{-1}\right)^2 = a^{-2}.$$

5.4. El cuadrado y su representación geométrica

Sabemos que el área de un rectángulo, como el de la Figura 5.1, es igual a largo por ancho o base por altura, es decir

$$A_{\mathrm{R}} = BH.$$

.

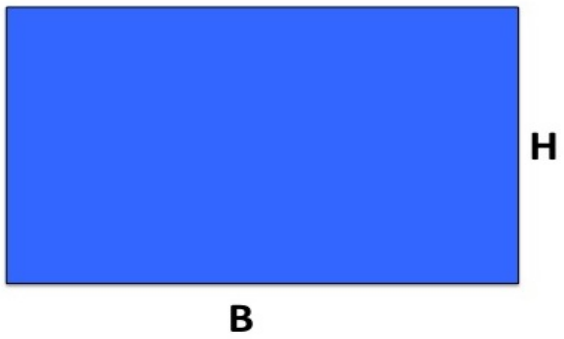


Figura 5.1: Rectángulo de base de longitud B y base H.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

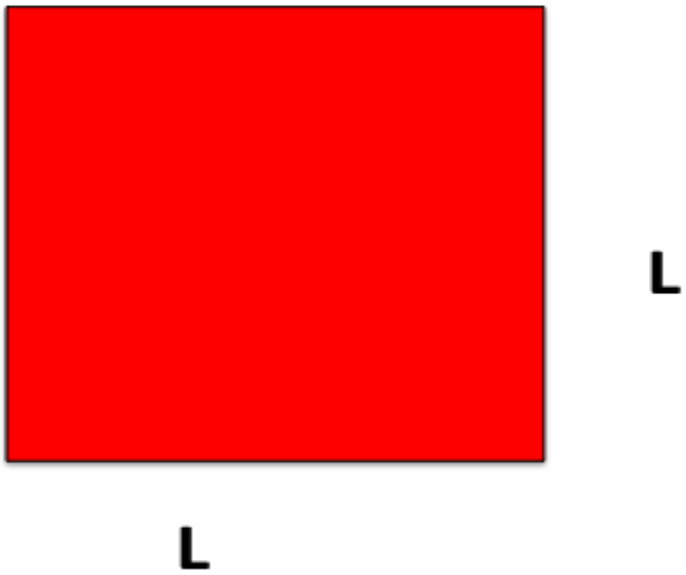


Figura 5.2: Cuadrado de lados de tamaño L

En particular, para un cuadrado de lados de tamaño L, como el de la Figura 5.2, el área es

$$A_{\mathrm{C}} = L^2.$$

Así, el cuadrado de un número real siempre tiene una representación geométrica.

Note que al dividir un triángulo rectángulo por la diagonal, como se muestra en la figura 5.3, se obtiene un triángulo rectángulo. Por lo que el área de un triángulo rectángulo de altura H y base B es la mitad del área de un rectángulo de lados de tamaño H y B de donde

$$A_{\mathrm{T}} = \frac{BH}{2}.$$

.

Estos resultados nos permitirán interpretar geométricamente diferentes resultados para expresiones a la segunda potencia.

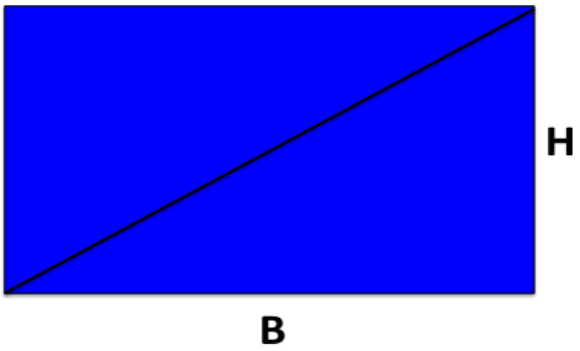


Figura 5.3: Triángulo rectángulo obtenido de un rectángulo.

5.5. El cuadrado de una suma

Ahora probaremos el resultado

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.} \tag{5.1}$$

Para realizar esta prueba definamos $\alpha = (a+b)$, entonces ocupando la ley distributiva, se llega a

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)\alpha \\ &= a\alpha + b\alpha \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= aa + ab + ba + bb \\ &= a^2 + ab + ba + b^2,\end{aligned}$$

además usando la propiedad conmutativa de la multiplicación se encuentra

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

Por lo tanto, la expresión (5.1) es correcta.

Por ejemplo, tenemos que

$$(5+4)^2 = 9^2 = 81,$$

además

$$5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4^2 = 25 + 10 \cdot 4 + 16 = 25 + 40 + 16 = 81,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

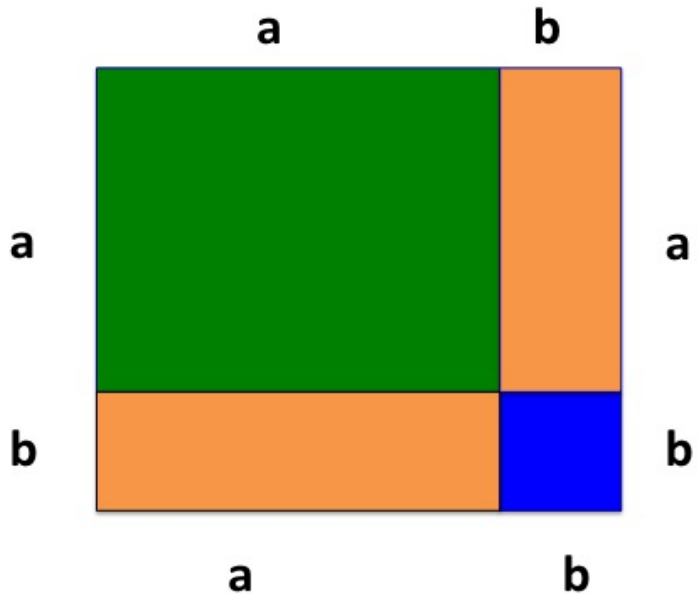


Figura 5.4: Representación geométrica de un binomio al cuadrado.

por lo que

$$(5+4)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 4^2.$$

Debido a que el cuadrado de un número se puede ver como el área de un cuadrado y que en general el producto de dos números positivos se puede ver que como el área de un rectángulo, la expresión (5.1) tiene una representación geométrica. Para probar esta afirmación construyamos un cuadrado de lados $a+b$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $b < a$. Por lo que, como se muestra en la Figura 5.4, este cuadrado se puede construir con un cuadrado de lados de tamaño a, un cuadrado de lados de tamaño b y dos rectángulos de lados de tamaños a y b. Por lo tanto el área de dicho cuadrado es

$$A_C = (a+b)^2.$$

Pero el área de dicho cuadrado también es la suma de las áreas de los elementos que lo componen, es decir

$$A_C = a^2 + b^2 + 2b^2,$$

de donde

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ba + b^2.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

5.6. El cuadrado de una resta

Ahora probaremos la identidad

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.} \tag{5.2}$$

Para hacer esta prueba definamos $\gamma = (a-b)$, entonces usando la ley distributiva se llega a

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= (a-b)\gamma = a\gamma - b\gamma\\ &= a(a-b) - b(a-b)\\ &= aa - ab - ba + bb\\ &= a^2 - ab - ba + b^2,\end{aligned}$$

así, ocupando la propiedad conmutativa de la multiplicación, se encuentra

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Por lo que la identidad (5.2) es correcta.

La expresión (5.2) tiene una representación geométrica. En efecto, construyamos un cuadrado de lados de tamaño a. Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que $b < a$. Por lo que, como se muestra en la Figura 5.5, el cuadrado de lados de tamaño a se puede construir con un cuadrado de lados de tamaño $(a-b)$, un cuadrado de lados de tamaño b y dos rectángulos de lados de tamaños b y $a-b$. Por lo tanto el área de dicho cuadrado es

$$a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b),$$

de donde

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2b(a-b) = a^2 - b^2 - 2ba + 2b^2,$$

es decir

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ba + b^2,$$

que es la identidad (5.2).

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

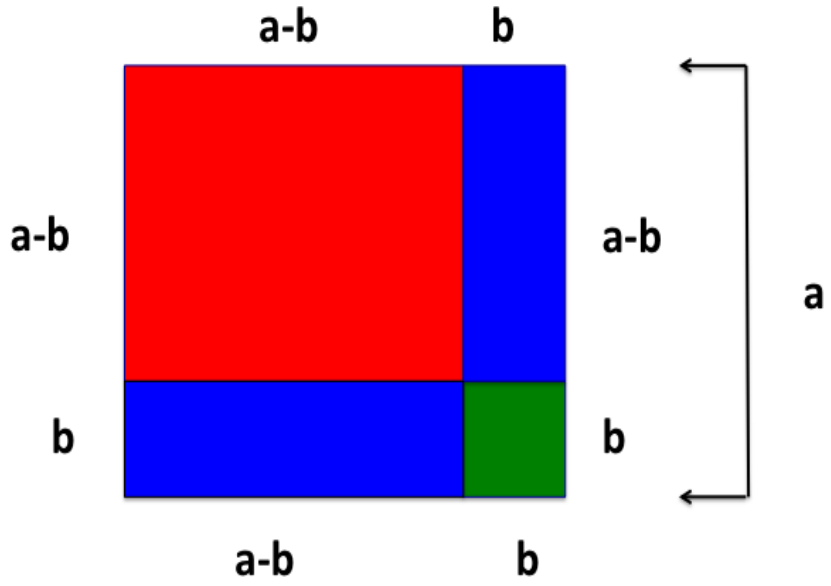


Figura 5.5: Representación geométrica del cuadrado de una resta.

Por ejemplo,

$$(3-7)^2 = (-4)^2 = 16,$$

además

$$3^2 - 2\cdot 3\cdot 7 + 7^2 = 9 - 2\cdot 21 + 49 = 9 - 42 + 49 = 9 + 7 = 16,$$

de donde

$$(3-7)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 7 + 7^2 = 16.$$

5.7. Diferencia de cuadrados

Otra identidad relevante es la llamada diferencia de cuadrados, que está dada por

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.} \tag{5.3}$$

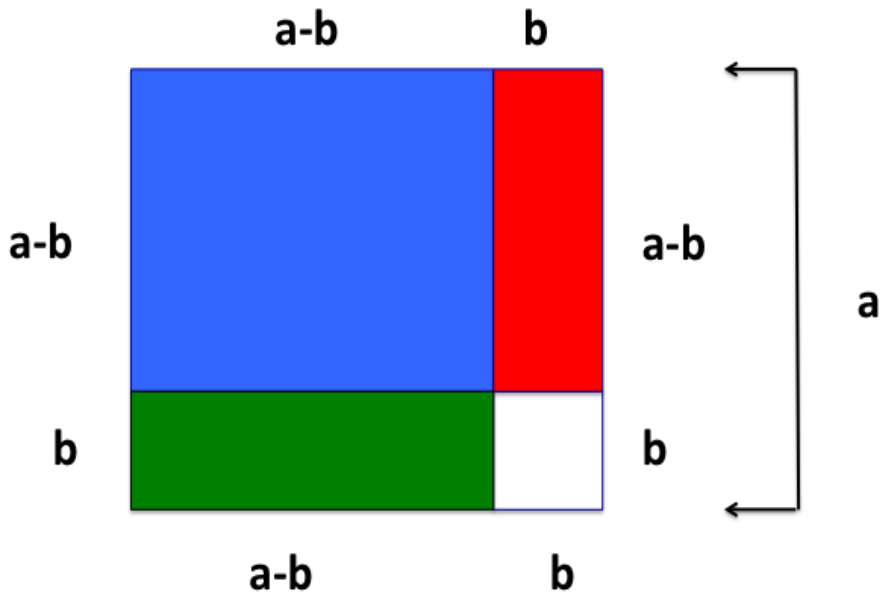


Figura 5.6: Representación geométrica de una resta de cuadrados.

Para probar esta identidad definamos $\beta = a - b$, entonces ocupando la ley distributiva, se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)\beta = (a\beta + b\beta)\\ &= a(a-b) + b(a-b)\\ &= aa - ab + ba - bb\\ &= a^2 - ab + ba - b^2,\end{aligned}$$

entonces, usando la ley conmutativa del producto, se tiene

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Así la identidad (5.3) es correcta.

Ahora veamos la versión geométrica de la identidad (5.3). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b < a$ y construyamos un cuadrado de lados de tamaño a. En dicho cuadrado se puede construir con un cuadrado de lados de tamaño $(a-b)$, un cuadrado de lados de tamaño b y dos rectángulos de lados de tamaño b y $a-b$, como se muestra en la Figura 5.6. De dicha figura se

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

puede observar que juntando el cuadrado azul y rectángulo verde se obtiene un rectángulo de lados a y $(b-a)$. Así, la región con azul junto con la región verde tienen un área igual a

$$a(a-b).$$

Además, la región roja tiene un área de tamaño

$$b(a-b).$$

Por lo tanto, la región coloreada del la figura tiene el área

$$\mathcal{A}_{\text{color}} = a(a-b) + b(a-b),$$

que, usando la ley distributiva, se puede escribir como

$$\mathcal{A}_{\text{color}} = (a+b)(a-b).$$

De la Figura 5.6, también se puede observar que para obtener el área coloreada solo debemos quitar el área del cuadrado blanco al área del cuadrado con lados de tamaño a, es decir

$$\mathcal{A}_{\text{color}} = a^2 - b^2,$$

de donde

$$\mathcal{A}_{\text{color}} = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

es decir

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

que es lo queríamos demostrar.

Por ejemplo

$$(5+7)(5-7) = 12 \cdot (-2) = -24,$$

además

$$5^2 - 7^2 = 25 - 49 = -24,$$

por lo que

$$(5+7)(5-7) = 5^2 - 7^2 = -24.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

5.8. Ejercicios

1.- Desarrollar la expresión

$$(x-4)^2.$$

2.- Desarrollar la expresión

$$(x+5)^2.$$

3.- Desarrollar la expresión

$$(x+7)(x-7).$$

4.- Resolver la ecuación

$$(z+7)^2-(x-3)^2=0.$$

5.- Encontrar a y b tal que

$$x^2+14x+24=(x+a)(x+b).$$

6.- Encontrar a y b tal que

$$z^2-3z-28=(z+a)(z+b).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 6

Raíz cuadrada

En este capítulo estudiaremos la raíz cuadrada de un número positivo y sus propiedades.

6.1. Definición

Dado un número real positivo a se dice que

$$\sqrt{a}$$

es la raíz cuadrada de a si

$$\boxed{\sqrt{a}\sqrt{a} = a.}$$

Note que si

$$-\sqrt{a}$$

cumple que

$$\left(-\sqrt{a}\right)\left(-\sqrt{a}\right) = (-)(-)\sqrt{a}\sqrt{a} = a.$$

Así un número real positivo siempre tiene dos raíces cuadradas.

Por ejemplo, tenemos que

$$2 \cdot 2 = 4$$

así

$$\sqrt{4} = 2.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Además

$$(-2)(-2) = (-)(-)2 \cdot 2 = 4$$

así

$$\sqrt{4} = -2.$$

Por lo que

$$\sqrt{4} = 2, \quad \text{y} \quad \sqrt{4} = -2,$$

estas dos raíces se suele escribir de la forma

$$\sqrt{4} = \pm 2.$$

Como otro ejemplo, podemos ver que

$$3 \cdot 3 = 9$$

así

$$\sqrt{9} = 3.$$

Además

$$(-3)(-3) = (-)(-)3 \cdot 3 = 9$$

así

$$\sqrt{9} = -3.$$

Por lo que

$$\sqrt{9} = \pm 3.$$

También podemos ver que

$$4 \cdot 4 = 16$$

de donde

$$\sqrt{16} = 4.$$

Además

$$(-4)(-4) = (-)(-)4 \cdot 4 = 16$$

así

$$\sqrt{16} = -4.$$

Entonces

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

6.2. Raíz cuadrada de un producto

Supongamos que a y b son dos números reales positivos, entonces se cumple

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.}$$

Por definición sabemos que $\sqrt{ab}$ es un número real A tal que

$$A \cdot A = a \cdot b,$$

además como a y b son números positivos se cumple

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a \quad \text{y} \quad \sqrt{b}\sqrt{b} = b.$$

De donde

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}\sqrt{b}\right) = ab,$$

así el número

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

cumple la definición de raíz cuadrada de ab, de donde

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6,$$

además

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6,$$

así

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

También se puede ver que se cumple

$$\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7},$$

pues

$$\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}\right) = 3 \cdot 7 = 21,$$

el número

$$\sqrt{3 \cdot 7}$$

cumple la definición de raíz cuadrada de 21.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

6.3. Raíz cuadrada de una fracción

Supongamos que a y b son dos números reales positivos, entonces se cumple

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

Por definición sabemos que

$$\sqrt{\frac{a}{b}}$$

es un número real A tal que

$$A \cdot A = \frac{a}{b},$$

también por definición se cumple

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a \quad \text{y} \quad \sqrt{b}\sqrt{b} = b.$$

De donde

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a}{b},$$

por lo que el número

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

cumple la definición de raíz cuadrada de $\frac{a}{b}$ y

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5},$$

se puede ver que se cumple

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{4}{25},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

así la fracción

$$\frac{2}{5}$$

cumple la definición de raíz cuadrada de $\frac{4}{25}$.

Como otro ejemplo consideremos

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

en este caso se puede comprobar que se cumple

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3}{7},$$

así la fracción

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

cumple la definición de raíz cuadrada de $\frac{3}{7}$.

6.4. Raíz cuadrada de un número al cuadrado

Ahora demostraremos la igualdad

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.} \tag{6.1}$$

Primero supongamos que $a > 0$, entonces $a^2 > 0$, en este caso $a \cdot a = a^2$, así en este caso se cumple

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Ahora supongamos $a < 0$, entonces $-a > 0$, en este caso $(-a)\cdot(-a) = a\cdot a = a^2$, así en este caso se cumple

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Así, la igualdad (6.1) es correcta.

Por ejemplo, sabemos que $|-3| = 3$, además

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

por lo que

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

También podemos ver que $|-5| = 5$ y

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

de donde

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5.$$

6.5. Ejercicios

1.- Simplificar la expresión

$$\sqrt{81c^2} = ?$$

2.- Simplificar la expresión

$$\frac{27}{\sqrt{(-9)^2}} = ?$$

3.- Encontras los valores reales que satisfacen la desigualdad

$$\sqrt{(x-3)^2} = 9.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 7

Ecuación cuadrática

La llamada ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{7.1}$$

donde a, b, c son constantes con $a \neq 0$. Esta ecuación surge de manera natural de una amplia gama de aplicaciones, de hecho su solución es una de la fórmulas más útiles y famosas. Así que es importante saber usar la solución de esta ecuación.

Además, en la deducción de la solución de la ecuación cuadrática se usan la mayoría de las propiedades de los números reales, por lo que dominar la deducción de dicha solución es un indicador de que estamos entendiendo las propiedades de los números reales.

En este capítulo veremos tres deducciones de las soluciones de la ecuación cuadrática.

7.1. Primera deducción

Consideremos la ecuación

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,} \tag{7.2}$$

de donde

$$ax^2 + bx = -c,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

esta ecuación se puede escribir como

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c,$$

así

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

Se puede observar que esta última ecuación se puede expresar como

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x=-\frac{c}{a}$$

y sumando en ambos lados el término

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

encontramos

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}.$$

Note que usando la identidad

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

obtenemos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

Además, usando la ley de suma de fracciones y factorizando un término a, encontramos

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\ &= \frac{b^2a-4a^2c}{4a^2a}\\ &= \frac{a}{a}\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2a}\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Por lo tanto, usando las leyes de la raíz cuadrada, llegamos a

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

es decir

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de donde

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que toma la forma

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Esta última ecuación se conoce como Fórmula General.

En algunas regiones de México a la Fórmula General se le llama coloquialmente como *la chicharronera* o *la vieja confiable*.

7.2. Segunda deducción

Ahora veremos una deducción alternativa. Consideremos de nuevo la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7.3}$$

Multiplicando a esta ecuación por

$$4a,$$

obtenemos

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

la cual se puede escribir como

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac = 0$$

y sumando b^2 en ambos lados de esta ecuación llegamos a

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 + 4ac = b^2.$$

Además usando la identidad

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

se obtiene

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2,$$

que implica

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

por lo cual

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

entonces

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Note que esta ecuación es la Fórmula General.

7.3. Tercera deducción

Sabemos que si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$. Este resultado es útil para resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo la ecuación

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0, \tag{7.4}$$

implica

$$x - \alpha = 0 \quad \text{o} \quad x - \beta = 0,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$x = \alpha \quad \text{o} \quad x = \beta.$$

Esto quiere decir que la ecuación (7.4) tiene dos soluciones.

Ahora ocupando la propiedad distributiva se tiene

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta) &= xx - \alpha x - x\beta + \alpha\beta = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \beta,\end{aligned}$$

así, hemos resuelto la ecuación

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \beta = 0,$$

que es un caso particular de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad = 0.$$

En el tercer método para resolver la ecuación cuadrática lo que haremos es poner dicha ecuación de la forma (7.4).

Primero notemos que

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= ax^2 + \frac{a}{a}bx + \frac{a}{a}c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),\end{aligned} \tag{7.5}$$

también podemos observar que el término

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \tag{7.6}$$

casi tiene la forma

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2. \tag{7.7}$$

Veamos ahora cómo completar la expresión (7.6) para que tenga forma de un cuadrado perfecto. Primero notemos que al segundo miembro le falta un 2, pero considerando que $1 = \frac{2}{2}$, encontramos que

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = \left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x\right).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora a esta expresión le falta un término de la forma

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

considerando que

$$0 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

se llega a

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) &= \left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + 0\right) \\ &= \left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right). \qquad (7.8)\end{aligned}$$

Además, se puede observar que ocupando la expresión (7.7) se llega a

$$\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = \left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

por lo que sustituyendo este resultado en (7.8) se encuentra

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Se puede observar que considerando esta última expresión en la ecuación (7.5) se llega a

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right). \qquad (7.9)$$

Ahora analicemos el término

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a},$$

en este caso tenemos

$$\begin{aligned}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= -\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right) = -\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\ &= -\left(\frac{ab^2 - 4a^2c}{4aa^2}\right) = -\left(\frac{ab^2 - 4aac}{4aa^2}\right) \\ &= -\frac{a}{a}\left(\frac{b^2 - 4ac}{4aa^2}\right) = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right),\end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Adicionalmente, considerando la igualdad

$$\left(\sqrt{A}\right)^2=A$$

y las reglas de la raíz cuadrada se tiene

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Por lo tanto,

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Introduciendo este resultado en (7.9) se llega a

$$ax^2+bx+c \;=\; a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right), \qquad (7.10)$$

por lo que usando la expresión

$$A^2-B^2=(A-B)\,(A+B)$$

se encuentra

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\ &= a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Además, ocupando la ley de los signos se llega a

$$ax^2+bx+c \;=\; a\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right].$$

Nótese que si definimos

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

se tiene

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Por lo que la ecuación

$$ax^2 + bx + c \;=\; a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

tiene la forma (7.4) y sus soluciones son $x = x_1$ y $x = x_2$. Estas soluciones se puede escribir simplemente como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7.11}$$

que es la Fórmula General.

Las ecuaciones cuadráticas aparecen en varias aplicaciones, por esa razón culturas de diversas épocas encontraron métodos para resolverlas. Existen evidencias de que los babilonios sabían resolver algunas ecuaciones cuadráticas desde el año 2000 antes de Cristo. Diferentes historiadores argumentan que los conoci-mientos de los babilonios pasaron a los egipcios y después a los griegos, quienes utilizaron dicha ecuación y ocuparon métodos geométricos para obtener algunas de sus soluciones. Además, en el siglo IX después de Cristo, el matemático árabe **Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi** encontró métodos generales para resolver diversas ecuaciones cuadráticas con coeficientes positivos. Posteriormente el matemático de la India **Bhaskara (1114-1185)** encontró fórmulas generales para la solución de diversas ecuaciones cuadráticas y fue el primero en notar que estas ecuaciones tienen dos soluciones, la Fórmula General tal y como hoy la conocemos está de forma implícita en los trabajos de Bhaskara. En el siglo XVI el abogado y matemático francés **Francois Viéte (1540-1603)** realizó una deducción elegante de solución de la ecuación cuadrática y obtuvo de forma explícita la Fórmula General tal y como hoy la conocemos.

7.4. Ejemplos

Como un ejemplo consideremos la ecuación cuadrática

$$4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

en este caso las soluciones son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{8} \\ &= \frac{-5 \pm 3}{8}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{-5+3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}, \\ x_- &= \frac{-5-3}{8} = \frac{-8}{8} = -1, \end{aligned}$$

es decir las soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$\begin{aligned} x_+ &= -\frac{1}{4}, \\ x_- &= -1. \end{aligned}$$

Note que

$$4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{4}{16} - \frac{5}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{-5+4}{4} = \frac{1-1}{4} = 0,$$
$$4(-1)^2 + 5(-1) + 1 = 4 - 5 + 1 = 0.$$

Por lo tanto las soluciones obtenidas son correctas.

Ahora consideremos la ecuación

$$12x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0 \tag{7.12}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}}{2 \cdot 12} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \left(\frac{-4}{4}\right) 12}}{24} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-)12}}{24} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{24} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{24} \\ &= \frac{-2 \pm 4}{24}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{-2+4}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}, \\ x_- &= \frac{-2-4}{24} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

es decir las soluciones son

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{1}{12}, \\ x_- &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Al sustituir estas soluciones en la ecuación cuadrática (7.12) obtenemos

$$\begin{aligned} 12\left(-\frac{1}{12}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{4} &= \frac{12}{(12)^2} + \frac{2}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{2-3}{12} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0, \\ 12\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} &= \frac{12}{16} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} + \frac{-3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0. \end{aligned}$$

Así las soluciones obtenidas son correctas.

Como otro ejemplo obtengamos las soluciones de la ecuación

$$5x^2 + 4x - 3 = 0, \tag{7.13}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

en este caso tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4(4 + 5 \cdot 3)}}{10} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{(4 + 15)}}{10} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{10} \\ &= \frac{2(-2 \pm \sqrt{19})}{10} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{5} \end{aligned}$$

por lo que las soluciones son

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{-2 + \sqrt{19}}{5}, \\ x_- &= \frac{-2 - \sqrt{19}}{5}. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Al sustituir estas soluciones en la ecuación cuadrática (7.13) llegamos a

$$\begin{aligned}
5\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}\right)^2+4\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}\right)-3 &= \frac{5}{5\cdot 5}\left((-2)^2-2\cdot 2\sqrt{19}+\left(\sqrt{19}\right)^2\right)\\
&\quad +\frac{-8+4\sqrt{19}}{5}-3\\
&= \frac{\left(4-4\sqrt{19}+19\right)}{5}\\
&\quad +\frac{-8+4\sqrt{19}}{5}-3\\
&= \frac{\left(23-4\sqrt{19}-8+4\sqrt{19}\right)}{5}-3\\
&= \frac{15}{5}-3=3-3=0,\\
5\left(\frac{-2-\sqrt{19}}{5}\right)^2+4\left(\frac{-2-\sqrt{19}}{5}\right)-3 &= \frac{5}{5\cdot 5}\left((2)^2+2\cdot 2\sqrt{19}+\left(\sqrt{19}\right)^2\right)\\
&\quad +\frac{-8-4\sqrt{19}}{5}-3\\
&= \frac{\left(4+4\sqrt{19}+19\right)}{5}\\
&\quad +\frac{-8-4\sqrt{19}}{5}-3\\
&= \frac{\left(23+4\sqrt{19}-8-4\sqrt{19}\right)}{5}-3\\
&= \frac{15}{5}-3=3-3=0,
\end{aligned}$$

por lo cual las soluciones obtenidas son correctas.

