Universidad Autónoma
Metropolitana

UNIDAD CUAJIMALPA

# La construcción del concepto de implicación como condicional lógicamente válido en estudiantes de nivel superior: un enfoque desde la teoría APOE

Idónea Comunicación de Resultados

QUE PRESENTA:
KATHIA STEPHANIE ESQUIVEL DELGADO

Posgrado en Ciencias Naturales e Ingeniería
Departamento de Matemáticas Aplicadas e Ingeniería

División de Ciencias Naturales e Ingeniería

Responsables de la ICR:
DIRECTOR: JULIÁN ALBERTO FRESÁN FIGUEROA
CODIRECTORA: MIKA OLSEN
ASESORA: ANA PAULINA FIGUEROA GUTIÉRREZ

Marzo, 2025

*A Fernanda, por estar a mi lado en cada momento, convirtiendo tu nombre en sinónimo de incondicionalidad y fortaleza.*

*A Irving, por ser mi apoyo en los momentos más difíciles, demostrando que siempre hay luz en los días oscuros.*

*A Julián, por revelarme la belleza de las matemáticas, por ser un pilar esencial en mi formación académica y un faro de inspiración para futuras generaciones.*

# Resumen

El presente trabajo aborda la construcción del concepto de implicación como condicional lógicamente válido en estudiantes de nivel superior desde el marco teórico de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema, de sus siglas en español). Se diseñaron Descomposiciones Genéticas (DG) para guiar el desarrollo conceptual de las estructuras y mecanismos mentales asociados a este concepto. Se identificaron las estructuras necesarias para construir la noción de tautología, implicación material, implicación como condicional lógicamente válido y su diferenciación con otras interpretaciones.

Los resultados muestran que las actividades diseñadas promovieron que los estudiantes construyeran los conceptos antes mencionados. Como trabajo futuro, se propone la ampliación del estudio hacia la construcción de la implicación generalizada. Este trabajo contribuye al campo de la educación matemática al ofrecer una propuesta basada en teoría APOE para la enseñanza y aprendizaje de conceptos lógicos fundamentales, promoviendo así una comprensión más profunda y rigurosa de la lógica en el nivel superior.

**Palabras clave:** teoría APOE, tautología, implicación, descomposición genética, educación matemática

# Abstract

This work addresses the construction of the concept of implication as a logically valid conditional in higher education students, within the theoretical framework of APOS theory (Action, Process, Object, and Schema). Genetic Decompositions (GD) were designed to guide the conceptual development of the mental structures and mechanisms associated with this concept. The necessary structures to build the notions of tautology, material implication, implication as a logically valid conditional, and their differentiation from other interpretations were identified.

The results show that the designed activities promoted the students' construction of the aforementioned concepts. For future work, the expansion of the study toward the construction of generalized implication is proposed. This work contributes to the field of mathematics education by offering an APOS-based approach to the teaching and learning of fundamental logical concepts, thus fostering a deeper and more rigorous understanding of logic at the higher education level.

**Keywords:** APOS theory, tautology, implication, genetic decomposition, mathematics education

# Índice general

# Índice de figuras

# Capítulo 1

# Introducción

En este trabajo se investigó la aplicación de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema, de sus siglas en español) en la lógica matemática, específicamente en la Descomposición Genética (DG) de conceptos como la tautología, la implicación material y la implicación como condicional lógicamente válido. A través del enfoque constructivista del ciclo ACE (Actividades, discusión en Clase y Ejercicios, de sus siglas en español), se diseñaron y aplicaron actividades orientadas a promover un aprendizaje significativo de estos conceptos. De este modo, no sólo se exploran las bases teóricas del aprendizaje de la lógica, sino que también muestra cómo estos principios pueden ser utilizados para facilitar la comprensión y asimilación de conceptos complejos en un contexto educativo.

La motivación para el estudio de la enseñanza de las matemáticas se origina en varios aspectos importantes y complejos que afectan el proceso de aprendizaje del estudiantado. Estos aspectos incluyen la problemática del rendimiento académico, la desmotivación y la interiorización del conocimiento en las y los estudiantes. La enseñanza tradicional[1] no ha tenido resultados favorables en estos rubros, por lo que se han llevado a cabo diversas investigaciones con el objetivo de mejorar la enseñanza de las matemáticas (Vega et al., 2014; Barbosa, 2003; Salinas, 2016).

[1]Entendemos por enseñanza 'tradicional' a un "sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos" (Barbosa, 2003, p. 200).

Por lo antes mencionado, se ha vuelto sustancial buscar alternativas para la enseñanza de las matemáticas. Como mencionan Vega et al. (2014) "se considera de suma importancia desarrollar acciones orientadas a incentivar el estudio de la matemática, usando recursos adecuados y actualizados, psicopedagógicamente válidos, de modo de interesar a los estudiantes y accionar procesos que produzcan un aprendizaje significativo" (p. 405). Estas alternativas deben estar centradas en enfoques pedagógicos más efectivos y la implementación de estrategias de enseñanza más contextualizadas.

Romero-Trenas (2009) define el aprendizaje como:

> El aprendizaje es el proceso de adquirir conocimiento, habilidades, actitudes o valores, a través del estudio, la experiencia o la enseñanza; dicho proceso origina un cambio persistente, cuantificable y específico en el comportamiento de un individuo y, según algunas teorías, hace que el mismo formule un concepto mental nuevo o que revise uno previo. (p. 1)

A su vez, la autora menciona que el aprendizaje significativo surge cuando la o el estudiante, como constructor de su conocimiento, relaciona los conceptos que aprende con su estructura conceptual preexistente, otorgándoles un sentido y generando nuevos conocimientos basados en los anteriores.

El concepto de aprendizaje significativo se centra en que la construcción de un significado es el núcleo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Construir significados implica integrar el nuevo aprendizaje en los esquemas de comprensión existentes, por lo tanto, la significatividad de un contenido radica en su capacidad de encajar con los esquemas previos del individuo. Se asimila un contenido cuando se le puede atribuir un significado, por ello, la enseñanza debe fomentar la profundización y ampliación de los significados que se construyen al participar en actividades de aprendizaje. Es importante mencionar que el aprendizaje significativo se desarrolla a partir de dos pilares: la actividad constructiva del estudiante y su interacción con otros (Romero-Trenas, 2009).

Romero-Trenas (2009) menciona que el aprendizaje constructivista se basa en varios principios esenciales, entre ellos destaca la importancia de la información almacenada en la mente del aprendiz, así como la necesidad de establecer conexiones significativas entre conceptos. Se reconoce que el sujeto construye activamente el significado y que la realidad solo cobra forma a medida que la interpreta; además, las y los estudiantes asumen la responsabilidad de sus propios aprendizajes y estos se nutren de experiencias. En este enfoque, el rol del profesor se amplía para crear condiciones óptimas y guiar el proceso, mientras que el estudiantado tiene un papel activo en la construcción, modificación y coordinación de sus esquemas de conocimiento.

El constructivismo es una corriente pedagógica en el ámbito de la educación que se basa en la idea de que los individuos construyen su propio conocimiento a través de la interacción con su entorno y la experiencia personal (Araya et al., 2007). En este sentido, al tratar de entender cómo los estudiantes construyen mentalmente el conocimiento y los procesos de búsqueda que esto implica, cobra relevancia la teoría APOE (Salinas, 2016). Esta teoría se inspira en el constructivismo y, en el contexto de las matemáticas, particularmente en la lógica matemática, ofrece un marco para entender cómo los estudiantes interiorizan conceptos esenciales para demostrar proposiciones.

Cuando un matemático busca demostrar una situación particular resulta esencial emplear un marco lógico. La lógica matemática sirve como herramienta para determinar si una proposición es consecuencia lógica de otras, utilizando enunciados o proposiciones formulados mediante oraciones declarativas. Estos enunciados (que pueden ser verdaderos o falsos, pero no ambos) son la base del razonamiento lógico. En este trabajo se adopta la notación propuesta por Grimaldi (1998), ampliamente utilizada en la enseñanza de lógica matemática.

Las proposiciones, generalmente simbolizadas con $p$, $q$, y $r$, se categorizan como primitivas por su naturaleza irreducible; a partir de ellas se pueden derivar nuevas proposiciones mediante la negación ($\neg$) y el uso de conectivos lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$). Estas operaciones permiten la formación de proposiciones compuestas (regularmente simbolizadas con $P$, $Q$, $R$) y su análisis lógico, facilitando el entendimiento de conceptos como tautologías, contradicciones y equivalencias lógicas. Se puede determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas por medio de tablas de verdad, donde se muestran todas las posibles combinaciones de valores de verdad (verdadero o falso) de las proposiciones de una expresión lógica y el resultado de la expresión para cada combinación.

El condicional o implicación ($P \rightarrow Q$) es un enunciado de la forma *"si $P$, en-*

*tonces Q"*; en este enunciado, $P$ se denomina antecedente o premisa, mientras que $Q$ se conoce como consecuente o conclusión. Una proposición compuesta es una tautología ($T_0$) si resulta verdadera bajo todas las asignaciones posibles de verdad a sus componentes, y es una contradicción si es falsa en todas estas asignaciones. La equivalencia lógica entre dos proposiciones, $P_1$ y $P_2$ ($P_1 \equiv P_2$), ocurre cuando ambas comparten el mismo valor de verdad para todos los posibles valores de las proposiciones que las forman. En este contexto, el Modus Ponens emerge como una regla de inferencia fundamental, expresada simbólicamente como

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$$

Esta regla establece que, si una proposición $P$ es verdadera y $P$ implica $Q$, entonces $Q$ también debe ser verdadera. Este principio no sólo subraya la importancia de la estructura lógica en las matemáticas, sino que también enfatiza la necesidad de un razonamiento deductivo riguroso en la demostración de teoremas y la formulación de argumentos matemáticos.

Las proposiciones descritas hasta ahora corresponden a declaraciones con un valor de verdad bien definido: verdadero o falso. Sin embargo, también se trabaja con funciones proposicionales, que Grimaldi (1998) llama proposiciones abiertas, las cuales son frases declarativas que poseen una o más variables y que, por sí mismas, no son proposiciones debido a la ausencia de un valor de verdad. Una proposición abierta se convierte en una proposición (con un valor de verdad determinado) cuando las variables que contiene son reemplazadas por valores específicos dentro de un conjunto permisible.

En lo que respecta a la estructura de los capítulos de esta Idónea Comunicacón de Resultados (ICR), esta se organiza de la siguiente manera. En el Capitulo 2 se presenta el marco teórico que fundamenta esta investigación, con un enfoque en la teoría APOE de Dubinsky. Se describen los elementos clave de la teoría, como su corriente pedagógica, referentes teóricos, principios rectores, etapas, niveles y enfoque pedagógico. El Capítulo 3 aborda la revisión de la literatura, contextualizando el estudio mediante la exploración de enfoques teóricos y empíricos relacionados con la construcción del concepto de implicación. También se analizan investigaciones previas que aplican la teoría APOE en la enseñanza de la lógica, destacando contribuciones, limitaciones y áreas de oportunidad para esta investigación.

El estudio de los conceptos relacionados con la implicacón adquieren relevancia para realizar las demostraciones matemáticas. Por ello, este trabajo toma como base la teoría APOE, que ofrece un marco para analizar qué pueden necesitar las y los estudiantes para adquirir y desarrollar conceptos clave, como la tautología.

A continuación, en los Capítulos 4 y 5, se da un giro hacia la parte metodológica de la investigación. El Capítulo 4 describe la metodología utilizada, incluyendo las preguntas de investigación que orientan este estudio y los objetivos planteados. Además, se detalla la implementación práctica de las actividades, como la selección de participantes y los métodos empleados. En el Capítulo 5, se detalla la descomposición genética de los conceptos de tautología e implicación como condicional lógicamente válido. Se explican las estructuras y mecanismos mentales involucrados y se presentan las actividades diseñadas para fomentar la construcción de las estructuras mentales que describen las descomposiciones genéticas.

Una vez sentadas las bases teóricas y metodológicas, el Capítulo 6 se dedica a exponer los resultados obtenidos a través del ciclo ACE, destacando cómo cada fase contribuyó al desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes. Seguido de esto, el Capítulo 7 aborda la discusión de los resultados, donde se analizan e interpretan los hallazgos en relación con las preguntas de investigación. Este capítulo busca conectar los resultados con estudios previos revisados en la literatura, evaluando la efectividad de las actividades diseñadas desde la teoría APOE y destacando los aportes innovadores del estudio. Asimismo, se reflexiona sobre las limitaciones encontradas durante la implementación y el análisis.

Finalmente, el Capítulo 8 presenta las conclusiones del trabajo, resumiendo los principales hallazgos, su impacto en la enseñanza de la lógica en las matemáticas. También se identifican posibles líneas de investigación futuras, enfocadas en extender el uso de la teoría APOE.

# Capítulo 2

# Marco teórico

A lo largo de este capítulo planteamos el marco teórico que fundamenta el trabajo de investigación que realizamos. Dicho trabajo, como ya hemos mencionado anteriormente, aborda el estudio de la implicación desde la teoría APOE de Dubinsky, por lo que se plantea una investigación pertinente al respecto. Se presentan los elementos más importantes de dicha teoría como los referentes teóricos, el principio que la rige, las estructuras y mecanismos que plantea, el enfoque pedagógico que propone.

## 2.1. Referentes teóricos

En la teoría constructivista, una de las más importantes en lo que refiere a la enseñanza y el aprendizaje, las ideas de Piaget son de las más destacadas. Su enfoque se basó en cómo las y los niños desarrollan su capacidad para comprender el mundo que les rodea. No se interesaba en el conocimiento que se posee, sino en cómo se usa en la resolución de problemas; consideraba que las y los niños construían el conocimiento de forma constante según fueran adquiriendo más conocimiento. Él dividió el desarrollo cognoscitivo en cuatro etapas que son secuenciales y no se pueden omitir alguna de ellas: sensorio-motriz, preoperatoria, operaciones concretas y operaciones formales (Saldarriaga-Zambrano et al., 2016).

Saldarriaga-Zambrano et al. (2016) explican que la primera de ellas es la sensorio-motriz y se ubica del nacimiento a los dos años, el infante se relaciona con su entorno a través de los sentidos para lograr representar la realidad en su mente. En la etapa preoperatoria, de dos a siete años, el menor se vuelve capaz de pensar en objetos que no están explícitamente presentes y comienzan a usar símbolos, como los números, para representar cosas de su entorno. En la etapa de operaciones concretas, de siete a doce años, comienza a reflexionar sobre su ambiente usando la lógica y las operaciones mentales. Por último, en la etapa de operaciones formales, de doce años en adelante, se realizan hipótesis y se razonan sucesos con los que no se ha tenido contacto.

En las últimas dos etapas se usa la “abstracción reflexiva”. Piaget (1995) señala que “lo propio de la abstracción reflexionante que caracteriza al pensamiento lógico-matemático es que se extrae no de los objetos, sino de las acciones que pueden ejercerse sobre ellos y, esencialmente, de las coordinaciones más generales con esas acciones, tales como la de reunir, ordenar, correlacionar, etcétera” (p.18). Esta capacidad de reflexionar sobre las operaciones realizadas es lo que permite la construcción de estructuras cognitivas más avanzadas.

Según Arnon et al. (2014), para Piaget las propiedades de los objetos no son características intrínsecas de los objetos mismos, sino que están en parte determinadas por las acciones que los sujetos realizan sobre esos objetos. En otras palabras, no solo se trata de cómo son los objetos sino también de cómo interactuamos con ellos y como los comprendemos; nuestros procesos cognitivos influyen en cómo percibimos y comprendemos las propiedades de los objetos. Por lo tanto, se hace énfasis en la interacción entre los objetos y los sujetos que los estudian, considerando el pensamiento en la construcción del conocimiento.

En este contexto, los esquemas son como marcos conceptuales que ayudan a interpretar y dar sentido a las experiencias y situaciones; son flexibles y cambian con el desarrollo mental. A medida que el infante adquiere nuevas experiencias y conocimientos, adapta sus esquemas para acomodar la nueva información. Esto refleja la idea fundamental de que el aprendizaje y el desarrollo cognitivo involucran una construcción activa y dinámica de la comprensión del mundo, en lugar de una simple acumulación pasiva de hechos.

Con respecto a la teoría APOE, Maturana y Parraguez (2013) mencionan esta fue desarrollada por el matemático Ed Dubinsky, y tiene sus raíces en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento; recordemos que esta teoría tiene la premisa de que el individuo construye su conocimiento mediante la reflexión sobre sus propias vivencias. El enfoque teórico de Dubinsky, que toma su nombre de las iniciales en inglés de APOS: Actions, Processes, Objects, Schemas, toma el concepto de abstracción reflexiva, forjada por Piaget, como un elemento central en su enfoque teórico.

Fue alrededor de 1982 cuando el interés de Dubinsky se dirigió hacia las actividades mentales relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas entre las y los estudiantes. Desde 1989 hasta 1995, Dubinsky colaboró con varios colegas en la construcción del marco que posteriormente se denominó teoría APOE, siguiendo la premisa de Piaget de que la esencia de un concepto (su epistemología) está vinculada a cómo se desarrolla en la mente de un individuo (su proceso de aprendizaje). La mayoría de su investigación se aplicó en entornos de enseñanza reales en educación superior (Arnon et al., 2014).

Trigueros (2005) menciona se ha estado desarrollando un trabajo llevado a cabo por un conjunto de investigadores en torno a esta teoría. Estos esfuerzos investigativos se han concentrado principalmente en manos de los miembros que conforman el grupo RUMEC[1]. Este grupo, reconocido por su profundo compromiso con el avance del conocimiento en este campo, sigue desempeñando un papel crucial al explorar, analizar y aplicar las diversas dimensiones de la teoría en cuestión en diferentes contextos.

## 2.2. Teoría APOE: Principio, estructuras y mecanismos mentales

Para la teoría APOE los conceptos matemáticos son los elementos básicos de las matemáticas, por lo que la comprensión de estos resulta fundamental para las y los estudiantes. Construir la comprensión de los conceptos tendría como consecuencia que el estudiantado sería capaz de resolver problemáticas que involucren dicho concepto. Al igual que el resto de las teorías, APOE tiene sus bases en un principio, dicho principio es el siguiente:

[1]Research in Undergraduate Mathematics Education Community

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones de problemáticas matemáticas percibidas al reflexionar sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos y Objetos matemáticos y organizándolos en Esquemas para utilizarlos al abordar las situaciones. (Asiala et al., 1997, p. 7)

Utilizaremos el término "estructura mental" para referirnos a cualquier transformación relativamente constante y evolutiva que una persona emplea para dar significado a una situación matemática. Por otro lado, un "mecanismo mental" es el medio mediante el cual una estructura mental se construye en la mente de un individuo. Es necesario advertir que la construcción de una estructura mental sugiere que el individuo tiene la capacidad de resolver problemas que necesiten de dicha construcción, sin embargo, no garantiza que dichos problemas se solucionen con éxito (Arnon et al., 2014).

En la teoría APOE, las estructuras mentaless son los conceptos de Acción, Proceso, Objeto y Esquema; la construcción de estas estructuras se lleva a cabo mediante mecanismos mentales como la interiorización, la coordinación, la encapsulación y la desencapsulación. Una comprensión completa del desarrollo de un individuo en un concepto incluiría la progresión entre estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

Según la teoría APOE, cuando una persona comienza a comprender un concepto matemático lo hace primero a través de la Acción. La Acción se refiere a ver el concepto como una serie de pasos (transformaciones) que se aplican externamente a objetos; estos pasos deben seguirse explícitamente según ciertas instrucciones, de tal forma que cada paso conduce al siguiente sin que se omitan pasos. En otras palabras, el individuo ejecuta acciones concretas siguiendo instrucciones externas para transformar objetos en ciertas maneras específicas. Una comprensión inicial del concepto como Acción es necesaria para desarrollar los Procesos, que se originan de la internalización de la Acción (Arnon et al., 2014).

Un Proceso es una forma más abstracta de manipular conceptos matemáticos. Cuando un individuo interioriza una acción la transforma en una representación interna que el individuo puede manipular mentalmente, es decir, crea un Proceso. A medida que una persona repite y reflexiona sobre acciones específicas, pasa de depender de señales externas a desarrollar un control interno sobre los pasos de la acción, esto implica que puede imaginarse realizando los pasos de la acción sin tener que ejecutarlos explícitamente, puede saltarse pasos y revertir el proceso (Arnon et al., 2014).

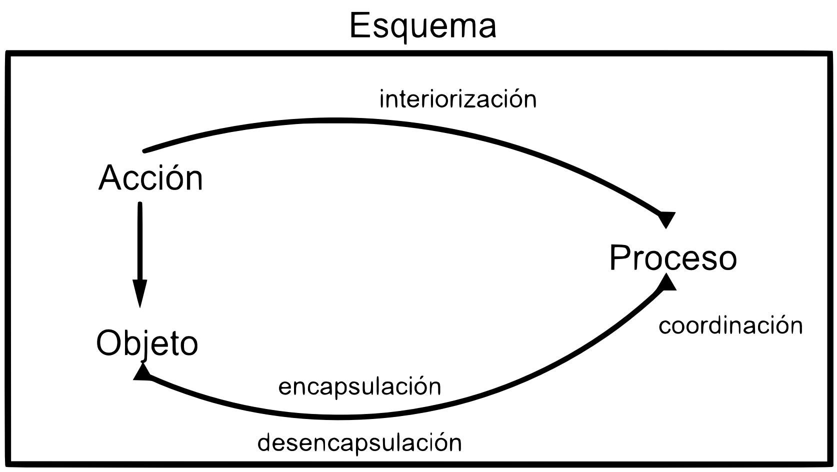
La encapsulación se da cuando se aplica una Acción a un Proceso. En otras palabras, es cuando se trata a un Proceso como un Objeto mental manipulable al que se le pueden realizar transformaciones que pueden ser aplicadas a todo el Proceso y, además, pueden construirse transformaciones nuevas. Cuando un individuo ha alcanzado la conciencia de que un Proceso puede ser manipulado como una totalidad y puede ser transformado por Acciones, se dice que ha encapsulado el proceso en un Objeto cognitivo. Este mecanismo mental es un concepto clave en la teoría APOE y se considera uno más desafiantes en el desarrollo de la comprensión matemática (Arnon et al., 2014).

Hay dos mecanismos mentales más, la desencapsulación y la coordinación. Por un lado, la desencapsulación se refiere a revertir el Proceso de encapsulación para volver desde el Objeto a su Proceso original. Por otro lado, la coordinación se refiere a combinar dos o más Procesos diferentes. Así, dos Objetos encapsulados pueden ser desencapsulados para después coordinarlos, y el Proceso coordinado puede ser encapsulado nuevamente para formar un nuevo Objeto. Es decir, se pueden combinar Procesos para crear nuevos conceptos matemáticos más complejos (Arnon et al., 2014).

Por último, tenemos al Esquema, este es una estructura mental dinámica[2] que representa el conocimiento sobre un concepto o tema matemático, y está compuesto por Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que el individuo ha construido a lo largo de su experiencia y aprendizaje. Mutarana y Parraguez (2013) explican que los Esquemas evolucionan a medida que aprendemos nuevas cosas y establecemos nuevas conexiones, y que la característica clave de los Esquemas es que deben tener sentido y ser coherentes para poder utilizarlos en la solución de un problema en particular. En la *Figura* 2.1 se muestra la relación de las estructuras y mecanismos mentales mencionados anteriormente.

[2]La construcción del conocimiento no es estática, el conocimiento puede ser revisado y adaptado para integrar nuevos conceptos, lo que conduce a la construcción de un conocimiento más amplio y sofisticado a medida que las personas se enfrentan a nuevas situaciones y desafíos.

Figura 2.1: *Estructuras mentales y mecanismos*




Nota. Adaptado de *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* (p. 10), por Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). Springer. Traducción y diseño propios.

A medida que se avanza en el aprendizaje, un Esquema puede evolucionar a través de tres etapas: intra, inter y trans. Cada etapa implica un cambio en la forma en que el individuo aborda y comprende el esquema. Esta triada proporciona a los investigadores una herramienta para analizar cómo evoluciona el pensamiento de los estudiantes al construir su comprensión de conceptos matemáticos ya que relaciones son cruciales para la formación de estructuras cognitivas más complejas y para el desarrollo de la coherencia en el Esquema. La relación entre los elementos del Esquema es fundamental para entender cómo evoluciona el pensamiento del estudiante (Rojas-Salinas, 2016).

Por un lado, el nivel intra se centra en cada componente individual del Esquema, como las Acciones, los Procesos y los Objetos involucrados; se analizan las relaciones internas entre estas partes buscando similitudes y diferencias entre estructuras similares. En el nivel inter la atención es hacia la comprensión de las transformaciones que ocurren entre las estructuras del Esquema; se enfatiza cómo cambian las relaciones y cómo se transforman los elementos a medida que se avanza en la construcción del esquema. Finalmente, el nivel trans busca comprender las razones subyacentes a las transformaciones observadas en el Esquema. Se considera el Esquema como un todo y se construye una estructura que puede explicar su composición (Rojas-Salinas, 2016).

El cambio de una etapa a otra no implica que el individuo tiene más conocimientos, en cambio, implica una reevaluación de lo que se sabe. Se trata de una reevaluación de los fundamentos conceptuales en lugar de una simple acumulación de datos nuevos. Para avanzar hacia una nueva etapa de desarrollo cognitivo, es necesario reconstruir y reformular la comprensión previa que se tenía en etapas anteriores. La base conceptual existente debe ser reconsiderada y ajustada para encajar en la nueva perspectiva que se está desarrollando.

La tematización es un mecanismo mental, Arnon et al. (2014) lo definen como el mecanismo mediante el cual un Esquema se convierte en un objeto cognitivo que se puede manipular conscientemente, puede involucrar Acciones sobre el Esquema, compararlo con otros Esquemas, descomponerlo y reconstruirlo. Es importante mencionar que la estructura de un Esquema puede variar según el individuo porque cada uno construye diferentes tipos de relaciones entre los componentes de un Esquema.

De acuerdo con Arnon et al., (2014), se han propuesto nuevas estructuras para comprender mejor el desarrollo cognitivo en el contexto matemático. La Totalidad se sitúa entre el Proceso y Objeto, se refiere a la capacidad para reflexionar sobre Procesos interconectados como una estructura coherente y unificada en el desarrollo de su comprensión de un concepto matemático. Entre Acción y Proceso se propone el Proceso Emergente. Entre Proceso a Totalidad, se presentan tres niveles: Inicio hacia la Totalidad, Progreso hacia la Totalidad y Totalidad Emergente. En el desarrollo hacia la estructura de Objeto, se sugieren niveles intermedios: Inicio hacia Objeto, Progreso hacia Objeto y Objeto Emergente. También se introduce la Concepción Operativa Condensada que se encuentra entre Proceso y Objeto (Arnon et al., 2014). Aunque estas estructuras y mecanismos no son estudiados en el presente trabajo, es importante mencionarlas debido a su relevancia en el campo.

En síntesis, la relación entre las estructuras y mecanismos mentales de la teoría APOE comienza con una Acción que se interioriza en un Proceso, un Proceso se encapsula en un Objeto, un Proceso se puede desencapsular para construir otro Proceso, dos Procesos se pueden coordinar para formar un nuevo Proceso, por último, un Esquema puede ser tematizado en un Objeto. El *Cuadro* 2.1 muestra una breve descripción de las estructuras y mecanismos mentales descritos anteriormente.

### 2.2.1. Descomposición Genética

Otro elemento importante en la teoría APOE es la descomposición genética, ésta es un modelo teórico hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático. La descomposición genética no es única ya que puede variar según el concepto y el enfoque del aprendizaje, además, diferentes estudiantes pueden seguir caminos diversos en su aprendizaje. Es un modelo general que describe las construcciones que la mayoría de los estudiantes encuentran necesarias, y puede diseñarse a partir de descripciones matemáticas del concepto, experiencias de los investigadores, datos de investigaciones anteriores, o el desarrollo histórico del concepto (Arnon et al., 2014).

Una descomposición genética se centra en proporcionar un modelo general que describe las construcciones necesarias para el aprendizaje de un concepto matemático. Por lo tanto, es una guía para el diseño instruccional que se ajusta a la forma en que los estudiantes construyen su comprensión del concepto, y se prueba experimentalmente para verificar si las y los estudiantes realmente realizan las construcciones mentales descritas en el modelo. Como consecuencia, el modelo teórico se puede ajustar dependiendo de los resultados obtenidos en la parte experimental.

Se utiliza para diseñar actividades de enseñanza que ayuden a los estudiantes a construir las estructuras mentales propuestas, también se utiliza para explicar las diferencias en el rendimiento de los estudiantes y como herramienta de diagnóstico y predicción. Sin embargo, se pueden cometer algunos errores al diseñar las descomposiciones genéticas, Arnon et al. (2014) mencionan que estos errores suelen darse al confundir la descomposición genética con una descripción de secuencia de enseñanza, diseñarla como una enumeración de operaciones, o presentar dificultades en el diseño debido a malentendidos de la teoría.

Para esta teoría, el aprendizaje no es un proceso lineal, sino que los estu-

Cuadro 2.1: *Estructuras y mecanismos mentales de la teoría APOE.*

| Estructuras/Mecanismos | Descripción |
|---|---|
| Acción | El individuo ejecuta acciones concretas siguiendo instrucciones externas para transformar objetos en ciertas maneras específicas. |
| Interiorización | Un individuo interioriza una acción cuando la transforma en una representación interna que puede manipular mentalmente. |
| Proceso | Puede imaginarse realizando los pasos de la acción sin tener que ejecutarlos explícitamente, puede saltarse pasos y revertir el proceso. |
| Encapsulación | Se trata a un Proceso como un Objeto mental manipulable al que se le pueden realizar transformaciones que pueden ser aplicadas a todo el Proceso. |
| Desencapsulación | Se refiere a revertir el proceso de encapsulación para volver desde el Objeto a su Proceso original. |
| Coordinación | Se refiere a combinar dos o más Procesos diferentes. |
| Objeto | Es una entidad matemática que puede ser manipulada o con la que se puede interactuar en la mente del estudiante. |
| Esquema | Es una estructura mental dinámica que representa el conocimiento sobre un concepto o tema matemático, y está compuesto por Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas. |
| Tematización | Un Esquema se convierte en un objeto cognitivo que se puede manipular conscientemente. |

diantes transitan de una construcción a otra de manera no secuencial. Esto significa que pueden transitar entre las construcciones que contempla la descomposición genética, sin seguir un orden preestablecido. En contraste, en una secuencia de aprendizaje tradicional, se asume que el proceso es lineal y progresivo. En este sentido, lo que generalmente se evalúa dentro de la descomposición genética es si los estudiantes han mostrado los mecanismos previstos por la teoría, es decir, si han llegado a construir los diferentes componentes del conocimiento de acuerdo con los pasos sugeridos, sin que necesariamente se sigan de manera estricta y ordenada.

## 2.3. Implementación de la descomposición genética

El Ciclo de Enseñanza ACE es un enfoque pedagógico diseñado para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje, específicamente enfocado en el desarrollo de las construcciones mentales que son requeridas según la descomposición genética en la teoría APOE. Este ciclo toma su nombre de las iniciales en inglés de ACE: Activities, Classroom Discussion, and Exercises (Actividades, discusión en Clase y Ejercicios). Al centrarse en la construcción de estructuras mentales y el entendimiento de los conceptos matemáticos, este enfoque no solo prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos complejos, sino que también les equipa con habilidades cognitivas y de resolución de problemas.

En la fase de actividades se trabajan en equipo tareas diseñadas específicamente para promover en las y los estudiantes la construcción de las estructuras mentales sugeridas por la descomposición genética. Estas actividades no buscan obtener respuestas correctas, sino fomentar la abstracción reflexiva, lo que significa que las y los estudiantes deben pensar en profundidad sobre los Procesos y conceptos involucrados (Arnon et al., 2014).

En la discusión de clase, participan en discusiones dirigidas por un instructor, ya sea en grupos pequeños o en el salón de clases; las y los estudiantes tienen la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo que han realizado en las actividades. El instructor guía la discusión, proporcionando definiciones, explicaciones y descripciones generales para ayudar a los estudiantes a conectar sus pensamientos y esfuerzos (Arnon et al., 2014).

La última fase del ciclo ACE involucra la realización de ejercicios que son problemas diseñados para reforzar tanto las actividades como las discusiones anteriores. Estos ejercicios están destinados a respaldar el continuo desarrollo de las construcciones mentales que se derivan de la descomposición genética. También ayudan a los estudiantes a aplicar lo que han aprendido y a considerar conceptos matemáticos relacionados; es importante considerar que esta fase es mucho más que una simple recapitulación, es un catalizador que impulsa el aprendizaje hacia la autonomía y la aplicabilidad (Arnon et al., 2014).

Arnon et al. (2014) explican que cada vez que se implementa una secuencia de instrucción se tiene una oportunidad para recopilar datos que proporcionen información sobre el proceso de aprendizaje de las y los estudiantes. El análisis de los datos es fundamental para determinar la eficacia de la instrucción y el impacto real que ha tenido en el progreso de los participantes en términos de habilidades y comprensión matemática. El análisis de datos también se enfoca en evaluar si se han desarrollado las construcciones mentales planteadas en la descomposición genética preliminar, busca determinar si las y los estudiantes han logrado desarrollar estas construcciones mentales específicas a medida que participan en la instrucción.

Existen distintos tipos de estudios que se han realizado para evaluar y comprender la efectividad de la enseñanza basada en la teoría APOE y el Ciclo de Enseñanza ACE. Los tipos de investigación que se han realizado son de tipo comparativo, no comparativo y nivel de desarrollo cognitivo. En los estudios comparativos, se compara el rendimiento matemático y las actitudes de las y los estudiantes que recibieron instrucción basada en la teoría APOE y el Ciclo de Enseñanza ACE con aquellos que recibieron una instrucción tradicional. Por otro lado, los estudios no comparativos miden el rendimiento de los estudiantes que participaron en cursos basados en la teoría APOE y el Ciclo de Enseñanza ACE, pero sin compararlos con otros enfoques (Arnon et al., 2014).

En los estudios del nivel de desarrollo cognitivo, el objetivo es observar cómo los estudiantes desarrollan su comprensión matemática al completar cursos basados en la teoría APOE en comparación con cursos tradicionales. Se busca verificar la viabilidad de la descomposición genética preliminar en situaciones donde no hay estudios previos sobre un tema matemático específico o una secuencia de instrucción relacionada con APOE (Arnon et al., 2014).

Además, se discute el alcance y las limitaciones de la investigación basada en APOE, y se explican las preguntas que se pueden abordar mediante esta teoría. Estas preguntas son principalmente sobre cómo los estudiantes construyen su comprensión de conceptos matemáticos y cómo se desarrollan las construcciones mentales a lo largo del proceso de aprendizaje. También se proporcionan ejemplos de temas de investigación que podrían explorarse utilizando la teoría APOE, como el uso de esta teoría para entender cómo los matemáticos perciben los conceptos que enseñan, la eficacia de las construcciones de conceptos aprendidos a través de la instrucción basada en APOE, y más (Arnon et al., 2014).

# Capítulo 3

# Revisión de la literatura

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura relevante para el desarrollo de esta investigación con el objetivo de contextualizar el estudio. Se exploran los enfoques teóricos y empíricos que han abordado la construcción del concepto de implicación. Asimismo, se analizan investigaciones previas que aplican la teoría APOE en la enseñanza de la lógica, para identificar contribuciones, limitaciones y áreas de oportunidad que guían el diseño de este estudio.

## 3.1. Tipos de implicación

Quine (1962) considera que la implicación es mucho más compleja de lo que usualmente se cree, argumenta que es necesario considerar al menos cuatro tipos o interpretaciones de proposiciones condicionales (o implicaciones). Por un lado, tenemos el **entendimiento común**, en el cual el antecedente falso rara vez se toma en cuenta. En este tipo de interpretación, propia del lenguaje cotidiano, un condicional como "si P, entonces Q" no se percibe como una afirmación lógica rigurosa, sino como una relación entre los elementos de la proposición. Si el antecedente resulta ser falso, la afirmación condicional suele ser ignorada o considerada irrelevante, lo que puede generar confusiones o una aplicación incorrecta de las reglas de inferencia lógica.

Relacionado con la implicación, Quine (1962) menciona el conectivo proposicional ($P \to Q$), usualmente llamado condicional o **implicación material**, en este una proposición es falsa si y solamente si la premisa es verdadera y el consecuente es falso. Como señalan Rivera y Herrera (en preparación), la implicación material no denota necesariamente una relación causa-efecto, sino que su valor de verdad depende únicamente de los valores de verdad de la premisa y el consecuente.

Por otro lado, Quine (1962) señala que **la implicación como condicional lógicamente válido** ($P \Rightarrow Q$), es la relación entre dos proposiciones que expresa la validez lógica condicional, se establece que si la primera proposición ($P$) es verdadera, entonces la segunda proposición ($Q$) también debe ser verdadera, es decir, que el condicional es una tautología. Esto implica que nunca puede tener el valor de "falso", lo cual lo convierte en una verdad lógica. Este tipo de implicación está relacionada con reglas clásicas de inferencia, como el Modus Ponens y el Modus Tollens.

Por último, tenemos **la implicación como condicional generalizado**, se expresa como $\forall x \ (P(x) \Rightarrow Q(x))$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones proposicionales que representan una relación entre dos propiedades para cualquier elemento $x$ de un conjunto determinado, dicho de otro modo, si $x$ tiene la propiedad $P$, entonces también debe tener la propiedad $Q$. Según Durand-Guerrier (2003), dado que la mayoría de los teoremas matemáticos pueden expresarse como enunciados condicionales generalizados, se considera que la cuantificación es necesaria para las matemáticas. Sin embargo, como la lógica proposicional es esencial en el razonamiento deductivo y las cuestiones relacionadas con los cuantificadores son complejas, han recibido relativamente poca atención en la investigación educativa de las matemáticas.

Tomando los cuatro tipos de implicación que propone Quine (1962), Durand-Guerrier (2003) demuestra que la manera tradicional en que se aborda la implicación en la educación –se presenta únicamente como una relación entre proposiciones que es verdadera o falsa, sin profundizar en las diferencias entre los distintos tipos de implicación– puede llevar a malentendidos graves tanto para profesores como para estudiantes y en consecuencia se puede complicar el proceso de enseñanza y de aprendizaje. La investigadora efectuó un análisis exhaustivo con experimentos para saber cuál de estas implicaciónes es la adecuada en el aula. En la parte experimental presentó dos ejercicios que se describen a continuación.

El primero de ellos es el ejercicio de los números primos, fue aplicado a estudiantes de primer año de universidad en Francia y a profesores en un curso de formació. Se les propuso "determinar todos los números enteros del 1 al 20 que satisfacen la propiedad: si $n$ es un número par, entonces $n + 1$ es un número primo" (Durand-Guerrier, 2003, p. 6; traducción propia).

El análisis de las respuestas realizado por Durand-Guerrier (2003) reveló que, aunque las y los estudiantes que son hábiles en matemáticas pueden razonar a partir de una noción errónea de implicación, los profesores también cometieron el mismo error en ciertos casos. Al centrarse únicamente en los números pares, no contemplaron que los números impares también cumplen con la implicación, ya que una implicación con antecedente falso siempre es verdadera. Este malentendido sugiere que la forma tradicional en que se aborda la implicación en las aulas puede generar confusión, lo que resalta la necesidad de revisar y aclarar conceptos lógicos fundamentales tanto para estudiantes como para docentes.

En este caso, la propiedad se puede expresar como $\forall n \in \{1, \ldots, 20\}$ (n es par $\Rightarrow$ n+1 es primo), es decir, estamos evaluando una propiedad para todos los elementos de un conjunto específico (los números enteros del 1 al 20), por lo que se aborda desde la implicación como condicional generalizado. Todos los números impares (donde $P(n)$ es falso) siempre cumplen la implicación, sin importar si $n + 1$ es primo o no, pues una implicación con premisa falsa es siempre verdadera. Por otro lado, los únicos casos en los que la implicación es falsa ocurren cuando: $n$ es par (premisa verdadera) y $n + 1$ no es primo (consecuente falso). Por lo tanto, la proposición es verdadera para todos los valores de $n$, excepto para los números $n = 8, 14, 20$.

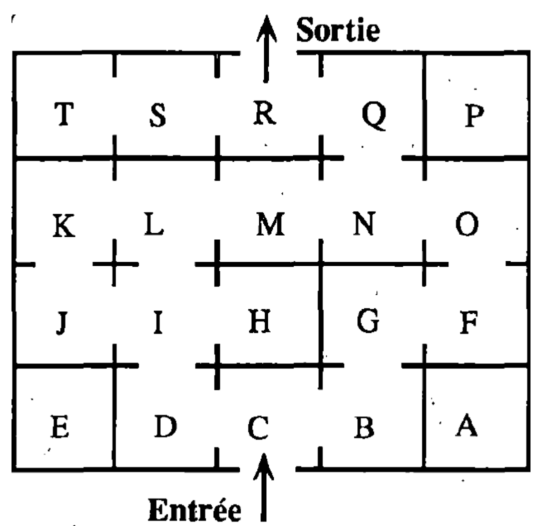
El segundo ejercicio es el laberinto (A.P.M.E.P., 1992, p. 108), fue aplicado a estudiantes de 15 y 16 años de una escuela en Francia.

> Lee atentamente las siguientes líneas antes de responder a las preguntas. Una persona a la que llamaremos X ha atravesado este laberinto, desde la entrada hasta la salida, sin haber pasado nunca dos veces por la misma puerta. Las habitaciones están nombradas A, B, C... como se indica en la figura 3.1. Es posible formular frases que tengan sentido en relación con la situación propuesta y sobre cuya veracidad se pueda pronunciar (VERDADERA o FALSA), o que pueden ser tales que la información disponible no

sea suficiente para decidir si son verdaderas o falsas. Por ejemplo, la frase “X ha pasado por C” es una frase VERDADERA. De hecho, se afirma que X ha atravesado el laberinto, y C es la única habitación de entrada. Para cada una de las 6 frases siguientes, indica si es VERDADERA, si es FALSA o si NO SE PUEDE SABER, y explica tu respuesta:

1. X atravesó P;
2. X atravesó N;
3. X atravesó M;
4. Si X atravesó O, entonces X atravesó F;
5. Si X atravesó K, entonces X atravesó L;
6. Si X atravesó L, entonces X atravesó K.