7.5. El discriminante de una ecuación cuadrática

La solución de cualquier ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

está dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como podemos ver, para obtener dicha solución debemos obtener la raíz cuadrada de

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac,} \tag{7.14}$$

a esta expresión se le llama *discriminante*. Si el discriminante es igual a cero, es decir si

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,$$

la ecuación cuadrática solo tiene la solución

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Si el discriminate es positivo, es decir

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

la ecuación cuadrática tiene las dos soluciones dadas por la fórmula general.

Ahora, recordemos que la raíz cuadrada de un número real solo está definida cuando el número real es positivo o cero. Por lo que si el discriminante es negativo, es decir si

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0, \tag{7.15}$$

las soluciones de la ecuación cuadrática no están definidas en los números reales. En muchas aplicaciones si el discriminante es negativo significa que el problema no tiene solución. Sin embargo, en otros casos significa que la solución del problema no es un número real. Cabe señalar que es posible construir nuevos números donde los números negativos tienen raíz cuadrada. A estos números se les llaman: números imaginarios, y tienen una amplia gamma de aplicaciones. Sin embargo, estudiar esos números escapan de los objetivos de estas notas, por lo que no los estudiaremos.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

7.6. La proporción dorada

Es complicado decir cuando algo es bello o clasificar la belleza. Sin embargo, después de varias observaciones, los antiguos descubrieron que la belleza de las flores, plantas, animales, rostros, cuerpos y construcciones se encuentra en sus proporciones. De estas observaciones y mediciones surgió lo que los griegos llamaron la *proporción divina*, *proporción áurea*, *proporción dorada*.

Veamos como surge la proporción dorada. Supongamos que tenemos un segmento largo de tamaño L y un segmento corto de tamaño l, con $l < L$. La proporción de estás longitudes está dada por la cantidad

$$\frac{L}{l},$$

note que este número es mayor a uno.

Entonces, se dice que los segmentos L y l tiene la proporción dorada si se cumple que

$$\Phi = \frac{L}{l} = \frac{L+l}{l}.$$

Se puede observar que la igualdad

$$\frac{L}{l} = \frac{L+l}{L},$$

se puede escribir como

$$\frac{L}{l} = 1 + \frac{l}{L} = 1 + \frac{1}{\frac{L}{l}}.$$

Además, usando la definción de Φ, se obtiene

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi},$$

que implica la ecuación cuadrática

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0,$$

de donde

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Debido a que el número

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es negativo, la proporción dorada es

$$\boxed{\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.} \tag{7.16}$$

que también se puede expresar como

$$\boxed{\Phi = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.}$$

Por lo tanto, dos segmentos de tamaños L y l tienen la proporción dorada si cumplen que

$$\frac{L}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi. \tag{7.17}$$

7.6.1. Rectángulo dorado

Particularmente es interesante el llamado rectángulo dorado, el cual satisface que sus lados cumplen la proporción dorada. Un rectángulo de estas características se muestra en la Figura 7.1. Rectángulos con la proporción áurea se encuentran el diversas construcciones antiguas y modernas, en anuncios publicitarios, en el diseño de tarjetas, en cuadros de pintura, en el cuerpo de los seres humanos y otras especies, etcétera.

Los rectángulos de proporción áurea tiene propiedades muy interesantes. En particular, de un rectángulo de proporción áurea, se puede obtener otro rectángulo también de proporción áurea. Para probar esta afirmación observemos que el lado mayor del rectángulo de la Figura 7.1 mide

$$L = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

mientras que el lado menor mide a. Así, dentro del rectángulo dorado podemos introducir un cuadrado con lados de tamaño a y un rectángulo de lado menor

$$L - a = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

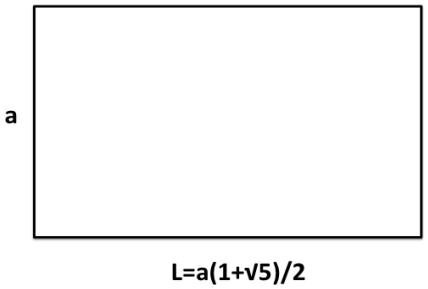


Figura 7.1: Rectángulo con la proporción áurea.

y lado mayor de longitud a, como se muestra en la Figura 7.2. Los lados de este nuevo rectángulo también satisface la proporción áurea, en efecto

$$\frac{a}{L-a} = \frac{a}{a\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

es decir

$$\Phi = \frac{a}{L-a}.$$

Así hemos probado que dado un rectángulos de lados a y L que satisfacen la proporción áurea

$$\Phi = \frac{L}{a}$$

se puede obtener otro rectángulo que satisface la proporción áurea con lados a y $L-a$.

Además, debido a que el nuevo rectángulo satisface la proporción áurea, de él podemos obtener otro rectángulo cuyos lados cumplen la proporción áurea, este proceso se puede repetir las veces que se quiera. Por lo que, dado un rectángulo dorado, podemos obtener un número infinito de rectángulos dorados, como se muestra en la Figura 7.3.

Ahora, en el proceso ocupado para obtener los rectángulos dorados, por cada rectángulo dorado formado tenemos un cuadrado. Note que si se toma el lado de cada cuadrado como el radio de un semicírculo se obtiene una espiral, como se muestra en la Figura 7.4. A esta espiral se le llama espiral dorada y aparece en algunas plantas y galaxias espirales.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

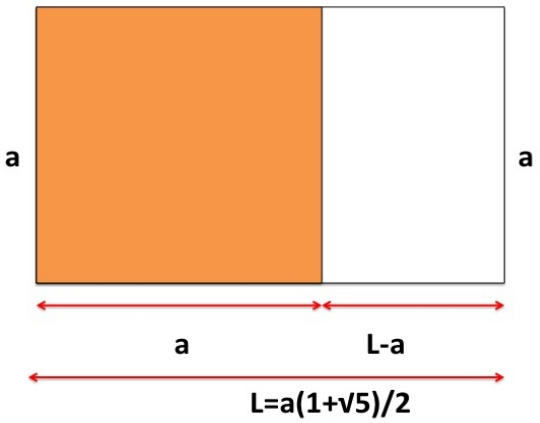


Figura 7.2: Obtención de un rectángulo dorado de un rectángulo dorado.

7.7. Ejercicios

1.- Resolver la ecuación cuadrática

$$-3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

2.- Resolver la ecuación cuadrática

$$\frac{4}{5}x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

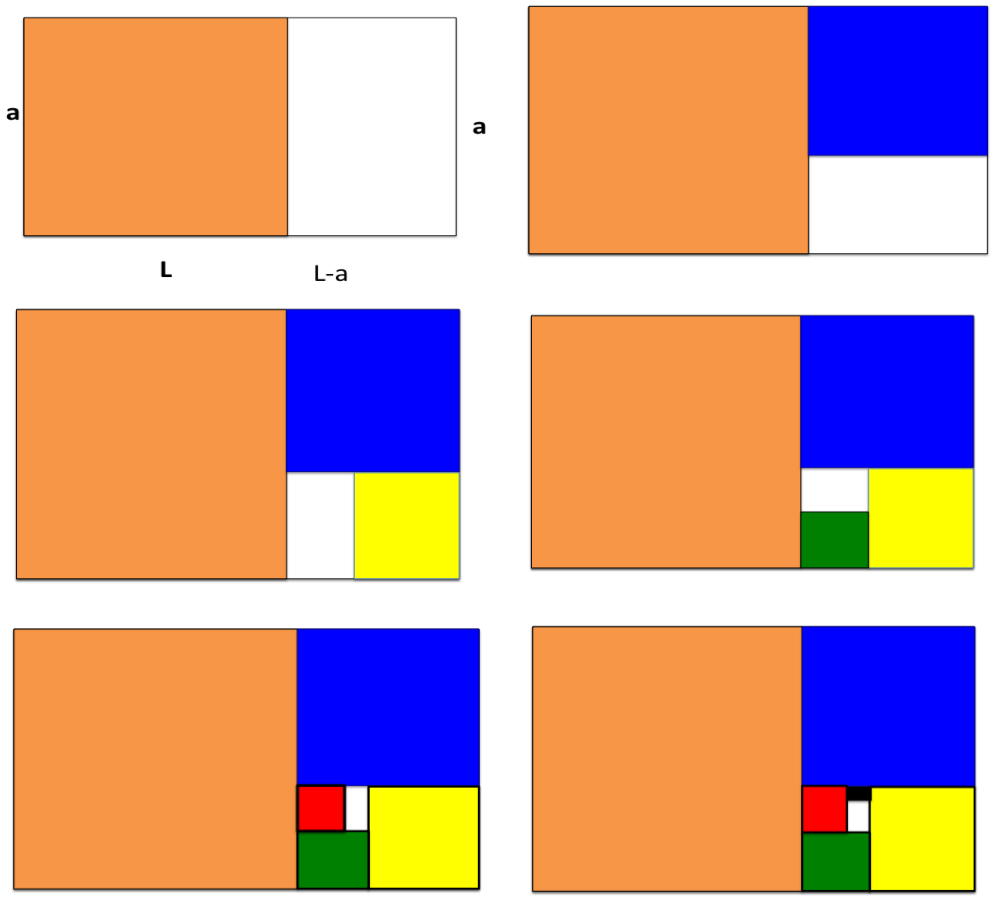


Figura 7.3: Generación de una sucesión de rectángulos dorados de un solo rectángulo dorado.

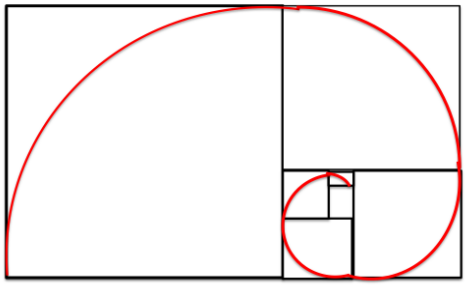


Figura 7.4: Espiral áurea obtenida de una sucesión de rectángulos dorados.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 8

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, al lado menor del triángulo que toca el ángulo α se le llama *Cateto Adyacente* (base), al lado opuesto al ángulo α se le llama *cateto opuesto* (altura) y al lado mayor que toca al ángulo α se le llama *hipotenusa*, como se muestra en la Figura 8.1.

El teorema de Pitágoras establece que

$$\boxed{(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto adyacente})^2 + (\text{cateto opuesto})^2 .} \tag{8.1}$$

Note que si al cateto adyacente lo identificamos con a, al cateto opuesto con b y a la hipotenusa con c, el teorema de Pitágoras toma la forma

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.} \tag{8.2}$$

Para demostrar el Teorema de ocuparemos cuatro copias de un mismo triángulo rectángulo y seguiremos el procedimiento de la figura (8.2) Es decir, primero colocamos el triángulo amarillo como muestra la Figura 8.2, después colocamos otra copia del mismo triángulo de tal forma que tengamos una base de tamaño $a + b$ y el lado b de primer triángulo sea paralelo al lado a del segundo triángulo, como se muestra en la Figura 8.2. Posteriormente colocaremos otra copia del mismo triángulo, de tal forma que en la parte izquierda tengamos un lado de tamaño $a + b$ y el lado de tamaño b del tercer triángulo sea paralelo al lado a del primer triángulo, como se muestra en la Figura 8.2. Como último paso, colocaremos un cuarto triángulo de tal forma que en la parte superior tengamos un lado de tamaño $a + b$ y el lado a del cuarto triángulo sea paralelo

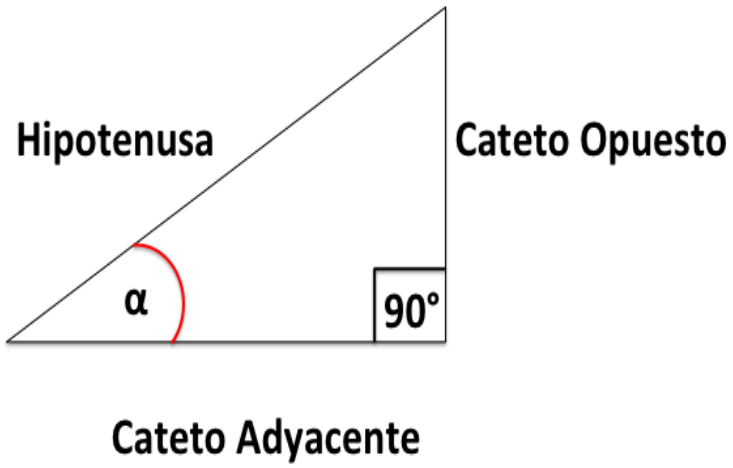


Figura 8.1: Triángulo rectángulo.

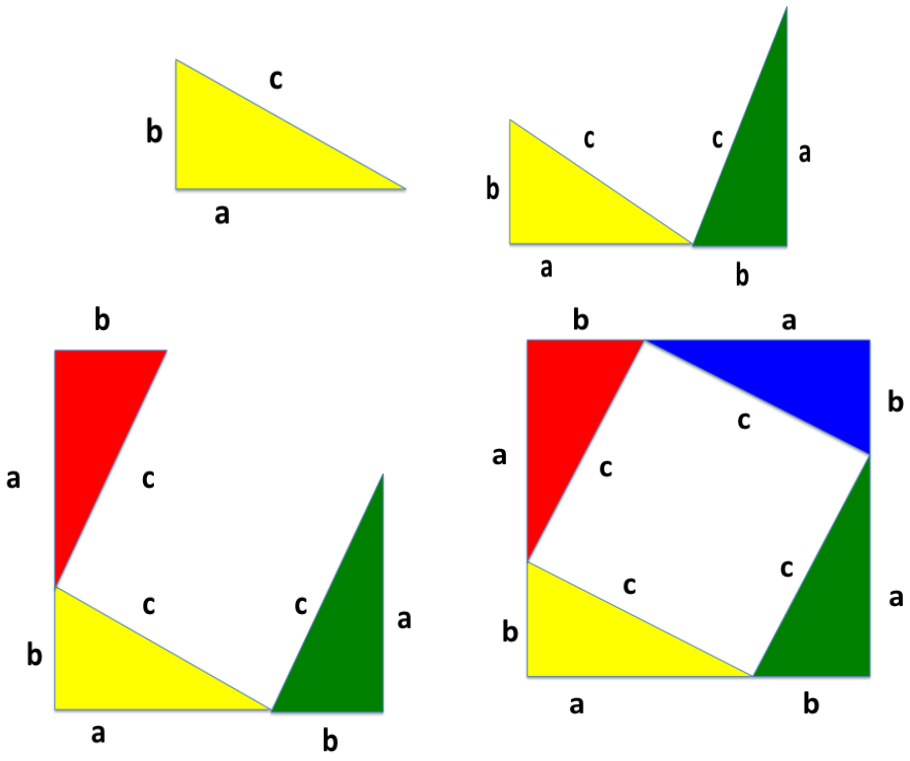


Figura 8.2: Prueba de Teorema de Pitágoras.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

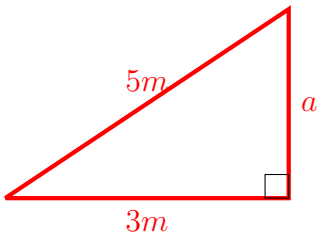


Figura 8.3: Ejemplo de Teorema de Pitágoras

al lado b del segundo triángulo, como se muestra en la Figura 8.2.

En la Figura 8.2 se puede observar que hemos formado un cuadrado de lados con longitud $a+b$, por lo cual este cuadrado tiene área

$$\mathcal{A} = (a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2. \tag{8.3}$$

De la Figura 8.2, también se puede observar que el cuadrado con lados de tamaño $a+b$ está compuesto por cuatro triángulos rectángulos de base a y altura b y un cuadrado interior cuyos lados tienen longitud c. Así, el área del cuadrado de lados c más el área de los cuatro triángulos rectángulos es

$$\mathcal{A} = c^2 + 4\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) = c^2 + 2a \cdot b.$$

Esta área debe ser la misma que el área (8.3), por lo que se debe cumplir la igualdad

$$\mathcal{A} = c^2 + 2a \cdot b = \mathcal{A} = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

es decir

$$c^2 + 2a \cdot b = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

de donde

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

8.1. Ejemplos

El Teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones, por ejemplo supongamos que queremos encontrar el valor de lado opuesto del triángulo rectángulo de la Figura 8.3. En este caso tenemos que

$$5^2 = a^2 + 3^2$$

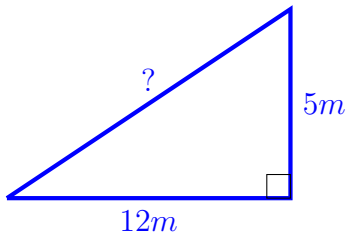


Figura 8.4: Ejemplo para determinar la hipotenusa

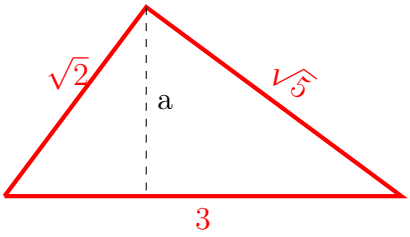


Figura 8.5: Ejemplo para determinar la altura a

de donde

$$a^2 = 25 - 9 = 16$$

es decir

$$a = \sqrt{16} = 4.$$

Además, supongamos que deseamos determinar el valor del la hipotenusa del triángulo rectángulo de la Figura 8.4. En este caso se debe cumplir que

$$c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169,$$

de donde

$$c = \sqrt{169} = 13.$$

Ahora, supongamos que debemos determinar el valor de la altura a del triŕngulo de la Figura 8.5. En este caso no tenemos un triángulo rectángulo, sin embargo con el lado a se forman dos triángulos rectángulos. Podemos notar que a la izquierda tenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa igual $\sqrt{2}$, cateto opuesto de longitud a y supongamos que el cateto adyacente vale x.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Mientras que a la derecha tenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa igual $\sqrt{5}$, cateto opuesto de longitud a y supongamos que el cateto adyacente vale y. Se puede observar que se cumple la relación

$$x + y = 3. \tag{8.4}$$

Además, ocupando el Teorema de Pitágoras a cada triángulo rectángulo se encuentra

$$x^2 + a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2, \tag{8.5}$$

$$y^2 + a^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5. \tag{8.6}$$

Ahora, note que la ecuación (8.4) implica

$$y = 3 - x,$$

por lo que la ecuación (8.6) se puede escribir de la forma

$$5 = (3 - x)^2 + a^2 = 3^2 - 6x + \left(x^2 + a^2\right).$$

Entonces, tomando en cuenta la ecuación (8.5) se obtiene

$$5 = 9 - 6x + 2$$

que implica

$$x = 1.$$

Usando este valor en la ecuación (8.5) encontramos que

$$1 + a^2 = 2,$$

de donde

$$a = 1.$$

Pitágoras (569 a. C - 475 a. C)

Nació en Samo, actualmente parte de Grecia. Su padre era mercader, por lo que en su infancia pudo viajar a diversos lugares como Tiro, Siria, Mileto e Italia. En esos lugares fue instruido en mú-sica y poesía, particularmente en las obras de Homero. Fue alumno de filósofos como Pherekydes, Tales de Mileto y Anaximandro.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Gracias a Anaximandro, Pitágoras se interesó en la geometría y la cosmología. Por recomendaciones de sus maestros viajó a Egipto para profundizar sus conocimientos en matemáticas. En Egipto fue influido por las costumbres de los sacerdote de ese lugar y se convirtió en vegetariano. Posteriormente, viajó a Babilonia en donde perfeccionó sus conocimientos en diversas áreas como la música, las matemáticas y otras ciencias. Después regresó a Grecia y se estableció en Crotona, hoy parte de Italia. En Crotona fundó un círculo de estudios para desarrollar los temas que le interesaban, los miembros de este grupo de estudios se hacían llamar los *matematikois* o los pitagóricos. En los círculos de estudios de Pitágoras se establecía que en su estado más profundo la realidad y la naturaleza es matemática. Así mismo, a los símbolos y en particular a los números, les atribuían significados y poderes místicos. Además pensaban que todas cosas del Cosmos y sus relaciones podían ser reducidas a relaciones numéricas. A Pitágoras le preocupaban los fundamentos de las matemáticas, por lo que él y sus alumnos buscaban dar pruebas rigurosas de sus resultados. Debido a este último hecho a Pitágoras se le considera el primer matemático puro de la historia. Vale la pena mencionar que el Teorema de Pitágoras era conocido en Babilonia desde al menos 1000 años antes de la era de Pitágoras y también fue conocido en la mayoría de las grandes culturas del mundo, sin embargo se cree que Pitágoras fue el primero en dar una prueba rigurosa de este teorema y por eso lleva su nombre. En la música encontró relaciones matemáticas entre la longitud de una cuerda de monocordio y el sonido que emite. Para algunos historiadores este descubrimiento fue la primera ley física expresada de forma matemática y por lo mismo el primer resultado de la física teórica. Debido a que Pitágoras y sus estudiantes trabajaban de forma colectiva, es complicado saber que resultados eran de Pitágoras y cuáles fueron aportaciones de sus estudiantes. Después de la muerte de Pitágoras su círculo de estudios adquirió poder político y también enemigos. El grupo de los pitagóricos fue violentamente reprimido en el año de 406 a. C, cuando fueron asesinados más de 50 de ellos. Algunos de los pitagóricos que pudieron escapar viajaron a Tebas para fundar otra escuela y otros prefirieron fundar grupos secretos. La obra de Pitágoras y sus alumnos influyeron a filósofos como Platón, Aristóteles y Sócrates, así como en matemáticos como Euclides. Por todo ello, Pitágoras representa uno de los pilares de la cultura occidental.

8.2. Ejercicios

1.- Considere el triángulo rectángulo de la figura 8.6. Si el ángulo θ vale 30° y la hipotenusa vale 10, encontrar el ángulo α, el cateto opuesto y el cateto

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

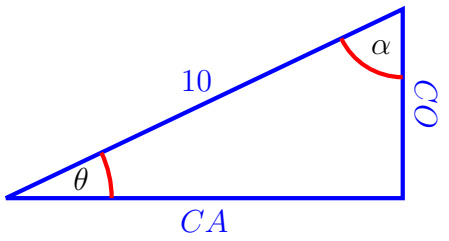


Figura 8.6:

adyacente.

2.- Considere el triángulo rectángulo de la figura 8.7. Si el cateto opuesto vale 7 y el cateto opuesto adyacente vale 4, calcular la hipotenusa y los ángulos θ y α.

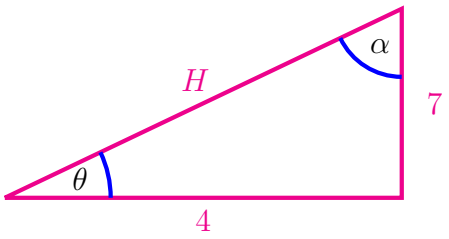


Figura 8.7:

3.- Considere el triángulo rectángulo de la figura 8.8. La hipotenusa vale 7 y α vale 25°, calcular los catetos y el ángulo θ.

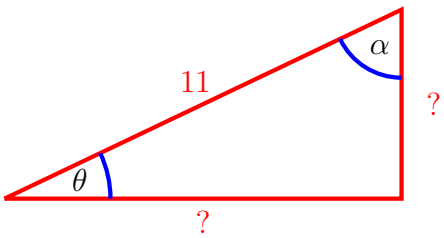


Figura 8.8:

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

4.- Considere el triángulo rectángulo de la figura 8.9. Si la hipotenusa vale 8 y el cateto adyacente vale 5, calcular el cateto opuesto y los ángulos θ y α.

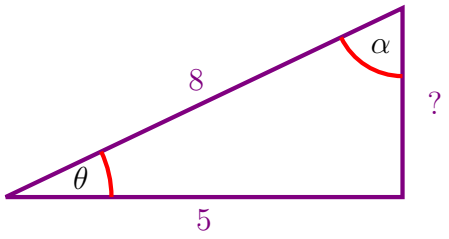


Figura 8.9:

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 9

Plano cartesiano

En la vida diaria es importante saber como cambia una cantidad con respecto a otra. Nos interesa, por ejemplo, saber como cambia nuestro peso con respecto a la cantidad de grasas que comemos, la variación de la temperatura conforme cambia la hora del día, cómo cambia nuestro salario conforme aumenta el tiempo que trabajamos, cómo cambia nuestra estatura con respecto a la edad que tenemos o cómo cambia el precio del dólar en el tiempo.

Para entender ese tipo de fenómenos es conveniente graficar los valores de las cantidades que queremos estudiar. Por ejemplo, la tabla (9.1) muestra como varió el precio del dólar en la semana de los días del 20 al 24 del mes de abril del 2020 en pesos mexicanos.

Día	Precio del dólar en pesos mexicanos
Lunes	24.01
Martes	24.38
Miércoles	24.49
Jueves	24.77
Viernes	24.99

Cuadro 9.1: Tabla del precio del dólar en pesos mexicanos en la semana del 20 al 24 de Abril del 2020.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

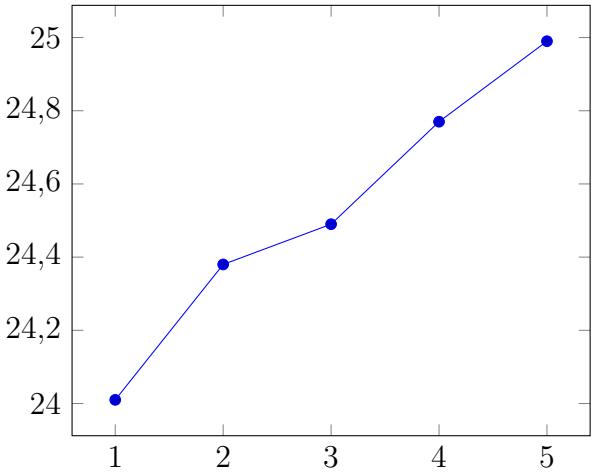


Figura 9.1: Precio del dólar en pesos mexicanos en la semana del 20 al 24 de Abril del 2020.

También es posible poner esa información ocupando dos rectas numéricas perpendiculares, en donde los dos ceros de cada recta numérica coincidan. Por ejemplo, para el caso del precio del dólar en pesos mexicanos, en la recta horizontal podemos poner los días y en la recta vertical podemos poner el precio del dólar, como se muestra en la Figura 9.1.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

En otro ejemplo, en la tabla (9.2) se muestra una como varía la temperatura en la ciudad de México por hora en un día de primavera.