Figura 3.1: *Ejercicio del laberinto.*




Nota. Reproducido de *Évaluation des programmes de mathématiques Seconde*, EVAPM91/2, p. 108, por A.P.M.E.P., 1992.

Durand-Guerrier (2003) explica que los autores del ejercicio del laberinto tomaron la implicación como un condicional generalizado, es decir, las afirmaciones deben aplicarse a todos los recorridos posibles, no solo a casos particulares. Respecto a las frases del ejercicio, la frase 1 es falsa, la 2, 4 y 5 son verdaderas, y las frases 3 y 6 dependen del camino que se siga. Sin embargo, las y los estudiantes evaluaron las implicaciones como casos particulares, considerando solo un recorrido específico. Esto se reflejó en su respuesta a la afirmación 6, donde algunos no pudieron determinar el valor de verdad porque el recorrido variaba, algunos de los profesores en el curso de formación también respondieron de forma similar a las y los estudiantes.

Como resultado de su investigación, Durand-Guerrier (2003) concluye que al centrarse demasiado en los casos donde el antecedente es verdadero, se refuerza la idea incorrecta de que solo esos casos importan para evaluar el valor de verdad de una implicación. En particular, menciona: "Nuestros análisis y experimentos muestran claramente que la noción correcta de implicación para las matemáticas es la implicación lógica" (Durand-Guerrier, 2003, p. 30).

## 3.2. Construcción de la implicación desde la teoría APOE

Uno de los pilares para la construcción de la implicación es la construcción de las tablas de verdad, Noriega-Márquez (2017) propone una DG del concepto de tabla de verdad, siendo una de sus motivaciones que las y los estudiantes mejoren la habilidad para demostrar matemáticamente. El trabajo se propone analizar los conocimientos que tienen las y los estudiantes sobre la lógica matemática. Además, busca desarrollar una descomposición genética para facilitar la construcción de los conceptos relacionados con las tablas de verdad.

El autor considera dos Esquemas: uno para la interpretación y otro para la resolución de problemas que requieran el uso de tablas de verdad. La descripción primer esquema es "el estudiante es capaz de comprender las proposiciones, conoce el lenguaje matemático, maneja la sintaxis y la semántica para contextualizar problemas de la vida diaria en problemas de lógica" (Noriega-Márquez, 2017, p. 124).

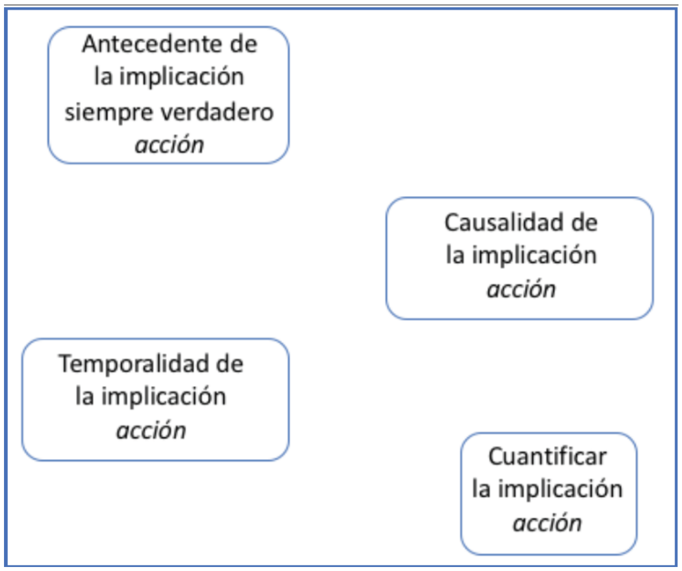
El segundo esquema se refiere a que el estudiante sea "capaz de utilizar los conectivos lógicos para encontrar los valores de verdad de las proposiciones trabajadas, conoce y aplica las leyes, propiedades y la notación para resolver las tablas de verdad" (Noriega-Márquez, 2017, p. 123). También se sugiere que en los conocimientos previos (llamados 'pre-acción') se tenga la proposición vista desde la sintaxis, aunque propone que se construya con una actividad en el aula.

El investigador considera que se ha interiorizado el concepto de tablas de verdad cuando las y los estudiantes entienden su origen, y lo tienen como Proceso cuando encuentran los valores de verdad de proposiciones compuestas. Posteriormente sugiere que se coordinen los Procesos de determinar, reflexionar y argumentar sobre el valor de verdad de proposiciones compuestas y que se involucren actividades, las cuales decidirá el profesor a cargo, que lleven a la tautología; esto con el fin de que las y los estudiantes puedan llegar a las leyes cotidianas de lógica y demostrarlas. Sin embargo, no presenta una descomposición genética de forma explícita sobre estos conceptos. Además, sobre el concepto de tautología no hay trabajos registrados que traten únicamente de este concepto de manera específica.

A su vez, García-Martínez y Parraguez (2018) reconocen la importancia de los cuatro tipos de implicación que propone Quine (1962): el entendimiento común, la implicación material, la implicación como condicional lógicamente válido y la implicación como condicional generalizado. Destacan que, en el campo de la Educación Matemática no existía evidencia previa a su trabajo sobre investigaciones relacionadas con la construcción de este concepto desde la teoría APOE. Las autoras proponen la descomposición genética de dos interpretaciones de la implicación: el entendimiento común y el condicional generalizado.

Para la implicación como entendimiento común aplicaron las dos actividades que propuso Durand-Guerrier (2003) a estudiantes del segundo año de pedagogía en una universidad de Chile. Para la actividad de los números primos agregaron las preguntas: ¿Cómo responderían los estudiantes de media? y ¿cómo respondería usted? Según los resultados obtenidos de ambas actividades, las autoras diseñan una DG que se compone de cuatro estructuras mentales: antecedente de la implicación siempre verdadero, causalidad de la implicación, temporalidad de la implicación y cuantificar la implicación; todas ellas como Acciones y sin mecanismos mentales entre ellas, como se muestra en la *Figura* 3.2.

Figura 3.2: *Descomposición genética de la implicación como entendimiento común.*

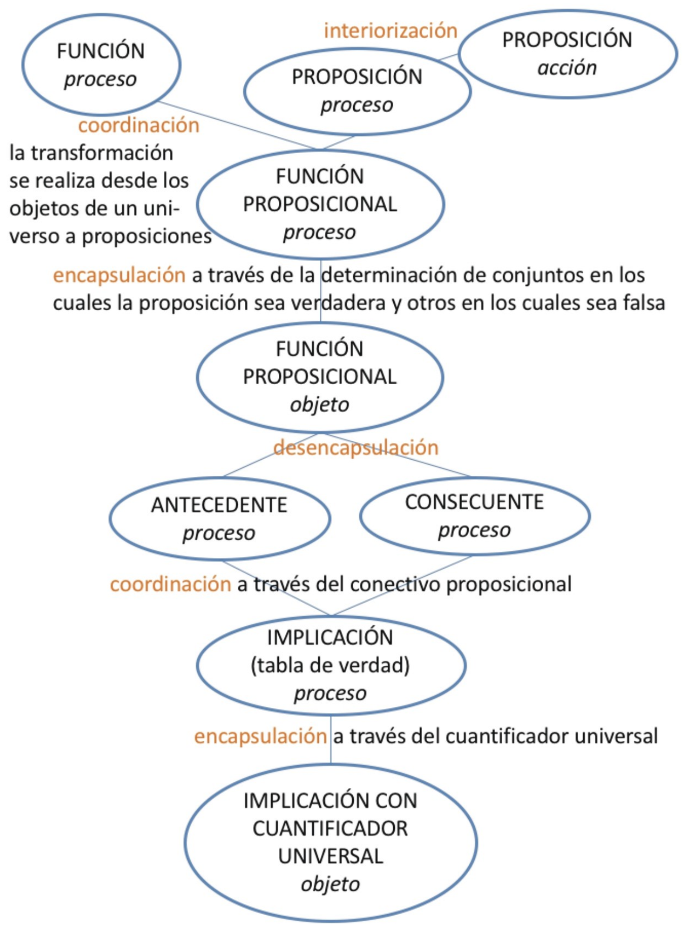



Nota. Tomado de "Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE" (p. 349), por por García-Martínez, I. y Parraguez, M., 2018, 2018, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1).

Asimismo, para la implicación como condicional generalizado las autoras analizaron dos libros de texto de álgebra lineal. A partir de los elementos que se presentaban en dichos textos y su experiencia docente, proponen la DG de este tipo de implicación, cuyas estructuras mentales son la proposición como Acción; la proposición, la función, la función proposicional, el antecedente, el consecuente y la implicación material como Proceso; la función proposicional e implicación con cuantificador universal como Objeto. Además, los mecanismos mentales presentes son la interiorización, la coordinación, la encapsulación y la desencapsulación, como se puede notar en la *Figura* 3.3.

Finalmente, las investigadoras plantean como trabajo futuro diseñar descomposiciones genéticas para las otras interpretaciones de la implicación, reconociendo la importancia de los cuatro tipos de la implicación y la falta de investigación de este tema desde la perspectiva de la teoría APOE. Este planteamiento da los cimientos a nuestra investigación.

Figura 3.3: *Descomposición genética de la implicación como condicional generalizado.*




Nota. Tomado de "Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE" (p. 357), por por García-Martínez, I. y Parraguez, M., 2018, 2018, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1).

# Capítulo 4

# Preguntas de investigación y Metodología

En este capítulo se presentan las preguntas de investigación a las que se les dará respuesta en las conclusiones, proporcionando un marco claro de los objetivos que guiaron este trabajo. Estas preguntas son el eje central del estudio y permitieron orientar tanto la formulación de las actividades como el análisis de los resultados. Además, se describe detalladamente la metodología empleada para la implementación práctica de las actividades, lo que incluye la selección de participantes.

## 4.1. Preguntas de investigación

Como se mencionó en el Capítulo 3, la literatura sugiere que tratar con la implicación no es tan trivial. Quine (1962) considera necesario contemplar cuatro tipos de implicación: el entendimiento común, la implicación material, como condicional lógicamente válido y como condicional generalizado. La investigación de Durand-Guerrier (2003) concluye que en el aula suele considerarse la implicación material, y que el tipo de implicación más adecuado para las matemáticas es la implicación como condicional lógicamente válido, en el que se entiende que si el antecedente es verdadero, entonces el consecuente debe ser verdadero.

En este contexto, las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender el concepto de implicación lógica están estrechamente relacionadas con la falta de claridad sobre los diferentes tipos de implicación. Según Durand-Guerrier (2003), en el aula las y los estudiantes tienden a manejar solo una interpretación de la implicación, generalmente la implicación material, lo que limita su comprensión del concepto en contextos matemáticos más complejos. Además, presentan dificultades para comprender el condicional lógicamente válido; asimismo, muchos estudiantes tienen problemas para aplicar el condicional generalizado.

En consecuencia, partimos de la premisa de que existen dificultades para el aprendizaje de la implicación, ya que hay distintos tipos y no suelen considerarse todos cuando se enseña este concepto. En adición, García-Martínez y Parraguez (2018) mencionan que, en Educación Matemática, no había evidencia de investigaciones sobre la construcción del concepto de implicación desde la teoría APOE. Por lo tanto, en este trabajo nos proponemos responder las siguientes preguntas:

> ¿Qué estructuras y mecanismos mentales están asociados al concepto de implicación como condicional lógicamente válido en estudiantes de nivel superior?
>
> ¿Cómo contribuye la descomposición genética propuesta a la identificación de las dificultades que enfrentan los estudiantes de nivel superior al aprender el concepto de implicación lógica?

## 4.2. Descripción metodológica

Una investigación basada en la teoría APOE se compone de tres componentes esenciales: Análisis Teórico, Diseño e Implementación de la Instrucción y Recopilación y Análisis de Datos. Para llevar a cabo esta investigación basada en la teoría APOE, se utilizan diversos métodos y herramientas como entrevistas, preguntas, observaciones en el aula, entre otros. Estos métodos permiten recopilar datos valiosos que ayudan a evaluar y mejorar la instrucción basada en APOE y a comprender mejor cómo los estudiantes construyen su comprensión de los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014).

Arnon et al. (2014) describen que el proceso comienza con un análisis teórico de cómo los estudiantes comprenden el concepto matemático en cuestión, con esta información se procede a la creación de una descomposición genética preliminar. Esta descomposición genética se convierte en un marco que guía el diseño de la instrucción y las actividades que se centran en promover y fomentar las construcciones mentales requeridas por la teoría APOE.

Una vez que la instrucción se ha implementado, se recopilan datos relacionados con el desempeño y el aprendizaje de las y los estudiantes. Estos datos se analizan para determinar si las y los estudiantes han realizado las construcciones mentales previstas y para evaluar el nivel de comprensión que han logrado. Si los resultados no cumplen con las expectativas en cualquiera de estas áreas, se ajusta y modifica la instrucción en consecuencia, trabajando en un ciclo iterativo (Arnon et al., 2014).

Uno de los métodos principales para recopilar datos, además de la evidencia escrita de las actividades, es a través de entrevistas, si bien pueden utilizarse para medir actitudes de las y los estudiantes y comparar el rendimiento matemático entre diferentes enfoques de enseñanza, su objetivo principal es determinar si han desarrollado las construcciones mentales esperadas según la descomposición genética utilizada en el estudio (Arnon et al., 2014).

Llevamos a cabo la descomposición genética tanto de la tautología como de la implicación como condicional lógicamente válido, basándonos en la teoría APOE. Estas descomposiciones muestran cada uno de los conceptos en estructuras y mecanismos mentales, mediante los cuales se puede desarrollar una comprensión de dichos conceptos. Los detalles completos de estas descomposiciones se describen con mayor precisión en el Capítulo 5.

Basándonos en las descomposiciones genéticas mencionadas, diseñamos un conjunto de actividades que buscan fomentar las construcciones mentales descritas en dichas descomposiciones. Estas actividades fueron realizadas de manera que los estudiantes puedan construir y/o desarrollar su comprensión de los conceptos; y para la implementación efectiva de estas actividades, utilizamos el ciclo ACE.

Adicionalmente, hemos incorporado los problemas de los números primos y el laberinto, pues se han utilizado para evaluar la comprensión de la implicación. Al abordar ambos problemas los estudiantes deben aplicar razonamientos lógicos para su resolución, esto no solo proporciona un marco para medir la comprensión de los conceptos, sino que también ofrece una oportunidad para observar cómo los estudiantes abordan y razonan en relación con la implicación. Incluirlos en esta investigación nos da un contexto sobre como nuestra propuesta se relaciona con la construcción de la implicación como condicional generalizado.

Esta implementación se realizó a seis estudiantes de segundo trimestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) en México; a estos estudiantes los llamaremos A, B, C, D, E y F; organizados en equipos de dos personas: A y F; C y E; y D y B. Dichos participantes previamente habían tomado la Unidad de Enseñanza Aprendizaje (UEA) de Taller de Matemáticas e Introducción al Pensamiento Matemático. En Taller de Matemáticas se brindan las herramientas básicas del álgebra, la trigonometría y geometría elemental para la resolución de problemas sencillos; por otro lado, en Introducción al Pensamiento Matemático se promueve el pensamiento analítico, habilidades lógico-matemáticas y habilidades blandas diciplinares como la escritura y exposición de argumentos. Las y los estudiantes se encontraban inscritos y cursando la primera semana en la UEA: Álgebra Superior I. Aunque dentro del contenido de esta UEA se encuentra el tema de lógica aún no lo habían tratado en clase.

El desarrollo de cada descomposición genética fue implementado durante una sesión, cada una de aproximadamente dos horas. Para la primera sesión aplicamos las actividades que se encuentran en el *Cuadro* 5.1, estas actividades fueron divididas en cuatro partes y se pueden encontrar en el Anexo 1. Para la segunda sesión aplicamos las actividades que se encuentran en el *Cuadro* 5.2, estas actividades fueron igualmente divididas en cuatro partes y se pueden encontrar en el Anexo 2. Esta partición se realizó con el objetivo de facilitar la discusión en clase después de cada aplicación. Cada actividad se llevó a cabo de manera secuencial y estructurada, permitiendo a los estudiantes reflexionar y discutir sobre los conceptos abordados; al realizar las actividades por partes se dio lugar a espacios para preguntas y retroalimentación.

Siguiendo el ciclo ACE de la teoría APOE, la integración de ejercicios permiten a los estudiantes practicar y aplicar los conceptos, facilitando así la repetición y variación necesaria para solidificar su comprensión y desarrollar habilidades matemáticas más robustas. En el anexo también se encuentran los ejercicios [9.1] planeados para que los estudiantes reforzaran lo aprendido durante las sesiones. Estos ejercicios fueron diseñados con el propósito de consolidar y profundizar la comprensión de los conceptos discutidos en la sesión. Posteriormente se realizó una entrevista individual para conocer de manera más profunda las respuestas de los participantes, esto con el objetivo de identificar si habían interiorizado los conceptos discutidos y detectar posibles dudas. Las sesiones, donde los participantes trabajaron en equipo, fueron grabadas en audio para asegurar que la información se capturara con la mejor precisión posible. Posteriormente, se realizó una transcripción completa de todas las grabaciones, lo que nos permitió estudiar los datos de forma cualitativa. Este enfoque, conocido como investigación cualitativa basada en entrevistas, nos facilitó un análisis profundo de las interacciones y discusiones que tuvieron lugar durante las sesiones. A través de esta metodología, pudimos identificar patrones y temas emergentes, así como comprender las experiencias y perspectivas de los participantes de manera más rica y detallada.

Una vez analizados los datos que se recopilaron de las actividades y grabaciones, surgieron dudas que requerían una exploración más amplia. Para abordar estas inquietudes, se realizaron entrevistas a las y los estudiantes con el objetivo de profundizar en su proceso de aprendizaje. Estas entrevistas permitieron obtener una perspectiva más clara sobre los razonamientos que emplearon, las dificultades que encontraron y la construcción de las estructuras mentales que consolidaron.

# Capítulo 5

# Descripción de las descomposiciones genéticas y actividades para el ciclo ACE

En este capítulo se presenta una descomposición genética del concepto de tautología y una del concepto de implicación como condicional lógicamente válido. Comenzaremos con una descripción detallada de las descomposiciones genéticas, explicando las estructuras y mecanismos mentales que la componen. Y finalmente se presentán las actividades que fomentan dichas descomposiciones.

## 5.1. Descomposiciones genéticas

Las demostraciones matemáticas se fundamentan en principios lógicos, definiciones, axiomas, teoremas previos, y otras herramientas; entre ellas se incluyen las demostraciones por contradicción, por contrapositiva, directas, entre otras. Para establecer un entendimiento sólido de estas es fundamental tener interiorizada la implicación, por lo que proponemos iniciar con el estudio de conceptos fundamentales como la proposición, las proposiciones compuestas y la tautología, lo que permitirá abordar con mayor profundidad conceptos como la implicación material y la implicación como condicional lógicamente válido.

### 5.1.1. Descripción de la descomposición genética tautología

La primera descomposición genética (DG) se centra en dichos elementos fundamentales; su propósito es describir cómo las y los estudiantes pueden construir la proposición, la proposición compuesta y la tautología como un Proceso en términos de estructura mental. Es importante aclarar que los conceptos que se presentan durante este escrito son tomados del libro de Grimaldi (1998), que es la terminología tradicional en Lógica.

Nuestra DG, representada en la figura 5.1, considera que el conocimiento previo de las y los estudiantes debe ser el siguiente:

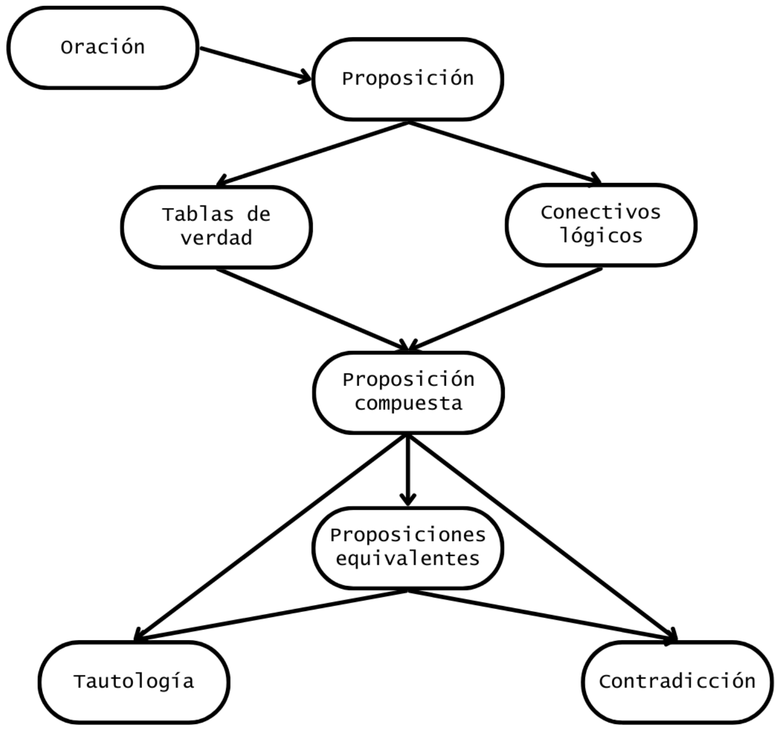
- Oración como Proceso: implica reconocerla como una oración declarativa.