Hora del día	Temperatura °C
1:00	19
2:00	18
3:00	18
4:00	17
5:00	16
6:00	15
7:00	15
8:00	16
9:00	19
10:00	21
11:00	23
12:00	24
13:00	26
14:00	27
15:00	27
16:00	27
17:00	26
18:00	24
19:00	23
20:00	21
21:00	20
22:00	19
23:00	19
24:00	19

Cuadro 9.2: Temperatura

En este caso, en una recta horizontal podemos poner las horas del día y en una recta vertical podemos poner la temperatura medida en cada hora, tal y como se muestra en la Figura 9.2.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

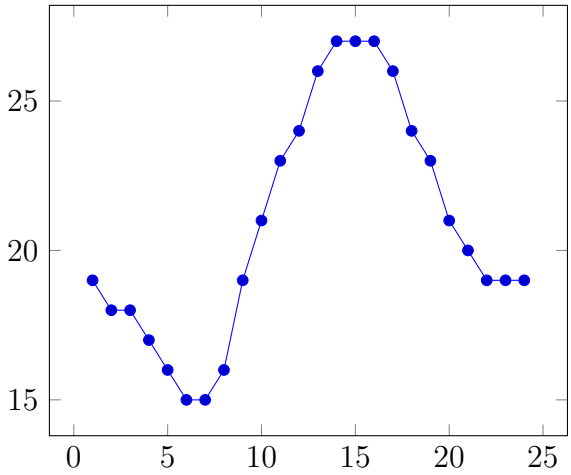


Figura 9.2: Temperatura por hora en un día de la primavera en la ciudad de México.

Si tenemos dos variables, x y y, siempre podemos usar dos rectas perpendiculares para traficar los valores de las variables. Por lo general, en el eje horizontal se ponen los valores de la variable x y en el eje vertical se ponen los valores de la variable y. Así, a cada par de puntos (x, y) le corresponde un punto en el plano, como se muestra en la Figura 9.3. A este plano se le llama plano cartesiano; el nombre del plano es en honor al filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien mostró la utilidad de ocupar un plano para estudiar el comportamiento de dos variables.

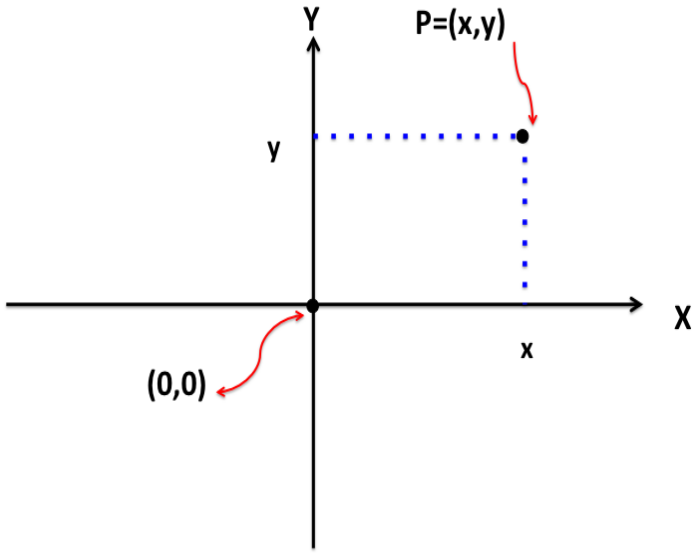


Figura 9.3: Punto en un plano cartesiano.

Al eje horizontal del plano cartesiano se le llama eje de las abscisas y al eje vertical se le llama eje de la ordenadas. También se puede observar que el plano cartesiano se divide en cuatro regiones, a cada una de ellas se le llama cuadrantes. En el primer cuadrante los valores de los dos ejes son números son positivos, en el segundo cuadrante los valores de la recta horizontal son negativos y los de la recta vertical son positivos, en el tercer cuadrante los valores de ambos ejes son negativos, en el cuarto cuadrante los valores del eje horizontal son positivos y los del eje vertical son negativos. Esta información se representa en la Figura 9.4.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

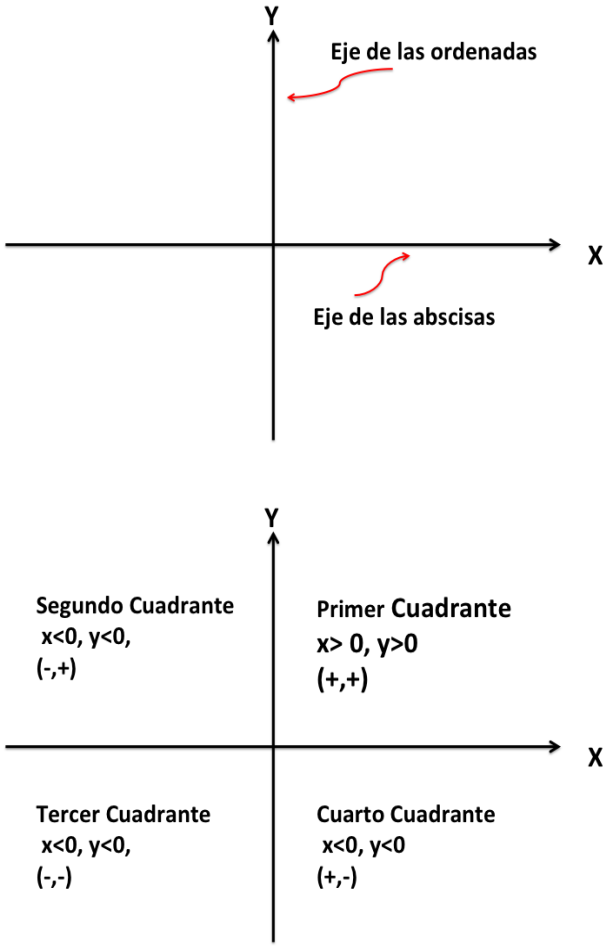


Figura 9.4: Ejes y cuadrantes.

La ventaja de poner la información de dos variables en el plano cartesiano es que podemos usar diversos resultados de la geometría para estudiar la información que nos interesa. Por ejemplo, podemos saber a qué distancia del origen $(0, 0)$ está un punto $P = (x, y)$. Para conocer esa distancia, del origen trazamos una recta al punto P, como se muestra la Figura 9.5. De esa figura podemos ver que se forma un triángulo rectángulo donde el cateto adyacente tiene longitud x, el cateto tiene longitud y y la hipotenusa tiene la longitud de la recta que va del origen al punto P. Por lo tanto, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que la distancia r de un punto del plano $P = (x, y)$ al origen cumple,

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

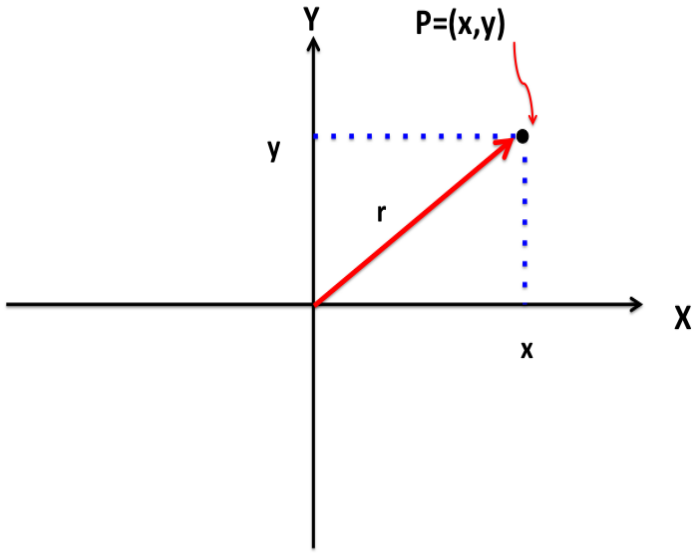


Figura 9.5: Distancia de un punto al origen.

es decir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Además, si tenemos dos puntos en el plano podemos definir la distancia que hay entre ellos. En efecto, supongamos que tenemos los puntos en el plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. Entre estos puntos se puede trazar un segmento de recta que una a esos puntos, como se muestra en la Figura 9.6. Se puede definir la distancias d entre los puntos P_1 y P_2 como la longitud del segmento que los une. Ahora, de la Figura 9.6, se puede observar que se forma un triángulo rectángulo donde el cateto adyacente tiene longitud $x_2 - x_1$, el cateto tiene longitud $y_2 - y_1$ y la hipotenusa tiene la longitud del segmento de recta que une a los puntos P_1 y P_2. Por lo tanto, ocupando el teorema de Pitágoras, se puede observar que las distancia entre el punto P_1 y P_2 cumple

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

es decir

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

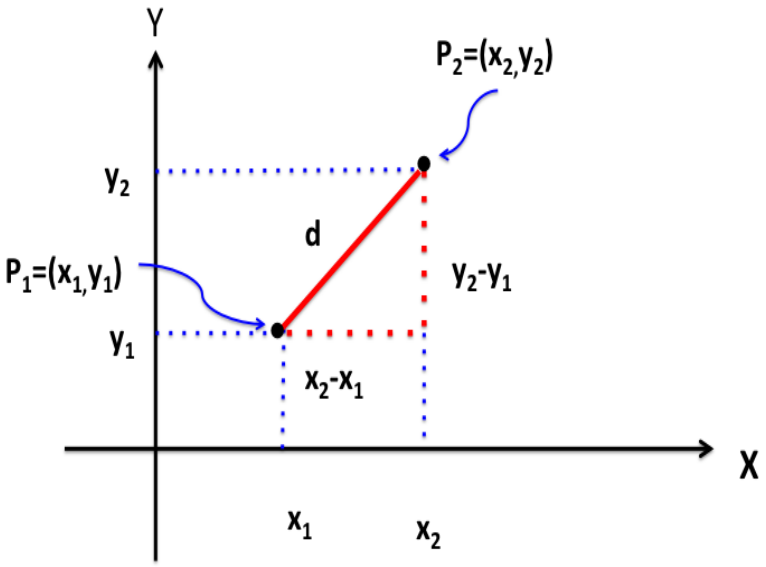


Figura 9.6: Distancia entre dos puntos en el plano.

El plano cartesiano tiene una amplia cantidad de aplicaciones. Su uso es fundamental en la geometría, geografía, arquitectura, física, finanzas, economía, etcétera.

René Descartes (1596-1650)

Fue un matemático, físico y filósofo francés. Siendo apenas un adolescente se interesó por los filósofos y matemáticos griegos. Asombrado por la belleza y la solidez de los resultados matemáticos que apren-dió de los textos griegos, se preguntó si el resto del conocimiento humano podría tener métodos y razonamientos semejantes. Así, después de años de estudio y reflexión, escribió su obra fundamental llamada *El Discurso del Método*, gra-cias a la cual es considerado el padre de la filosofía moderna. Debido a que sus ideas eran contrarias a la época conservadora que le tocó vivir, algunas universidades prohibieron sus libros. Como físico se sintió atraído por el trabajo sobre astronomía de Copernico, en cual se argumentaba que el Sol es el centro del

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

sistema planetario y no la Tierra. Pero, debido a que la Iglesia castigó a Galileo por apoyar las ideas de Copernico, prefirió mantener en secreto sus reflexiones sobre astronomía. Así mismo, por temor a la inquisición, retiró de la imprenta algunas de sus obras y mantuvo en secreto su admiración por Copernico y Galileo. Sin embargo, intentó explicar diferentes fenómenos físicos que le parecían de una belleza extraordinaria, por ejemplo, en óptica fue de los primeros en dar una explicación a la formación del arcoiris. Como matemático, unió la geometría con el álgebra dando lugar a lo que hoy se llama geometría analítica. Notablemente sus trabajos sobre rectas tangentes dieron las bases para que después Newton y Leibniz pudieran desarrollar el cálculo diferencial. Su obra en matemáticas influyó en todas las áreas, de hecho él fue el primero en usar las letras x y y para denotar variables y los ejes del espacio plano de dos dimensiones, notación que en la actualidad se sigue usando. Descartes murió un 11 de Febrero de 1650, registros de su época señalan que su muerte fue causada por una neumonía, pero estudios recientes sugieren que fue envenenado con arsénico. Después de más de tres siglos de su muerte, algunas de sus reflexiones son parte del dominio popular en varias partes del mundo, por ejemplo su celebre frase: *pienso, luego existo.*

9.1. Ejercicios

1.- Obtener la distancia entre los punto

$$P_1 = (2, 3), \quad P_2 = (8, 11).$$

2.- Obtener la distancia entre los punto

$$P_1 = (7, -5), P_2 = (-9, 3).$$

3.- Graficar en un plano la temperatura del lugar en que vives de la última semana, toma lo valores del tiempo en el eje x en horas y en el eje y los valores de la temperatura en grados centígrados.

4.- Usando un mapa de tu localidad coloca el origen del plano cartesiano en tu casa.

a) Calcula las coordenadas cartesianas de tu escuela, el cine más cercano, la casa de tu pareja y el mercado más cercano.

b) Calcula la distancia de tu casa a esos puntos.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

c) ¿Por qué razón la distancia que calculaste no coincide con la distancia registrada en el mapa?

5.- Las variables x y y se relacionan con la ecuación

$$y = 3x^2,$$

graficar esta ecuación en el plano cartesiano.

6.- Las variables x y y se relacionan con la ecuación

$$y = |x|.$$

dar la gráfica de esta expresión en el plano cartesiano.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 10

Trigonometría

En este capítulo estudiaremos los aspectos más importantes de la trigonometría y algunas de sus aplicaciones.

10.1. Funciones seno y coseno

Consideremos el triángulo rectángulo de la Figura 10.1 En este caso supondremos a es la longitud del cateto adyacente y b es la longitud del cateto opuesto, además c representará la longitud de la hipotenusa. Entonces definamos las funciones seno y coseno de un ángulo α como:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}, \tag{10.1}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}. \tag{10.2}$$

Estas dos funciones tienen una amplia gama de aplicaciones, por lo que es importante entenderlas bien.

De las definiciones (10.1-10.2) nos podemos dar cuenta que los catetos del triángulo rectángulo se pueden expresar en términos del álguno α y la hipotenusa c. En efecto, de las ecuaciones (10.1-10.2) podemos observar que se cumple

$$\begin{aligned} \text{cateto adyacente} &= (\text{hipotenusa})\cos\alpha \\ \text{cateto opuesto} &= (\text{hipotenusa})\sin\alpha, \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

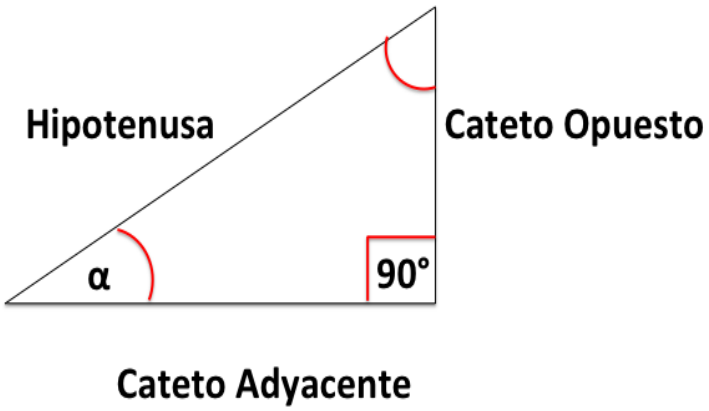


Figura 10.1: Triángulo rectángulo.

es decir

$$\boxed{\begin{aligned} a &= c\cos\alpha, \\ b &= c\sin\alpha. \end{aligned}} \tag{10.3}$$

$$\tag{10.4}$$

Además, de acuerdo al teorema de Pitágoras tenemos

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

de donde

$$(c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 = c^2,$$

es decir

$$c^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha = c^2,$$

por lo tanto

$$c^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = c^2.$$

Finalmente encontramos la identidad trigonométrica

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

10.2. Ángulos notables

Consideremos algunos ángulos particulares y el valor de las funciones coseno y seno es estos ángulos.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Figura 10.2: Triángulo con ángulo cero.

10.2.1. Ángulo$= 0^o = 0$

Primero veamos el caso en que el ángulo es cero. Note en este caso el triángulo en realidad es una línea horizontal, como se muestra en la Figura 10.2. Así, si el ángulo es cero el triángulo rectángulo no tiene altura, esto quiere decir que el cateto opuesto es cero, entonces

$$\text{cateto opuesto} = (\text{hipotenusa}) \sin 0 = 0,$$

esto implica

$$\sin 0 = 0.$$

Además, si el ángulo es cero, la hipotenusa y el cateto adyacente tienen el mismo valor, entonces considerando que

$$\text{cateto adyacente} = (\text{hipotenusa}) \cos 0,$$

obtenemos

$$\cos 0 = 1.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1.}$$

10.2.2. Ángulo $= 90^o = \frac{\pi}{2}$

Ahora veamos el caso en que el ángulo es

$$\frac{\pi}{2} = 90^o.$$

Note en este caso el triángulo en realidad es una línea vertical, como se muestra en la Figura 10.3. Así, si el ángulo es $\frac{\pi}{2}$ la altura coincide con la hipotenusa, entonces la igualdad

$$\text{cateto opuesto} = (\text{hipotenusa}) \sin \frac{\pi}{2}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Figura 10.3: Triángulo con ángulo de 90°

implica

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Además, si el ángulo es $\frac{\pi}{2}$ el triángulo no tiene base y como la base del triángulo coincide con el cateto adyacente, entonces en este caso el cateto adyacente es cero. Por lo tanto, considerando que

$$\text{cateto adyacente} = (\text{hipotenusa}) \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

obtenemos

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Así

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0.}$$

10.2.3. Ángulo$= 45^o = \frac{\pi}{4}$

Para calcular el valor de las funciones coseno y seno cuando el ángulo es igual a $\frac{\pi}{4}$, es es lo mismos que 45°, consideremos el cuadrado de la Figura 10.4. Supondremos que cada lado del cuadrado mide a,

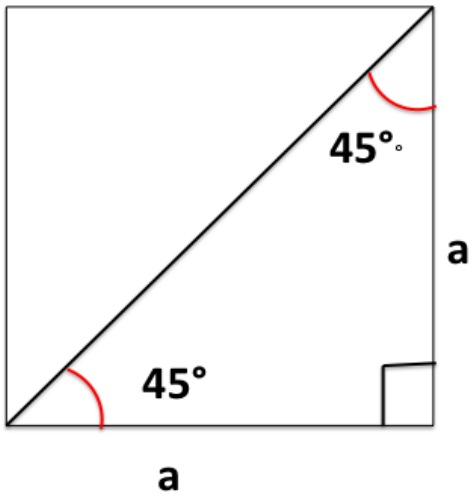


Figura 10.4: Triángulo con un ángulo de 45°

Podemos notar que en cada esquina del cuadrado tenemos un ángulo de 90°, por lo que al cortarlo por la mitad tendremos un ángulo de 45°. Además, si cortamos a la mitad el cuadrado de forma diagonal, como se muestra en la Figura 10.4, tendremos dos triángulos rectángulos iguales.

En cada uno de estos triángulos rectángulos los catetos miden a. Además, usando el teorema de Pitágoras que dice

$$(\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 = (\text{hipotenusa})^2 \qquad (10.5)$$

obtenemos

$$(\text{hipotenusa})^2 = 2a^2,$$

entonces

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{2a^2}.$$

Así, usando la definición de las funciones seno y coseno se encuentra

$$\cos 45^o = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\sin 45^o = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

es decir

$$\boxed{\cos 45^o = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin 45^o = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

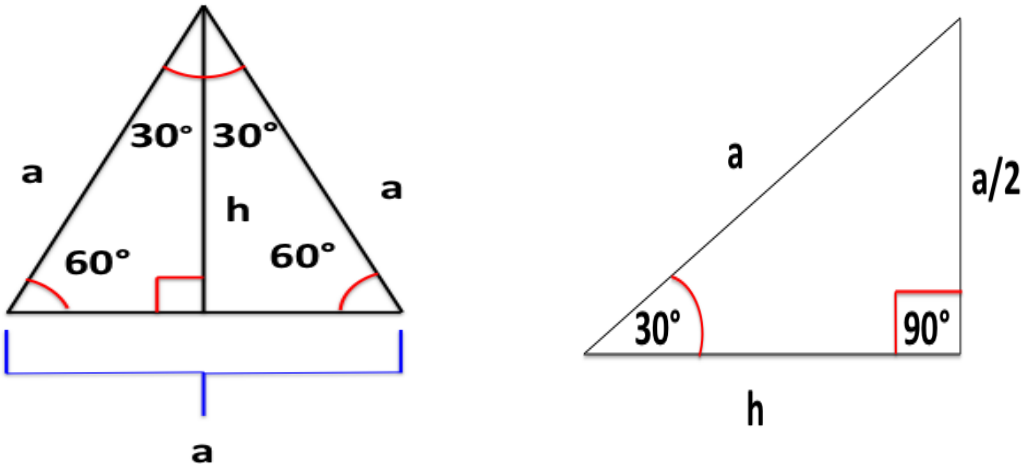


Figura 10.5: Triángulo equilátero y triángulo con 30°

10.2.4. Ángulo$= 30^o = \frac{\pi}{6}$

Ahora veamos el caso del ángulo $30^o = \frac{\pi}{6}$. Para este caso consideremos el tríangulo equilátero de la figura (10.5). Cada uno de los ángulo de dicho triángulo vale 60°, que es lo mismo a $\frac{\pi}{3}$, supondremos que cada lado del triángulo mide $2a$.

Note que si partimos a la mitad a alguno de los ángulos obtendremos un ángulo de 30°. Si tomamos una línea que parta de la mitad de la base del triángulo a su punta superior, obtendremos dos triángulos rectángulos, tal y como se muestra en la Figura 10.5.

Para el triángulo izquierdo, el ángulo superior mide 30° y el inferior izquierdo mide 60°. En este triángulo rectángulo, para el ángulo de 30° el cateto opuesto mide $\frac{a}{2}$ y la hipotenusa mide a. Por lo que, usando el teorema de Pitágoras (10.5) encontramos

$$(\text{cateto adyacente})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

es decir

$$(\text{cateto adyacente})^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2,$$

por lo tanto

$$\text{cateto adyacente} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

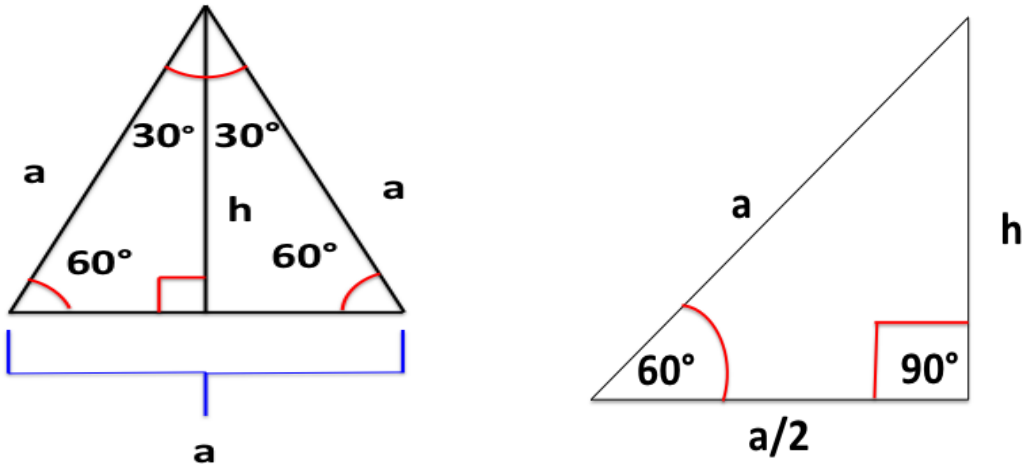


Figura 10.6: Triángulo equilátero y triángulo con 60°

Así,

$$\begin{aligned}\cos 30^o &= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin 30^o &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\cos 30^o = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin 30^o = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.}$$

10.2.5. Ángulo$= 60^o = \frac{\pi}{3}$

Para el caso del ángulo $60^o = \frac{\pi}{3}$ consideremos el mismo triángulo rectángulo izquierdo de la Figura 10.6. Observe que el cateto adyacente del ángulo de 30° es el cateto opuesto del ángulo de 60° y el cateto opuesto del ángulo de 30° es el cateto adyacente del ángulo de 60°. Por lo tanto, considerando los resultados para el ángulo de 30°, para el ángulo de 60° tenemos

$$\begin{aligned}\text{Cateto Opuesto} &= \frac{\sqrt{3}}{2}a,\\ \text{Cateto Adyacente} &= \frac{a}{2},\\ \text{Hipotenusa} &= a.\end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Por lo tanto,

$$\cos 60^o = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$
$$\sin 60^o = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

es decir

$$\cos 60^o = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60^o = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la Figura 10.7 se muestran diferentes valores del seno y coseno para distintos ángulos notables, en dicha figura los puntos rojos están dados por

$$P = (\cos\theta, \sin\theta).$$

10.3. Teorema de los cosenos

El teorema de Pitágoras es muy importante, pero no se cumple para todos los triángulos. Por ejemplo, dicho teorema no se cumple para el triángulo de la Figura 10.8.

No obstante, usando teorema de Pitágoras podemos obtener nuevos resultados que nos ayuden a entender las propiedades de triángulos como el de la Figura 10.8.

Ahora, consideremos el triángulo de la Figura 10.9, a este triángulo lo hemos dividido en dos triángulos rectángulos. Note que, usando el teorema de Pitágoras, del triángulo de la izquierda se obtiene

$$x^2 + h^2 = c^2, \tag{10.6}$$

mientras que del triángulo de la derecha se encuentra

$$y^2 + h^2 = b^2.$$

Además se tiene

$$x + y = a, \tag{10.7}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

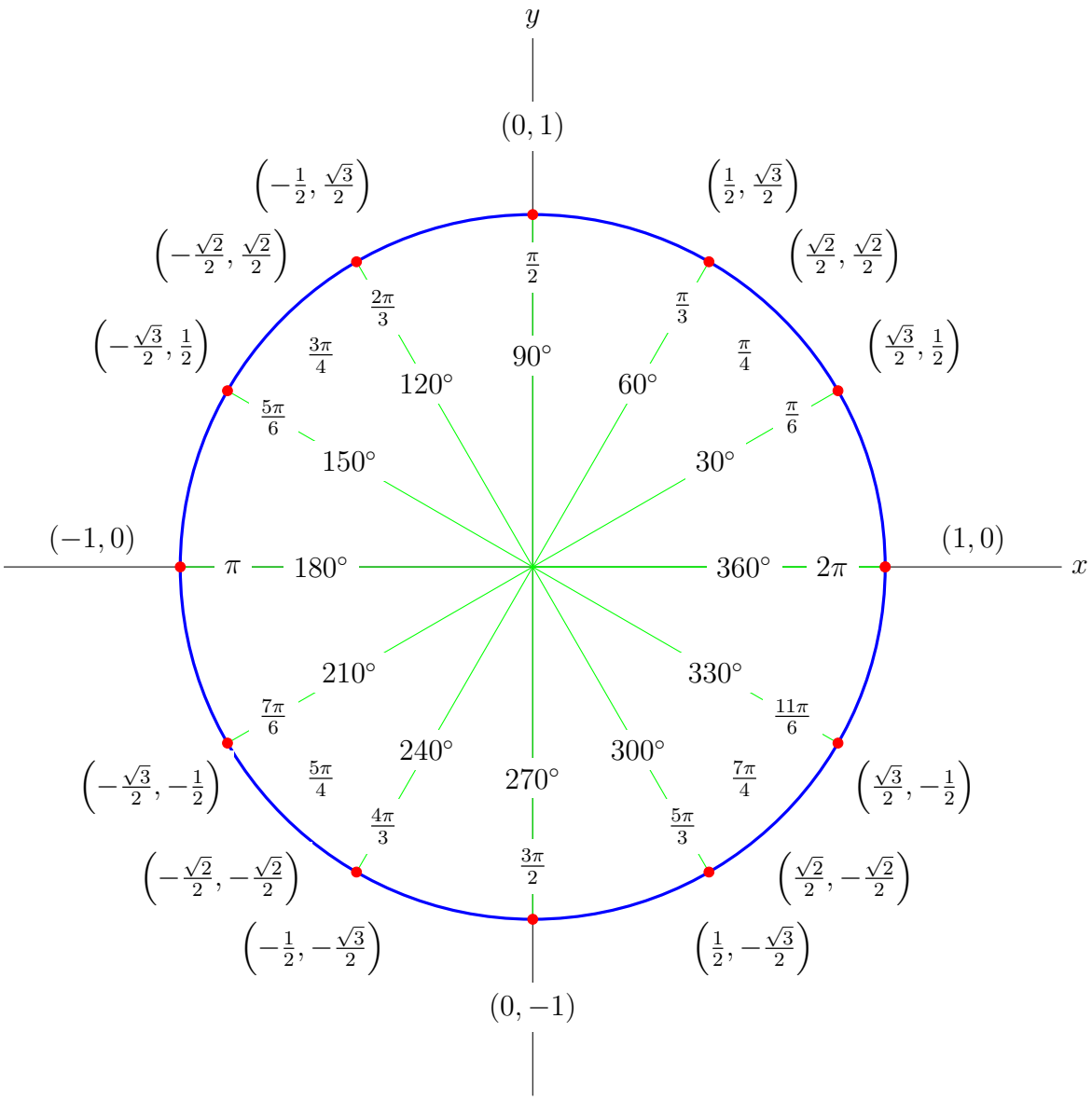


Figura 10.7: Posición del punto $P = (\cos\,\theta,\, \sin\,\theta)$ para distintos ángulos notables.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

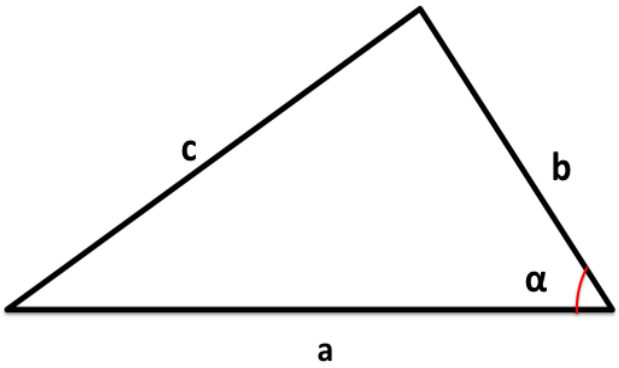


Figura 10.8: Triángulo general.

y del triángulo rectángulo derecho podemos ver que se cumple

$$y = b\cos\alpha, \tag{10.8}$$
$$h = b\sin\alpha, \tag{10.9}$$

Entonces, de las ecuaciones (10.7)-(10.8) se encuentra

$$x = a - y = a - b\cos\alpha.$$

Ocupando este resultado y la ecuación (10.9) en la ecuación (10.6), se llega a

$$a^2 - 2ab\cos\beta + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = c^2, \tag{10.10}$$

por lo que

$$a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = c^2.$$

Por lo tanto

$$\boxed{c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha.} \tag{10.11}$$

A este resultado se le llama ley de los cosenos y es una generalización del teorema de Pitágoras.

Además note que la ecuación (10.11) implica

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab},}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

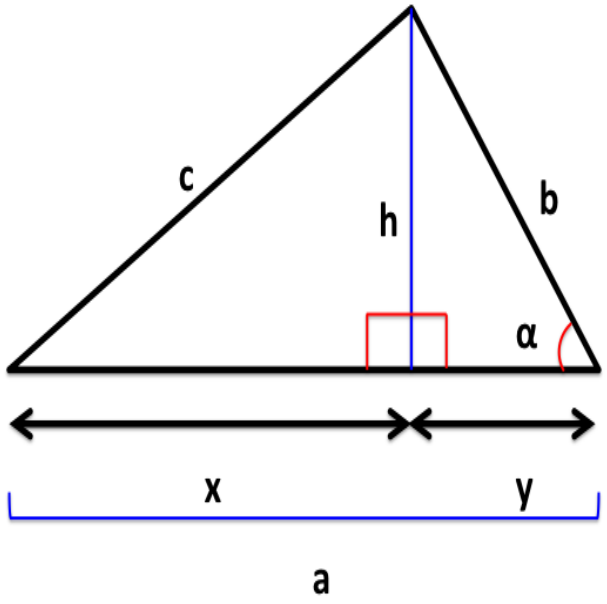


Figura 10.9: Triángulo general y el teorema de los cosenos.

es decir

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right).} \tag{10.12}$$

Por lo tanto, en un triángulo arbitrario si para el ángulo α conocemos la longitud los lados adyacentes, a y b, junto con el lado opuesto c podemos conocer el valor de α. Note que este resultado implica que si conocemos la longitud de todos los lados de un triángulo entonces podemos conocer el valor de cualquiera de sus ángulos.

10.3.1. Ejemplos

Supongamos que tenemos el triángulo de la Figura 10.10 y queremos determinar el valor de la longitud de lado c y los ángulos A y B. Usando el Teorema de los coseno (10.11) encontramos

$$c^2 = (11)^2 + 8^2 - 2(11)(8)\cos 37 \approx 121 + 64 - 176(0.7986) \approx 44.44,$$

de donde

$$c \approx 6.67.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

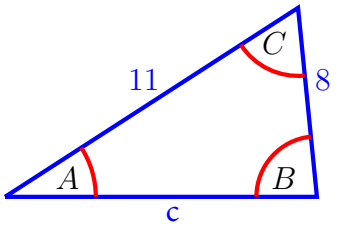


Figura 10.10: Triángulo, con ángulo $C = 37°$.

Además, se puede observar que el ángulo B los lados adyacentes tienen longitud 8 y 6,67, mientras el lado opuesto es de longitud 11. Entonces ocupado la expresión (10.12) se llega a

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{11^2 - 8^2 - (6.67)^2}{-2(8)(6.67)}\right) \approx \cos^{-1}(-0.12) \approx 96.89°$$

es decir

$$B \approx 96.89°.$$

Adicionalmente, la suma de los tres ángulos debe dar 180°, en otras palabras

$$A + B + C = 180°.$$

Por lo que

$$A + 96.89° + 37° = 180°,$$

que implica

$$A = 180° - 96.89° - 37° \approx 46.11°.$$

Como otro ejemplo, supongamos queremos determinar los ángulos del triángulo de la Figura 10.11. En este caso podemos usar la igualdad (10.12). De la Figura 10.11 podemos observar que los lados adyacentes al ángulo A tienen longitud 7 y 6, mientras que el lado opuesto tiene longitud 8. Por lo tanto,

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 - 7^2 - (6)^2}{-2(7)(6)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.52°.$$

Además, los lados adyacentes al ángulo B tienen longitud 7 y 8, mientras que el lado opuesto tiene longitud 6. Entonces,

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{6^2 - 8^2 - 7^2}{-2(8)(7)}\right) \approx \cos^{-1}(0.69) \approx 46.57°.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

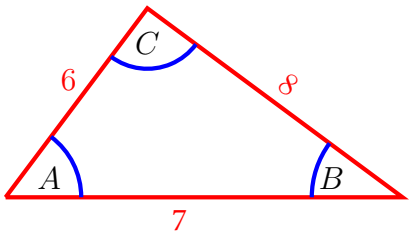


Figura 10.11: Ejemplo del teorema de los cosenos.

Ahora, sabemos que se debe cumplir la igualdad

$$A + B + C = 180^\circ$$

por lo que

$$C = 180^\circ - A - B,$$

de donde

$$C \approx 180^\circ - 75.52^\circ - 46.57^\circ = 57.91^\circ.$$

10.4. Coordenadas polares

En esta sección veremos qué pasa con el coseno de la suma de dos ángulos.

Primero consideremos un punto P en el plano

$$P = (x, y),$$

la distancia de este punto al origen es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ahora, si trazamos una línea del origen al punto P podemos formar un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 10.12. En este triángulo rectángulo α es el ángulo entre el eje x y la recta que va del origen al punto P, mientras que x representa el cateto adyacente, y representa el cateto opuesto y r es la hipotenusa.

Por lo tanto, considerando la relación que hay entre los catetos, el ángulo y la hipotenusa (10.3-10.4), tenemos que

$$\boxed{x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha.}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

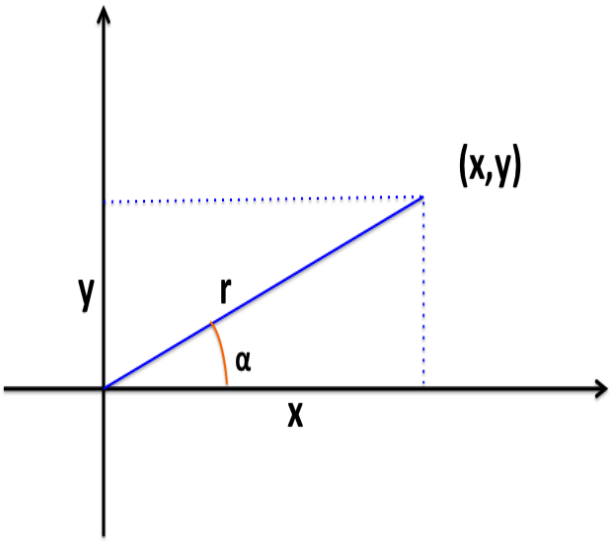


Figura 10.12: Coordenadas polares.

Así, cualquier punto P en el plano se puede expresar en términos del ángulo que hace con el eje x y su distancia con el origen

$$P = (x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = r(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

10.5. Coseno de la resta de dos ángulos

Ahora veamos como evaluar la función coseno de la suma de dos ángulos. Para este estudio ocuparemos la distancia entre dos puntos en el plano.

Supongamos que tenemos dos puntos en el plano

$$P_1 = (x_1, y_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2),$$

note que la distancia de estos puntos al origen es

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \tag{10.13}$$

Además, si α_1 es el ángulo que hace el punto P_1 con el eje x se obtiene

$$x_1 = r_1\cos\alpha_1, \quad y_1 = r_1\sin\alpha_1. \tag{10.14}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

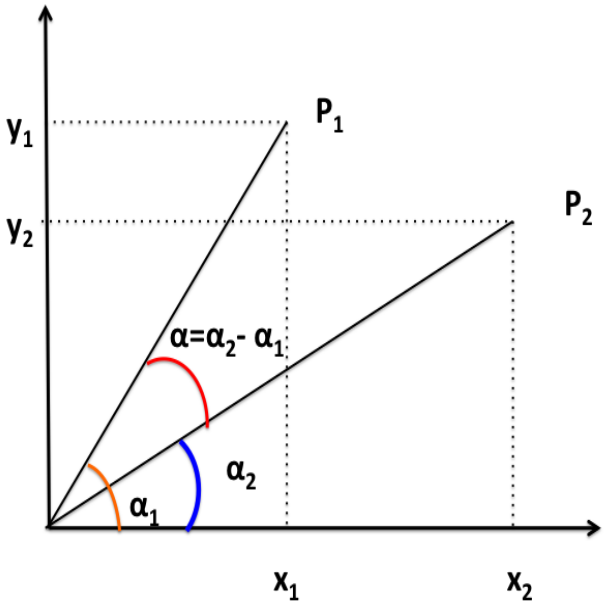


Figura 10.13: Resta de ángulos.

De la misma forma, si α_2 es el ángulo que hace el punto P_2 con dicho eje, se encuentra

$$x_2 = r_2 \cos \alpha_2, \quad y_2 = r_2 \sin \alpha_2. \tag{10.15}$$

Ahora recordemos que el cuadrado de la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es

$$d^2 (P_1, P_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 ,$$

esta distancia se puede escribir como

$$\begin{aligned} d^2 (P_1, P_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 \\ &= \left(x_1^2 + y_1^2\right) + \left(x_2^2 + y_2^2\right) - 2 (x_1x_2 + y_1y_2) , \end{aligned}$$

además considerando las ecuaciones (10.13,10.14,10.15) se llega a

$$\boxed{d^2 (P_1, P_2) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) .} \tag{10.16}$$

Ahora, de la Figura 10.13 podemos ver que las dos rectas que van del origen a los puntos P_1 y P_2 forman un ángulo

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Además, usando la ley de los cosenos, de la Figura 10.13 podemos ver que las distancia entre los puntos P_1 y P_2 está dada por

$$\boxed{d^2\left(P_1, P_2\right) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right).}$$

Note que igualando esta última expresión con el resultado previo (10.16), obtenemos

$$\boxed{\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2.} \tag{10.17}$$

Es importante tener presente esta identidad pues nos ayuda a entender la mayoría de propiedades de las funciones trigonométricas y evaluar algunas de ellas.

Particularmente la propiedad (10.17) nos ayuda a deducir muchas propiedades de las funciones senos y coseno, por ejemplo

$\cos(-\alpha) = \cos(0 - \alpha) = (\cos 0)\cos\alpha + (\text{sen } 0)\,\text{sen}\,\alpha = 1\cos\alpha + 0\,\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$,

por lo tanto

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \tag{10.18}$$

Esta propiedad nos dice que el coseno tiene el mismo valor para los números positivos y negativos, por esta razón se dice que la función coseno es una función par.

La identidad (10.18) también ayuda a encontrar valores de la función coseno.

Por ejemplo, como sabemos que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces se debe cumplir

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

es decir

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora, recordemos que $\cos\frac{\pi}{2}=0$ y $\sin\frac{\pi}{2}=1$, entonces

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}\\ &= (\cos\alpha)0+\sin\alpha\\ &= \sin\alpha,\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\sin\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).} \tag{10.19}$$

Esta indentidad nos indica que conociendo los valores de la función coseno, podemos conocer los valores de la función seno y a la inversa. Por ejemplo, usando la identidad (10.19), note que

$$\sin\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

es decir

$$\boxed{\sin\pi=0.}$$

Es posible obtener una relación del tipo (10.19) para el coseno. En efecto, considerando las identidades (10.18) y (10.19) tenemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

por lo que

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).} \tag{10.20}$$

10.6. Seno de la suma de dos ángulos

Las identidades (10.19), (10.20) y (10.18) nos permiten entender como se comporta la función seno ante una suma de ángulos, para comprobar esta afirmación consideremos

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)\\ &= \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\\ &= \cos\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\cos\beta\\ &= \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.} \tag{10.21}$$

De esta última propiedad podemos obtener algunas propiedades de la función seno. Por ejemplo sabemos que $\sin 0=0$ y $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sin 0=\sin(\alpha-\alpha)=\sin(\alpha+(-\alpha))=\cos(\alpha)\sin(-\alpha)+\sin(\alpha)\cos(-\alpha) \\ &= \cos(\alpha)\sin(-\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\alpha)=(\cos\alpha)\left(\sin(-\alpha)+\sin\alpha\right), \end{aligned}$$

es decir

$$(\cos\alpha)\left(\sin(-\alpha)+\sin\alpha\right)=0,$$

este resultado implica

$$\sin(-\alpha)+\sin\alpha=0,$$

por lo tanto

$$\boxed{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.}$$

Este resultado nos indica que si evaluamos al seno en un ángulo negativo tendremos como resultado un número negativo. Debido a esta característica se dice que la función seno es impar.

Por ejemplo

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1,$$

por lo tanto

$$\boxed{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1.}$$

Usando este último resultado podemos obtener el valor de la función seno o coseno para algunos ángulos. Un caso está dado por el ángulo π para la función coseno, note que si tomamos en cuenta la igualdad (10.20) encontramos que

$$\cos\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,$$

así

$$\boxed{\cos\pi=-1.}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

10.7. Coseno de la suma de dos ángulos

Ahora veamos que ocurre con la función coseno y la suma de ángulos, para estudiar este caso tomaremos en cuenta que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, junto con la identidad (10.17) y la ley de los signos. Así,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\alpha)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha+\sin\alpha(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\beta.}$$

Esta identidad tiene diferentes aplicaciones. En particular nos ayuda a encontrar el valor del coseno para algunos ángulos, por ejemplo considerando que

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}, \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^o = \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\cos 105^o &= \cos(60^o+45^o)\\ &= \cos 60^o\cos 45^o-\sin 60^o\sin 45^o\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

10.8. Seno de la resta de dos ángulos

También podemos ver que pasa con la función seno y la resta de ángulos. Para este caso tomaremos en cuenta las identidades $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, la identidad (10.21) y la ley de los signos. Entonces,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\sin(-\beta)+\sin\alpha\cos(-\beta)\\ &= \cos\alpha(-\sin\beta)+\sin\alpha\cos\beta\\ &= -\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

por lo que

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ocupando esta identidad podemos encontrar el valor del seno para diferentes ángulos, por ejemplo considerando que $\sin 30^o = \frac{1}{2}, \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^o = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \sin 15^o &= \sin\left(45^o - 30^o\right) \\ &= \sin 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Los resultados fundamentales de las funciones seno y coseno con la suma y resta de ángulos se pueden resumir en las siguientes expresiones

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta, \tag{10.22}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta, \tag{10.23}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{10.24}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{10.25}$$

Vale la pena mencionar que estas identidades tienen una amplia gama de aplicaciones en la arquitectura, ingeniería, construcción edificios, óptica, astronomía, aviación, dibujo, arte o industria militar. Por lo que es conveniente comprender bien las identidades.

10.9. Funciones trigonométricas

Además de las funciones seno y coseno podemos definir otra funciones trigonométricas como la tangente

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{10.26}$$

la cotangente

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha},$$

la secante

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

y la cosecante

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Es importante notar que estas funciones están escritas en términos de las funciones seno y coseno, por lo tanto sus propiedades dependen de las propiedades de las funciones seno y coseno.

10.10. Identidades trigonométricas

Existen diferentes identidades trigonométricas, todas ellas se pueden obtener partiendo de las definiciones de las funciones trigonométricas y de las iden-tidades que ya hemos probado. Por ejemplo, sumando las identidades (10.22) y (10.23) se obtiene

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

de donde se obtiene la identidad

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Además, restando la identidad (10.22) a la identidad (10.23) se llega a

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

por lo que

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}.}$$

Ahora, sumando la identidad (10.24) con la identidad (10.25) se encuentra

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

de donde

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Además, si nos piden mostrar la identidad

$$\boxed{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,} \tag{10.27}$$

usando que

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

junto con la identidad

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

podemos ver

$$\begin{aligned} \cos^4\alpha - \sin^4\alpha &= \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ &= \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\cdot 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la identidad (10.27).

Adicionalmente, se puede probar la identidad

$$\boxed{\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y},} \tag{10.28}$$

Para probar esta identidad podemos ver que usando la definición de la tangente (10.26), así como el seno de la suma de ángulos (10.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \tan(x) + \tan(y) &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} \\ &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la identidad (10.28).

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

También se puede ver que

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},
\end{aligned}$$

entonces se satisface la identidad

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

También es posible probar la siguiente lista identidades trigonométricas

$$\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha, \tag{10.29}$$

$$\csc^2\alpha = 1+\cot^2\alpha, \tag{10.30}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \tag{10.31}$$

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha, \tag{10.32}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\end{aligned} \tag{10.33}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \tag{10.34}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{10.35}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{10.36}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{10.37}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \tag{10.38}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \tag{10.39}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \tag{10.40}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \tag{10.41}$$

$$\tan\alpha-\tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta\sin\alpha}, \tag{10.42}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.43}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.44}$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right), \tag{10.45}$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right). \tag{10.46}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

10.11. Identidades trigonométricas y ángulos notables

Usando identidades trigonométricas es posible obtener el valor de algunas funciones trigonométricas evaluadas en ángulos notables. En efecto, recordemos que

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^o = \sin 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

entonces, usando la identidad trigonométrica para el coseno de una suma de ángulos, se obtiene

$$\begin{aligned} \cos 105^o &= \cos\left(60^o + 45^o\right) \\ &= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

es decir

$$\cos 105^o = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

De la misma forma, ocupando usando la identidad trigonométrica para el seno de la resta de ángulos, se encuentra

$$\begin{aligned} \sin 15^o &= \sin\left(45^o - 30^o\right) \\ &= \sin 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en otras palabras

$$\sin 15^o = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

De hecho, se puede probar que usando identidades trigonométrica es posible obtener el valor de cualquier función trigonométrica evaluada en un múltiplo entero de

$$15^\circ = \frac{\pi}{12}.$$

10.12. Ejercicios

1.- Sin usar calculadora, obtener el valor de

$$\tan 30^o.$$

2.- Sin usar calculadora, obtener el valor de

$$\sec 60^o.$$

3.- Probar las identidades (10.29)-(10.46).

4.- Determinar los ángulos α, β y γ del triángulo de la Figura 10.14.

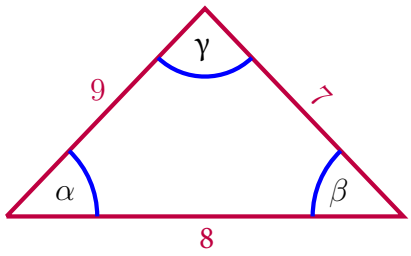


Figura 10.14:

5.- Actividades de la vida real es más conveniente usar coordenadas polares que cartesianas.

6.- Obtener la representación polar del punto en el plano

$$P = (5, 7).$$

7.- Con coordenas polares un punto en plano tiene los valores $r = 15$ y $\theta = 59^o$, dibuar el punto en el plano y obtener sus coordenadas cartesianas.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 11

Rectas

En este capítulo estudiaremos la recta, su ecuación y sus propiedades.

11.1. Ecuación de la recta

La ecuación de una recta está dada por

$$\boxed{y = mx + b,} \tag{11.1}$$

esta ecuación se determina completamente si se determinan los parámetros m y b.

Para determinar m y b basta dos puntos por los que pasa la recta. En efecto, si la recta pasa por los puntos

$$(x_1, y_2) \quad \text{y} \quad (x_2, y_2)$$

tenemos que se satisface las dos ecuaciones

$$y_1 = mx_1 + b, \tag{11.2}$$
$$y_2 = mx_2 + b. \tag{11.3}$$

Restando ambas ecuaciones tenemos

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1),$$

por lo que

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{11.4}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Sustituyendo este resultado en la ecuación (11.2), encontramos

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta (11.1) que pasa por los puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2) es

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_1, \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

11.2. Pendiente de **una** recta

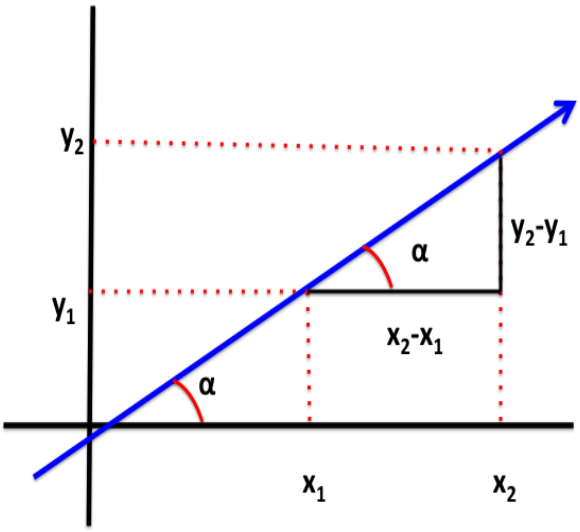


Figura 11.1: Pendiente de una recta y su ángulo con el eje x.

Para entender el significado de la pendiente de una recta consideremos la Figura 11.1. En esta figura podemos ver que el ángulo que hace la recta con el eje x es α. Tomando dos puntos de esta recta, podemos formar un triángulo rectángulo, tal y como se muestra en la Figura 11.1. Si H es la hipotenusa de este triángulo rectángulo, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y_2 - y_1}{H}, \\ \cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{H}. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Por lo tanto, tomando en cuenta la ecuación (11.4) obtenemos

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.}$$

Así, podemos concluir que la pendiente nos da la tangente del ángulo que hace la recta con el eje x.

Por lo cual si nos dicen que una recta hace el ángulo α con el eje x y que la recta pasa por el punto (x_1, y_1), la ecuación de recta es

$$\boxed{y = (\tan\alpha)(x - x_1) + y_1.}$$

11.3. Ángulo entre rectas

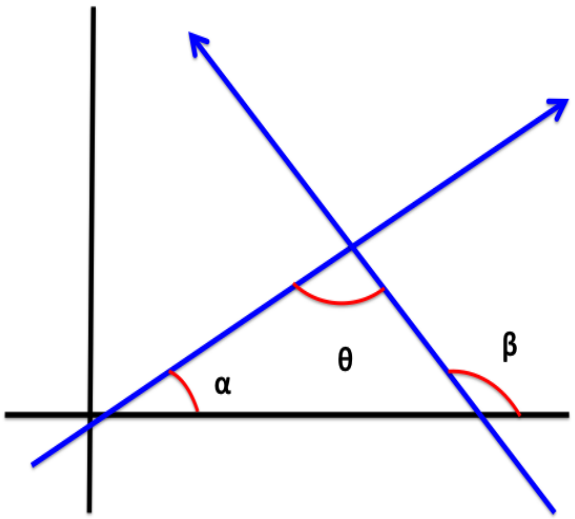


Figura 11.2: Ángulo de intersección de dos rectas. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

Para estudiar el ángulo que hay entre dos rectas que se intersectan, consideremos la Figura 11.2. De esta figura podemos ver que α es el ángulo que hace la recta l_1 con el eje x y β es el ángulo que hace la recta l_2 con el eje x.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

También podemos ver que θ es el ángulo que hacen estas dos rectas.

Considerando que la intersección de las rectas y el eje x hacen un triángulo, se debe cumplir

$$\theta + \alpha + (\pi - \beta) = \pi,$$

de donde

$$\theta = \beta - \alpha.$$

Por lo tanto

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha).$$

Ahora, debido a que α es el ángulo que hace la recta l_1 con el eje x y β es el ángulo que hace la recta l_2 con el eje x. entonces

$$\tan\alpha = m_1$$

es la pendiente de la recta l_1 y

$$\tan\beta = m_2$$

es la pendiente de la recta l_2.

Además, considerando la identidad trigonométrica

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha},$$

tenemos que

$$\boxed{\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.}$$

Esta expresión nos muestra que el ángulo entre dos rectas depende de las pendientes de las rectas. En particular, si las rectas tiene las mismas pendientes, el ángulo es cero. En este caso se dicen que las rectas son paralelas. Si las pendientes satisfacen la ecuación

$$m_1 = -\frac{1}{m_2},$$

las rectas son perpendiculares.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

11.4. Distancia entre un punto y una recta

Ahora veremos de que manera se puede calcular la distancia de un punto P a una recta R que estén en el plano cartesiano.

Supongamos que el punto P tiene las coordenadas $(x_1,\ y_1)$, también supongamos que la recta R tienen la ecuación

$$y = mx + b$$

y hace un ángulo α con la eje x, como se muestra en la Figura 11.3.