Se toman las oraciones como conocimiento previo. Se realizan Acciones sobre la *oración como Proceso* con el fin de determinar si las oraciones tienen valor de verdad. Estas Acciones se interiorizan en el *Proceso de proposición*, en este Proceso se identifican a las proposiciones como las oraciones que tienen valor de verdad bien definido.

Se hacen Acciones sobre la proposición que se interiorizan en los *Procesos de los conectivos lógicos* ($\wedge, \vee, \neg$), por ejemplo, cuando pueden determinar el valor de verdad usando dichos conectivos. Se hacen Acciones que se interiorizan en el *Proceso de tabla de verdad* mismas que se coordinan con el *Proceso de conectivos lógicos* para interiorizar el *Proceso de tabla de verdad* de cada conectivo lógico.

Se coordinan el *Proceso de conectivos lógicos* con el *Proceso de tabla de verdad* para construir un nuevo Proceso llamado *proposición compuesta*, que consiste en entender a las proposiciones compuestas como proposiciones que se obtienen a partir de los conectivos lógicos y a las que se les puede asociar una tabla de verdad para obtener su valor de verdad, según el valor de verdad de las proposiciones que las componen.

Figura 5.1: *Descomposición genética de la tautología.*




Se hacen Acciones sobre las proposiciones compuestas para interiorizar un Proceso que puede determinar cuando dos proposiciones tienen los mismos valores de verdad, a este Proceso se le llama *proposiciones equivalentes*.

Se realizan Acciones sobre las proposiciones compuestas y sus valores de verdad para interiorizar el *Proceso de tautología* (resp. contradicción) como aquellas propisiciones que son verdaderas (resp. falsas) sin importar el valor de verdad de las proposiciones que las conforman. Se interioriza la tautología y la contradicción como Procesos a través de la equivalencia con proposiciones siempre verdaderas (resp. falsas).

### 5.1.2. Descripción de la descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido

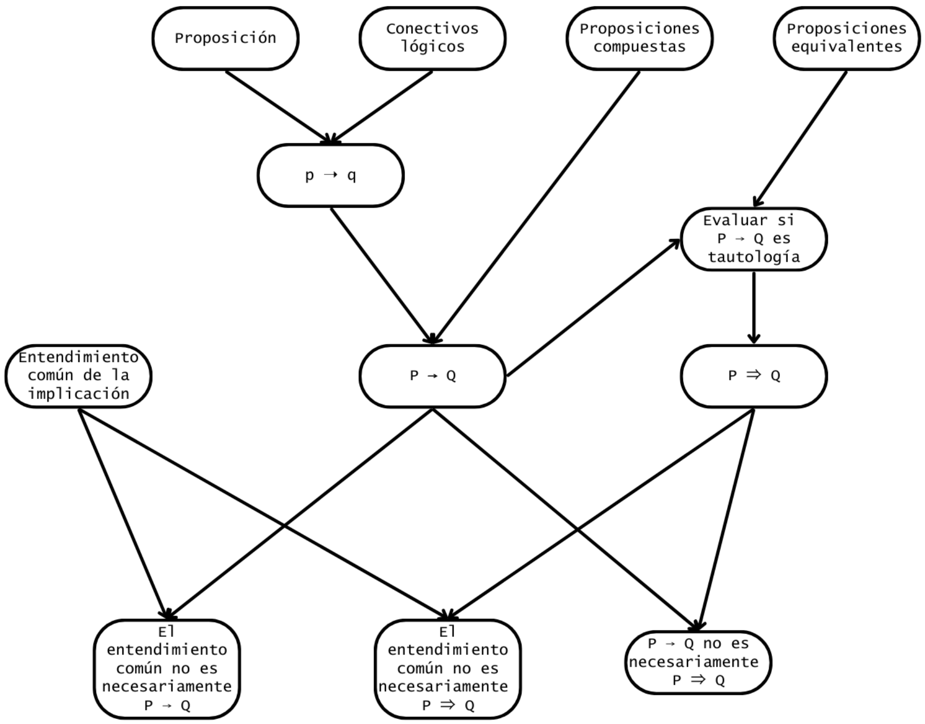
Una vez que las y los estudiantes han adquirido la tautología como Proceso, avanzamos hacia la segunda descomposición genética que proponemos. Esta tiene el objetivo de describir cómo las y los estudiantes pueden construir y comprender la implicación como conectivo lógico, también llamada implicación material, y la implicación como condicional lógicamente válido como un Proceso en términos de estructura mental. Ambos tipos de implicaciones se encuentran profundamente conectadas, ya que ambas se basan en principios lógicos fundamentales y comparten un esquema condicional. La construcción de estos conceptos en conjunto permite no solo el entendimiento individual de cada tipo de implicación, sino también su diferenciación.

La DG que proponemos esta representada en la figura 5.2, y considera que el conocimiento previo debe ser el siguiente:

- Proposición como Proceso: implica reconocerla como una declaración o afirmación que posee un valor de verdad.
- Conectivos lógicos como Proceso: conlleva construir tablas de verdad usando los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ para conectar proposiciones.
- Proposición compuesta como Proceso: requiere reconocerla como una proposición unida por conectivos lógicos, se construyen tablas de verdad con proposiciones compuestas.
- Proposiciones equivalentes como Proceso: implica validar o refutar la equivalencia de proposiciones compuestas usando tablas de verdad.
- Tautología como Proceso: demanda determinar cuándo una proposición es una tautología usando tablas de verdad, reconoce $P \vee \neg P$.
- Implicación como entendimiento común como Proceso: significa que no se considera el caso de un antecedente falso.

Se toman la proposición y conectivos lógicos como conocimiento previo, estos se coordinan para construir el P*roceso de la implicación material* $p \to q$, que

Figura 5.2: *Descomposición genética de la implicación material y la implicación como condicional lógicamente válido.*




consiste en identificarla como un nuevo conectivo lógico usando tablas de verdad, y se identifican las premisas y conclusiones.

Se coordinan los *Procesos del entendimiento común de la implicación* y *la implicación material* para construir el nuevo *Proceso en el que se distingue la diferencia entre ambos tipos de implicaciones*, es decir, que el entendimiento común de la implicación no es necesariamente la implicación material.

Se coordinan los *Procesos de la implicación material* con *las proposiciones compuestas* para construir el nuevo *Proceso de $P \to Q$* (implicación entre proposiciones compuestas), este se basa en entender $P \to Q$ como una implicación donde las premisas y conclusiones son proposiciones compuestas.

El *Proceso de $P \to Q$* y el *Proceso de las proposiciones equivalentes* se coordinan para construir el *Proceso en el que comparan $P \to Q$ con proposiciones equivalentes*, esto implica determinar las equivalencias usando tablas de verdad y conllevar a la tautología.

Se coordinan este nuevo Proceso con la tautología para construir a $P \Rightarrow Q$ (condicional lógicamente válida) como Proceso, se basa en entender que $P \Rightarrow Q$ es una implicación donde solo consideran los casos que son verdad.

Se coordina el entendimiento común de la implicación con la comparación de $P \to Q$ con proposiciones equivalentes para construir un nuevo *Proceso en el que entienden que el entendimiento común de la implicación no es necesariamente* $P \to Q$. El Proceso de $P \to Q$ se coordina con $P \Rightarrow Q$ para construir un nuevo *Proceso en el que se entiende que la implicación material no es necesariamente* $P \Rightarrow Q$.

## 5.2. Actividades

En esta sección se describen las actividades diseñadas con base en las descomposiciones genéticas propuestas, las cuales se integran con el Ciclo ACE como marco estructural para guiar el aprendizaje. Cada pregunta se ha elaborado para reflejar las construcciones mentales previstas en la descomposición genética, lo que permite a los estudiantes avanzar en su comprensión de los conceptos. Este enfoque asegura un aprendizaje significativo, en el que las conexiones entre las estructuras y mecanismos mentales de la descomposición genética se realizan de manera clara.

### 5.2.1. Actividades para la implementación de la descomposición genética de tautología

En el *Cuadro* 5.1 se detallan actividades propuestas y los aspectos específicos de la descomposición genética que promueven.

Cuadro 5.1: *Descripción de las actividades según la descomposición genética de tautología*

| Actividad | Análisis de la actividad con base en la DG |
|---|---|
| • Determina si las siguientes oraciones pueden o no ser verdaderas o falsas.<br>a) Todos los triángulos son equiláteros<br>b) ¡Feliz aniversario!<br>c) $20 + 25 = 45$<br>d) La UAM Cuajimalpa tiene escaleras eléctricas<br><br>• Escribe el valor de verdad de las oraciones anteriores | Acción de designar adecuadamente valores de verdad a oraciones. |
| • Escribe una oración que sea falsa, una que sea verdadera y una a la que no se le pueda asignar un valor de verdad. | Interiorización de las Acciones anteriores para dar lugar a la proposición como proceso, las y los estudiantes deben ser capaces de construir ejemplos. |

| | |
|---|---|
| • Escribe la negación de las siguientes proposiciones:<br>a) $p$: La capital de Francia es París<br>$\neg p$:<br><br>b) $p$: $\pi$ es un número irracional<br>$\neg p$:<br><br>c) $p$: $2 + 2 = 4$<br>$\neg p$:<br><br>• ¿Con cuántas proposiciones simples se construyen las siguientes proposiciones?<br>a) Uso Instagram o uso TikTok<br>b) Uso Instagram o uso TikTok y uso Facebook<br><br>• Analiza los posibles valores de verdad de la frase: “Uso Instagram o uso TikTok”.<br><br>• Analiza los posibles valores de verdad de la frase: “Uso Instagram y uso TikTok”. | Acción de usar conectivos lógicos $(\wedge, \vee, \neg)$ en las proposiciones. |

| | |
|---|---|
| • Construye una tabla con todas las posibilidades de valores de verdad y organízalas en la siguiente tabla:<br>$\begin{array}{c\|c} p & q \\ \hline & \end{array}$<br><br>• Construye una tabla con todas las posibilidades de valores de verdad y organízalas en la siguiente tabla:<br>$\begin{array}{c\|c\|c} p & q & r \\ \hline & & \end{array}$<br><br>• Construye la tabla de verdad de la negación y redacta qué puedes decir acerca de la negación:<br>$\begin{array}{c\|l} p & \neg p \text{ (negación de } p) \\ \hline & \end{array}$<br><br>• Construye la tabla de verdad de p o q (disyunción), y menciona en qué casos $p \vee q$ es falsa:<br>$\begin{array}{c\|c\|l} p & q & p \vee q \ (p \text{ o } q) \\ \hline & & \end{array}$<br><br>• Construye la tabla de verdad de la conjunción de p y q (conjunción), y menciona en qué casos $p \wedge q$ es falsa:<br>$\begin{array}{c\|c\|l} p & q & p \wedge q \ (p \text{ y } q) \\ \hline & & \end{array}$ | Interiorización de los conectivos lógicos $(\wedge, \vee, \neg)$, las y los estudiantes son capaces de realizar tablas de verdad usando los conectivos. |
| • Usa una tabla de verdad para determinar el valor de verdad de los siguientes incisos:<br>a) Uso Instagram, o uso TikTok y veo YouTube<br>b) No uso Instagram, y uso TikTok o uso Facebook<br>c) No es cierto que no uso Instagram y uso TikTok, y uso Instagram o uso TikTok<br>d) Uso TikTok y, además, o no uso Instagram o uso TikTok | Coordinación de proposiciones y conectivos lógicos para llegar al nuevo proceso de proposiciones compuestas, deben ser capaces de construir las tablas de verdad de proposiciones compuestas. |

| | |
|---|---|
| 1. Escribe si consideras si son lógicamente equivalentes las siguientes frases<br>a) $p$: No puedo decirle que no a mi hermanita si me pide algo<br>$q$: Siempre haré lo que me pida mi hermanita.<br>b) $P$: No es cierto que esté lloviendo y el piso esté seco al mismo tiempo.<br>$Q$: O no está lloviendo o el piso no está seco.<br><br>2. Decide si $p$ es lógicamente equivalente ($\equiv$) a $\neg(\neg p)$. | Acciones sobre proposiciones equivalentes |
| 1. Usa las tablas de verdad para probar la equivalencia de los siguientes incisos:<br>a) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$<br>c) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ | Interiorización de proposiciones equivalentes, deben ser capaces de construir las tablas de verdad de proposiciones compuestas para verificar la equivalencia. |
| 1. En los siguientes ejemplos indica cuál es una tautología ($T_0$) y cuál es una contradicción ($C_0$):<br>a) Nadé en una alberca, pero no me mojé.<br>b) Fui a la escuela y entre a todas las clases, pero jugué videojuegos en casa todo el día.<br>c) Un triángulo puede ser isósceles, escaleno o equilátero. | Acción sobre las proposiciones compuestas para dar lugar a la tautología y a la contradicción como Procesos. |
| 1. Demuestra mediante tablas de verdad que P: $p \vee \neg p$ es una tautología.<br><br>2. Demuestra mediante tablas de verdad que P: $p \wedge \neg p$ es una contradicción.<br><br>3. Mediante tablas de verdad, indica si las siguientes proposiciones compuestas son tautología o una contradicción:<br>a) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$<br>b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ | Interiorización de la tautología y la contradicción como Procesos a través de la equivalencia con proposiciones siempre verdaderas o falsas. |

### 5.2.2. Actividades para la implementación de la descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido

En el *Cuadro* 5.2 se presentan actividades propuestas, las cuales no se encuentran en el orden en el que fueron aplicadas sino en los aspectos específicos de la descomposición genética que promueven.

Cuadro 5.2: *Descripción de las actividades según la descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido*

| Actividad | Análisis de la actividad con base en la DG |
|---|---|
| • Indica cuál es la premisa (P) y la conclusión (C) de las siguientes proposiciones:<br>a) "Estudiar lógica implica que sabré demostrar".<br>◯ estudiar lógica<br>◯ sabré demostrar<br>b) "Viajaré a Japón, si gano la beca de intercambio".<br>◯ Viajaré a Japón<br>◯ gano la beca de intercambio<br>c) "Si la gente miente, entonces siembra desconfianza".<br>◯ la gente miente<br>◯ la gente siembra desconfianza<br>"Comenzaré un negocio propio, si no encuentro trabajo este año".<br>◯ comenzaré un negocio propio<br>◯ no encuentro trabajo este año<br><br>• Construye la tabla de verdad de $p \rightarrow q$ ($p$ implica $q$). | Coordinación de proposiciones y conectivos lógicos para llegar al proceso de implicación material, deben ser capaces de reconocer la premisa y la conclusión y de construir las tablas de verdad de la implicación. |

| | |
|---|---|
| • Determina el valor de verdad de los siguientes incisos:<br>a) Mi abuelita anda en bici $\rightarrow$ seré ganador del premio nobel.<br>b) Si no estudio, entonces reprobaré.<br>c) $(3 \in \emptyset \wedge A = \{1, 2\}) \rightarrow 3 \in A$<br><br>• En el caso de que la implicación "si entregas todos los trabajos, aprobarás la asignatura" es verdadera, qué puedes decir sobre el valor de verdad de su premisa y conclusión. | Coordinación del entendimiento común de la implicación y la implicación material para dar lugar a un proceso en el que se descubre que el entendimiento común de la implicación no es necesariamente $P \rightarrow Q$ |
| • Considera el siguiente argumento:<br>"Si hace mucho calor, entonces iré a la playa". $(p \rightarrow q)$<br>"Si voy a la playa, entonces nadaré en el mar". $(q \rightarrow r)$<br>"Hace mucho calor". $(p)$<br>Si hoy hace mucho calor, ¿qué puedo concluir?<br><br>• Analiza el siguiente argumento:<br>"Si el cielo está nublado, entonces podría llover". $(p \rightarrow q)$<br>Si no llovió $(\neg q)$, ¿podemos afirmar que el cielo no estaba nublado $(\neg p)$?<br><br>• Dado el argumento: "Si estudio con disciplina y descanso bien la noche antes del examen, entonces obtendré una buena calificación".<br>Forma un argumento lógico basado en la condición dada e introduce una conclusión que se siga de las premisas.<br><br>• Determina cuál es la premisa y la conclusión $(P \rightarrow Q)$ de las siguientes proposiciones compuestas.<br>a) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$<br>b) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$<br>c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$<br>d) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$<br>e) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ | Coordinación de $p \rightarrow q$ y proposiciones compuestas para llegar al nuevo proceso de $P \rightarrow Q$ (implicación entre proposiciones compuestas), deben ser capaces de reconocer y construir argumentos (premisas y conclusiones) usando proposiciones compuestas. |

| | |
|---|---|
| • Usa las tablas de verdad para probar la equivalencia lógica de los siguientes incisos:<br>a) $p \to q \equiv \neg p \lor q$<br>b) $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$<br>c) $(p \land \neg p) \to q \equiv T_0$ | Coordinación de $P \to Q$ con las proposiciones equivalentes, para construir el proceso en el que se comparan $P \to Q$ con proposiciones equivalentes usando tablas de verdad. |
| • Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. $p, q, r$ denotan proposiciones simples.<br>a) $\neg(p \lor q) \to \neg p$<br>b) $p \to (q \to r)$<br><br>• ¿Cuáles de las proposiciones compuestas del ejercicio anterior son tautologías?<br><br>• Decimos que $p$ implica lógicamente a $q$ ($\Rightarrow$) si $p \to q$ es una tautología. De las implicaciones de los problemas 1 y 2, ¿cuáles implicaciones ($\to$) pueden ser sustituidas por implicaciones lógicas ($\Rightarrow$)? | Coordinación de la comparación de $P \to Q$ con proposiciones equivalentes con la tautología para dar lugar a $P \Rightarrow Q$ |

| | |
|---|---|
| • Si $P$ es verdad (tautología) y $P \Rightarrow Q$ (es decir, $P \rightarrow Q$ es tautología), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?<br><br>• Considera $P$: los ovíparos nacen de huevo y el huevo tiene yema, $Q$: los canarios son ovíparos y cuando eran huevo tenían yema. Considera que $P$ es cierto, y que $P \Rightarrow Q$. ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?<br><br>• Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso (contradicción), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?<br><br>• Si tenemos $P$: está lloviendo, $Q$: me mojé el cabello. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$? | Coordinación del entendimiento común de la implicación y la comparación de $P \rightarrow Q$ con proposiciones equivalentes para dar lugar a un proceso en el que se descubre que el entendimiento común de la implicación no es necesariamente $P \rightarrow Q$ |
| • $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso, ¿qué puedes decir del valor de verdad de $P$?<br><br>• Considera $P$: el río está seco, $Q$: los peces pueden vivir en el río. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso (los peces no pueden vivir en un río seco), ¿qué puedes decir sobre el valor de $P$?<br><br>• $P \Rightarrow Q$ y $Q$ verdadero, ¿Qué puedes decir del valor de verdad de $P$?<br><br>• Si tenemos $P$: es fin de semana, $Q$: voy al cine. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$? | Coordinación de la implicación material y la comparación de $P \Rightarrow Q$ con proposiciones equivalentes para propiciar un Proceso en el que se descubre que la implicación material no es necesariamente $P \Rightarrow Q$ |

# Capítulo 6

# Resultados

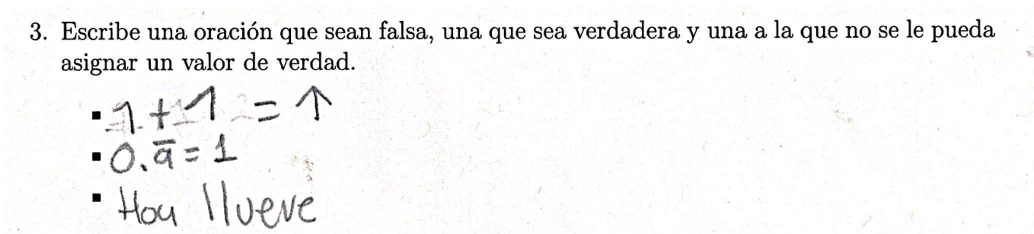
En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos a partir de la implementación de la descomposición genética mediante el ciclo ACE. Los resultados serán desglosados en función de los diferentes componentes del ciclo ACE, con el objetivo de observar cómo cada fase contribuye al desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes. Usaremos E1 y E2 para denotar a las personas responsables de la aplicación de las actividades y entrevistas.