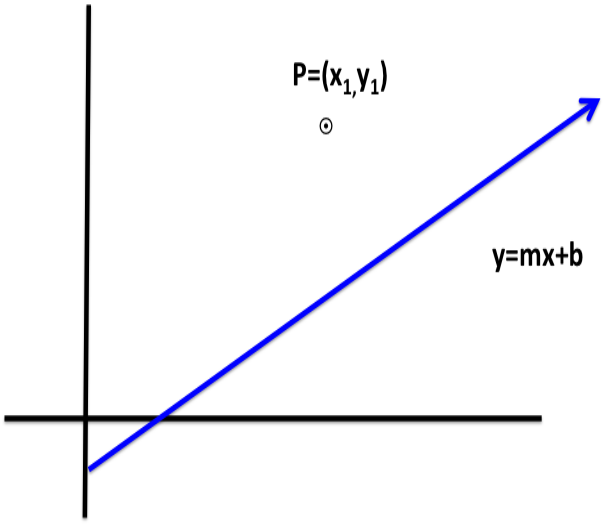


Figura 11.3: Punto y recta. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

Note que debido a que la recta R tiene pendiente m y hace un ángulo α con el eje x, se encuentra

$$\tan\alpha = m.$$

Ahora, del punto P tracemos una línea recta perpendicular a R que toque a recta R, como se muestra en la Figura 11.4. Además del punto P tracemos otra recta $(RP)_0$, no perpendicular a R, que toque a la recta R, como se muestra en

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

la Figura 11.4. De la Figura 11.4 se puede observar que los segmentos $(PR)_1$ y $(PR)_0$ forman parte de un triángulo rectángulo, donde $(PR)_0$ es la hipotenusa y $(PR)_1$ es el cateto opuesto. Así, el segmento $(PR)_1$ nos da la mínima distancia del punto P a la recta R, a esta distancia mínima le llamaremos la distancia D del punto P a la recta R.

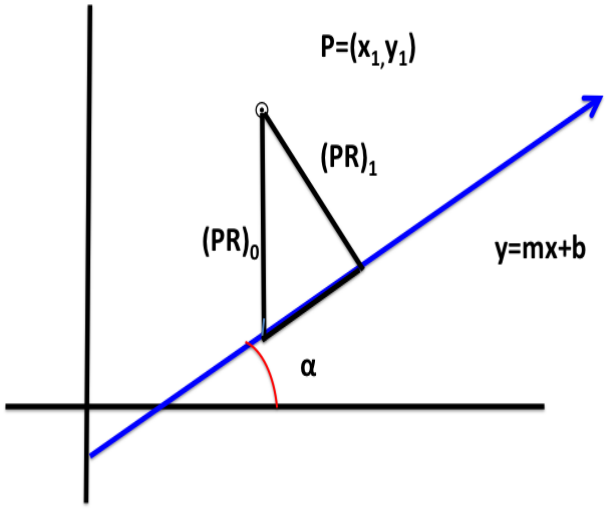


Figura 11.4: Distancia mínima entre un punto y una recta. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

Para calcular la distancia D, del punto P trazaremos una recta paralela al eje y que toque a la recta R, como se muestra en la Figura 11.5. A esta recta la llamaremos $(PR)_2$ Note que la recta $(PR)_2$ debe tocar a la recta R en el un punto de la forma $P_2 = (x_1, y_2)$. Adicionalmente, debido a que el punto P_2 está en la recta R, se debe cumplir la ecuación

$$y_2 = mx_1 + b$$

También se puede observar que el segmento $(PR)_2$ tiene tamaño

$$y_1 - y_2 = y_1 - (mx_1 + b)$$

Ahora, de la Figura 11.5 se puede observar que los segmentos $(PR)_1$ y $(PR)_2$ forman parte de un triánulo rectángulo, donde $(PR)_2$ es la hipotenusa y $(PR)_1$ es el cateto opuesto.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

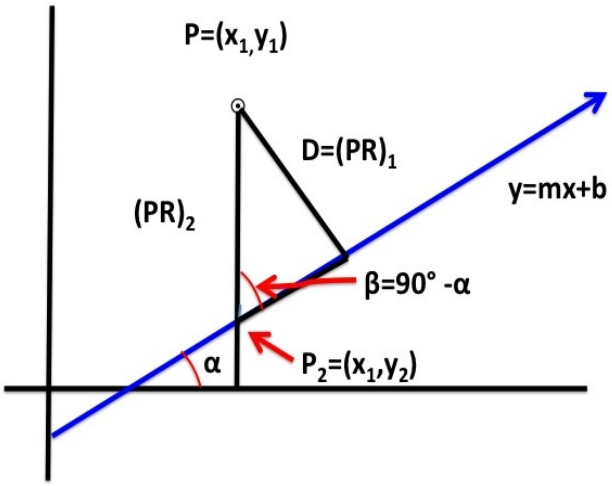


Figura 11.5: Distancia entre un punto y una recta. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

También se puede observar que el segmento $(PR)_2$ hacen un ángulo

$$\frac{\pi}{2} - \alpha$$

con la recta R.

Por lo que

$$\begin{aligned} D &= (PR)_1 = \left((y_1 - y_2)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ &= \left((y_1 - (mx_1 + b))\left[\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2}\right]\right) \\ &= y_1 - (mx_1 + b)(-\cos\alpha), \end{aligned}$$

es decir

$$D = (mx_1 + b - y_1)\cos\alpha.$$

Además, se puede observar que

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

así

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = m^2 + 1,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

de donde

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Por lo tanto, la distancia del punto $P_1 = (x_1, y_1)$ a la recta que satisface la ecuación $y = mx + b$ es

$$\boxed{D = \frac{|mx_1 + b - y_1|}{\sqrt{m^2+1}}.}$$

11.5. Ejercicios

1.- Calcular la distancia del punto

$$(3, 2)$$

a la recta cuya ecuación es

$$y = 4x + 3.$$

2.- Obtener la recta que pasa por los puntos

$$(-8,\ 2)\,,\ (7,\ 3)\,.$$

3.- En contrar la recta que corta al eje x en $x_0 = -3$ y es paralela a la recta

$$y = -2x + 4.$$

4.- Encontrar la ecuación de la recta que corta al eje x en el punto $x = 8$ y que es perpendicular a la recta

$$y = 3x + 2.$$

5.- Encontrar el ángulo entre las rectas

$$\begin{aligned} y &= 3x - 4, \\ y &= -3x + 5. \end{aligned}$$

6.- Encontrar el punto de intersección en las rectas

$$\begin{aligned} y &= 3x - 3, \\ y &= 2x + 25. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 12

Cónicas

A lo largo de la historia, existen muchas figuras geométricas importantes que han surgido de diferentes aplicaciones. Dentro del grupo de las curvas planas sobresalen la parábola, la elipse y la hipérbola. Estas figuras han sido importantes para entender diferentes fenómenos de la óptica, la astronomía, la biología, la guerra, los deportes, la arquitectura, la religión, etcétera.

A la parábola, elipse e hipérbola se les llama cónicas debido a que se obtienen al cortar un sólido en forma de cono, ver Figura 12.1.

12.1. Parábola

Supongamos que en el plano tenemos una recta D y un punto F fuera de dicha recta. Llamamos **Parábola** al conjunto de puntos $P = (x, y)$ tales que su distancia a la recta D coincide con su distancia al punto F. Así, un punto P de la parábola debe cumplir la ecuación

$$\boxed{d(P, F) = d(P, D).} \tag{12.1}$$

A la recta D le llamamos directriz y al punto F le llamamos foco.

Para fijar ideas supongamos que la recta es perpendicular al eje y y pasa por el punto $(0, -c)$ y también supongamos que el foco está en el punto $F = (0, c)$. No te que en este caso el punto $(0, 0)$ está a la misma distancia a D que F, por lo que el punto $(0, 0)$ es parte de la parábola. Entonces, la distancia un punto

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

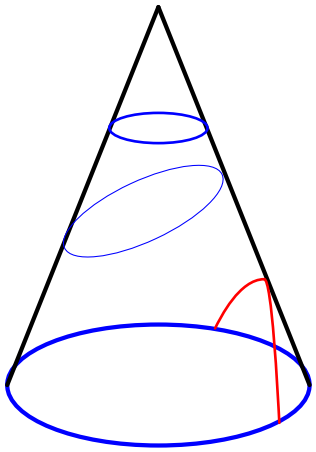


Figura 12.1: Cono y sus cortes.

$P = (x, y)$ al foco es

$$d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}.$$

Además, debido a que la pendiente de la recta D es cero, la distancia de la recta D al punto P es

$$d(P, D) = |y - (-c)| = |y + c|.$$

Por lo tanto, si el punto $P = (x, y)$ es un punto de la parábola debe cumplir la ecuación

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = |y + c|,$$

es decir

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y + c|,$$

por lo que

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2 = (y + c)^2,$$

de donde

$$x^2 + (y-c)^2 = (y + c)^2,$$

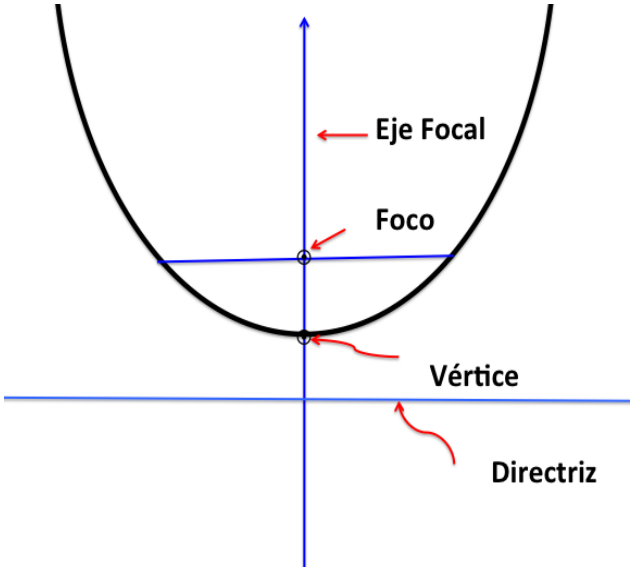


Figura 12.2: La parábola y sus parámetros. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

además ocupando el desarrollo del binomio al cuadrado se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = y^2 + 2cy + c^2,$$

así

$$\boxed{x^2 = 4cy.} \tag{12.2}$$

Note que en este caso el punto más bajo de la parábola es el punto $(0, 0)$, el cual se llama vértice. Si el vértice lo trasladamos al punto

$$\boxed{V = (x_0, y_0),}$$

la ecuación de la parábola (12.2) toma la forma

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4c(y - y_0).} \tag{12.3}$$

Además, el foco F estará en el punto

$$\boxed{F = (0, c + y_0),}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

mientras que la directriz es la recta de pendiente cero que pasa por el punto

$$\boxed{D = (0, -c + y_0).}$$

12.2. Caso general

Expresiones de la forma

$$Ay + Bx + Cx^2 + D = 0 \tag{12.4}$$

se pueden escribir como parábolas. En efecto, note que el término

$$Bx + Cx^2$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned} Bx + Cx^2 &= C\left(x^2 + \frac{B}{C}x\right) \\ &= C\left(x^2 + 2\left(\frac{B}{2C}\right)x + \left(\frac{B}{2C}\right)^2 - \left(\frac{B}{2C}\right)^2\right) \\ &= C\left(\left[x - \left(\frac{B}{2C}\right)\right]^2 - \left(\frac{B}{2C}\right)^2\right) \\ &= C\left[x - \left(\frac{B}{2C}\right)\right]^2 - \frac{B^2}{4C}. \end{aligned}$$

Así, usando esta expresión en la ecuación (12.4) se obtiene

$$Ay + C\left(x - \left(\frac{B}{2C}\right)\right)^2 - \frac{B^2}{4C} + D = 0,$$

de donde

$$Ay - D + \frac{B^2}{4C} = -C\left(x - \left(\frac{B}{2C}\right)\right)^2,$$

por lo que

$$A\left(y - \frac{D}{A} + \frac{B^2}{4AC}\right) = -C\left(x - \left(\frac{B}{2C}\right)\right)^2,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

entonces

$$\frac{-A}{C}\left(y-\left(\frac{D}{A}-\frac{B^2}{4AC}\right)\right)=\left(x-\left(\frac{B}{2C}\right)\right)^2. \tag{12.5}$$

Note que definiendo

$$\begin{aligned} c &= -\frac{A}{4C}, \\ y_0 &= \frac{D}{A}-\frac{B^2}{4AC}, \\ x_0 &= \frac{B}{2C}, \end{aligned}$$

la ecuación (12.5) toma la forma

$$4c(y-y_0)=(x-x_0)^2.$$

Por lo tanto la ecuación (12.4) representa una parábola.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$-6y+3x-2x^2+5=0,$$

la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} -6y+2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+5 &= -6y+2\left(x^2-2\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)+5 \\ &= -6y+2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]+5 \\ &= -6y+2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+5=0, \end{aligned}$$

de donde

$$-6y-\frac{9}{8}+5=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2,$$

que se puede escribir como

$$-6y+\frac{-9+40}{8}=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$-6y + \frac{31}{8} = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2,$$

por lo que

$$-6\left(y - \frac{31}{48}\right) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2,$$

así

$$3\left(y - \frac{31}{48}\right) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2,$$

que es la ecuación de una parábola con

$$\begin{aligned} c &= \frac{3}{4}, \\ y_0 &= \frac{31}{48}, \\ x_0 &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La parábola es importante en diferentes disciplinas. Por ejemplo, en el estudio del sistema solar se ha podido mostrar que algunos cometas siguen trayectorias en forma de parábolas y en cuyo foco está el Sol. Así mismo, en la óptica es posible mostrar que si tenemos una lente parabólica y se lanzan rayos de luz a dicha lente en la dirección paralela a su eje focal, al reflejarse toda la luz se concentrará en el foco de la parábola. Por esa razón, en telecomunicaciones se usan antenas en forma de parábola para un mejor aprovechamiento de las señales. De la misma forma, las estufas solares se construyen de forma parabólica para un mejor aprovechamiento de la energía solar. Además, las leyes de la física establecen que si se lanza un objeto al aire la trayectoria que sigue el objeto es una parábola. Por lo cual, en diferentes guerras los militares debían saber que tipo de parábola seguiría una lanza, una bala de cañón, una bala de revólver o un misil. De la misma forma, cuando un deportista de fútbol, béisbol, básquetbol, u otro deporte, lanza una pelota debe intuir hasta donde llegará la parábola que sigue la pelota. En la Figura 12.3 se muestra la trayectoria parabólica típica de un balón de fútbol en un tiro libre directo

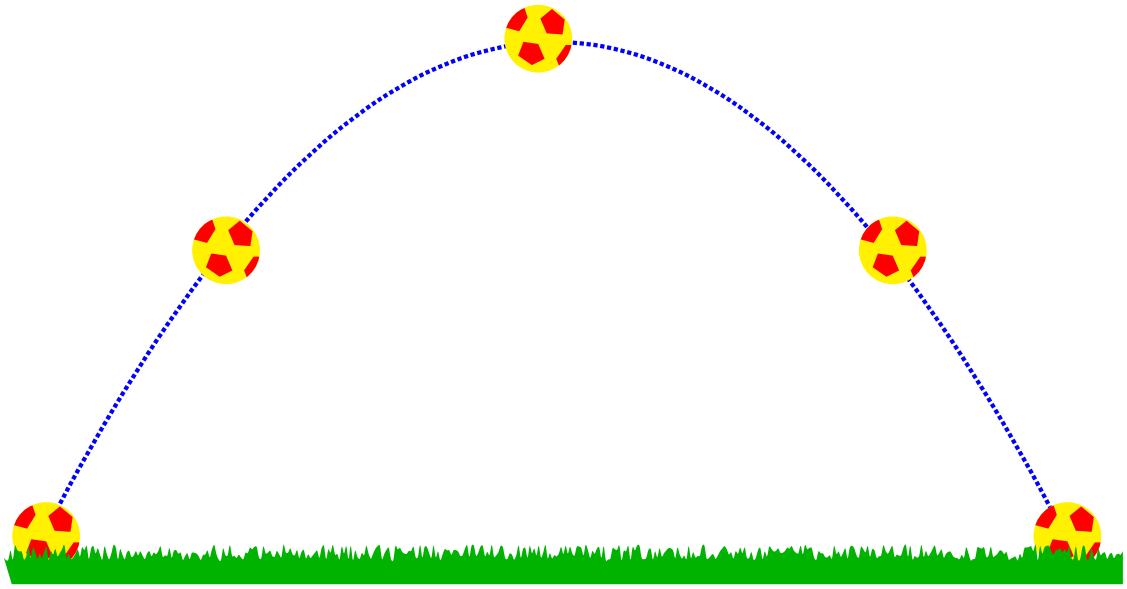


Figura 12.3: Trayectoria parabólica de un balón de fútbol en un tiro libre directo.

12.3. Elipse

Supongamos que tenemos dos puntos en el plano F_1 y F_2 y una distancia d mayor a la distancia entre los dos puntos dados. Entonces se define como elipse a los puntos P tales que la distancia de P a F_1 más la distancia de P a F_2 es d. Note que esta defínción implica la ecuación

$$\boxed{d\left(F_1, P\right) + d\left(F_2, P\right) = d.} \tag{12.6}$$

A los puntos F_1 y F_2 se les llama focos.

Una forma de construir una elipse es fijando dos clavos en dos puntos y poner los extremos de una cuerda en cada uno de los clavos. Ahora, si se tensa la cuerda con otro clavo libre y se mueve al rededor de los clavos fijos se obtiene una elipse.

Para fijar ideas supongamos que F_1 está en $(0, c)$ y el punto F_2 es está en $(-c, 0)$, entonces si el punto (x, y) es parte de la elipse se debe satisfacer la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = d.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

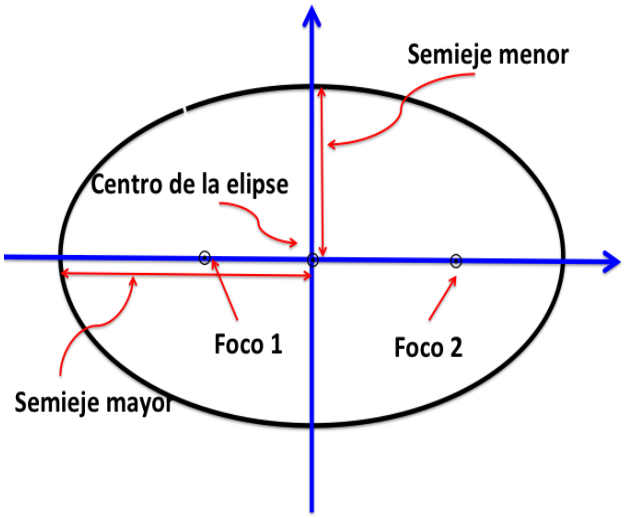


Figura 12.4: Elipse. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

En particular, si un punto sobre el eje x, $P = (a, 0)$, es parte de la elipse, entonces debido a que d es mayor a la distancia entre los focos, el punto a no puede estar entre la línea que une a los focos, por lo que

$$c < a.$$

Además, $P = (a, 0)$ es parte de la elipse se debe satisfacer la ecuación

$$\sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(a+c)^2} = d,$$

de donde

$$a - c + a + c = 2a = d.$$

Por lo que la ecuación de elipse (12.6) se puede escribir como

$$d\left(P_1, P\right) + d\left(P_2, P\right) = 2a. \tag{12.7}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora, si un punto sobre el eje y, $P = (0, b)$, es parte de la elipse se debe cumplir la ecuación

$$\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} = 2a,$$

es decir

$$\sqrt{c^2 + b^2} = a,$$

de donde

$$c^2 + b^2 = a^2. \tag{12.8}$$

Note que está ecuación implica que

$$a < b,$$

debido a esta desigualdad al eje en donde están los focos se le llama *eje mayor*, mientras que a la recta perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro de la elipse se le llama *eje menor*.

Ahora, la ecuación (12.7) se puede escribir como

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

de donde

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

por lo que

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2,$$

así

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$$

entonces ocupando la expresión del binomio al cuadrado se llega a

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

que implica

$$-4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

esta última expresión se puede escribir como

$$-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

es decir

$$\frac{xc + a^2}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Ahora, de está última ecuación se obtiene

$$\left(\frac{xc + a^2}{a}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2,$$

por lo que

$$\frac{(xc)^2}{a^2} + \frac{2xca^2}{a^2} + \frac{a^4}{a^2} = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

es decir

$$\frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

de donde

$$\frac{x^2c^2}{a^2} - x^2 - y^2 + 2xc - 2xc = c^2 - a^2,$$

así

$$x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 = x^2\frac{c^2 - a^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2,$$

entonces

$$x^2\frac{c^2 - a^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

por lo tanto

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \tag{12.9}$$

Adicionalmente, se puede observar que la ecuación (12.8) implica

$$c^2 - a^2 = -b^2,$$

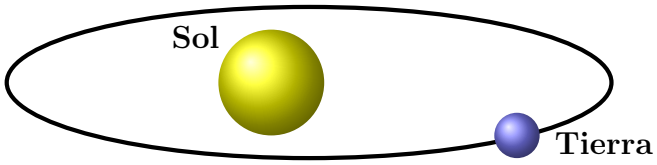


Figura 12.5: Sistema Sol-Tierra.

por lo que la ecuación (12.9) se puede escribir como

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{12.10}$$

También se puede observar que si el centro de la elipse $(0,0)$ se traslada al punto (x_0,y_0) la ecuación de la elipse (12.10) se expresa como

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.} \tag{12.11}$$

La elipse es un figura importante, particularmente en la astronomía. En efecto, diferentes estudios de la antigüedad mostraron que los planetas siguen trayectorias elípticas. Estos descubrimientos se realizaron después de largas observaciones del cielo nocturno. Posteriormente, usando la ley de la gravitación universal, Newton demostró que todos los planetas del sistema solar siguen una trayectoria en forma de elipse y en uno de los focos de la elipse está el Sol, ver Figura 12.5. Observaciones más recientes han mostrado que las estrellas también se mueven siguiendo trayectorias elípticas, en algunos casos en el foco de la elipse hay otra estrella o el núcleo de una galaxia.

12.4. Caso general

Expresiones de la forma

$$Ay^2+By+Cx^2+Dx+E=0 \tag{12.12}$$

se pueden escribir como una elipse. Para probar esta afirmación, primero notemos que el término

$$Ay^2+By$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

se puede escribir como

$$\begin{aligned} Ay^2 + By &= A\left(y^2 + \frac{B}{A}y\right) \\ &= A\left(y^2 + 2\left(\frac{B}{2A}\right)y + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right) \\ &= A\left(\left[y - \left(\frac{B}{2C}\right)\right]^2 - \left(\frac{B}{2C}\right)^2\right) \\ &= A\left(y - \left(\frac{B}{2A}\right)\right)^2 - \frac{B^2}{4A}. \end{aligned}$$

De la misma forma, el término

$$Cx^2 + Dx$$

se puede expresar como

$$\begin{aligned} Cx^2 + Dx &= C\left(x^2 + \frac{D}{C}x\right) \\ &= C\left(x^2 + 2\left(\frac{D}{2C}\right)x + \left(\frac{D}{2C}\right)^2 - \left(\frac{D}{2C}\right)^2\right) \\ &= C\left(\left[x - \left(\frac{D}{2C}\right)\right]^2 - \left(\frac{D}{2C}\right)^2\right) \\ &= C\left(x - \left(\frac{D}{2C}\right)\right)^2 - \frac{D^2}{4C}. \end{aligned}$$

Así, usando estos dos resultados en la ecuación (12.12) se obtiene

$$A\left(y - \left(\frac{B}{2A}\right)\right)^2 - \frac{B^2}{4A} + C\left(x - \left(\frac{D}{2C}\right)\right)^2 - \frac{D^2}{4C} + E = 0,$$

por lo que

$$A\left(y - \left(\frac{B}{2A}\right)\right)^2 + C\left(x - \left(\frac{D}{2C}\right)\right)^2 = \frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E,$$

que se puede escribir como

$$\frac{A\left(y - \left(\frac{B}{2A}\right)\right)^2}{\frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E} + \frac{C\left(x - \left(\frac{D}{2C}\right)\right)^2}{\frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E} = 1.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Note que si se cumple que

$$\frac{A}{\frac{B^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E}>0, \qquad \frac{C}{\frac{B^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E}>0 \tag{12.13}$$

se pueden definir los parámetros

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{\frac{B^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E}{A}, \\ a^2 &= \frac{\frac{B^2}{4A}+\frac{D^2}{4C}-E}{C}, \\ y_0 &= \frac{B}{2A}, \\ x_0 &= \frac{D}{2C}, \end{aligned}$$

y la ecuación (12.5) toma la forma

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1,$$

que representa una elipse.

Por lo tanto, si se cumplen las condiciones (12.13), la ecuación (12.12) representa una elipse.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$3y^2+2y+4x^2-x-5=0,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}
0 &= 3y^2+2y+4x^2-x-5 = 3\left(y^2+2\left(\frac{1}{3}\right)y\right)+4\left(x^2-\left(\frac{1}{4}\right)x\right)-5 \\
&= 3\left(y^2+2\left(\frac{1}{3}\right)y\right)+4\left(x^2-2\left(\frac{1}{8}\right)x\right)-5, \\
&= 3\left(y^2+2\left(\frac{1}{3}\right)y+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \\
&\quad +4\left(x^2-2\left(\frac{1}{8}\right)x+\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)-5 \\
&= 3\left(\left[y+\frac{1}{3}\right]^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)+4\left(\left[x-\frac{1}{8}\right]^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)-5 \\
&= 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2-3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-4\left(\frac{1}{8}\right)^2-5 \\
&= 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{3}{9}-\frac{4}{64}-5 \\
&= 3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{3}{9}-\frac{1}{16}-5
\end{aligned}$$

de donde

$$3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{3}-\frac{1}{16}-5=0,$$

que se puede escribir como

$$3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\frac{253}{48}=0,$$

es decir

$$3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{253}{48},$$

de donde

$$\frac{3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{253}{48}}+\frac{4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{253}{48}}=1,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

así, usando la *ley del sandwich*, se obtiene

$$\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{253}{144}}+\frac{\left(x-\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{253}{192}}=1,$$

que es la ecuación de una elipse con

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{253}{192}, \\ b^2 &= \frac{253}{144}, \\ y_0 &= -\frac{1}{3}, \\ x_0 &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

12.4.1. Círculo

Se puede observar que si en ecuación general de la elipse (12.11) se considera el caso

$$a=b=R$$

se llega a la ecuación

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.} \tag{12.14}$$

Note que esta ecuación la cumplen los puntos (x, y) que están a una distancia R del punto (x_0, y_0). La colección de puntos que están a una distancia R del punto (x_0, y_0) se define como el círculo de radio R centrado en el punto (x_0, y_0), en la figura 12.6 se muestra una representación geométrica de los puntos que satisfacen la ecuación (12.14).

Los círculos son muy importantes en diversas áreas. Por ejemplo en la física el movimiento circular uniforme ayuda a entender diferentes fenómenos. Además es el círculo es ocupado en diferentes corrientes artísticas para repre-sentar seres divinos, bélicos o de belleza. En particular en varias obras literarias es común encontrar frases como *círculos viciosos, círculos virtuosos o círculos de poder.*

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

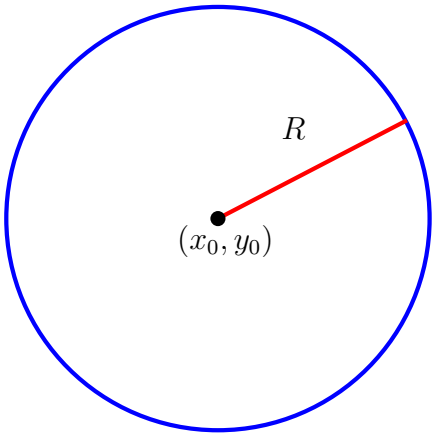


Figura 12.6: Círculo de radio R centrado en el punto $P = (x_0, y_0)$.

12.4.2. Ejemplos

Como un ejercicio consideremos la ecuación

$$\frac{1}{9}x^2 - 2x + \frac{1}{9}y^2 - 4y - 17 = 0, \tag{12.15}$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{x^2 - 2 \cdot 9x}{9} + \frac{y^2 - 2 \cdot 18y}{9} = 17,$$

de donde

$$x^2 - 2 \cdot 9x + 9^2 - 9^2 + y^2 - 2 \cdot 18y + 18^2 - 18^2 = 153,$$

por lo que

$$(x - 9)^2 + (y - 18)^2 - 405 = 153,$$

así

$$(x - 9)^2 + (y - 18)^2 = 558.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la ecuación (12.15) representa un círculo de radio

$$R = \sqrt{558} \approx 23.62$$

centrado en el punto

$$P = (9, 18).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

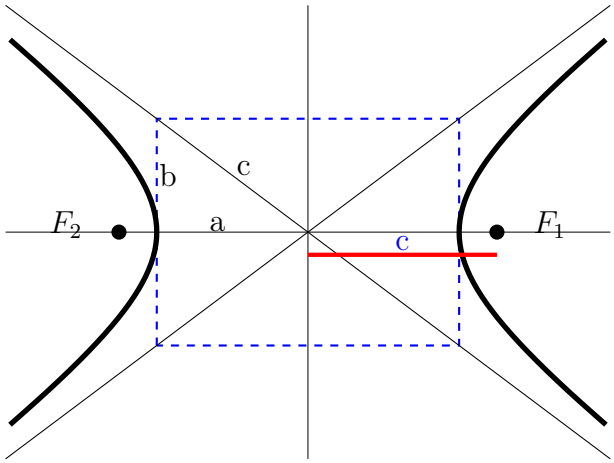


Figura 12.7: Hipérbola. En esta figura el eje horizontal representa el eje x y el eje vertical representa el eje y.

12.5. Hipérbola

Supongamos que tenemos dos puntos en el plano, F_1 y F_2, en este caso la diferencia de las distancias que se paran a P de F_1 y F_2 es

$$\boxed{d\left(P,F_1\right)-d\left(P,F_2\right).}$$

Se dice que P es un punto de una *hipérbola* si el valor absoluto de esta diferencia de distancias es una constante y esa constantes es menor a la distancia entre los focos. Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\left|d\left(P,F_1\right)-d\left(P,F_2\right)\right|=\text{constante}, \qquad \text{constante}<d\left(F_1,F_2\right). \tag{12.16}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el foco F_1 está en $(0,c)$ y el foco F_2 es está en $(-c,0)$, note que en este caso la distancia entre los dos focos es

$$d\left(F_1,F_2\right)=2c.$$

Por lo que si el punto $P=(x,y)$ es parte de la hipérbola se debe satisfacer la ecuación

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=\text{constante}, \quad \text{constante}<2c. \tag{12.17}$$

En particular, si un punto sobre la parte positiva del eje x, $(a,0)$, es parte de la hipérbola se debe cumplir

$$\left|\sqrt{(a-c)^2}-\sqrt{(a+c)^2}\right|=\text{constante}, \quad \text{constante}<2c,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es decir

$$||a-c|-|a+c|| = \text{constante}, \quad \text{constante} < 2c.$$

Se puede observar que si $c < a$, entonces

$$\begin{aligned} ||a-c|-|a+c|| &= |(a-c)-(a+c)| \\ &= |a-c-a-c| \\ &= |-2c| = 2c = \text{constante}, \quad \text{constante} < 2c. \end{aligned}$$

este resultado implica que

$$2c < 2c,$$

lo cual es un absurdo. Así no puede ocurrir que $c < a$. Entonces, se debe cumplir que

$$a < c,$$

que implica

$$\begin{aligned} ||a-c|-|a+c|| &= |-(a-c)-(a+c)| = |-a+c-a-c| \\ &= |-2a| = 2a = \text{constante}, \quad \text{constante} < 2c. \end{aligned}$$

de donde

$$2a < 2c,$$

es decir

$$a < c.$$

Entonces, la ecuación (12.17) toma la forma

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a, \quad a < c. \tag{12.18}$$

Se puede observar que el punto $(-a, 0)$ satisface la ecuación (12.18), en efecto en este caso se cumple

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{(-a-c)^2} - \sqrt{(-a+c)^2}\right| &= \left|\sqrt{(a+c)^2} - \sqrt{(c-a)^2}\right| \\ &= |a+c-(c-a)| = |a+c-c+a| \\ &= |2a| = 2a. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

A los puntos

$$V_1 = (a, 0), \qquad V_2 = (-a, 0)$$

se les llaman vértices.

Ahora, se puede observar que si

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} > 0$$

la ecuación (12.18) toma la forma

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \tag{12.19}$$

mientras que si se cumple

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} < 0$$

la ecuación (12.18) se puede escribir como

$$-\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right) = 2a,$$

es decir

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a. \tag{12.20}$$

Note que las ecuaciones (12.19) y (12.20) se pueden escribir en una sola como

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a, \tag{12.21}$$

de donde

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

por lo que

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2,$$

en otras palabras

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2,$$

así

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

que implica

$$-2xc = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 2cx,$$

entonces

$$-4xc = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

por lo tanto

$$-xc - a^2 = \mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

De esta última ecuación se obtiene

$$\left(-xc-a^2\right)^2 = \left(\mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2,$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 &= a^2\left((x+c)^2+y^2\right) = a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right) \\ &= x^2a^2 + 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2, \end{aligned}$$

es decir

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = x^2a^2 + 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2,$$

de donde

$$x^2\left(c^2-a^2\right) - y^2a^2 = c^2a^2 - a^4 = a^2\left(c^2-a^2\right),$$

así dividiendo toda la ecuación por el término $a^2\left(c^2-a^2\right)$ se encuentra

$$x^2\frac{\left(c^2-a^2\right)}{a^2\left(c^2-a^2\right)} - \frac{y^2a^2}{a^2\left(c^2-a^2\right)} = \frac{a^2\left(c^2-a^2\right)}{a^2\left(c^2-a^2\right)} = 1,$$

lo que nos da

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1, \tag{12.22}$$

Ahora, sabemos que $a < c$, entonces $c^2 - a^2$ es una cantidad positiva. Esto implica que podemos definir la cantidad positiva

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

con la cual la ecuación (12.22) se puede escribir como

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{12.23}$$

En el caso que hemos estudiado el punto medio entre los dos focos está en el punto $(0, 0)$, el cual se llama el centro de la hipérbola. Si ese punto se traslada al punto (x_0, y_0) la ecuación de la hipérbola (12.23) toma la forma

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{12.24}$$

o

La hipérbola es importante para estudiar el movimiento de diferentes cuerpos celestes. Por ejemplo, los llamados asteroides son objetos rocosos de masa pequeña que regularmente viajan por el espacio libremente. Sin embargo, algunas veces los asteroides son atraídos por cuerpos más masivos como estrellas planetas. Si el objeto es muy masivo, el asteroide puede ser atrapado por el objeto masivo. Pero cuando el asteroide no es atrapado por lo regular sigue una trayectoria hiperbólica en donde uno de los focos se encuentra el objeto masivo, como se muestra en la Figura 12.8. Hay evidencia que sugiere que la vida en la Tierra surgió gracias a diferentes materiales que fueron traídos por asteroides. También existe evidencia que sugiere que los dinosaurios se extinguieron debido a un asteroide atrapado por la Tierra.

12.6. Caso general

Algunas expresiones de la forma

$$Ay^2 + By + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{12.25}$$

con

$$AC < 0$$

se pueden escribir como una hipérbola. Para probar esta afirmación se usan los mismos pasos que se ocuparon para el caso general de la elipse.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$-2y^2 + 4y + 4x^2 - 3x - 2 = 0,$$

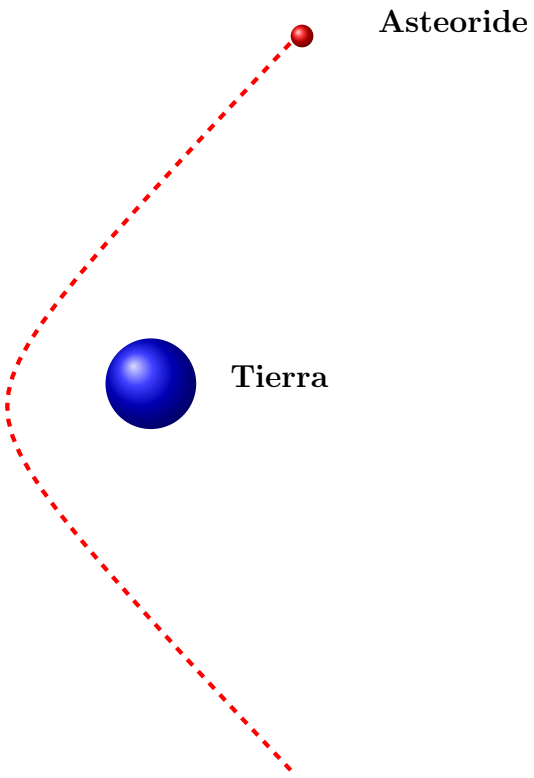


Figura 12.8: Trayectoria de un asteroide en el sistema solar.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}
0 &= -2y^2+4y+3x^2-4x-2 = -2\left(y^2-2y\right)+3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-2 \\
&= -2\left(y^2-2y+1-1\right)+3\left(x^2-2\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)-2 \\
&= -2\left(\left[y-1\right]^2-1\right)+3\left(\left[x-\frac{2}{3}\right]^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)-2 \\
&= -2\left(y-1\right)^2+2+3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-2\frac{4}{9}-2,
\end{aligned}$$

así

$$-2\left(y-1\right)^2+3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{9}=0,$$

que se puede escribir como

$$-2\left(y-1\right)^2+3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9},$$

de donde

$$\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{8}{9}}-\frac{2\left(y-1\right)^2}{\frac{8}{9}}=1,$$

por lo que, usando la *ley del sandwich*, se obtiene

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{8}{27}}-\frac{\left(y-1\right)^2}{\frac{4}{9}}=1,$$

que es la ecuación de una hipérbola con

$$\begin{aligned}
a^2 &= \frac{8}{27}, \\
b^2 &= \frac{4}{9} \\
x_0 &= \frac{2}{3}, \\
y_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

12.7. Ejercicios

1.-Obtener la ecuación canónica y los parámetros de la parábola

$$-3x^2 + 2y + 5x + 7 = 0.$$

2.- Obtener la ecuación canónica y los parámetros de la elipse

$$2x^2 + 2x + 3y^2 + y - 4 = 0.$$

3.- Obtener la ecuación canónica y los parámetros de la hipérbola

$$3x^2 - 8y^2 + 12x - 16y + 10 = 0.$$

4.- Obtener la ecuación canónica y los parámetros del círculo

$$25x^2 - 2x + 25y^2 + 5y - 11 = 0.$$

Capítulo 13

Leyes de potencia

Ahora veremos las propiedades que se obtiene cuando se multiplican varias veces el mismo número.

13.1. Potencia n

Recordemos que ocurre cuando sumamos varias veces un mismo número, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} a &= a, \\ a+a &= (1+1)a = 2a, \\ a+a+a &= (1+1+1)a = 3a, \\ a+a+a+a &= (1+1+1+1)a = 4a, \\ &\vdots \\ a+a+\cdots+a &= (1+1+\cdots+1)a = na. \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$5+5+5+5+5+5 = (1+1+1+1+1+1)5 = 6\cdot 5 = 30.$$

Ahora veamos qué ocurre cuando multiplicamos varias veces un mismo

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

número, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} a &= a^1, \\ aa &= a^2, \\ aaa &= a^3, \\ aaaa &= a^4, \\ aaaaa &= a^5, \\ &\vdots \\ \underbrace{(a\cdots a)}_{n} &= a^n \end{aligned}$$

aquí la expresión

$$\underbrace{(a\cdots a)}_{n}$$

significa que estamos multiplicando n veces el mismo número a.

Por ejemplo

$$2^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = (2\cdot 2)(2\cdot 2)2 = 4\cdot 4\cdot 2 = 16\cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Por completes, si $a \neq 0$, la potencia cero la definiremos como 1, es decir

$$a^0 = 1.$$

13.2. Potencia de un producto

Ahora, mostremos el resultado

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Usando la definición de potencia de un número y ocupando la propiedad conmutativa del producto tenemos que

$$(ab)^n = \underbrace{((ab)\cdots(ab))}_{n} = \underbrace{(a\cdots a)}_{n}\,\underbrace{(b\cdots b)}_{n} = a^n b^n,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

que es lo que queríamos demostrar.

Por ejemplo,

$$(4 \cdot 2)^3 = 8^3 = 512,$$

mientras que

$$4^3 \cdot 2^3 = 64 \cdot 8 = 512,$$

de donde

$$(4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3 = 512.$$

13.3. Suma de potencias

Otra propiedad está dada por la identidad

$$\boxed{a^n a^m = a^{n+m}.} \tag{13.1}$$

Para probar esta expresión notemos que

$$a^n a^m = \underbrace{(a \cdots a)}_{n} \underbrace{(a \cdots a)}_{m} = (a \cdots a)_{n+m}.$$

Entonces como $(a \cdots a)_{n+m}$ tiene $n+m$ términos de a multiplicando, se obtiene

$$a^n a^m = a^{n+m}. \tag{13.2}$$

Así la identidad (13.1) es correcta.

Por ejemplo

$$3^3 \cdot 3^4 = 27 \cdot 81 = 2187,$$

además

$$3^7 = 2187,$$

por lo que

$$3^4 \cdot 3^4 = 3^7 = 2187.$$

13.4. Potencia de fracciones

Ahora probemos la igualdad

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

Por defínción tenemos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)\right)}_{n} = \frac{\underbrace{(a\cdots a)}_{n}}{\underbrace{(b\cdots b)}_{n}} = \frac{a^n}{b^n},$$

que es lo queríamos demostrar.

Por ejemplo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

13.5. Producto de potencias

Ahora, mostremos el resultado

$$\boxed{(a^n)^m = (a)^{nm}.}$$

Usando la defínción, tenemos

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n\cdots a^n)}_{m} = \underbrace{\left(\underbrace{(a\cdots a)}_{n}\cdots\underbrace{(a\cdots a)}_{n}\right)}_{m} = \underbrace{(a\cdots a)}_{nm},$$

como podemos ver, en la última expresión tenemos nm términos de a multiplicándose. Por lo tanto,

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

que es lo queríamos demostrar.

Por ejemplo

$$\left(5^2\right)^3 = (25)^3 = 15625,$$

además

$$5^{2\cdot 3} = 5^6 = 15625,$$

así

$$\left(5^2\right)^3 = 5^{2\cdot 3} = 15625.$$

13.6. Binomio de Newton y triángulo de Pascal

Ahora veremos que ocurre con la potencia de una suma, es decir estudiaremos la expresión

$$(a+b)^n,$$

a la cual se le llama binomio de Newton.

Primero notemos que

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1,\\ (a+b)^1 &= a+b,\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Además, ocupando la ley distributiva se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a+b)^2a+(a+b)^2b\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)a+\left(a^2+2ab+b^2\right)b\\ &= \left(a^3+2a^2b+b^2a\right)+\left(a^2b+2ab^2+b^3\right)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\end{aligned}$$

así

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.}$$

Ahora, considerando la expresión de $(a+b)^3$ resultado se llega a

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b)\\ &= (a+b)^3a+(a+b)^3b\\ &= \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)a+\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)b\\ &= \left(a^4+3a^3b+3a^2b^2+b^3a\right)+\left(a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\right)\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.}$$

También se puede observa que ocupando la identidad de $(a+b)^4$ tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b)\\ &= (a+b)^4a+(a+b)^4b\\ &= \left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)a\left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)b\\ &= \left(a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4\right)+\left(a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5\right)\\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,\end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.}$$

De la misma forma se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)^6 &= (a+b)^5(a+b)\\ &= (a+b)^5a+(a+b)^5b\\ &= \left(a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\right)a\\ &\quad+\left(a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\right)b\\ &= \left(a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+ab^5\right)\\ &\quad+\left(a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6\right)\\ &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+200a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6,\end{aligned}$$

por lo que

$$\boxed{(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+200a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.}$$

Como podemos ver, cada vez que aumentamos un grado la potencia del binomio de Newton, el cálculo es cada vez más fastidioso. Pero es claro que usando el binomio de Newton de la potencia inmediata anterior podemos obtener el resultado deseado. Veamos si podemos obtener la forma general. Primero en listemos los resultados que hemos obtenido

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b, \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5, \\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+200a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.
\end{aligned}
$$

En estos resultados hay una estructura muy simple, en efecto los coeficientes de cada término se pueden escribir como se muestra en la Figura (13.1. Esta figura se llama triángulo de Pascal y es muy útil para obtener la potencia de un binomio. Por ejemplo, usando el triángulo de Pascal podemos ver que

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{10} &= a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6 \\
&\quad +120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^3.
\end{aligned}
$$

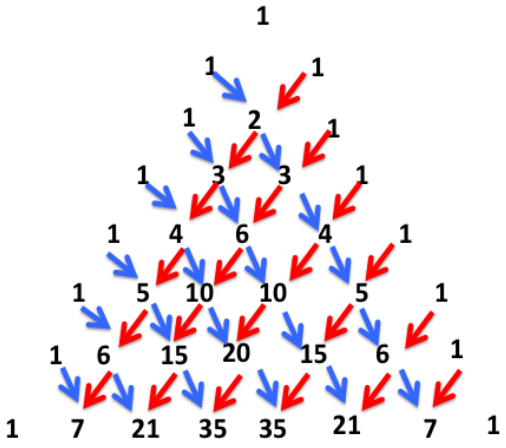


Figura 13.1: Triángulo de Pascal.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Isaac Newton (1643-1727)

Es quizá el matemático y físico más importante de la historia. Nació en una familia de campesinos acomodados de Inglaterra pero poco instruidos, de hecho su padre era analfabeta. La infancia de Newton fue poco feliz, quedó huérfano de padre poco antes de que naciera. Cuando Newton tenía dos años su madre se volvió a casar y su padrastro no lo trataba bien. Entonces, Newton buscó la protección de su abuela paterna, pero al parecer su abuelo tampoco lo trataba bien. Newton nunca se mostró interesado por las labores propias de una granja, sin embargo su madre esperaba que al crecer se hiciera cargo del negocio familiar. Gracias a la intervención de uno de sus tíos, la madre de Newton finalmente decidió que lo mejor para su hijo sería que dejara la granja y se fuera a estudiar. En 1661, a la edad de 18 años, Newton ingresó al Trinity College de Cambridge. En sus primeros años como estudiante, los maestros se encontraron con un Newton distraído y perezoso. No obstante en esos años Newton tuvo contacto por primera vez con ciencias como la química y con las obras de grandes pensadores como Euclides, eso le despertó un apetito voraz por cada vez saber más. Posteriormente se interesó en las obras de Kepler, Descartes, Galileo, Fermat, Huygens y otros. En 1664 con empieza a generalizar el teorema del binomio e inicia sus investigaciones propias. Durante los años 1665-1666 en Europa estalla una epidemia de peste bubónica y Newton se refugió en la granja de su familia. En esos dos años obtie-ne resultados impresionantes; en particular generaliza el teorema del binomio, descubre la ley de la gravitación universal, descubre las propiedades física de los colores y los principios del cálculo diferencial e integral. Cuando termina la peste bubónica, Newton regresa a Cambridge para continuar sus estudios y en 1669 es elegido para una cátedra de matemáticas. En esos años Newton guardó silencio sobre los descubrimientos que realizó en la granja de su familia y fue hasta los años de 1672 y 1675 que publicó algunos escritos sobre la naturaleza de la luz. Los primeros trabajos de Newton recibieron fuertes críticas por lo que decidió no publicar más y se dedicó a la docencia. El astrónomo Edmond Halley reconocía en Newton a un genio y trató de convencerlo de publicar sus resultados, y es así como en 1687 Newton pública sus obras fundamentales. En 1689 Newton es elegido miembro del Parlamento inglés, por esos años realizó contribuciones sobre química, hidrostática y la construcción de telescopios. En 1696 Newton decide abandonar su cátedra en Cambridge y acepta el puesto de director de la casa de Moneda de Inglaterra, en esa época dedicó más tiempo a la religión que a la ciencia. Al final de su vida establece una controversia con el matemático y filósofo alemán Leibniz sobre la invención del cálculo diferencial e integral. Finalmente muere el 20 de marzo de 1727 y es enterrado junto a los hombres más importantes de Inglaterra.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Blaise Pascal (1623-1662)

Nació en Francia dentro de un familia acomodada. Su padre fue un jurista destacado y su madre era hija de comerciantes burgueses. La madre de Pascal murió cuando éste tenía solo tres años. Desde muy pequeño Pascal mostró una inteligencia destacada, por lo que su propio padre se encargó de su educación. A los 19 años Pascal inventó una calculadora mecánica para facilitar la labor de su padre en la recaudación de impuestos. Pascal tenía una inclinación por la filosofía y la religión, por lo que escribió diversos ensayos religiosos que posteriormente fueron discutidos por filósofos como Voltaire, Nietzsche y Shopenhauer. En matemáticas se interesó por el teorema del binomio, al respecto escribió su Tratado sobe el triángulo arit-mético en donde describe lo que hoy conocemos como el triángulo de Pascal. También se interesó en los juegos de azar y en el cálculo de probabilidades, en donde también pudo aplicar los coeficientes del triángulo de Pascal. Además fue el primero en formular las demostraciones por inducción. También abordó temas de combinatoria. En geometría, ocupó el método de Cavalieri para obte-ner el área y volumen de diversas figuras geométricas. Vale la pena mencionar que su obra Tratado de los senos de los cuadrantes circulares inspiró a Leibniz para desarrollar el cálculo diferencial e integral, de hecho Leibniz menciona que en esa obra están las ideas fundamentales del cálculo. En física su interés se enfocó en la hidrodinámica, en donde desarrollo diversos trabajo teóricos y experimentales, además inventó la prensa hidráulica y la jeringa. En su honor la medida de presión lleva su nombre. Adicionalmente, junto con un amigo, fundó una empresa de carrozas, con lo que comenzó el transporte público en París. En 1662 enfermó de gravedad y vendió todas sus posesiones para donar el dinero a la caridad, ese mismo año murió a la edad de 39 años.

13.7. Productos notables, resta de dos potencias

Ahora probaremos la identidad

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \quad (13.3)$$

Antes de hacer la prueba general veamos algunos caso particulares. Primero notemos que

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + a\cdot b - b\cdot a - b^2 = a^2 - b^2,$$

por lo que

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Además,

$$\begin{aligned}(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) &= a\left(a^2+ab+b^2\right) - \left(a^2+ab+b^2\right)\\ &= \left(a^3+a^2b+ab^2\right) - \left(a^2b+ab^2+b^3\right)\\ &= a^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3,\end{aligned}$$

así

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

También podemos ver que

$$\begin{aligned}(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) &= a\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)\\ &\quad -b\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)\\ &= \left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3\right)\\ &\quad -\left(ba^3+a^2b^2+ab^3+b^4\right)\\ &= a^4 + a^3b - ba^3 + a^2b^2 - a^2b^2\\ &\quad +ab^3 - ab^3 - b^4\\ &= a^4 - b^4,\end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

de donde

$$a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right).$$

Ya que tenemos práctica probemos el caso general, usando la ley distributiva se tiene que

$$\begin{aligned}
& (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \\
= \;& a\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\
& -b\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\
= \;& \left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^{(n-k+1)}b^{k-1} + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}\right) \\
& -\left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \cdots + a^{n-k}b^k + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) \\
= \;& a^n + a^{n-1}b - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} - ab^{n-1} - b^n \\
= \;& a^n - b^n,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Esta identidad es muy útil en diferentes aplicaciones.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

13.8. Productos notables, suma de potencias impares

Ahora probaremos la identidad

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-ba^{2n-1}+b^2a^{2n-2}+\cdots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right).$$

Se puede observar que de la identidad (13.3) tenemos que

$$\begin{aligned} a^{2n+1}-(-b)^{2n+1} &= (a-(-b))\Big(a^{2n+1-1}+a^{2n+1-2}(-b)+a^{2n+1-3}(-b)^2 \\ &\quad +\cdots+a^{2n+1-k}(-b)^{k-1}+\cdots+a(-b)^{2n+1-2}+(-b)^{2n+1-1}\Big). \\ &= (a+b)\Big(a^{2n}-ba^{2n-1}+b^2a^{2n-2}+\cdots \\ &\quad +(-)^{k-1}b^{k-1}a^{2n-(k-1)}+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}\Big), \end{aligned}$$

además como

$$(-b)^{2n+1}=(-)^{2n+1}b^{2n+1}=-b^{2n+1},$$

se encuentra

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-ba^{2n-1}+\cdots+(-)^kb^ka^{2n-k}+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por ejemplo, se puede probar que se cumple

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-yx+y^2\right).$$

También es posible verificar que se satisface la igualdad

$$x^5+y^5=(x+y)\left(x^4-yx^3+y^2x^2-y^3x+y^4\right).$$

Estas identidades tienen diversas aplicaciones.

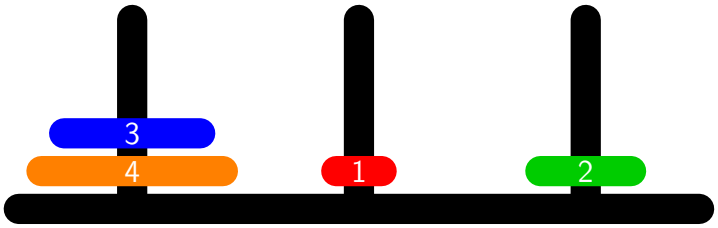


Figura 13.2: El juego de torres de Hanoi.

13.9. Suma especial

Ahora estudiaremos una aplicación especial, veamos cuánto vale la suma

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n. \tag{13.4}$$

Usando el resultado (13.3) podemos ver que se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} 1 - r^{n+1} &= 1^{n+1} - r^{n+1} \\ &= (1-r)\left(1^{(n+1)-1} + 1^{(n+1)-2}r + 1^{(n+1)-3}r^2 + \cdots + r^{(n+1)-1}\right), \end{aligned}$$

es decir

$$1 - r^{n+1} = (1-r)\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots r^n\right). \tag{13.5}$$

de donde

$$\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}.} \tag{13.6}$$

Esta suma tiene aplicaciones en diversas áreas.