## 6.1. Resultados de la implementación de la descomposición genética de tautología

Las y los estudiantes realizaron las Acciones de asignar valores de verdad a oraciones (Parte 1, actividades 1 y 2), y llevaron a cabo la interiorización de las Acciones anteriores para dar lugar a la proposición como Proceso (Parte 1, actividad 3). Como parte de esa interiorización, también fueron capaces de construir ejemplos, usando incluso simbolos que normalmente no usarían, como lo podemos notar en la figura 6.1. Esto refuerza la idea de que si se interiorizó la proposición.

Todas y todos hicieron Acciones usando conectivos lógicos $(\wedge, \vee, \neg)$ en las proposiciones (Parte 1, actividad 4; Parte 2, actividad 1, 2, 3). Por ejemplo, realizaron la negación de las proposiciones propuestas; al desarrollar la actividad donde se pedía identificar de cuántas proposiciones simples estaba

Figura 6.1: *Parte 1, actividad 3. Estudiantes C y E.*

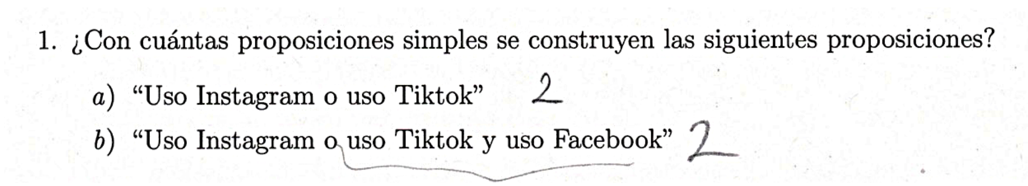


3. Escribe una oración que sean falsa, una que sea verdadera y una a la que no se le pueda asignar un valor de verdad.

- $1 + 1 = \uparrow$
- $0.\bar{9} = 1$
- Hoy llueve

compuesta otra proposición, una tercera parte del grupo contestó que estaba compuesta por dos proposiciones, tal como se muestra en la *Figura* 6.2; sin embargo, al entrevistarlos sobre porqué habían respondido de esa forma, ellos reconocieron que la respuesta era distinta:

Figura 6.2: *Parte 2, actividad 1. Estudiantes C y E.*



1. ¿Con cuántas proposiciones simples se construyen las siguientes proposiciones?

   *a*) "Uso Instagram o uso Tiktok" 2

   *b*) "Uso Instagram o uso Tiktok y uso Facebook" 2

*E2: ¿Recuerdas porqué pusiste estas respuestas?*

*E: No, pero la respuesta está mal. En la segunda es tres, no dos.*

Todas y todos los participantes analizaron los valores de verdad de las proposiciones que se presentaron, usaron tablas de verdad a pesar de que aún no se veían en las actividades, por lo que podemos afirmar que todas y todos ellos ya contaban con ese conocimiento previo. Realizaron las actividades para interiorizar el Proceso de tablas de verdad (Parte 2, actividad 4 y 5), durante la actividad presentaron evidencia de reconocer cuales deben ser los casos presentes en dichas tablas, es decir, interiorizaron las tablas de verdad:

*B: ¿Sabes cómo se construye la de tres proposiciones?*

*D: No.*

*B: Es como toda la combinatoria, haces: verdad, verdad, verdad, verdad, falso, falso, falso, falso. Y luego dos a dos: verdad, verdad, falso, falso, verdad, verdad, falso, falso. Y luego uno a uno: verdad, falso, verdad, falso, verdad, falso, verdad, falso. Y si te das cuenta estan todas las combinaciones, donde todas son verdad, donde uno de estos es falso y así.*

En la Parte 2, actividades 6, 7 y 8, se buscó coordinar el Proceso de tablas de verdad con el de los conectivos lógicos para dar lugar al Proceso de las tablas de verdad de cada conectivo lógico, este apartado fue reconocido como extenso por los participantes durante su implementación. Todas y todos lo hicieron basandose únicamente en sus conocimientos previos, como se muestra la plática de los estudiantes E a C:

*E: 'Construye la tabla de verdad de p o q, y menciona en qué casos* $\vee$ *es falsa' (realizan tabla de verdad).*

*C: ¿La disyunción qué era?*

*E: o, aquí dice.*

*E: Según yo todas son verdad menos cuando es falso falso.*

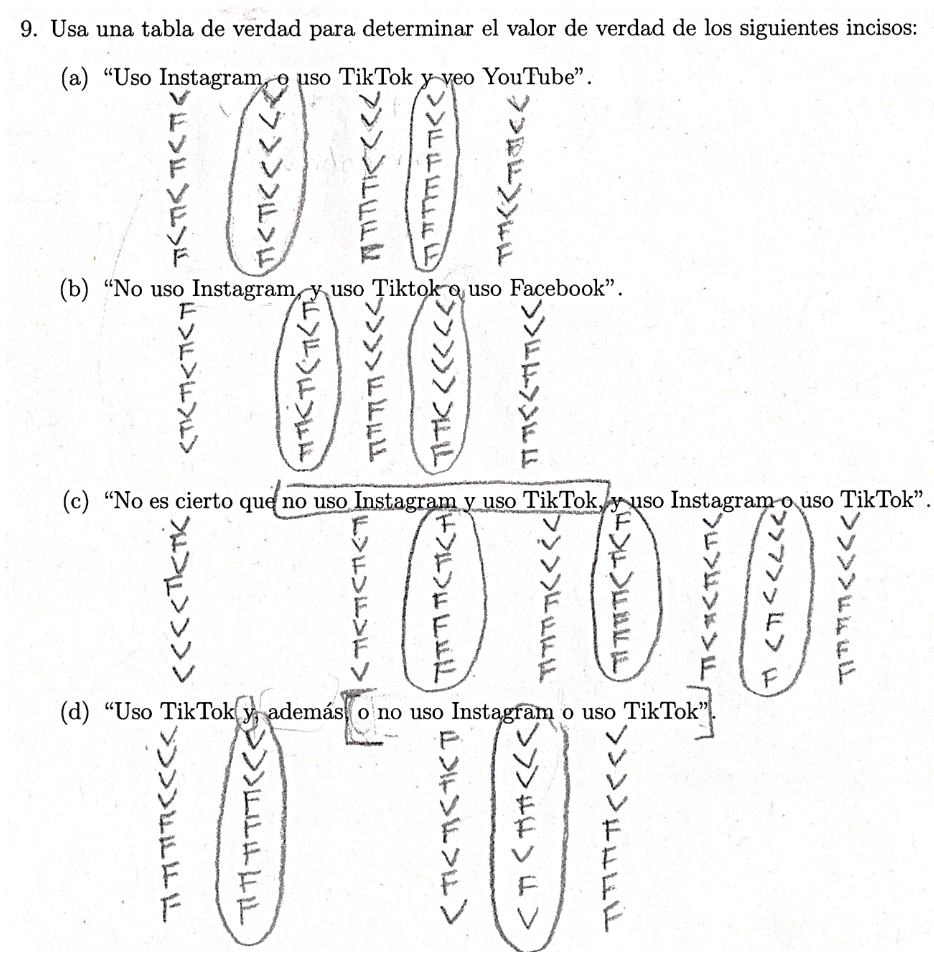
Esto muestra que no hubo un análisis sobre los conectivos lógicos, sino una evocación a sus conocimientos previos, reestructurar esta actividad podría resultar conveniente.

Sobre las actividades para entender las proposiciones compuestas como aquellas que se obtienen a partir de los conectivos lógicos (Parte 2, actividad 9), cada par de estudiantes realizaron las actividades de forma distinta. Dos de ellos, A y F, dieron valores de verdad de forma lineal en cada par de proposiciones unidas por un conectivo lógico, no tomaron en cuenta algún tipo de agrupación, como se nota en la *Figura* 6.3.

Por otro lado, los participantes C y E si consideraron la agrupación de las proposiciones para realizar la actividad, identificando así las proposiciones compuestas, esto se muestra en la *Figura* 6.4.

El último par de estudiantes, B y D, presentaron más dudas referente a la

Figura 6.3: *Parte 2, actividad 9. Estudiantes A y F.*



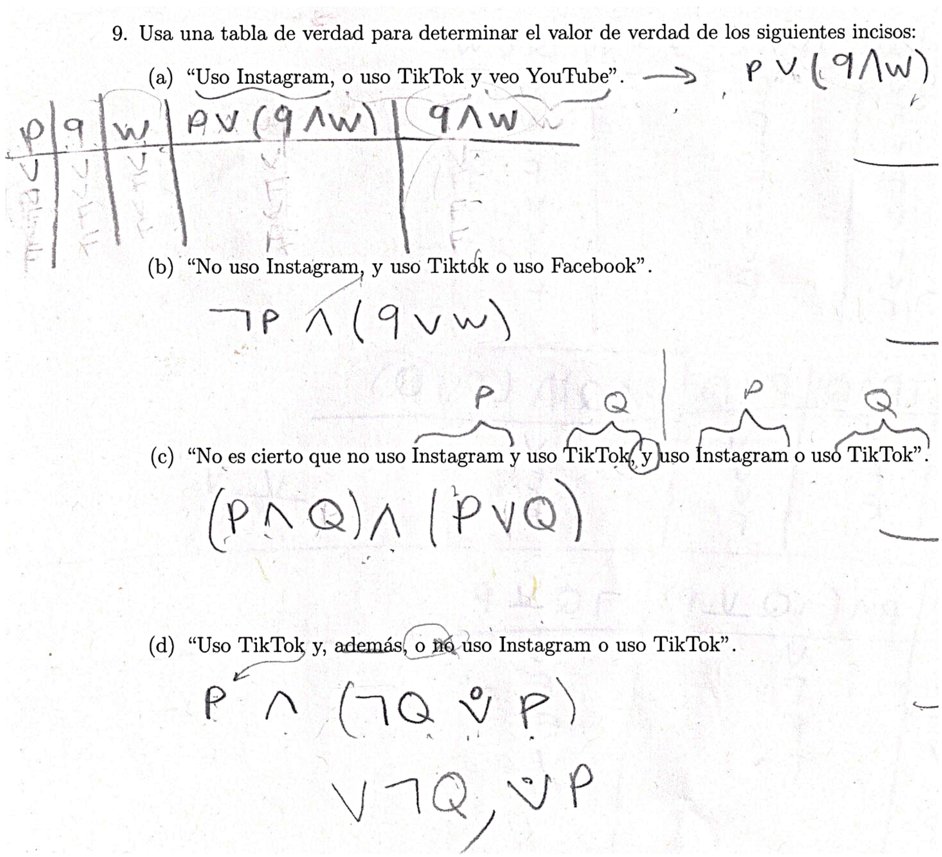

agrupación de las proposiciones, así que preguntaron al aplicador:

*B: ¿Es que aquí no sabemos como juntar las oraciones, ponemos el 'uso TikTok y veo YouTube' y los juntamos en una y desarrollamos como la tabla de verdad de eso y aparte el o?*

*E1: ¿Cambia?*

*B: Es lo que no sé, es lo que de le decía que no sé si son las mismas, o sea si es lógicamente equivalente ponerlas así...*

Figura 6.4: *Parte 2, actividad 9. Estudiantes C y E.*



9. Usa una tabla de verdad para determinar el valor de verdad de los siguientes incisos:

(a) "Uso Instagram, o uso TikTok y veo YouTube". $\longrightarrow$ $p \vee (q \wedge w)$

| p | q | w | $p \vee (q \wedge w)$ | $q \wedge w$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | |

(b) "No uso Instagram, y uso Tiktok o uso Facebook".

$\neg p \wedge (q \vee w)$

(c) "No es cierto que no uso Instagram y uso TikTok, y uso Instagram o uso TikTok".

$(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$

(d) "Uso TikTok y, además, o no uso Instagram o uso TikTok".

$P \wedge (\neg Q \,\dot{\vee}\, P)$

$\vee \neg Q, \dot{\vee} P$

*E1: No sé...*

*B: Esa es una.*

*E1: ¿Cambiará?*

*B: Lo checamos y si no cambia pues ya da igual.*

*D: Entonces...*

*B: Asumamos que no cambia... si, hay que dejarlo así...asumiendo eso... lógicamente equivalente, entonces dejamos el y como un o, no?*

*D: Ok.*

Aunque no se había tratado aún el concepto de lógicamente equivalente, los participantes aparentemente ya lo tenían como conocimiento previo. Estos estudiantes no revisaron si eran lógicamente equivalentes, y más adelante en la misma actividad continuaron las dudas:

*B: Es que recuerda que de todos modos dijo que eran lógicamente equivalentes, ¿no?*

*D: Dijo... lo preguntó: ¿son equivalentes?*

*B: Si, no, no afirmo nada.*

*D: A ver, entonces... es que son dos Tiktoks.*

*B: Ah si, justo, tienes que ver que sucede, porque no puedes tener al mismo tiempo valor de verdad, verdadero y falso.*

*D: Si... ya me confundí.*

*B: Aquí mira 'No es cierto que no uso Instagram y uso TikTok, y uso Instagram o uso TikTok'...*

*D: Pero no entiendo.*

*B: Yo también ya me confundí más....esto es completo, entonces es Instagram y Tiktok, hay que hacer el valor de verdad.*

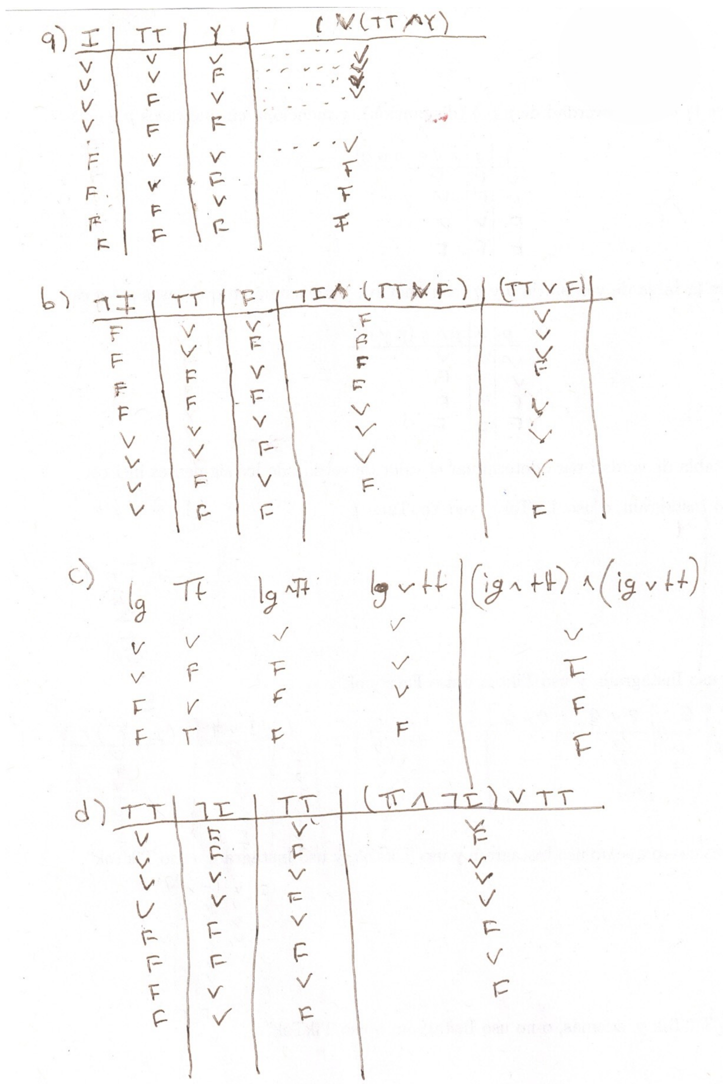
*D: No, ya me confundí...bueno ya lo voy a hacer así.*

Realizaron las tablas de verdad asumiendo que no cambiaba el resultado sin importar como agruparan las proposiciones, como se puede ver en la *Figura* 6.5.

Se entrevistó a uno de los participantes, cuestionando esta actividad para encontrar evidencia sobre la coordinación de este proceso, el participante declaró lo siguiente:

*E2: En este ejercicio ustedes tuvieron una duda sobre cómo agruparlos, y aunque E1 les dijo que tenían que verificar si eran lógicamente equivalentes, ustedes asumieron que sí eran equivalentes.*

Figura 6.5: *Parte 2, actividad 9. Estudiantes B y D.*



*D: ¿Ah sí? Estoy recordando.*

*E2: Hicieron las tablas de verdad pero asumiendo que eran equivalentes, es decir, como si "(Uso Instagram o uso TikTok) y veo YouTube" y "Uso Instagram o (uso TikTok y veo YouTube)" es lo mismo. ¿Cómo justificarías que son equivalentes?*

*D: No sé.*

*E2: ¿Tú qué crees?*

*D: No recuerdo mucho pero creo que no, porque...*

*E2: ¿Tú crees que "(Uso Instagram o uso TikTok) y veo YouTube" es diferente a "Uso Instagram o (uso TikTok y veo YouTube)", veámoslo con símbolos (se anotan las proposiciones con símbolos). ¿Tú crees que realizando las tablas de verdad serán equivalentes?*

*D: No me acuerdo, yo diría que... no, pero haré las tablas (realiza las tablas).*

*E2: Ahora que ya hiciste las tablas de verdad, podemos decir que...*

*D: No son equivalentes.*

*E2: ¿Entonces crees que el resultado cambiaría?*

*D: Sí.*

Aunque el participante realiza las tablas de verdad de las proposiciones compuestas, no hay suficiente evidencia de que se coordinan los Procesos de tablas de verdad y conectivos lógicos.

Por otra parte, cuatro de los participantes realizaron Acciones sobre proposiciones equivalentes e identificaron la equivalencia de proposiciones propuestas (Parte 3, actividad 1, 2 y 3). Los participantes B y D plantearon otra forma de ver las proposiciones:

*D: No puedo decirle que no…ah pero solamente es ver si son equivalentes, no?… 'Siempre haré lo que me pida mi hermanita'... ah ya entendí… si pero… si son equivalentes, no?… porque si siempre harás lo que diga la hermanita, no puede decirle que no.*

*B: Si, si, tienes razón...*

De forma similar los estudiantes E y C:

*E: 'p: No puedo decirle que no a mi hermanita si me pide algo…siempre haré* *lo que me pida mi hermanita'... pues si.*

*C: Si.*

*E: Porque si no puedo decirle que no entonces siempre le diré que si.*

Los otros dos participantes plantearon el enunciado tomando en cuenta el tiempo de la acción que se sugiere en la proposición de la actividad:

*F: 'No puedo decirle que no a mi hermanita si me pide algo. Siempre haré lo que me pida mi hermana.'... es diferente.*

*A: Pero si te pido es para que hagas algo.*

*F: No, porque dice... a ver... 'No puedo decirle que no a mi hermanita si me pide algo', pero puedo decirle que no sé, que al rato o después, y es diferente a 'Siempre haré lo que me pida mi hermanita'.*

*A: Ah, o sea, lo que tu dices es que puede haber más opciones? pero que no puede decir que 'no' solamente.*

*F: Entonces yo digo que no son equivalentes.*

Aunque concluyeron que esas frases no eran lógicamente equivalentes, cuando se entrevistó al sujeto A y se le cuestionó su respuesta dijo lo siguiente:

*E2: En esta actividad, ustedes decidieron que no son equivalentes estas dos proposiciones, si quieres leela y tomate tu tiempo para explicarme como tomaron esa decisión.*

*A: Ok... creo que si eran equivalentes pero no me acuerdo por qué habíamos dicho que no.*

*E2: ¿Entonces tú consideras ahorita que si son equivalentes?*

*A: Ahorita considero que si son equivalentes.*

*E2: ¿Por qué?*

*A: Porque la primera dice que 'No puedo decirle que no a mi hermanita si* *me pide algo' entonces si me pide cualquier cosa pues yo la voy a tener que hacer. Y la otra dice 'Siempre haré lo que me pida mi hermanita' entonces cualquier cosa que me pida la voy a tener que hacer. Entonces terminan siendo como el mismo resultado.*

Por lo que podemos concluir que se tiene el concepto de equivalencia como Acción. Además, todos los estudiantes involucrados realizaron tablas de verdad para probar la equivalencia de proposiciones compuestas, por lo que hay evidencia de que el concepto de lógicamente equivalente fue interiorizado como Proceso por los participantes.

Las y los estudiantes realizaron Acciones sobre las proposiciones compuestas para interiorizar la tautología y la contradicción (Parte 4, actividad 1, 2, 3 y 4). Los participantes B y D plantearon las proposiciones de las actividades desde otra perspectiva para asegurar su respuesta:

*D: 'Nadé en una alberca, pero no me mojé'.*

*B: Contradicción, ¿no? siempre te vas a mojar.*

*D: Si... 'Fui a la escuela y entré a todas las clases, pero jugué videojuegos en casa todo el día'... contradicción, no? porque si vas a la escuela y entras a todas las clases, ¿cómo vas a jugar en tu casa todo el día?.*

*B: Pero no dice que fuiste a la escuela todo el día.*

*D: Pero entonces aquí no puede jugar videojuegos todo el día en su habitación, en su casa.*

*B: Todo el día, ah si, contradicción...*

Al abordar el problema desde la segunda proposición 'pero jugué videojuegos en casa todo el día' nos muestra que el Proceso de la tautología y contradicción ha sido interiorizado.

## 6.2. Resultados de la implementación de la descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido

En la actividad 1 de la Parte 5, la mayoría de estudiantes identificaron la premisa y conclusión de las implicaciones que se les presentaron, sin embargo, en la contrucción de la tabla de verdad de la implicación los participantes C y E mostraron confusión.

*E: ¿Qué significa eso de "implica"?*

*C: Yo tenía la misma duda en cálculo... ¿no es lo mismo que siempre?, o sea, si es esto entonces da esto, ¿no?... ¿no?*

*E: No... ah, yo creo que sí, porque sería "entonces".*

*C: ¿No?*

*E: Ah, pues si.*

En la actividad 2, estos estudiantes tienen el concepto de la implicación material como si fuera la implicación como entendimiento común, como se muestra en su respuesta en la *Figura* 6.6.

Figura 6.6: *Parte 5, actividad 2. Estudiantes C y E.*

2. Construye la tabla de verdad de {p implica q} $p \to q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ (implicación) | |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | V | V |
| $V$ | $F$ | V | F |
| $F$ | $V$ | F | V |
| $F$ | $F$ | F | V |

Aunque consideraron únicamente el caso donde el antecedente es verdadero, cuando se entrevisto al sujeto E aparentemente se había interiorizado el Proceso de la implicación material.

*E2: ¿Cómo llegaron a esa tabla de la implicación?*

*E: No, está mal. Sí, está mal, porque solo es falso cuando P es verdadero que implica Q falso, eso es falso.*

*E2: ¿Quieres cambiar tu respuesta?*

*E: Sí, por favor.*

*E2: ¿Podrías poner un ejemplo?*

*E: Si está mojado entonces no llovió, puede ser falso porque puede haber otras cosas que hayan sido la razón por la que esté mojado.*

*E2: Entonces tú propones 'Si está mojado entonces no llovió'.*

*E: Ah, más bien es falso porque si está mojado entonces sí debió haber llovido.*

La mayor parte de los participantes determinaron los valores de verdad de la implicación con las proposiciones explícitas (Parte 5, actividad 3); no obstante, C y E, más que determinar un valor de verdad, analizaron si las proposiciones tenían relación o no, como se nota en la *Figura* 6.7.

Figura 6.7: *Parte 5, actividad 3. Estudiantes C y E.*

3. Determina el valor de verdad de los siguientes incisos:
   - Mi abuelita anda en bici $\to$ seré ganador del premio nobel.

     Es falsa, no hay relacion alguna

   - Si no estudio entonces reprobaré.

     Si hay relación

   - $(3 \in \emptyset \wedge A = \{1, 2\}) \to 3 \in A$

     Falso

Al entrevistar al sujeto E se hizo notar que el concepto de valor de verdad se esta vinculando con la existencia de una relación que determinan los sujetos. Al ser proposiciones explícitas, en apariencia el sujeto E asumió la implicación como entendimiento común, por lo que no hay evidencia que demuestre que se interiorizó el Proceso de la implicación material.

*E2: En este ejercicio ustedes estaban buscando una relación de las premisas. ¿Tú crees que el valor de verdad depende de la existencia de una relación?*

*E: Sí, no, porque si no tienen relación entonces no los puedo comparar.*

*E2: Ok, entonces aquí dice que debes determinar el valor de verdad de los siguientes incisos: "si no estudio entonces reprobaré".*

*E: Pues sí hay.*

*E2: ¿Pero este es un valor de verdad? (escribieron que sí hay relación)*

*E: Pues sí porque sí hay, ¿no?*

*E2: ¿Recuerdas qué es un valor de verdad?*

*E: Que es verdadero.*

*E2: ¿O?*

*E: Falso.*

*E2: Algo que puede ser verdadero o falso. Este ejercicio te pide que des el valor de verdad, ¿cuál es el valor de verdad de este inciso?*

*E: Verdadero.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Porque si no estudio entonces repruebo, ¿entonces sería falso falso verdadero?*

*E2: ¿Puedes anotarlo?*

*E: Sí (anota en las hojas).*

*E2: Y entonces ¿cuál es el valor de verdad?*

*E: Es verdadero.*

Por otro lado, cuando se cuestionó sobre el último inciso de esta actividad, C mencionó lo siguiente:

*E2: ¿Cómo llegaron a esta conclusión, que esto es falso?*

*C: ¿Este? ¿Que 3 pertenece al vacío?*

*E2: Ajá.*

*C: Falso, pero no me acuerdo cómo llegamos, ah me imagino porque en el conjunto A no está escrito el vacío.*

*E2: Ok, entonces tenemos una conclusión falsa, ¿hay forma de que la implicación sea verdadera si la conclusión es falsa?*

*C: Eh sí, según esto, sí. Que serían estas.*

*E2: Que uno es el caso donde la premisa es falsa, ¿no?*

*C: Sí.*

*E2: Entonces esto necesitaría ser falso.*

*C: Sí.*

*E2: ¿Y todo esto es falso?*

*C: Ah... ¿la primera? ¿Todo esto es falso? No, ¿o sí?*

*E2: ¿Por qué?*

*C: Porque nada más te están dando... ah no, aquí está el 'y', entonces deja que lo analice más. ¿Sería falso?*

*E2: ¿Por qué?*

*C: Porque el 3 no está en el vacío y A es el conjunto 1 y 2, entonces sería falso y verdadero.*

*E2: Dijiste que esto es falso, falso implica falso, ¿entonces eso es falso o verdadero?*

*C: Verdadero.*

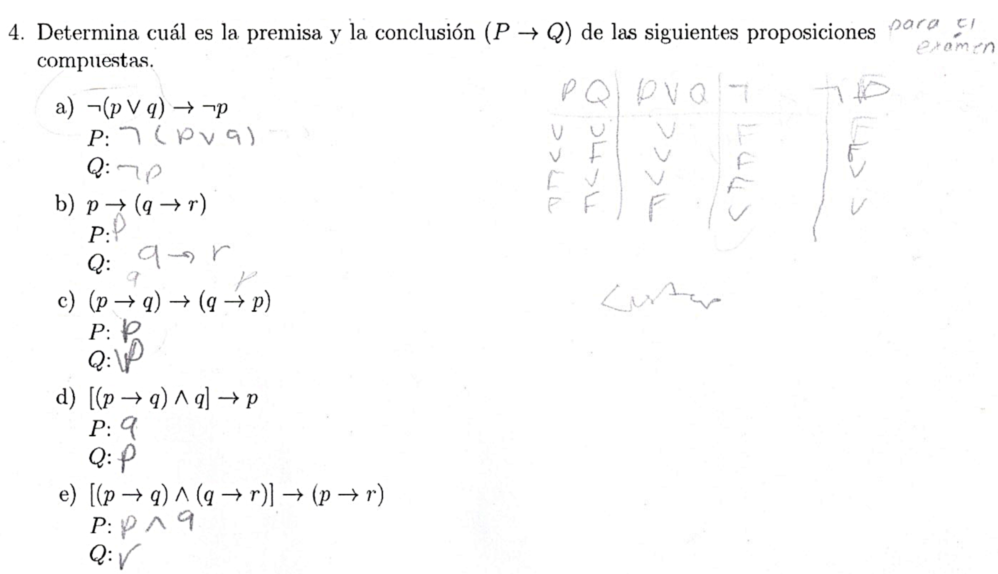
*E2: ¿Cambiarías la respuesta?*

*C: Sí.*

El participante C determina el valor de verdad de la implicación con las proposiciones explicitas, lo que demuestra que se interiorizó la implicación material.

En general, las y los estudiantes son capaces de reconocer y construir argumentos usando proposiciones compuestas, dando lugar a la interiorización de las implicaciones entre proposciones compuestas (Parte 6, actividad 1, 2, 3 y 4). No obstante, en la actividad 4 los participantes C y E identificaron como premisa y conclusión al primer y último elemento que se presentaba en la expresión, esto a pesar de que si consideraron la agrupación de las proposiones (como se nota en la *Figura* 6.8).

Figura 6.8: *Parte 6, actividad 4. Estudiantes C y E.*


4. Determina cuál es la premisa y la conclusión ($P \to Q$) de las siguientes proposiciones compuestas.

a) $\neg(p \vee q) \to \neg p$
$P$: ¬ (p ∨ q)
$Q$: ¬p

b) $p \to (q \to r)$
$P$: p
$Q$: q → r

c) $(p \to q) \to (q \to p)$
$P$: p
$Q$: p

d) $[(p \to q) \wedge q] \to p$
$P$: q
$Q$: p

e) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
$P$: p ∧ q
$Q$: r

Durante el proceso de aplicación, manifestaron lo siguiente

*E: Determina cuál es la premisa y la conclusión de las siguientes proposiciones compuestas... ah, la premisa es... p no q implica ¿no p?*

*C: Esta es o.*

*E: Ajá, pero cuando lo niegas este se convierte en y, y no q... si quieres hacemos las tablas de verdad.*

*C: No, es que ese es este... este es esto... ¿En qué se parece esto?*

*E: En nada, perdóname, pero podemos hacer las tablas de verdad... las hago rápido, a ver... (realiza tabla de verdad)*

*...*

*E: Por ejemplo de aquí...*

*C: p es p y q es todo esto, ¿no? porque está entre paréntesis, entonces primero tiene que ser esto, ya teniendo aquí la conclusión... ¿no?*

*E: Es que solo sería ver a qué lado está apuntando la flechita... Entonces aquí sería q y este sería p, ¿no?... porque el de p implica q pues me va a dar q, ¿no?*

*C: Pero nada más estamos viendo quién es la premisa y quién es la conclusión.*

*E: Ay pues es que vas a volver a poner lo que está aquí, y lo del otro lado de la flecha lo que está aquí...*

*C: Entonces, ¿cuál es la premisa y cuál es la conclusión?*

*E: p es la premisa, porque esto está implicando a esto, que a su vez esto está implicando a todo esto... La conclusión es p.*

*C: ¿No que q?*

*E: No... es p, yo digo que es p, es p.*

*C: ¿De las dos?*

*E: Sí... aquí sería q p... y aquí sería... p y q... y ya pues está r.*

Al ser ambiguo si interiorizaron el proceso, se realizó una entrevista a cada uno de los participantes.

*E2: En este ejercicio, ¿qué puedes decir sobre estos incisos? Lo que dice el ejercicio es que hay que determinar cuál es la premisa y la conclusión.*

*E: Pues esta es la premisa y esta es la conclusión (indica en la hoja las premisas y conclusiones de forma correcta).*

*E2: ¿Recuerdas cómo justificaron estas respuestas?*

*E: No tengo idea, ahora ya es obvio pero antes no.*

*E2: En este ejercicio, ¿qué puedes decir sobre estos incisos?*

*C: ¿Del d y el e, o de todos?*

*E2: Del c al e.*

*C: ¿Cómo?*

*E2: ¿Cuál es la premisa y la conclusión? Aquí por ejemplo, escribieron que P es la premisa y también la conclusión.*

*C: La premisa sería p implica q y la conclusión será q implica p, en la d sería todo el corchete y la conclusión sería p, y en la e igual la premisa sería todo el corchete y la conclusión sería p implica r.*

Esto muestra que coordinan la implicación con proposiciones simples y compuestas para llegar al nuevo proceso de implicación entre proposiciones compuestas ($P \to Q$), son capaces de reconocer y construir argumentos (premisas y conclusiones) usando proposiciones compuestas.

La mayor parte de los participantes coordinaron $P \to Q$ con las proposiciones equivalentes, esto para construir el Proceso en el que se comparan $P \to Q$ con proposiciones equivalentes usando tablas de verdad (Parte 7, actividad 1). Sin embargo, durante la actividad, el sujeto C mencionó no entender la tabla de implicación pero citó la tabla de verdad de implicación. Esto sugiere que tiene este concepto como Acción.

*E: p implica q, verdadero, falso, verdadero, verdadero… no sé porque. Negada pues sería, falso, verdadero, falso, falso; no q sería falso, verdadero, falso,* *verdadero; p o q negado*

*C: y...*

*E: y no q, sería falso, verdadero, falso, falso... a pues sí, siguiente. Es una tautología... aaaam, falso, falso, verdadero, verdadero; p y no p sería falso, falso, falso, falso; p y no p implica q, entonces es verdadero, verdadero, verdadero, verdadero... no es cierto, este implica este entonces es verdadero, este es verdadero también y aquí también... ah pues sí era así*

*C: ¿sí?*

*E: sí, esta tabla implica esta y solo es falsa cuando la primera verdad implica la segunda falsa... yo no entiendo esa tabla (implicación) así que me la voy a aprender.*

Todos los individuos compararon proposiciones por medio de tablas de verdad, determinaron cuales son tautologías y reconocieron la implicación como condicional lógicamente válido. Coordinaron la comparación de $P \to Q$ con tautología para dar lugar a $P \Rightarrow Q$ como Proceso (Parte 7, actividad 2, 3 y 4). Durante la aplicación, los participantes D y B tuvieron confusión sobre lo que era la implicación como condicional lógicamente válido.

*B: "Decimos que p implica lógicamente a q", ajá, a este sí no le entendí, otra vez.*

*D: No entiendo, de todas formas es implica, ¿no?*

*B: Pues sí, ya no entendí.*

*D: Es que no entendemos este.*

*E2: Decimos que $P$ implica lógicamente a $Q$ si $P \to Q$ es una tautología, y ¿una tautología es cuando...?*

*D: Todas son verdad.*

*E2: Entonces cuando la implicación siempre es verdad decimos que $P$ implica lógicamente a $Q$.*

*B: Ok.*

*E2: Y luego nos dice: De las implicaciones de los problemas 1 y 2, ¿cuáles implicaciones pueden ser sustituidas por implicaciones lógicas? Es decir, que la implicación siempre sea una tautología.*

*B: Ah, ok ya.*

*D: Ok, ya.*

*B: Ya, o sea, es este y este, los que siempre son verdad*

*D: Ah ya, sí sí sí*

*B: El 1c y el 2a*

Aunque para ellos no era claro a lo que se refería la oración de la actividad, después de analizarla lograron determinar las implicaciones lógicas. Por otro lado, los sujetos E y C mostraron indicios de interiorización del Proceso de $P \Rightarrow Q$, incluso hacen referencia a la diferencia de notación de la implicación material y la implicación lógicamente válida.

*E: "Decimos que P implica lógicamente a Q si es una tautología. De las implicaciones de los problemas 1 y 2, ¿cuáles implicaciones pueden ser sustituidas por implicaciones lógicas". P implica lógicamente a Q, o sea con doble raya, si P una raya Q es tautología.*

*C: O sea, todo es verdad.*

*E: Exacto, todo es verdad. De las implicaciones de estos problemas, ¿cuáles una raya pueden ser sustituidas por dos rayas. Ah, ok, pues ahora sí este que tú dices, el 1c.*

*C: ¿Y el 2a?*

*E: Sí, y ya.*

Para la Parte 8 (actividades 1 a 8) donde se busca fomentar el Proceso en el que se descubre que el entendimiento común de la implicación no es necesariamente $P \to Q$ —producto de la coordinación del entendimiento común de la implicación y la comparación de $P \to Q$ con proposiciones equivalentes— los participantes contestaron de formas variadas.

Por un lado, los sujetos A y F consideraron que solo cuando la conclusión es falsa la premisa debe ser falsa; en cualquier otro caso posible del valor de verdad de la premisa o conclusión, el valor que tome la otra parte de la implicación no importa. Esto podemos notarlo en las *Figuras* 6.9 y 6.10.

Durante la entrevista que se realizó, el individuo A no mostró evidencia de haber interiorizado este proceso.

*E2: ¿Te acuerdas cómo se define la tautología?*

*A: Cuando todo era verdadero.*

*E2: ¿Recuerdas este símbolo?*

*A: Implica.*

*E2: Sí, pero este símbolo te decía algo diferente.*

*A: No recuerdo.*

*E2: Lo podemos recordar, era esta parte (Parte 7 ejercicio 4).*

*A: Ah, ok.*

*E2: En esta primera pregunta ustedes dicen que no importa el valor de Q. Dice 'P es verdad y P implica lógicamente Q, es decir, es una tautología.¿Qué puedes decir del valor de Q?'.¿Te acuerdas cómo llegaron a esa conclusión?*

*A: Ay no.*

*E2:¿Qué criterio usaron para llegar a que no importa el valor de Q?*

*A: Yo creo que por lógica, bueno por nuestra lógica, pensamos que si P era una tautología y que cuando se implicaba que Q también tenía que ser verdad, pues no importa el valor de Q ya que terminaba siendo verdad, no sé si me explico, creo que llegamos a eso sin darle mucho ruedo.*

Figura 6.9: *Parte 8, actividades 1 a 5. Estudiantes A y F.*

1. Si $P$ es verdad (tautología) y $P \Rightarrow Q$ (es decir, $P \to Q$ es tautología), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

   que no importa el valor de Q, P ⇒ Q siempre sera verdadero

| P | Q | P ⇒ Q |
|---|---|---|
| V. | V | |
| ~~V~~ | ~~F~~ | |
| F | V | |
| F | F | |

2. Considera $P$: los ovíparos nacen de huevo y el huevo tiene yema, $Q$: los canarios son ovíparos y cuando eran huevo tenían yema. Considera que $P$ es cierto, y que $P \Rightarrow Q$. ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

   que. no importa el valor de Q siempre. P ⇒ Q sera verdadera.

3. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso (contradicción), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$? Justifica y da un ejemplo.

| P | Q | P ⇒ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | V |
| F | F | V. |

   Que no importa el valor de Q, siempre habra tautologia.

4. Si tenemos $P$: está lloviendo, $Q$: me mojé el cabello. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

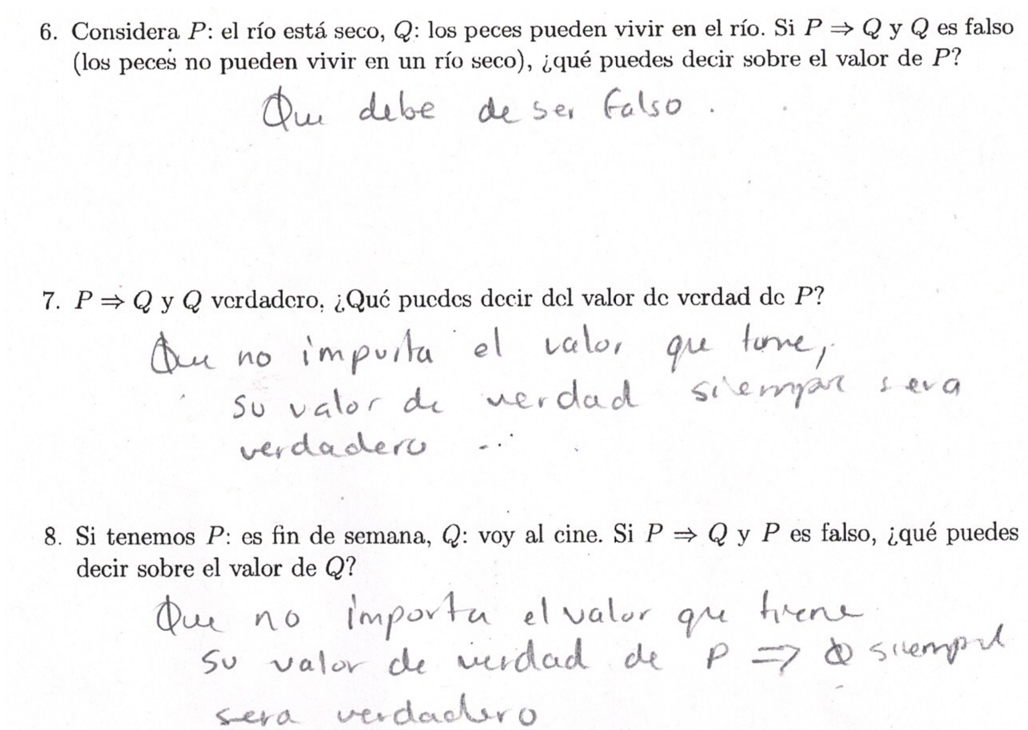
   Que no importa el valor de Q, siempre habra tautologia.

5. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso, ¿qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

   Que P tiene que ser falsa.

*E2: Y aquí hicieron una tablita donde tienen los valores de P y Q, y P implica Q, y de este lado quitaron el caso donde se hace falso, es decir...*

Figura 6.10: *Parte 8, actividades 6 a 8. Estudiantes A y F.*



6. Considera $P$: el río está seco, $Q$: los peces pueden vivir en el río. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso (los peces no pueden vivir en un río seco), ¿qué puedes decir sobre el valor de $P$?

Que debe de ser falso .

7. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ verdadero, ¿Qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

Que no importa el valor que tome, su valor de verdad siempre sera verdadero ...