13.10. Torres de Hanoi

Para jugar con las torres de Hanoi se requieren tres torres y n discos de diferentes tamaños. Sobre la torre 1 se colocan los discos de mayor a menor, de tal forma que sobre cada disco no quede uno de mayor tamaño, como se muestra en la Figura 13.2. El juego consiste en pasar todos los discos a la torre 3, ocupando la torres 2 si se requiere, de tal forma que en ningún momento un disco mayor quede sobre uno menor.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Si $n = 1$, solo pasamos directamente el disco de la torre 1 a la 3. Por lo que solo se requiere un paso

$$P_1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Si $n = 2$, para el disco más pequeño hacemos el juego como si la torre 2 fuera la 3, es decir colocamos el disco más pequeño en la torre 2. Mientras que el disco más grande lo colocamos en la torre 3. Posteriormente, para el otro disco hacemos el juego como si la torre 2 fuera la torre 1, es decir pasamos este disco a la torre 3. En total tenemos 3 movimientos,

$$P_2 = 2^2 - 1 = 3.$$

Si $n = 3$, primero jugamos con los discos más pequeños y, basados en el caso anterior, pasamos estos discos a la torre 2. Después pasamos el disco mayor a la torre 3. Finalmente pasamos los discos restantes de la torre 2 a la 3. Primero hicimos $2^2 - 1 = 3$ pasos, después 1 y finalmente $2^2 - 1 = 3$. En total tenemos $P_3 = 2^2 - 1 + 2^2 - 1 + 1 = 22^2 - 1$, es decir

$$P_3 = 2^3 - 1 = 7.$$

Si, $n = 4$, primero jugamos con los 3 discos más pequeños y, basados en el caso anterior, pasamos estos discos a la torre 2. Después pasamos el disco mayor a la torre 3. Finalmente pasamos los discos restantes de la torre 2 a la 3. Primero hicimos P_3 pasos, después 1 y finalmente P_3. En total tenemos $P_4 = P_3 + 1 + P_3 = 2^3 - 1 + 1 + 2^3 - 1 + 1 = 22^3 - 1$, es decir

$$P_4 = 2^4 - 1.$$

Si, $n = 5$, primero jugamos con los 4 discos más pequeños y, basados en el caso anterior, pasamos estos discos a la torre 2. Después pasamos el disco mayor a la torre 3. Finalmente pasamos los discos restantes de la torre 2 a la 3. Primero hicimos P_4 pasos, después 1 y finalmente P_4. En total tenemos $P_5 = P_4 + 1 + P_4 = 2^4 - 1 + 1 + 2^4 - 1 + 1 = 22^4 - 1$, es decir

$$P_5 = 2^5 - 1.$$

Note que si sabemos jugar con n discos podremos jugar con $n + 1$ discos. En efecto, supongamos que para el juego de n discos se requieren P_n pasos. Entonces para jugar con $n + 1$ discos primero jugamos con los n discos más pequeños y, basados en el caso de los n discos, pasamos todos estos discos a la torre 2. Después pasamos el disco mayor a la torre 3. Finalmente pasamos

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

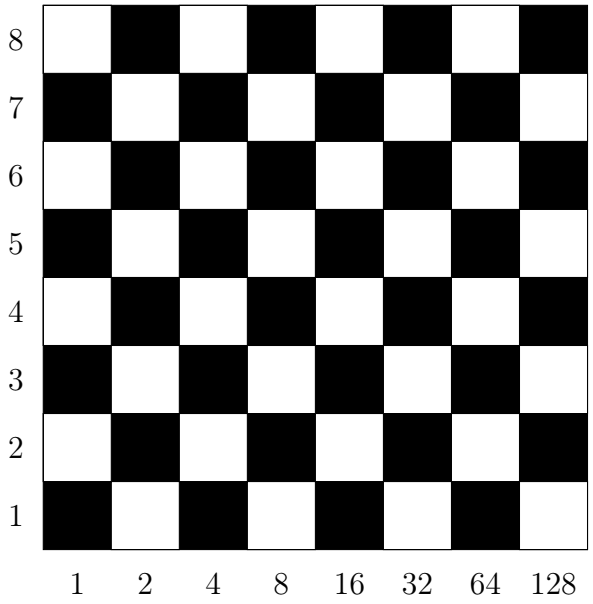


Figura 13.3: Ajedrez y las leyes de potencias.

los discos restantes de la torre 2 a la 3. Primero hicimos P_n pasos, después 1 y finalmente P_n. En total tenemos $P_n = P_n + 1 + P_n = 2P_n + 1$, es decir

$$P_{n+1} = 2P_n + 1.$$

Por lo tanto, para 7 discos se requieren $P_7 = 2^7 - 1$, pasos. Para 8 discos se requieren $P_8 = 2^8 - 1$. En general, para n discos el número de pasos que se requieren son

$$P_n = 2^n - 1.$$

13.11. Ajedrez y suma especial

Cuenta la leyenda que cuando fue inventado el ajedrez había un rey muy poderoso en la India al que le gustó tanto el juego que quiso premiar a su inventor. Así que el rey mandó llamar al inventor del ajedrez y le dijo que podía pedir lo que fuera como premio y el se lo daría. Al inventor del ajedrez le pareció que el rey era muy presuntuoso, así que le dijo: te pediré algo que solo un rey poderoso me podría dar, por la primera casilla del tablero del ajedrez dame un grano de trigo, por la segunda casilla dame dos granos de trigo, por la tercera dame 4 granos y así por cada casilla duplica la cantidad de granos

de trigo de la casilla anterior.

El rey se sintió ofendido, pues pensó que esa cantidad de trigo cualquier persona la podría dar y no era una petición que estuviera a su altura. Así que, enfadado, se despidió del inventor del ajedrez y le pidió a sus sirvientes que hicieran la entrega del trigo.

Después de varios días el rey se enteró que el trigo aún no se había entregado. El rey estaba molesto y quería castigar a sus sirvientes porque no obedecían sus ordenes. Entonces los sirvientes le explicaron al rey que en su reino no existía tanto trigo como el que pedía el inventor del ajedrez, de hecho le explicaron que quizá en todo el Mundo no existía tal cantidad de trigo.

Veamos porque la cantidad de trigo que pedía el inventor del ajedrez era muy grande. El ajedrez tiene 64 casillas y por cada casilla el rey tenía que dar una potencia de 2 de granos de trigo. Así, por la primera casilla el rey tenía que dar un grano trigo, por la segunda casilla 2 granos de trigo, por la tercera $2^2 = 4$ granos de trigo, por la cuarta casilla $2^3 = 8$, y así sucesivamente hasta la última casilla por la cual tenía que dar 2^{63} granos de trigo. Entonces, el total de granos de trigo que el rey tenía que dar es la suma

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}.$$

Note que esta suma es de la forma

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1},$$

por lo que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Este número es muy grande. En efecto, esa cantidad de trigo no se obtiene ni juntando todo el grano de trigo que se produce en un año en todo el planeta. Incluso se calcula que para obtener esa cantidad de granos de trigo se requieren cerca de 22 mil años de la producción anual de trigo de toda la Tierra.

Entonces el rey tuvo que reconocer que no podía cumplir con su promesa y aceptar que no era tan poderoso como él creía.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

13.12. Ejercicios

1.- Obtener

$$(-3)^4.$$

2.- Obtener

$$((-2)^3)^2.$$

3.- Obtener

$$((-2)^3)^2.$$

4.- Obtener

$$(x^7)^3.$$

5.- Obtener

$$((-x)^6)^5.$$

6.- Suponiendo que n y m son dos número naturales, argumentar el resultado

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

7.- Obtener el desarrollo del binomio

$$(3-x)^7.$$

8.- Obtener el desarrollo del binomio

$$(x-4)^5.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 14

Operaciones con polinomios

Un polinomio es una suma de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \tag{14.1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son constantes reales y x es una variable real.

Por ejemplo, la expresión

$$P(x) = 1 + 2x - 3x^2 + \frac{1}{4}x^3 \tag{14.2}$$

es un polinomio.

Se dice que el grado de un polinomio es la potencia más grande de polinomio. Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = 1$$

tiene grado cero. El polinomio

$$P(x) = 2 - 3x$$

tiene grado uno. El polinomio

$$P(x) = 3 - 7x + \frac{3}{2}x^2$$

tiene grado dos. Así mismo el polinomio (14.2) tiene grado 3 y el polinomio (14.1) tiene grado n.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

14.1. Suma

Dado que cada término de un polinomio es una constante o variable real, es posible sumar polinomios. Por ejemplo, si tenemos los dos polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 - 6x + 5x^2 + x^3, \\ Q(x) &= 5 + 2x + 9x^2 + 3x^3 - 7x^4 \end{aligned}$$

al sumar y agrupar términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= \left(2 - 6x + 5x^2 + x^3\right) + \left(5 + 2x + 9x^2 + 3x^3 - 7x^4\right) \\ &= (2+5) + (-6x + 2x) + \left(5x^2 + 9x^2\right) + \left(x^3 + 3x^3\right) + (-7x^4) \\ &= 7 - 4x + 14x^2 + 4x^3 - 7x^4. \end{aligned}$$

En general supongamos que $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, es decir

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m. \end{aligned}$$

Si los grados de los polinomios es el mismo, es decir $n = m$ entonces

$$\begin{aligned} P(x) =& a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ Q(x) =& b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \end{aligned}$$

así la suma de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

Si $m > n$ entonces existe un número k tal que $m = n + k$, por lo que el polinomio $Q(x)$ se puede escribir como

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{n+k}x^{n+k}.$$

por lo que suma de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &\quad + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m. \end{aligned}$$

De este resultado podemos ver que el grado de la suma de dos polinomios es el grado máximo de los dos polinomios.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

14.2. Producto

Dado que cada término de un polinomio es una constante o variable real, es posible sumar polinomios. Por ejemplo, si consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 1-2x^3, \\ Q(x) &= 5x+3x^4, \end{aligned}$$

al hacer el producto de estos polinomios y ocupar la ley de potencias se obtiene

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(1-2x^3\right)\left(5x+3x^4\right) = 5x-10x^{3+1}+3x^4-6x^{3+4} \\ &= 5x-10x^4+3x^4-6x^7 = 5x-7x^4-6x^7. \end{aligned}$$

Como otro ejemplo consideremos los dos polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 1-6x+2x^3, \\ Q(x) &= 5+x-2x^2+5x^3-x^4, \end{aligned}$$

al hacer el producto de estos polinomios y agrupar términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(1-6x+2x^3\right)\left(3+x-2x^2+5x^3-x^4\right) \\ &= \left(3-18x+6x^3\right)+\left(x-6x^2+2x^4\right)+\left(-2x^2+12x^3-4x^5\right) \\ &\quad +\left(5x^3-30x^4+10x^6\right)+\left(-x^4+6x^5-2x^7\right) \\ &= 3-17x-8x^2+23x^3-29x^4+2x^5+10x^6-2x^7. \end{aligned}$$

Para estudiar el caso general supongamos que $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, es decir

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \\ Q(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m. \end{aligned}$$

al hacer el producto de estos polinomios se obtiene

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n\right) \\ &\quad \left(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\cdots+b_mx^m\right) \\ &= a_0b_0+(a_0b_1+b_0a_1)x+(a_0b_2+a_1b_1+b_0a_2)x^2+ \\ &\quad +(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3 \\ &\quad +(a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)x^4+\cdots+a_nb_mx^{n+m}, \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

así

$$P(x)Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$

con

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0,\\
c_1 &= a_0b_1 + b_0a_1,\\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + b_0a_2,\\
c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0,\\
c_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0,\\
&\vdots\\
c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0,\\
&\vdots\\
c_{n+m} &= a_nb_m.
\end{aligned}$$

De este resultado podemos ver que si el polinomio $P(x)$ tiene grado n y el polinomios $Q(x)$ tiene grado m, entonces el producto de polinomios $P(x)Q(x)$ tiene grado

$$n + m.$$

14.3. División de polinomios, el algoritmo de Euclides

En esta sección estudiaremos la división de polinomios. Una operación que se aprende en los primeros años de la eduación básica es la división entre números enteros, esta operación es similar a la división entre polinomios. Por lo que vale la pena recordar el algoritmo de la división entre número enteros.

14.3.1. Algoritmo de la división de los números enteros

Supongamos que queremos dividir 587 entre 4, entonces, usando el algoritmo de la división que aprendimos en la **educación** básica, tenemos

$$\begin{array}{r|l} & 146 \\ \hline 4 & 587 \\ & \underline{-4} \\ & \quad 18 \\ & \underline{-16} \\ & \quad\ 27 \\ & \underline{-24} \\ & \quad\ \ 3. \end{array}$$

Note que el número 587 se puede escribir en centenas, decenas y unidades como

$$587 = 500 + 80 + 7,$$

además usando potencias de diez se tiene

$$587 = 500 + 80 + 7 = 5 \times 10^2 + 8 \times 10 + 7.$$

Así, se puede observar que en el algorimo de la división primero se intenta eliminar centenas, es decir unidades multiplicados por 10^2. Después, en el segundo paso se intenta eliminar decenas, es decir unidades multiplicadas por 10^1. Al final se intenta eliminar las unidades, que son unidades multiplicadas por $10^0 = 1$. Esta observación nos ayudará formular la división de polinomios, solo que en lugar de potencias de 10 se tomaran potencias de x, en otras palabras cambiaremos expresiones de la forma 10^n por x^n.

También se puede notar que se cumple

$$587 = 146(4) + 3 = 584 + 3 = 587,$$

otra forma de escribir esta igualdad es

$$\frac{587}{4} = 146 + \frac{3}{4}.$$

Se dice que

$$q = 146$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

es el cociente de la división y

$$r = 3$$

es el residuo.

En general se puede probar que si m y n son dos números naturales con $m < n$, existen los números q y r tal que

$$n = qm + r, \tag{14.3}$$

con $r < q$.

Otra forma de escribir la expresión (14.3) es

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}, \tag{14.4}$$

donde q es cociente de la división y r su residuo.

14.3.2. Algoritmo de la división para los polinomios

Inspirados en el algoritmo para dividir números enteros, propondremos el algorimo para dividir polinomios. Primero veamos un ejemplo, supongamos que queremos dividir los los polinomios

$$P(x) = 2x^2 + 3x + 1. \tag{14.5}$$
$$F(x) = x - 1. \tag{14.6}$$

Entonces, escribimos la expresión

$$x - 1 \quad \overline{)2x^2 + 3x + 1} \quad .$$

como primer paso debemos eliminar la potencia x^2, por lo que propondremos como primer término en el cociente a $2x$. De donde, siguiendo el algoritmo de la división usual, se llega a

$$\begin{array}{rl} & \overline{\quad 2x \quad\quad\quad} \\ x - 1 &)2x^2 + 3x + 1 \\ & \underline{-2x^2 + 2x} \\ & \qquad\quad 5x + 1. \end{array}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Como segundo paso debemos eliminar la potencia de grado uno de x, por lo como segundo término del cociente propondremos 5. Así, usando de nuevo el algorimo de la división usual, se obtiene

$$\begin{array}{rl} & \underline{\quad 2x+5 \quad} \\ x-1 &)2x^2+3x+1 \\ & \underline{-2x^2+2x} \\ & \qquad 5x+1 \\ & \qquad \underline{-5x+5} \\ & \qquad\quad 6. \end{array}$$

Ahora, 6 se puede ver como un polinomio de grado cero, mientras que $x-1$ tiene grado 1. Por lo que no hay una polinomio $P(x)$ tal que multiplicado por $x-1$ nos de un polinomio de grado cero. Así, en este paso termina el algoritmo de la división.

Además, se puede observa que se cumple

$$2x^2+3x+1=(2x+5)(x-1)+6,$$

que implica

$$\frac{2x^2+3x+1}{x-1}=(2x+5)+\frac{6}{x-1}.$$

Como otro ejemplo consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 5x^3-4x^2+7x+6, \\ F(x) &= x-3, \end{aligned}$$

en este caso se obtiene

$$\begin{array}{rl} & \underline{\qquad\qquad 5x^2+11x\ +40} \\ x-3\big) & \quad 5x^3\ -4x^2\ +7x\ \ +6 \\ & \underline{-5x^3+15x^2} \\ & \qquad\quad 11x^2\ +7x \\ & \qquad\quad \underline{-11x^2+33x} \\ & \qquad\qquad\quad 40x\ \ +6 \\ & \qquad\qquad\quad \underline{-40x+120} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 126 \end{array}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Además, se puede comprobar que

$$5x^3 - 4x^2 + 7x + 6 = \left(5x^2 + 11x + 40\right)(x - 3) + 126,$$

de donde

$$\frac{5x^3 - 4x^2 + 7x + 6}{x - 3} = 5x^2 + 11x + 40 + \frac{126}{x - 3}.$$

Ahora veamos la división de los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3, \\ F(x) &= x^2 - 3x - 1. \end{aligned}$$

En este caso el algoritmo de la división implica

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 9x + 27 \\ \hline x^2 - 3x - 1 & 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3 \\ & \underline{-2x^4 + 6x^3 + 2x^2} \\ & 9x^3 + x \\ & \underline{-9x^3 + 27x^2 + 9x} \\ & 27x^2 + 10x + 3 \\ & \underline{-27x^2 + 81x + 27} \\ & 91x + 30 \end{array}$$

Se puede verificar que

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3 = \left(2x^2 + 9x + 27\right)\left(x^2 - 3x - 1\right) + 91x + 30.$$

entonces

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 3x - 1} = 2x^2 + 9x + 27 + \frac{91x + 30}{x^2 - 3x - 1}.$$

En general, si tenemos dos polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x, \\ F(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

con n mayor a m. Se puede mostrar que existen dos únicos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tal que

$$P(x) = q(x)F(x) + r(x) \tag{14.7}$$

con el grado de $r(x)$ menor al grado de $F(x)$.

Note que la igualdad (14.7) implica que al dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $F(x)$ se obtiene

$$\frac{P(x)}{F(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{F(x)},$$

por esta razón al polinomio $q(x)$ se le llama cociente y al polinomio $r(x)$ se le llama residuo.

Existe evidencia que muestra que algoritmo de la división era conocido por diversas culturas de la antigüedad. Sin embargo, diversos autores atribuyen este algoritmo a Euclides, por esta razón se suele nombrar como *algoritmo de Euclides*.

Euclides (325 a.C-265 a.C)

Escribió el libro llamado los Elementos, el cual quizá sea el libro más influyente en la historia de las matemáticas. En este libro se muestra que la mayoría de los resultados de la geometría conocida en su época se pueden deducir de un número reducido de axiomas, por esta razón a Euclides se le llama el padre la geometría. Se cree que quizá Euclides no fue el primero en demostrar los diferentes teoremas contenidos en los *Elementos*, pero sí fue el primero en reunir dichos teoremas y mostrar que son parte de un solo esquema que los unifica. Además en los libros $V\,II$, $V\,III$ y IX de los *Elementos* Euclides aborda el problema de la divisibilidad. En dicha obra también abordan algunos resultados de la teoría de los números. Los *Elementos* han sido fuente de inspiración y guía para ciencias como la astronomía, químí-ca y física. Se sabe muy poco sobre de la vida de Euclides. Hay historiadores que creen que fue un alumno de Platón, de quien aprendió matemáticas. Pero también hay quienes sostienen que en realidad Euclides fue el jefe de un grupo

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

de matemáticos, los cuales escribieron los *Elementos* y firmaban sus trabajo con el nombre de su jefe e incluso siguieron obteniendo resultados y escribiendo libros después de la muerte de Euclides. También se cree que Euclides no fue una persona, si no que fue un grupo de matemáticos de Alejandría los cuales tomaron el nombre de Euclides en honor a Euclides de Mégara, el cual había vivido un siglo antes. Independientemente de la historia de Euclides, los *Elementos* han sido un libro fundamental en la historia de las matemáticas.

14.4. Residuo cero

Supongamos que tenemos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x, \\ F(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

con n mayor a m. Si el algoritmo de Euclides implica que el residuo induce que el residuo es cero, se dice que el polinomio $F(x)$ divide a $P(x)$. En este caso existe un polinomio $q(x)$ tal que

$$\boxed{P(x) = q(x)F(x).}$$

Por ejemplo, consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 6x - 16 \\ F(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

Con el algoritmo de Euclides tenemos

$$\begin{array}{r|l} & x - 8 \\ \hline x+2 & x^2 - 6x - 16 \\ & -x^2 - 2x \\ \hline & -8x - 16 \\ & 8x + 16 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Se puede observar que

$$x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2),$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

así

$$\frac{x^2-6x-16}{x+2}=x-8.$$

Como otro ejemplo consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^3+17x^2-8x-12. \\ F(x) &= x+6, \end{aligned}$$

con el algoritmo de Euclides tenemos

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-x-2 \\ \hline x+6 & 3x^3+17x^2-8x-12 \\ & -3x^3-18x^2 \\ \hline & \quad -x^2-8x \\ & \quad\ x^2+6x \\ \hline & \quad\ -2x-12 \\ & \quad\ \ 2x+12 \\ \hline & \quad\ \ 0 \end{array}$$

Además se puede probar que

$$3x^3+17x^2-8x-12=\left(3x^2-x-2\right)(x+6),$$

de donde

$$\frac{3x^3+17x^2-8x-12}{x+6}=3x^2-x-2.$$

También consideremos los polinomios

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5+x^4-6x^3-13x^2-13x-6, \\ F(x) &= x+1. \end{aligned}$$

Con el algoritmo de Euclides se tiene

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4 \quad -6x^2 \quad -7x-6 \\
\cline{2-2}
x+1 & x^5+x^4-6x^3-13x^2-13x-6 \\
 & \underline{-x^5-x^4} \\
 & \quad -6x^3-13x^2 \\
 & \quad \underline{6x^3+6x^2} \\
 & \quad\quad -7x^2-13x \\
 & \quad\quad \underline{7x^2+7x} \\
 & \quad\quad\quad -6x-6 \\
 & \quad\quad\quad \underline{6x+6} \\
 & \quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Se puede verificar que

$$x^5+x^4-6x^3-13x^2-13x-6=\left(x^4-6x^2-7x-6\right)(x+1),$$

entonces

$$\frac{x^5+x^4-6x^3-13x^2-13x-6}{x+1}=x^4-6x^2-7x-6.$$

14.5. Raíces de polinomios

Supongamos que tenemos un polinomio de grado n

$$P(x) \quad = \quad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0x.$$

Ahora, si α es una constante podemos construir el polinomio de grado uno

$$\boxed{(x-\alpha).}$$

Además, considerando el algoritmo de Euclides, sabemos que existen los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tal que

$$\boxed{P(x)=q(x)(x-\alpha)+r(x),} \tag{14.8}$$

Notemos que el algoritmo de Euclides termina cuando el polinomio $(x-\alpha)$ ya no puede dividir al residuo $r(x)$, lo que implica que el residuo $r(x)$ debe ser una constante. Por lo que la ecuación (14.8) debe ser de la forma

$$P(x)=q(x)(x-\alpha)+\beta,$$

con β una constante.

Se dice que γ es raíz de $P(x)$ si

$$P(\gamma) = 0.$$

Ahora con la raíz γ podemos construir el polinomio $(x - \gamma)$, entonces apelando al algoritmo de Euclides sabemos que existen un polinomio $q(x)$ y una constante β tal que

$$P(x) = q(x)(x - \gamma) + \beta.$$

Además considerando que γ es raíz de $P(x)$ tenemos

$$P(\alpha) = q(x)(\alpha - \alpha) + \beta = 0,$$

entonces

$$\beta = 0.$$

Entonces, si γ es una raíz de $P(x)$ existe un polinomio de tal forma que

$$P(x) = q(x)(x - \gamma).$$

En otras palabras, si γ es una raíz de $P(x)$, el polinomio $(x - \gamma)$ divide a $P(x)$.

Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) \quad = \quad x^2 - 6x + 7$$

tiene como raíz

$$\gamma = 7.$$

Por lo que el polinomio

$$x - 7$$

debe dividir al polinomio

$$x^2 - 6x - 7.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

En efecto,

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x-7 & x^2-6x-7 \\ & \underline{-x^2+7x} \\ & \quad x-7 \\ & \quad \underline{-x+7} \\ & \quad\quad 0 \end{array}$$

Se puede probar que

$$x^2-6x-7=(x+1)(x-7),$$

que implica

$$\frac{x^2-6x-7}{x-7}=x+1.$$

Como otro ejemplo, podemos ver que el polinomio

$$P(x) \;=\; x^3-x^2-x-2$$

tiene como raíz

$$\gamma=2.$$

Por lo que el polinomio

$$x-2$$

debe dividir al polinomio

$$x^3-x^2-x-2.$$

En este caso tenemos,

$$\begin{array}{r|l} & x^2\ +x+1 \\ \hline x-2 & x^3\ -x^2\ -x-2 \\ & \underline{-x^3+2x^2} \\ & \quad x^2\ -x \\ & \quad \underline{-x^2+2x} \\ & \quad\quad x-2 \\ & \quad\quad \underline{-x+2} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Se puede probar que

$$x^3 - x^2 - x - 2 = \left(x^2 + x + 1\right)(x - 2),$$

por lo que

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2} = x^2 + x + 1.$$

También podemos ver que el polinomio

$$P(x) \;=\; x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6$$

tiene como raíz

$$\gamma = -1.$$

Por lo tanto el polinomio

$$x + 1$$

debe dividir al polinomio

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6.$$

Para estos polinomios, el algoritmo de Euclides implica

$$\begin{array}{rl}
 & x^4 \quad - 6x^2 \;\; - 7x - 6 \\
\cline{2-2}
x + 1\big) & x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6 \\
 & \underline{-\,x^5 - x^4} \\
 & \quad -6x^3 - 13x^2 \\
 & \quad \underline{\;6x^3 \;\; + 6x^2} \\
 & \qquad\quad -7x^2 - 13x \\
 & \qquad\quad \underline{\;\;7x^2 \;\; + 7x} \\
 & \qquad\qquad\quad -6x - 6 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{\;\;\;6x + 6} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Se puede probar que

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6 = \left(x^4 - 6x^2 - 7x - 6\right)(x + 1),$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

de donde

$$\frac{x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6}{x + 1} = x^4 - 6x^2 - 7x - 6.$$

El Teorema Fundamental del álgebra afirma que para cualquier polinomio siempre existe una constante γ tal que $P(\gamma) = 0$. Esto implica que existe $q(x)$ tal que

$$P(x) \quad = \quad q(x)(x - \alpha).$$

La prueba de este teorema está fuera del propósito de estas notas, además el número α no siempre es real.

14.6. Ejercicios

1.- Obtener la suma de los siguientes polinomios

$$\left(-4x^2 + x + 5 + 4x^3\right), \quad \left(8x + 5x^2 + 2\right).$$

2.- Obtener el producto de los polinomios

$$\left(3x^2 + x + 5 - 4x^3\right)\left(4x + x^2 + 2\right).$$

3.- Realice la división del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $f(x)$ (es decir encontrar $q(x)$ y $r(x)$ tal que $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$)

$$p(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 4, \quad f(x) = x^2 + 5.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Capítulo 15

Factorización de polinomios

Supongamos que tenemos el polinomio

$$P(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

el cual tiene grado n. Factorizar este polinomio significar expresarlo como producto de polinomio de grados menores a n.

Por ejemplo el polinomio de grado 2

$$P(x) \quad = \quad x^2 - 1$$

se puede expresar como el producto de $(x-1)$ y $(x+1)$, en efecto

$$P(x) \quad = \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

El Teorema Fundamental del álgebra nos garantiza que todo polinomio de coeficientes reales se puede factorizar. Sin embargo, no existe un método con el cual se pueda factorizar cualquier polinomio. Así, existen diferentes métodos de factorización y no todos los métodos funcionan para todos los polinomios. En este capítulo veremos diferentes métodos de factorización y los casos en que se aplican.