8. Si tenemos $P$: es fin de semana, $Q$: voy al cine. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

Que no importa el valor que tiene su valor de verdad de $P \Rightarrow Q$ siempre sera verdadero

*A: Se quedaron solo los que son verdaderos porque la implicación lógica es una tautología.*

*E2: Ajá, viendo esa tablita, ¿qué casos tienes donde P es verdad?*

*A: Cuando es verdadero en...*

*E2: ¿Qué casos tienes donde P es verdad y tienes la implicación lógica?*

*A: Solo cuando... o sea solo cuando es verdad?*

*E2: Sí, porque aquí te da esta condición 'Si P es verdad'.*

*A: Nada más en dos.*

*E2: Pero dice que P implica lógicamente Q.*

*A: Entonces el caso dos no se toma en cuenta.*

*E2: Entonces ¿cuál es el caso que te queda donde $P$ es verdad y tienes una implicación lógica?*

*A: El primero.*

*E2: Sabiendo eso,¿qué puedes decir del valor de $Q$?*

*A: ¿De $P$?*

*E2: De $Q$... si $P$ es verdad ¿qué puedes decir del valor de $Q$?*

*A: Que también es verdad.*

*E2: ¿Cómo podrías describir la implicación lógica?*

*A: Mmm... ok... creo que la implicación lógica es... tiene que ver con las condiciones de $P$ y $Q$ para que se pueda cumplir cierta característica, en este caso es que sea una tautología.*

Este estudiante toma la implicación lógica como una condición que debe cumplir la implicación, y esta condición podría ser la tautología. Por lo que no hay evidencia de que el Proceso se haya interiorizado. Por otro lado, los participantes C y E en la mayoría de las actividades no reconocen la implicación lógica y los posibles valores de su premisa y conclusión según las condiciones dadas, como se puede apreciar en las *Figuras* 6.11 y 6.10. Aunque reconocen la implicación lógica por medio de su tabla de verdad, muestran confusión cuando se presentan proposiciones explicítas.

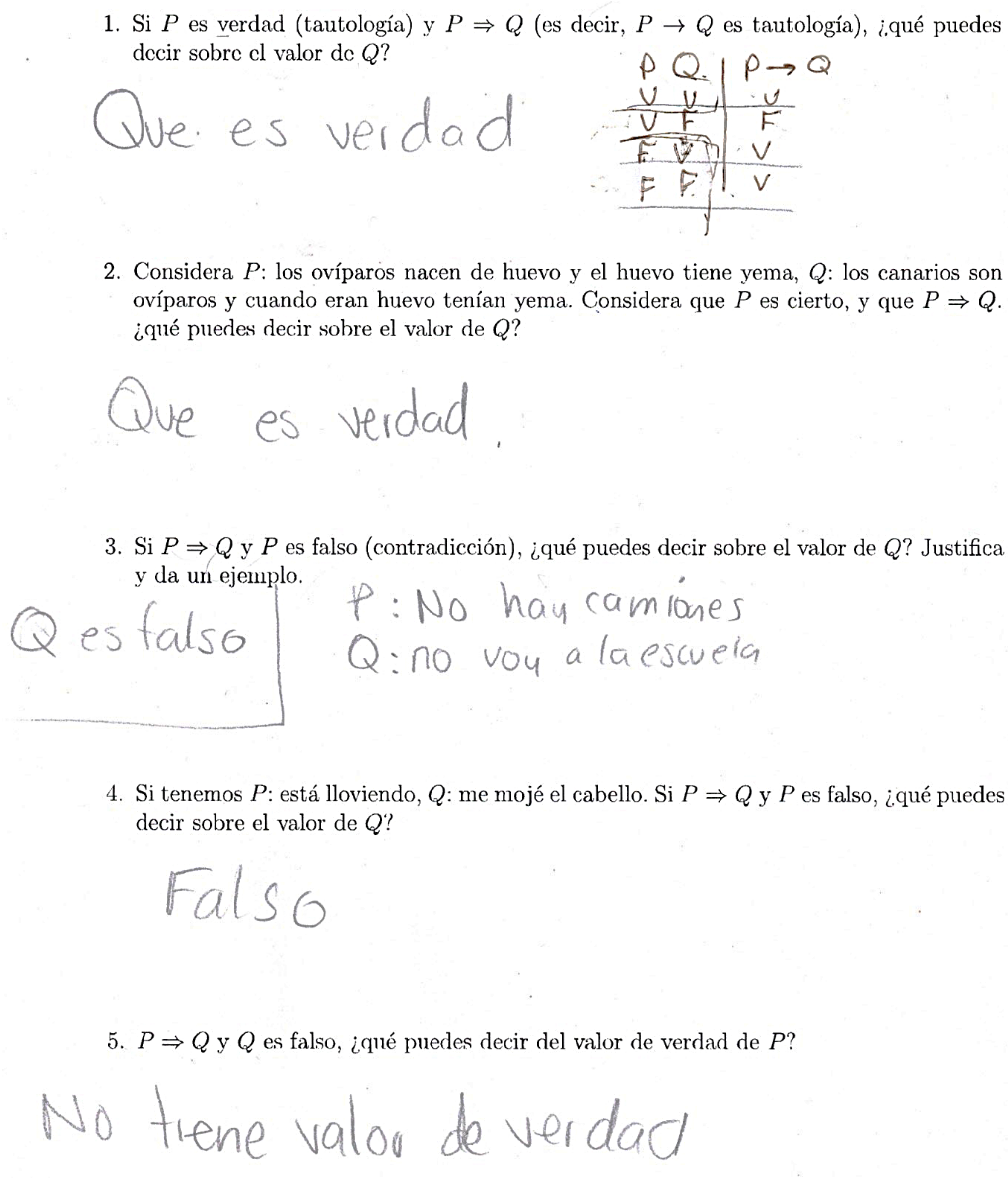
Durante la aplicación de la actividad 3 mencionaron que la implicación lógica debe tener los valores de verdad iguales. Es cierto que si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad la implicación será verdadera, sin embargo, no es el único caso.

*E: Si $P$ implica lógicamente a $Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?... Pues que también es falso.*

*C: ¿Cómo?*

*E: ¿Qué puedes decir sobre el valor de $Q$?... pues que $Q$ es falso también...*

Figura 6.11: *Parte 8, actividades 1 a 5. Estudiantes C y E.*



1. Si $P$ es verdad (tautología) y $P \Rightarrow Q$ (es decir, $P \rightarrow Q$ es tautología), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

Que es verdad

| P | Q | P → Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

2. Considera $P$: los ovíparos nacen de huevo y el huevo tiene yema, $Q$: los canarios son ovíparos y cuando eran huevo tenían yema. Considera que $P$ es cierto, y que $P \Rightarrow Q$. ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

Que es verdad.

3. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso (contradicción), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$? Justifica y da un ejemplo.

Q es falso

P: No hay camiones
Q: no voy a la escuela

4. Si tenemos $P$: está lloviendo, $Q$: me mojé el cabello. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

Falso

5. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso, ¿qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

No tiene valor de verdad

*C: No entiendo.*

*E: ¿De qué?*

Figura 6.12: *Parte 8, actividades 6 a 8. Estudiantes C y E.*

V F

6. Considera $P$: el río está seco, $Q$: los peces pueden vivir en el río. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso (los peces no pueden vivir en un río seco), ¿qué puedes decir sobre el valor de $P$?

Es falso

7. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ verdadero, ¿Qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

Es verdadero

8. Si tenemos $P$: es fin de semana, $Q$: voy al cine. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

No voy al cine

*C: De que sí es falso.*

*E: Ah, porque mira, igual las tablas de implica... implica lógicamente dice que tiene que ser todas iguales, entonces si P es falso pues Q también es falso. Porque incluso con cualquier valor que pueda tener P siempre va...*

*C: Si es falso falso es verdadero, ya le entendí.*

Para la actividad 4, aparentemente usan la implicación como entendimiento común o incluso como implicación material, donde si el antecedente es falso entonces la conclusión es falsa. Esto sugiere que no se ha interiorizado en un Proceso la tabla de verdad de la implicación como condicional lógicamente válido, ya que no la utilizan en su razonamiento.

*E: Si tenemos $P$: está lloviendo, $Q$: me mojé el cabello. Si $P$ implica lógicamente $Q$ y $P$ es falso, o sea, si no está lloviendo, pues no me mojé el cabello... ¿el valor de Q es?... falso.*

Para la actividad 5, no asignan un valor de verdad para $P$ si $Q$ es falsa. Consideran que si la conclusión es falsa, entonces la premisa no tiene un valor de verdad que cumpla con la condición de ser implicación lógica. Para la discusión que tuvieron en la actividad 6 se muestra de forma explícita la confusión sobre la implicación lógica.

*E: ¿Qué puedes decir sobre el valor de P?... Que no es verdad... pues porque no pueden vivir los peces en un río seco... y pues mira, si v implica f, pues es falso.*

*C: Pero si es falso, falso y falso.*

*E: No, Q es la que es falsa.*

*C: Por eso, y dices que P es falso.*

*E: No, en realidad P es verdad. Perdón, me equivoqué. Si P es falso y Q también es falso, ¿qué ocurre?*

*C: ¿Q?*

*E: Acabamos de decir que Q es verdadero.*

*C: No, no puede ser.*

*E: Porque si P es verdadero y Q es falso, entonces la implicación es falsa; pero como P es falso y Q es falso, entonces la implicación es verdadera.*

*C: Entonces, ¿por qué aquí sí?*

*E: Porque si P implica...*

*C: ¿Por qué aquí sí y aquí no?*

*E: Es que es diferente... por ejemplo, si no hay camiones, entonces no voy a la escuela.*

*C: Sí, pero aún así las dos son falsas, y aquí también las dos serían falsas.*

*E: No, aquí solo Q es falso.*

*C: Pero estás diciendo que P es falso.*

*E: No, te estóy preguntando el valor de P.*

De forma similar ocurre con la actividad 7 y la actividad 8, en esta última tentativamente se dan cuenta de que estan omitiendo la tabla de verdad e la implicación lógica.

*E: ¿Qué puedes decir sobre el valor de Q?... ¿Que no voy al cine?... Pues puede que vaya o no al cine.*

*C: ¿Puede?*

*E: Pues sí, mira, si P es falsa...*

*C: Pero estás viendo esa tabla que es con P implica Q con una línea... Y aquí es con dos.*

No había suficiente evidencia para afirmar si la implicación lógica esta como Acción o como Proceso en estos estudiantes, por lo que se realizó la entrevista a cada uno. Durante esta interacción, el sujeto E demuestra tener interiorizada la implicación como condicional lógicamente válido; por ejemplo, se refiere a la tabla de verdad para justificar sus respuestas.

*E2: ¿Recuerdas la implicación lógica?*

*E: La verdad no.*

*E2: Es cuando la implicación es una tautología, es decir, solo los casos donde es verdad. ¿Puedes escribir la tabla de verdad de la implicación lógica?*

*E: Sí.*

*E2: Si P es verdad, ¿qué podemos decir del valor de Q?*

*E: Que es verdad.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Porque solo hay un caso en el que siendo una implicación... en el que sea una tautología pueda ser verdad... porque si es una tautología no puede haber falso... entonces como solo hay una y solo puede ser verdad entonces es esa.*

*E2: Ok, en el 3, si tenemos la implicación lógica y P es falso, ¿qué podemos decir del valor del Q?*

*E: Que puede o no ser verdad.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Ay no sé por qué pusimos esa respuesta, está mal. Ah porque puede que sea verdad o no. 'Justifica y da un ejemplo'... ah pues como el de hace rato, el de si no entrego los trabajos puede que pase o no.*

*E2: Ok, en la 5 tenemos la implicación lógica pero Q es falso, ¿qué podemos decir del valor de verdad de P?*

*E: Que puede o no ser verdad.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Porque el valor de Q es falso, pues por la tabla.*

*E2: A ver.*

*E: Porque si es falsa solo tengo estos dos casos, y uno es falso y uno verdadero, y entonces...*

*E2: ¿Puede ser verdadero o falso?*

*E: Sí.*

*E2: Pero es una implicación lógica.*

*E: Entonces P es falso.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Porque si es una implicación lógica solo hay valores de verdad.*

*E2: Aquí ustedes dijeron que no tiene un valor de verdad, ¿recuerdas por qué pusieron esa respuesta?*

*E: No, es que ahora ya es muy obvio.*

*E2: Este es muy similar, P implica lógicamente a Q y Q es verdadero, ¿qué podemos decir de P?*

*E: Que puede o no ser verdad. Y yo puse que era verdadero siempre.*

*E2: ¿Crees que podrías dar un ejemplo sobre esto?*

*E: ¿Cómo iba?... mmm... si como verduras... no no no... si como bien tendré buen peso, pero puede que no coma bien y haga ejercicio y también pueda tener buen peso. Entonces si como bien bajo de peso y si no como bien entonces también bajo de peso...*

Por otro lado, durante la entrevista el participante C también refleja la interiorización de la implicación lógica. Al referirse a los valores de verdad que pueden tomar la premisa y conclusión según las condiciones dadas, muestra la interiorización de esta implicación.

*E2: ¿Recuerdas la tautología?*

*C: Que toda la tabla es verdadera, ¿no?*

*E2: ¿Y las implicaciones lógicas?*

*C: No.*

*E2: Decimos que P implica lógicamente a Q cuando P implica a Q es una tautología.*

*C: Ok.*

*E2: Entonces aquí tenemos la implicación lógica, si P es verdad, ¿qué puedo decir del valor de verdad de Q?*

*C: Si P es verdad, ¿qué puedo decir del valor de verdad de Q? Pues que puede ser verdadero o falso.*

*E2: ¿Por qué?*

*C: No es cierto, porque aquí no, verdad.*

*E2: Ajá.*

*C: ¿Qué puedo decir de Q... que depende de la premisa?*

*E2: Pero la premisa es verdad.*

*C: Ah, nada más los casos en los que la premisa sea verdad... que Q debe ser verdad.*

*E2: Ok, y si tenemos la implicación lógica y P es falso?*

*C: Aquí sí Q puede ser verdadero o falso.*

*E2: Aquí argumentaron que Q es falso.*

*C: Solo tomamos en cuenta un caso.*

*E2: Si P implica lógicamente a Q y Q es falso?*

*C: ¿Qué puedo decir del valor de P? Que tiene que ser falso.*

*E2: ¿Por qué?*

*C: Porque... cuando Q es falso y P es verdadero la implicación es falsa, ¿no? Entonces no sería la tautología.*

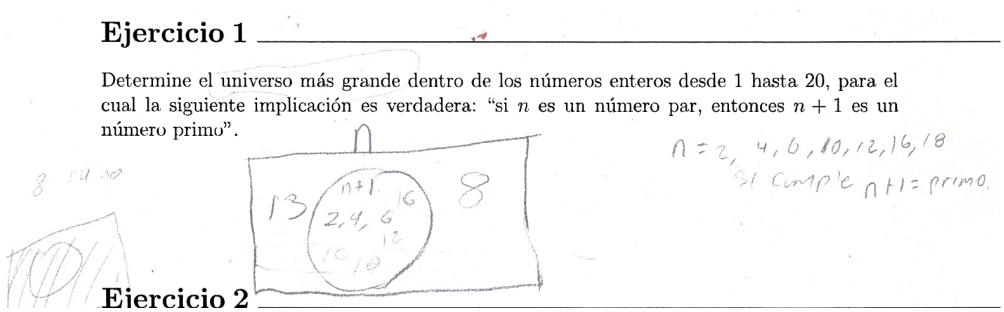
*E2: Ok.*

Aunque durante la actividad no tenían interiorizada la implicación como condicional lógicamente válido, durante la entrevista se presentó evidencia de que ya estaba interiorizada. El último equipo, D y B, realizaron la actividad sin presentar dudas durante la aplicación, identificaron los valores que podrían tomar la premisa y conclusión de las implicaciones según la actividad que se les presentaba, esto refleja que interiorizaron este Proceso.

## 6.3. Resultados a las preguntas de evaluación: el problema de los números primos y el problema del laberinto

Se aplicaron los ejercicios que propone Durand-Guerrier (2003) antes de la primera sesión y después de la segunda sesión. En la primera aplicación del ejercicio de los numeros primos, cuatro de seis participantes (A, C, E, D) lo abordaron desde la implicación como entendimiento común, contemplando solo los casos donde la premisa y conclusión son verdaderas, como se muestra en la *Figura* 6.13. Mientras que el resto de las respuestas no fueron claras.

Figura 6.13: *Ejercicio de números primos, primera aplicación. Estudiante C.*



**Ejercicio 1**

Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera: "si $n$ es un número par, entonces $n+1$ es un número primo".

n = 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18
si cumple n+1 = primo

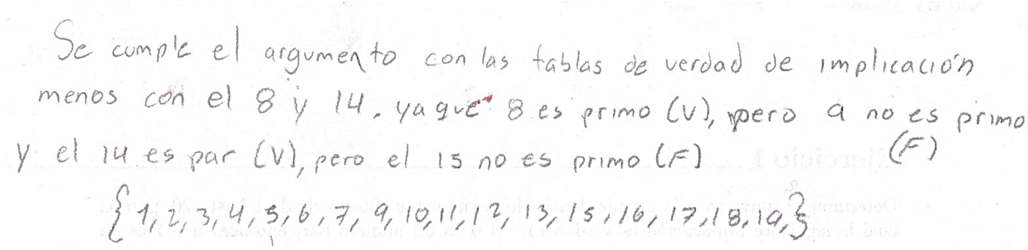
**Ejercicio 2**

En la segunda aplicación, el sujeto A contempla el caso donde la premisa y la conclusión son falsas; el participante C contesta el problema desde la implicación como condicional lógicamente válido, como se puede observar en la *Figura* 6.14. El sujeto E no muestra una anotación clara, sin embargo, en la entrevista da solución al problema tomando la implicación material como herramienta inicial.

*E2: Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera: "si $n$ es un número par, entonces $n+1$ es un número primo". ¿Podrías decirme cuál fue el criterio con el que justificas tu respuesta?*

*E: No sé qué respondí (lee su respuesta), recuerdo que se cumple para todos menos para el 8, entonces también que $x$ esté entre el 8 y menor o igual al 20, y también quitando al 14. Recuerdo que el 8 y el 14 no eran números que*

Figura 6.14: *Ejercicio de números primos, segunda aplicación. Estudiante C.*


Se cumple el argumento con las tablas de verdad de implicación menos con el 8 y 14, ya que 8 es primo (V), pero 9 no es primo (F) y el 14 es par (V), pero el 15 no es primo (F)

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19,}

*cumplían esto.*

*E2: ¿Por qué?*

*E: Porque todos los números pares, si les sumabas 1, tenía que darte un número primo. Pero el 8, cuando le sumas 1, no te da un número primo, ni el 14.*

*E2: ¿y el 1 por qué sí?*

*E: Porque si le sumo uno es primo.*

*E2: Pero el 1 no es par.*

*E: Ah, es cierto... ya me acordé.*

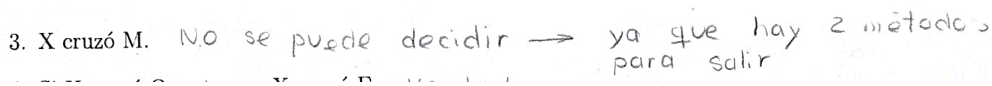
*E2: ¿Por qué el 1 sí entra?*

*E: Porque el 1 es falso, no es par, pero el 2 es primo, es verdadero, entonces es verdadero... sí, sí.*

Por otro lado, en esta segunda aplicación, B y D parecen contestarla desde el entendimiento común; pero al entrevistarlos, el sujeto D contesta el problema usando la implicación lógica. Finalmente la respuesta de el participante F no es clara.

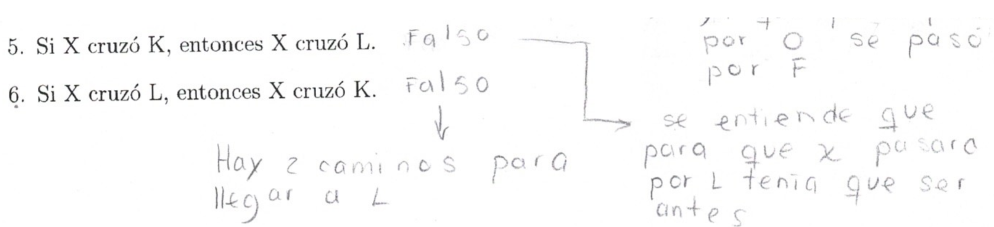
En la primera aplicación del ejercicio del laberinto todos los participantes contestaron que la proposicón uno es verdadera y la proposición dos es falsa. La tercera proposicíon la dieron por verdadera los participantes F, C, E y B. A y C determinaron que no se podía decidir su valor de verdad, reconocieron que hay más de un camino, como se muestra en la *Figura* 6.15; esta misma caracteristica la plantea el participante F, aunque determina que la proposición es verdadera.

Figura 6.15: *Ejercicio del laberinto, primera aplicación, proposición tres. Estudiante A.*


3. X cruzó M. No se puede decidir → ya que hay 2 métodos para salir

La cuarta proposición fue escrita como verdadera por todos los participantes. La quinta tuvo diversas respuestas: el participante F respondió que es verdadera; A, C y E respondieron que es falsa. La respuesta del sujeto A se encuentra en la *Figura* 6.16. B y D contestaron que no se podría decidir su valor de verdad.