15.1. Polinomios de segundo grado

15.1.1. Caso $P(x) = bx^2 + cx$

Los polinomios de la forma

$$P(x) = bx^2 + cx$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

son muy fáciles de factorizar, solo hay que usar la ley distributiva

$$P(x) = bx^2 + cx = x(bx + c).$$

Por ejemplo

$$P(x) = 5x^2 + 9x = x(5x + 9).$$

15.1.2. Usando productos notables

Varios polinomios se pueden factorizar usando productos notables, el caso de polinomios de grado 2 tenemos los productos notables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ a^2 - b^2 &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$P(x) = 9x^2 + 12x + 4,$$

en este caso tenemos,

$$P(x) = 9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2(2)(3x) + 2^2 = (3x + 2)^2,$$

por lo que

$$P(x) = 9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

Ahora veamos el caso

$$P(x) = 32x^2 + 48x + 18,$$

en este polinomio tenemos,

$$P(x) = 2\left(16x^2 + 24x + 9\right) = 2\left((4x)^2 + 2(3)(4x) + 3^2\right) = 2(4x + 3)^2,$$

de donde

$$P(x) = 32x^2 + 48x + 18 = 2(4x + 3)^2.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = 25x^2 - 30x + 9,$$

en este caso tenemos,

$$P(x) = 25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2(3)(5x) + 3^2 = (5x - 3)^2,$$

entonces

$$P(x) = 25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2.$$

Para el polinomio

$$P(x) = 12x^2 - 60x + 75,$$

tenemos,

$$P(x) = 3\left(4x^2 - 20x + 25\right) = 2\left((2x)^2 - 2(2)(5x) + 5^2\right) = 3(2x - 5)^2,$$

por lo que

$$P(x) = 12x^2 - 60x + 75 = 3(2x - 5)^2.$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = 16x^2 - 81,$$

en este caso tenemos,

$$P(x) = 16x^2 - 81 = (4x)^2 - 81 = (4x - 3)(4x + 3),$$

así

$$P(x) = 16x^2 - 81 = (4x - 3)(4x + 3).$$

Para el polinomio

$$P(x) = 45x^2 - 20$$

tenemos,

$$P(x) = 5\left(9x^2 - 4\right) = 5\left((3x)^2 - 2^2\right) = 5(3x - 2)(3x + 2),$$

es decir

$$P(x) = 45x^2 - 20 = 5(3x - 2)(3x + 2).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

15.1.3. Caso $P(x) = x^2 + bx + c$

Para los polinomios de la forma

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

Para este caso podemos proponer las constantes α y β de tal forma que

$$P(x) \quad = \quad x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta\alpha.$$

Así, se deben satisfacer las igualdades

$$\begin{aligned} b &= (\alpha + \beta), \\ c &= \beta\alpha. \end{aligned}$$

15.1.4. Casos particulares de $P(x) = ax^2 + bx + c$

Ahora veamos algunos casos particulares del polinomio

$$P(x) \quad = \quad ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

$$(ax + \alpha)(x + \beta) = ax^2 + (\alpha + \beta a)x + (\alpha\beta)$$

$$\begin{aligned} b &= \alpha + \beta a, \\ c &= \alpha\beta \end{aligned}$$

15.1.5. Caso general de $P(x) = ax^2 + bx + c$

Consideremos el polinomio de segundo orden

$$P(x) \quad = \quad ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

Para este caso siempre podemos ocupar las soluciones de la ecuación cuadrática. Por completes, recordemos el procedimiento.

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Primero notemos que podemos completar cuadrados, en efecto

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Además, notemos que

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,$$

de donde

$$P(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right).$$

Ahora, considerando la igualdad

$$A^2-B^2 = (A-B)(A+B),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \end{aligned}$$

También podemos observar que ocupando la ley de los signos se llega a

$$P(x) = a\left(x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right),$$

entonces definiendo

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

se tiene

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Así, cualquier polinomio de segundo grado se puede factorizar como el producto de dos polinomios de grado uno.

Note que los números x_1 y x_2 están dados en términos de las raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

las cuales son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Así las soluciones de la ecuación cuadrática nos ayudan a factorizar los polinomios de segundo orden.

15.2. Polinomios de orden superior, reducción a polinomios de orden 2

Anteriormente vimos que un polinomio de grado 2 siempre se puede factorizar. Sin embargo, no existe un método general para factorizar polinomios de grado mayor a 2.

Un método que funciona para algunos polinomios de orden superior es reducir el problema a factorizar un polinomio de grado 2, que siempre se puede factorizar. En esta sección veremos dos casos en los cuales se puede aplicar dicha reducción.

15.2.1. Usando ley distributiva

Existen polinomios de orden mayor a 2 que usando la ley distributiva se reducen a factorizar un polinomio de orden 2.

Por ejemplo

$$P(x) = -3x^3 - 3x^2 + 126x,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

note que factorizando el término $-3x$ obtenemos

$$P(x) = -3x^3 - 3x^2 + 126x = -3x\left(x^2 + x - 42\right).$$

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio de grado 2

$$\left(x^2 + x - 42\right),$$

el cual se puede escribir como

$$\left(x^2 + x - 42\right) = (x + 7)(x - 6).$$

Por lo tanto

$$P(x) = -3x^3 - 3x^2 + 126x = -3x(x + 7)(x - 6).$$

Como otro ejemplo consideremos el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 22x^3 + 36x^2,$$

note que factorizando el término $2x^2$ obtenemos

$$P(x) = 2x^4 + 22x^3 + 36x^2 = 2x^2\left(x^2 + 11x + 18\right).$$

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio de grado 2

$$\left(x^2 + 11x + 18\right),$$

que se puede factorizar como

$$\left(x^2 + 11x + 18\right) = (x + 2)(x + 9).$$

Así

$$P(x) = 2x^4 + 22x^3 + 36x^2 = 2x^2(x + 2)(x + 9).$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - 45x^3$$

note que factorizando el término x^3 obtenemos

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - 45x^3 = x^3\left(x^2 - 4x - 45\right).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio de grado 2

$$\left(x^2 - 4x - 45\right),$$

que se puede escribir como

$$\left(x^2 - 4x - 45\right) = (x + 5)(x - 9).$$

De donde

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - 45x^3 = x^2(x + 5)(x - 9).$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = 5x^6 - 5x^4 - 60x^2$$

note que factorizando el término $5x^2$ obtenemos

$$P(x) = 5x^6 - 5x^4 - 60x^2 = 5x^2\left(x^4 - x^2 - 12\right).$$

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio

$$\left(x^4 - x^2 - 12\right),$$

que se puede escribir como

$$\left(x^2 - 4x - 45\right) = (x + 5)(x - 9).$$

De donde

$$P(x) = x^5 - 4x^4 - 45x^3 = x^2(x + 5)(x - 9).$$

15.2.2. Cambio de variable

Usando un cambio de variable, algunos polinomios de grado mayor a 2 se puede reducir a factorizar un polinomio de grado 2.

Por ejemplo consideremos el polinomio

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 4.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Note que usando el cambio de variable

$$u = x^2$$

tenemos que

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 4 = 2u^2 - 7u - 4.$$

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio de grado 2

$$2u^2 - 7u - 4,$$

que se puede escribir como

$$\left(2u^2 - 7u - 4\right) = (2u + 1)(u - 4) = \left(2x^2 + 1\right)\left(x^2 - 4\right),$$

además

$$\left(x^2 - 4\right) = (x - 2)(x + 2).$$

Así,

$$\left(2u^2 - 7u - 4\right) = \left(2x^2 + 1\right)\left(x^2 - 4\right) = \left(2x^2 + 1\right)(x - 2)(x + 2).$$

Por lo tanto

$$P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 4 = \left(2x^2 + 1\right)(x - 2)(x + 2).$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = 5x^6 - 5x^4 - 60x^2$$

note que factorizando el término $5x^2$ obtenemos

$$P(x) = 5x^6 - 5x^4 - 60x^2 = 5x^2\left(x^4 - x^2 - 12\right).$$

Así, este problema se reduce a factorizar el polinomio

$$\left(x^4 - x^2 - 12\right),$$

se puede observar que con el cambio de variable

$$u = x^2$$

se obtiene

$$\left(x^4 - x^2 - 12\right) = \left(u^2 - u - 12\right),$$

además

$$\left(u^2 - u - 12\right) = (u + 3)(u - 4).$$

Así,

$$\left(x^4 - x^2 - 12\right) = \left(x^2 + 3\right)\left(x^2 - 4\right) = \left(x^2 + 3\right)(x - 2)(x + 2),$$

en consecuencia

$$P(x) = 5x^6 - 5x^4 - 60x^2 = 5x^2\left(x^2 + 3\right)(x - 2)(x + 2).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

15.3. Productos notables

Recordemos que los productos notables de orden superior son de la forma

$$\begin{aligned} (a+b)^n &\quad , \\ a^n - b^n &\quad , \\ a^{2n+1} + b^{2n+1} &\quad . \end{aligned}$$

Algunos polinomios de grado mayor a 2 se puede factorizar usando dichas identidades.

Por ejemplo consideremos el polinomio

$$P(x) = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125.$$

Usando el binomio de Newton de grado 3, este polinomio se puede escribir como

$$P(x) = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = (2x+5)^3 .$$

Como otro ejemplo veamos el polinomio

$$P(x) = 81x^4 - 72x^3 + 216x^2 - 96x + 16.$$

Se puede observar que usando el binomio de Newton de grado 4, este polinomio se puede escribir como

$$P(x) = 81x^4 - 72x^3 + 216x^2 - 96x + 16 = (3x-2)^4 .$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 - 27.$$

Este polinomio se puede escribir como

$$P(x) = x^3 - 3^3,$$

además usando la identidad

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

se obtiene

$$P(x) = x^3 - 3^3 = (x-3)\left(x^2+3x+9\right),$$

es decir

$$P(x) = x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9).$$

También consideremos el polinomio

$$P(x) = 64x^6 + 1.$$

Este polinomio se puede escribir como

$$P(x) = \left(4x^2\right)^3 + 1,$$

además usando la identidad

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(4x^2\right)^3 + 1 = \left(4x^2+1\right)\left((4x^2)^2 - 4x^2 + 1\right) \\ &= \left(4x^2+1\right)\left(16x^4 - 4x^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(x) = 64x^6 + 1 = \left(4x^2+1\right)\left(16x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

Ahora veamos el polinomio

$$P(x) = x^8 - y^8,$$

que se puede escribir como

$$P(x) = \left(x^4\right)^2 - \left(y^4\right)^2 = \left(x^4 - y^4\right)\left(x^4 + y^4\right).$$

Además,

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= \left(x^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \\ &= (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(x) = x^8 - y^8 = (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)\left(x^4+y^4\right).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

15.4. División de polinomios

Sea $P(x)$ un polinomio, se dice que la constante γ es una raíz de $P(x)$ si

$$P(\gamma) = 0.$$

Se puede probar que si γ es una raíz de $P(x)$ entonces existe un polinomio $q(x)$ es tal que

$$P(x) = q(x)(x - \gamma).$$

Este resultado nos indica que el problema de encontrar los polinomios que factorizan a $P(x)$ está fuertemente correlacionado con el problema de encontrar las raíces del mismo polinomio $P(x)$.

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20. \tag{15.1}$$

Para este caso se puede observar que

$$P(2) = 2^3 + 5\left(2^2\right) - 4(2) - 20 = 8 + 5 \cdot 4 - 8 - 20 = 0,$$

así

$$x = 2$$

es una raíz del polinomio (15.1). Por lo que el polinomio

$$F(x) = x - 2$$

divide al polinomio (15.1), en efecto

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 7x + 10 \\ \hline x - 2 & x^3 + 5x^2 - 4x - 20 \\ & -x^3 + 2x^2 \\ \hline & \quad 7x^2 - 4x \\ & \quad -7x^2 + 14x \\ \hline & \qquad 10x - 20 \\ & \qquad -10x + 20 \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Este resultado implica la igualdad

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = \left(x^2 + 7x + 10\right)(x - 2).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

También se puede probar que

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5).$$

Por lo tanto,

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 2)(x + 5)(x - 2).$$

Como podemos ver, las raíces del polinomio (15.1) nos ayudan a factorizar dicho polinomio.

Ahora veamos el polinomio

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 2. \tag{15.2}$$

Para este caso se puede observar que

$$P(2) = 2^3 - \left(2^2\right) - (2) - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 8 - 8 = 0.$$

así

$$x = 2$$

es una raíz del polinomio (15.2). Por lo que el polinomio

$$F(x) = x - 2$$

divide al polinomio (15.2), en efecto

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 2 & x^3 - x^2 - x - 2 \\
 & \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 & \quad x^2 - x \\
 & \quad \underline{-x^2 + 2x} \\
 & \quad\quad x - 2 \\
 & \quad\quad \underline{-x + 2} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Este resultado induce la igualdad

$$x^3 - x^2 - x - 2 = \left(x^2 + x + 1\right)(x - 2).$$

Así, la raíz $x = 2$ nos ayudan a factorizar el polinomio (15.2).

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Ahora consideremos el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 4x + 30. \tag{15.3}$$

Para este caso se puede observar que

$$\begin{aligned} P(-5) &= 2(-5)^4 + 15(-5)^3 + 23(-5)^2 - 4(-5) + 30 \\ &= 2(625) - 15(125) + 23(25) + 20 + 30 \\ &= 1250 - 1875 + 575 + 50 = 1875 - 1875 = 0. \end{aligned}$$

Así

$$x = -5$$

es una raíz del polinomio (15.3), lo que implica que

$$F(x) = x + 5$$

divide al polinomio (15.3), en efecto

$$\begin{array}{rr|l} & 2x^3 + 5x^2 - 2x + 6 & \\ \hline x+5 & 2x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 4x + 30 & \\ & -2x^4 - 10x^3 & \\ \hline & 5x^3 + 23x^2 & \\ & -5x^3 - 25x^2 & \\ \hline & -2x^2 - 4x & \\ & 2x^2 + 10x & \\ \hline & 6x + 30 & \\ & -6x - 30 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

De donde se cumple la igualdad

$$2x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 4x + 30 = \left(2x^3 + 5x^2 - 2x + 6\right)(x + 5).$$

Como otro ejemplo veamos como factorizar el polinomio

$$P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6. \tag{15.4}$$

Para este caso tenemos que

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^5 + (-1)^4 - 6(-1)^3 - 13(-1)^2 - 13(-1) - 6 \\ &= -1 + 1 + 6 - 13 + 13 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Así

$$x = -1$$

es una raíz del polinomio (15.4), lo que implica que el polinomio

$$F(x) = x + 1$$

divide al polinomio (15.4), en efecto

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 - 6x^2 - 7x - 6 \\
\hline
x+1 & x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6 \\
 & \underline{-x^5 - x^4} \\
 & \quad -6x^3 - 13x^2 \\
 & \quad \underline{6x^3 + 6x^2} \\
 & \quad\quad -7x^2 - 13x \\
 & \quad\quad \underline{7x^2 + 7x} \\
 & \quad\quad\quad -6x - 6 \\
 & \quad\quad\quad \underline{6x + 6} \\
 & \quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Además se puede probar que

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6 = \left(x^4 - 6x^2 - 7x - 6\right)(x + 1).$$

Ahora el polinomio

$$Q(x) = x^4 - 6x^2 - 7x - 6$$

tiene como raíz a $x = -2$, pues

$$Q(-2) = (-2)^4 - 6(-2)^2 - 7(-2) - 6 = 16 - 24 + 14 - 6 = 30 - 30 = 0$$

Esto implica que

$$G(x) = x + 2$$

divide a $Q(x)$. Efectivamente, se tiene

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \\
\hline
x + 2 & x^4 - 6x^2 - 7x - 6 \\
 & -x^4 - 2x^3 \\
\hline
 & -2x^3 - 6x^2 \\
 & 2x^3 + 4x^2 \\
\hline
 & -2x^2 - 7x \\
 & 2x^2 + 4x \\
\hline
 & -3x - 6 \\
 & 3x + 6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Por lo que

$$x^4 - 6x^2 - 7x - 6 = \left(x^3 - 2x^2 - 2x - 3\right)(x + 2).$$

También se puede observar que el polinomio

$$S(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$$

cumple

$$S(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 2(3) - 3 = 27 - 18 - 6 - 3 = 27 - 27 = 0.$$

De donde el polinomio

$$H(x) = x - 3$$

divide a $S(x)$. Efectivamente, se tiene

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 1 \\
\hline
x - 3 & x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \\
 & -x^3 + 3x^2 \\
\hline
 & x^2 - 2x \\
 & -x^2 + 3x \\
\hline
 & x - 3 \\
 & -x + 3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Entonces,

$$S(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = \left(x^2 + x + 1\right)(x - 3).$$

En consecuencia la factorización del polinomio (15.4) es

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 13x^2 - 13x - 6 = \left(x^2 + x + 1\right)(x - 3)(x + 2)(x + 1).$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Los resultados de este capítulo nos indican que dado un polinomio

$$P(x) \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

el problema de obtener sus raíces está fuertemente relacionado con el problema de factorizarlo.

El problema de obtener las raíces de un polinomio de grado 2 fue resuelto desde hace mucho tiempo. También existen métodos para factorizar y obtener las raíces polinomios de grados 3 y 4, métodos que son muy agobiantes. Sin embargo, proponer un método para obtener las raíces de un polinomio de grado superior a 4 durante mucho tiempo representó un reto importante para los matemáticos. En este aspecto, Niels Henrik Abel (1802-1829) demostró que no existe una fórmula general para obtener las raíces de un polinomio de grado 5 y posteriormente Evariste Galois (1811-1832) mostró que no existe una fórmula general para obtener la raíces de un polinomio de grado superior a 5. Los resultados de Abel y Galois son bastante sorprendentes y tienen im-plicaciones importantes para diferentes áreas de las matemáticas, tanto puras y como aplicadas. Además, al obtener sus resultados, Abel y Galois abrieron nuevas ramas de las matemáticas. Sin embargo, ambos murieron muy jóvenes y sin que los matemáticos reconocieran la importancia de sus descubrimientos. Al no obtener trabajo y no tener dinero para medicamentos, Abel murió de tuberculosis en una fría noche de Oslo a los 26 años. Dos días después de la muerte de Abel, le llegó una carta en donde le ofrecían trabajo como profesor de la Universidad de Berlín. Mientras que Galois, después de ver que su trabajo fue rechazado por varios matemáticos, murió a los 21 años en un duelo a muerte por una mujer.

15.5. Ejercicios

1.- Factorice la siguiente expresión

$$\frac{1}{6}a^3 b + a^2 b^2 + \frac{1}{3}ab^3.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

2.- Factoriza la expresión

$$x^6 - 2^6.$$

3.- Factorice la siguiente ecuación

$$13xy + 3t + 7tx + 8x^3m.$$

Capítulo 16

Radicales

Ahora veremos qué reglas siguen las raíces de grado mayor a dos.
Supongamos que a es un número positivo. Si b es un número real tal que

$$b^n = a$$

se dice que b es la raíz n-ésima de a y se denota como

$$\boxed{b = (a)^{\frac{1}{n}}.}$$

o como

$$\boxed{b = \sqrt[n]{a}.}$$

Se puede observar que usando esta notación se tiene que

$$\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

y

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Por ejemplo, debido a que

$$3^3 = 27$$

entonces

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \text{y} \qquad (27)^{\frac{1}{3}} = 3.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Además, considerando que

$$2^5 = 32$$

entonces

$$\sqrt[5]{32} = 2 \qquad \text{y} \qquad (32)^{\frac{1}{5}} = 2.$$

16.1. Raíz de una raíz

Ahora mostraremos que se cumple

$$\boxed{\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n\cdot m}},}$$

es decir

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}.}$$

Para argumentar esta afirmación definamos

$$c = (a)^{\frac{1}{n}},$$

entonces usando las leyes de potencia tenemos que

$$\left(\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{nm} = \left(\left(\left[(a)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\left(c^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{n} = (c)^n = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a$$

por lo que

$$\left(\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{nm} = a.$$

Además por definición sabemos que

$$\left((a)^{\frac{1}{n\cdot m}}\right)^{n\cdot m} = a,$$

por lo tanto

$$\left((a)^{\frac{1}{n\cdot m}}\right)^{n\cdot m} = \left(\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{nm}.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Así, podemos establecer que

$$\left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{n\cdot m}}.$$

Por ejemplo, debido a que

$$8^4 = 406 \qquad \text{y} \qquad 2^3 = 8,$$

entonces

$$\left((406)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2,$$

además

$$(406)^{\frac{1}{12}} = 2,$$

así

$$\left((406)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = (406)^{\frac{1}{3\cdot 4}} = (406)^{\frac{1}{12}} = 2.$$

16.2. Radicales y el producto

Ahora probaremos que

$$\boxed{(a)^{\frac{1}{n}}(b)^{\frac{1}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}},}$$

es decir

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}.}$$

Por defincón sabemos que

$$\left((a\cdot b)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a\cdot b, \tag{16.1}$$

además, usando las leyes de potencias se tiene

$$\left((a)^{\frac{1}{n}}(b)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^n\left((b)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a\cdot b,$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

por lo que

$$\left((a)^{\frac{1}{n}}(b)^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left((a\cdot b)^{\frac{1}{n}}\right)^n,$$

entonces podemos establecer que

$$(a)^{\frac{1}{n}}(b)^{\frac{1}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}}$$

Por ejemplo, tenemos que

$$(27)^{\frac{1}{3}}(64)^{\frac{1}{3}} = 3\cdot 4 = 12$$

además

$$(27\cdot 64)^{\frac{1}{3}} = (1728)^{\frac{1}{3}} = 12,$$

por lo que

$$(27)^{\frac{1}{3}}(64)^{\frac{1}{3}} = 3\cdot 4 = 12$$

además

$$(27\cdot 64)^{\frac{1}{3}} = (27\cdot 64)^{\frac{1}{3}}.$$

16.3. Radicales y el inverso

Ahora probaremos que si $a \neq 0$ se cumple

$$\boxed{\left(a^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.}$$

Para hacer esta prueba, recordemos que por definición el número

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

satisface que

$$a^{\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1.$$

Además notemos que

$$1 = (1)^{\frac{1}{n}}$$

por lo que, usando resultados previos, se encuentra

$$1 = (a \cdot a^{-1})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \left(a^{-1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

De donde

$$a^{\frac{1}{n}} \left(a^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1,$$

que implica

$$\left(a^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Este resultado también se puede escribir como

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{-1}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-1}}$$

o como

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.}$$

Por ejemplo

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}.$$

16.4. Radicales y fracciones

Ahora probaremos que se cumple

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}.}$$

Este resultado es verdad, pues usando resultados previos se tiene que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a \cdot b^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \left(b^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Note otra forma de expresar esta identidad es de la forma

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.}$$

Por ejemplo

$$\sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2}.$$

16.5. Radicales y exponentes como operación inversa

Ahora mostraremos que se cumple

$$\boxed{(a^n)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.}$$

Para argumentar esta igualdad, primero notemos que el número

$$(a^n)^{\frac{1}{n}}$$

cumple que al ser elevado a la n se obtiene a^n, es decir

$$\left((a^n)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^n.$$

Ahora, es claro que a es un número tal que al ser elevado a la n nos da a^n. De donde

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a.$$

Además, por definición se cumple

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a,$$

por lo que

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Por ejemplo,

$$\left((32)^{\frac{1}{5}}\right)^5 = (2)^5 = 32,$$

además

$$\left((32)^5\right)^{\frac{1}{5}} = (33554432)^{\frac{1}{5}} = 32,$$

por lo que

$$\left((32)^{\frac{1}{5}}\right)^5 = \left((32)^5\right)^{\frac{1}{5}} = 32.$$

16.6. Exponentes fraccionarios

Ahora mostraremos que se cumple

$$\boxed{(a^n)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n.}$$

Note que usando que $\left[a^{\frac{1}{m}}\right]^m = a$ y las leyes de potencia se encuentra

$$(a^n)^{\frac{1}{m}} = \left(\left(\left[a^{\frac{1}{m}}\right]^m\right)^n\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\left[a^{\frac{1}{m}}\right]^{mn}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\left(\left[a^{\frac{1}{m}}\right]^n\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = \left[a^{\frac{1}{m}}\right]^n,$$

es decir

$$(a^n)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n,$$

que es lo queríamos demostrar . Esta identidad nos muestra que para un número positivo a no importa si se hace primero una raíz o una potencia, por lo que se suele escribir

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n.$$

Por ejemplo,

$$\left((8)^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^6 = 64,$$

además

$$\left((8)^6\right)^{\frac{1}{3}} = (26214)^{\frac{1}{3}} = 64$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

y

$$8^{\frac{6}{3}} = 8^2 = 64.$$

Por lo que

$$\left((8)^{\frac{1}{3}}\right)^6 = \left((8)^6\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{6}{3}} = 8^2 = 64.$$

16.7. Radicales y la ley de la suma de potencias

Ahora estudiaremos la identidad

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{sn+mr}{sm}}.}$$

Para argumentar esta identidad, note que usando la leyes de las potencias se cumple

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}}\right)^{sm} &= \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{sm}\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{sm} = \left(\left((a^n)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^s\left(\left((a^r)^{\frac{1}{s}}\right)^s\right)^m \\ &= (a^n)^s (a^r)^m = a^{ns}a^{rm} = a^{ns+rm},\end{aligned}$$

es decir

$$\left(a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}}\right)^{sm} = a^{ns+rm},$$

de donde

$$\left(\left(a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}}\right)^{sm}\right)^{\frac{1}{ns+rm}} = a^{\frac{ns+rm}{ns+rm}} = a,$$

por lo que

$$\left(a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{sm}{ns+rm}} = a.$$

Además, por defínción sabemos que se cumple

$$\left(a^{\frac{sn+mr}{sm}}\right)^{\frac{sm}{sn+mr}} = a$$

así

$$\left(a^{\frac{sn+mr}{sm}}\right)^{\frac{sm}{sn+mr}} = \left(a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{sm}{ns+rm}},$$

por que podemos establecer que

$$a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{sn+mr}{sm}}.$$

Por ejemplo

$$(5)^{\frac{1}{2}}(5)^{\frac{3}{2}} = (5)^{\frac{1+3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

16.8. Ejercicios

1.- Simplificar

$$\left(91x^{40}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

2.- Simplificar

$$\left(\frac{8z^{\frac{6}{7}}}{125x^{6}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

3.- Resolver la ecuación

$$\left(x^{\frac{2}{3}}-2\right)^{3}=8.$$

4.- Resolver la ecuación

$$(8x-32)^{\frac{1}{3}}=2.$$

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Referencias

[1] R. Courant y H. Robbins, *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid (1979).

[2] M. Lara, *Antología matemática I y II,* Universidad Nacional Autónoma de México, México (1983).

[3] E. Oteyza, E. Lam, C. Hernández y A. M. Carrillo, *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Álgebra,* Universidad Nacional Autónoma de México, Pearson Eduacación, México (2006).

[4] L. Franco Pérez y O. González Gaxiola, *Notas del curso taller de matemáticas,* Universidad Autónoma Metropolitana Unidada Cuajimalpa, México (2011).

[5] D. Luzardo y A. L. Peña, *Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX,* Divulgaciones Matemáticas **14** Vol. 4, 153 (2006).

[6] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas,* Alianza Editorial, Madrid (1976).

[7] A. D. Aczel, *El último teorema de Fermat, el secreto de un antiguo problema matemático,* Fondo de Cultura Económica, México (2003).

[8] G. Gamow, *Biografía de la física,* Alianza Editorial, Madrid (1971).

[9] R. Bergamini, *Matemáticas, colección cientifica de Time-Life*, Time Inc., USA (1976).

Libro: Matemáticas para todos, con ejercicios y notas historicas. División de Ciencias Naturales e Ingeniería. UAM-C

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Cuajimalpa