Figura 6.16: *Ejercicio del laberinto, primera aplicación, proposición cinco. Estudiante A.*


5. Si X cruzó K, entonces X cruzó L. Falso → se entiende que para que x pasara por L tenía que ser antes

por O se pasó por F

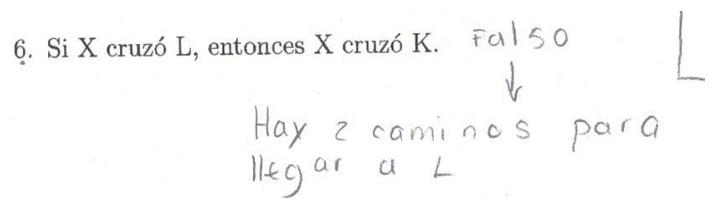
6. Si X cruzó L, entonces X cruzó K. Falso → Hay 2 caminos para llegar a L

Para la sexta proposición, el sujeto C respondió que es verdadera. A, F y D que es falsa, A y F dieron esta respuesta porque reconocieron que hay más caminos, como se muestra en la *Figura* 6.17. E y B determinaron que no se podía decir su valor de verdad, el participante B respondío que no siempre es verdadera, por lo que se considera que analizó la existencia de más casos.

En la segunda aplicación del ejercicio del laberinto casi todos los participantes contestaron que la proposición uno es verdadera y la proposición dos es falsa; excepto el sujeto F, que contemplo que no se le podía asignar valor de verdad ya que hay varios caminos. La tercera proposición fue determinada como verdadera por C, E y F, mientras que fue determinada sin valor de verdad por A, B y D. El individuo A contempló que había más de un camino.

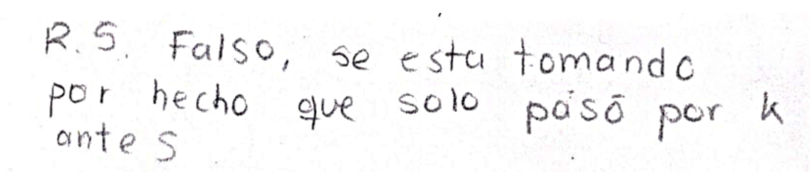
Todos los participantes contestaron que la proposicón cuatro es verdadera. La quita proposición fue considerada como verdadera por casi todos los par-

Figura 6.17: *Ejercicio del laberinto, primera aplicación proposición seis. Estudiante A.*



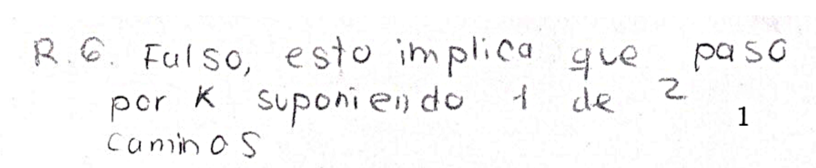

ticipantes, el participante A la catalogó como falsa debido a que se se toma como por hecho el enunciado pero no es necesariamente cierto, su respuesta esta en la *Figura* 6.18.

Figura 6.18: *Ejercicio del laberinto, segunda aplicación proposición cinco. Estudiante A.*




La última proposición fue respondida como falsa por A, F y C; el sujeto A toma en cuenta que hay más de un camino para llegar, esto lo podemos ver en la *Figura* 6.19. El participante E la consideró verdadera, y B y D respondieron que es indecidible.

Figura 6.19: *Ejercicio del laberinto, segunda aplicación proposición seis. Estudiante A.*



# Capítulo 7

# Discusión

En este capítulo se analizan y reflexionan los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, en particular de la descomposición genética de la tautología, de la implicación como condicional lógicamente válido y de los problemas de evaluación. A través de este análisis se buscan identificar las consecuencias de los hallazgos; además, se comparan los resultados con las perspectivas teóricas existentes.

## 7.1. Discusión sobre la descomposición genética de tautología

El referente principal que tomamos para el concepto de tautología es el trabajo de Noriega-Márquez, 2017. Aunque en su investigación no destaca la tautología con relevancia específica, sí la menciona como un concepto que merece ser abordado en el marco de la descomposición genética que propone. Su trabajo se enfoca en la construcción del concepto de tablas de verdad y reconoce la importancia de la lógica para la comprensión de las demostraciones matemáticas. En este sentido, nuestra investigación introduce una perspectiva novedosa al enfatizar la lógica, pero desde el enfoque de Quine, 1962.

Esta orientación permite darle un papel central a la tautología. En particular, consideramos que la tautología es esencial en la formación de los conceptos de la implicación lógicamente válida y la implicación como condicional generalizado, los cuales son fundamentales en la lógica matemática y sirven como base para la construcción de las demostraciones matemáticas. La descomposición genética propuesta en este trabajo para abordar la tautología resultó en hallazgos positivos significativos que se mencionan a continuación.

Las y los estudiantes interiorizaron el concepto de proposiciones y tablas de verdad, pero cuando se buscó dar lugar al Proceso de las tablas de verdad de cada conectivo lógico (Parte 2, actividades 6, 7 y 8) las y los estudiantes respondieron las actividades haciendo uso de sus conocimientos previos y no de la construcción de este concepto desde las actividades que se presentaron. Será importante tomar en cuenta estas observaciones al rediseñar las actividades, se pueden integrar más explícitamente los conceptos y guiar a las y los estudiantes a través de un proceso de reflexión que les permita construir el concepto de tablas de verdad de manera más profunda.

Construyeron con el concepto de equivalencia lógica y lograron construir el concepto de tautología y contradicción y, además, pudieron abordarlo desde una perspectiva diferente, ampliando su comprensión. Esto sugiere que nuestra propuesta de DG no solo ayuda a la construcción del concepto de tautología, sino que también ofrece a los estudiantes una oportunidad para analizar y entender la lógica desde una estructura conceptual más amplia.

Dados estos resultados, destacamos la importancia de la tautología como un concepto fundamental que, aunque frecuentemente se da por entendido, requiere una atención detallada en la formación de las y los estudiantes. Sin una comprensión clara de este concepto, la implicación como condicional lógicamente válido no podría ser explicada de manera efectiva, ya que depende de él para establecer relaciones entre proposiciones y evaluar su validez. En este contexto, la implementación de la descomposición genética de la tautología ha permitido que las y los estudiantes logren interiorizar dicho concepto.

## 7.2. Discusión sobre la descomposición genética de la implicación como condicional lógicamente válido

Al diseñar la DG que proponemos y las actividades correspondientes se tomó en cuenta que Durand-Guerrier (2003) ya reconocía y resaltaba la importancia de diferenciar las implicaciones, pues menciona:

> En Francia, los profesores a menudo no distinguen claramente entre un condicional como un conector proposicional, condicionales generalizados, y condicionales lógicamente válidos. Sin embargo, los tres conceptos son útiles en matemáticas, siendo el tercero el que corresponde a las reglas de inferencia clásicas (p. 9).

Esta observación subraya un problema recurrente en la enseñanza de la lógica: la dificultad de distinguir entre las diversas formas de implicación, que son fundamentales en el pensamiento matemático y en la construcción de argumentos rigurosos. Reconocer esta diferenciación es crucial, ya que la claridad en estas distinciones es clave no solo para la resolución de problemas, sino también para una comprensión más profunda de la estructura de las demostraciones matemáticas.

Por otro lado, refiriendose al concepto de implicación, García-Martínez y Parraguez (2018) mencionan que al momento de su investigación "En Matemática Educativa, no se han reportado investigaciones sobre la construcción de este concepto desde la teoría APOE" (p. 350). En dicho trabajo, las autoras presentan una DG de la implicación en dos vertientes: como entendimiento común y como condicional generalizado. Sin embargo, no se ha documentado una DG que aborde la implicación material y la implicación lógicamente válida, lo que abre una brecha en la literatura que nuestra investigación busca comenzar a cubrir.

En consecuencia, la DG que proponemos tiene como objetivo guiar a los estudiantes en la interiorización de los conceptos de implicación material y condicional lógicamente válido. Los ejercicios que diseñamos fueron pensados para facilitar la construcción de ambos tipos de implicación y también para ayudar a los estudiantes a diferenciarlos entre sí. Para ejemplificar este

Proceso, en la siguiente actividad se trabajó la diferencia entre la implicación como entendimiento común y como condicional lógicamente válido:

> Considera $P$ : los ovíparos nacen de huevo y el huevo tiene yema, $Q$: los canarios son ovíparos y cuando eran huevo tenían yema. Considera que $P$ es cierto, y que $P \Rightarrow Q$, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

Esta actividad se utilizó durante la discusión en clase. A partir de una premisa verdadera, el estudiante podría tender a interpretar la implicación de acuerdo con el entendimiento común en lugar de una implicación lógica, lo cual se busca corregir mediante el análisis del ejercicio. Además, se diseñaron otros ejercicios para contrastar el entendimiento común con la implicación material, y la implicación material con la implicación lógicamente válida, con el fin de reforzar las distinciones que resultan críticas para el desarrollo del razonamiento lógico.

Los resultados obtenidos de la aplicación de estas actividades fueron mayormente favorables. Aunque algunos participantes expresaron dudas respecto a sus respuestas durante las actividades, en las entrevistas la mayoría de ellos demostró evidencia de haber interiorizado el concepto de implicación en sus diversas formas. Esta interiorización sugiere que los estudiantes fueron capaces de diferenciar entre los tipos de implicación y aplicar estos conceptos de manera adecuada en la resolución de problemas lógicos.

A partir de estos resultados, podríamos considerar ajustar la introducción del concepto de implicación como condicional lógicamente válido o, alternativamente, incluir ejercicios previos que faciliten la coordinación de los conceptos de implicación como entendimiento común y como condicional lógico. Por ejemplo, actividades que permitan a los estudiantes identificar cómo la interpretación cotidiana, o como entendimiento común, de las implicaciones difiere de las reglas formales, con el fin de fortalecer su capacidad para distinguir situaciones en las que es necesario aplicar una implicación lógica.

En suma, la propuesta de esta DG junto con la implementación de las actividades y los resultados obtenidos, representan una innovación significativa frente a la necesidad de abordar el concepto de implicación desde la teoría APOE, una problemática que ya ha sido destacada por otros autores. Esta investigación no solo contribuye a una comprensión más sólida de la lógica en el contexto de la educación matemática, sino que también abre nuevas oportunidades para futuras investigaciones en el campo, orientadas a mejorar la enseñanza y aprendizaje de conceptos lógicos.

Algo importante a destacar es que en nuestra descomposición genética empleamos el entendimiento común como Proceso, elemento que difiere del enfoque ya propuesto por García-Martínez y Parraguez, 2018. En la DG de las autoras, la descripción del concepto de entendimiento común presenta ciertos elementos ambigüos, lo cual dificulta su interpretación y aplicación. En nuestro caso, tomamos este concepto en el sentido que lo describe Quine, 1962, lo que nos permite profundizar en el análisis de comprensión de la implicación.

Al adoptar esta perspectiva de Quine, buscamos proporcionar una base más sólida y explícita sobre la cual los estudiantes puedan construir su comprensión de la implicación. Esto no sólo permite una mejor diferenciación entre el entendimiento común y el resto de los tipos de implicación, sino que también facilita la transición de los estudiantes desde una interpretación intuitiva hacia una comprensión formal y rigurosa de la lógica matemática.

## 7.3. Discusión sobre los problemas de evaluación

Cuando Durand-Guerrier, 2003 aplicó el problema de los números primos obtuvo los siguientes datos como resultado de la aplicación y discusión con los estudiantes:

> Todos, excepto tres estudiantes, respondieron que los enteros eran 2, 4, 6, 10, 12, 16 y 18. Los otros tres también dieron los números impares del 1 al 19, lo cual es correcto, dado que una implicación es verdadera cuando el antecedente es falso. Los demás estudiantes no estaban convencidos de que los números impares satisfacieran la propiedad: argumentaron que los números impares no están involucrados en la declaración, o que para los números impares la declaración no es ni verdadera ni falsa (p. 7; traducción propia).

En nuestra primera aplicación de este problema, las y los estudiantes no habían realizado ningúna de las actividades que proponemos. En esa ocasión, cuatro de seis estudiantes abordaron el problema desde el entendimiento común, mientras que las respuestas de los dos restantes no fueron claras, lo que coincide en parte con los resultados obtenidos por Durand (2003). Sin embargo, al repetir el ejercicio después de realizar las actividades diseñadas, observamos un cambio significativo: cuatro de los seis participantes respondieron desde la perspectiva de la implicación como condicional generalizado, uno desde la implicación material y otro continuó sin ser claro en su respuesta.

Por otro lado, tenemos el problema del laberinto. Este ejercicio fue previamente aplicado por profesores de matemáticas según A.P.M.E.P., 1992, quienes reportaron que la mayoría de los estudiantes (60 %) respondieron "no se puede determinar" al analizar la sexta oración; y que algunos profesores consideraron que esta respuesta era incorrecta. Sin embargo, los autores realizaron este problema desde la implicación como condicional generalizado.

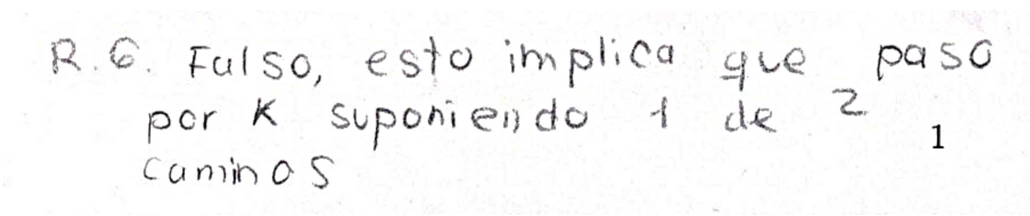
Cuando presentamos el ejercicio del laberinto a nuestros participantes, solo dos de ellos consideraron que no se podía determinar el valor de verdad, mientras que los otros cuatro asignaron un valor de verdad a la oración. En la segunda aplicación del problema, las respuestas fueron similares, aunque provinieron de diferentes participantes. Este cambio sugiere que algunos estudiantes reconsideraron su interpretación tras haber reflexionado sobre las actividades realizadas previamente.

Ambos problemas están planteados desde la implicación como condicional generalizado, y aunque no fue el enfoque principal de nuestra investigación, en el caso del problema de los números primos, los estudiantes lograron identificar que el valor de verdad depende del número elegido para evaluar la oración. Si bien nuestro objetivo era trabajar desde la implicación lógicamente válida, en este caso los estudiantes emplearon un razonamiento cercano al condicional generalizado.

En el problema del laberinto, durante la segunda aplicación, encontramos respuestas como la del estudiante A, mostrada en la *Figura* 7.1, quien asignó un valor de verdad bajo la suposición que $X$ pasó por uno de dos caminos, aparentemente considerando que el valor de verdad depende del camino tomado.

Estos resultados evidencian que incluso sin un acercamiento explícito, al-

Figura 7.1: *Respuesta de la segunda aplicación del ejercicio del laberinto.*




gunos participantes lograron interpretar los problemas desde la implicación como condicional generalizado. Esto subraya las diferencias significativas que emergen al abordar estos problemas desde la teoría APOE. Además, los cambios observados en las respuestas entre la primera y segunda aplicación muestran que las actividades propuestas tienen un impacto en la interiorización de los conceptos relacionados con la implicación lógica.

En lo que refiere al entendimiento común este se dio como parte del conocimiento previo durante la construcción de la implicación como condicional lógicamente válido. Para la implicación material ($P \to Q$), las y los respondieron utilizando conocimientos previos en lugar de seguir el diseño de las actividades. Sin embargo, al resolver problemas más avanzados demostraron haber consolidado la implicación material al aplicarla correctamente en contextos nuevos.

Para la implicación como condicional lógicamente válido ($P \Rightarrow Q$), durante los ejercicios de análisis argumental en contexto, la mayoría de los participantes lograron aplicarlo, indicando que la comprensión se dio en un momento más avanzado del proceso. Finalmente, para la implicación como condicional generalizado ($\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$), aunque las y los estudiantes no tuvieron un acercamiento directo con este tipo, al enfrentarse a problemas como el problema de los números primos o el del laberinto, la mayoría de ellos demostraron haber interiorizado esta idea al analizar cómo los valores de verdad dependían de todos los caminos posibles en el problema planteado.

Los resultados muestran que las y los estudiantes lograron construir los conceptos de implicación en distintos momentos, dependiendo del tipo y la complejidad de las actividades. Aunque algunos conceptos no se construyeron en las actividades inicialmente diseñadas, estas funcionaron como base para una comprensión más profunda en ejercicios posteriores. Esto destaca la importancia de una planificación didáctica bien estructurada y de la flexibilidad en el diseño de actividades para atender las necesidades emergentes de aprendizaje.

# Capítulo 8

# Conclusiones

Al llevar a cabo las descomposiciones genéticas que proponemos, nos basamos en las ideas planteadas por Quine(1962) y en la experiencia de profesores-investigadores. Identificamos que las estructuras y mecanismos mentales asociados al concepto de implicación como condicional lógicamente válido incluyen, como conocimientos previos, los siguientes conceptos: las proposiciones simples, los conectivos lógicos, las proposiciones compuestas, las proposiciones equivalentes, la tautología, y la implicación como entendimiento común. Todas estas estructuras mentales fueron planteadas como Proceso.

En la construcción del concepto, se desarrollan la implicación material, la implicación entre proposiciones compuestas, y la implicación como condicional lógicamente válido, y las diferencias entre estos tres tipos de implicaciones. Este enfoque permite a las y los estudiantes avanzar desde un entendimiento cotidiano hasta una comprensión más formal. Los mecanismos mentales involucrados en este Proceso incluyen la interiorización y la coordinación.

Tal como se describe en detalle en el capítulo 5, estas estructuras y mecanismos emergen en momentos específicos de las actividades diseñadas, esto muestra la utilidad de la descomposición genética como método de análisis para identificar dificultades y diseñar estrategias pedagógicas más efectivas en la comprensión de un concepto matemático.

Como parte de esta investigación, las y los estudiantes lograron interiorizar y construir el concepto de implicación en sus diversas formas, especialmente la implicación material y la implicación como condicional lógicamente válido. Pudieron construir y diferenciar entre tres tipos clave de implicación, la implicación como entendimiento común, la implicación material y la implicación como condicional lógicamente válido; este último fue interiorizado, lo que permitió a los estudiantes aplicar razonamientos lógicos y formular inferencias correctas, alineándose con las reglas de inferencia como Modus Ponens y Modus Tollens.

La descomposición genética propuesta resultó ser eficaz para ayudar a los estudiantes a comprender y diferenciar entre los tipos de implicación. Los ejercicios diseñados contribuyeron a que los estudiantes reflexionaran sobre las diferencias entre estas formas de implicación, lo cual fue crucial para su aprendizaje. Los resultados obtenidos sugieren que la metodología empleada facilitó la construcción de la implicación lógica.

También brindó a los estudiantes la oportunidad de abordar la lógica desde una estructura conceptual más amplia, que incluyó la tautología, la contradicción y las proposiciones equivalentes. Esta expansión del concepto permitió comprender la lógica de manera más profunda y abstracta; en consecuencia, se tiene evidencia de que la mayoría construyó bases para la implicación como condicional generalizado.

La teoría APOE favorece la construcción de la implicación al promover la interacción activa de los estudiantes con el concepto, guiándolos en el desarrollo de procesos de razonamiento. Este enfoque permite una comprensión más profunda y completa de la implicación lógica, haciendo que los estudiantes no solo apliquen reglas formales, sino que también internalicen las relaciones lógicas subyacentes.

Existe una área de oportunidad en la parte de la descomposición genética donde se busca coordinar el Proceso de tablas de verdad con el de los conectivos lógicos con el fin de dar lugar al Proceso de las tablas de verdad de cada conectivo lógico (Parte 2, actividades 6 a 8), pues las y los estudiantes respondieron los ejercicios basándose en sus conocimientos previos, en lugar de construir el concepto a partir de los problemas presentados.

Algunos estudiantes expresaron dudas o confusión durante la ejecución en la última parte de las actividades en clase, lo cual indica que la introducción del concepto de implicación como condicional lógicamente válido aún presenta dificultades. Esto subraya la necesidad de ajustar la metodología en torno a la introducción de este concepto, como incluir ejercicios previos que ayuden a coordinar los conceptos de implicación según el entendimiento común y la lógica formal.

A pesar de que los problemas utilizados para evaluar la construcción de la implicación, el de los números primos y el laberinto, no son necesariamente los más adecuados para los objetivos específicos de esta ICR, pues de cierta manera abordan a la implicación como condicional generalizado; las bases que los estudiantes desarrollaron durante su resolución proporcionan un inicio valioso para las respuestas que buscamos.

En particular, los estudiantes mostraron una capacidad incipiente para trabajar con proposiciones y conectivos lógicos al intentar resolver estos problemas, lo que demuestra que comenzaron a familiarizarse con el tipo de razonamiento que involucra la implicación, aunque en un contexto más informal. Los problemas que elegimos para la evaluación ofrecen una base inicial que ayudará a identificar y construir sobre los conceptos clave relacionados con la implicación generalizada.

Como trabajo futuro, se propone refinar las descomposiciones genéticas propuestas en esta investigación. Se tomarán en cuenta los aspectos identificados que pueden ser mejorados para rediseñar las DG, los cuales siempre son susceptibles de mejora. Tanto las actividades como los recursos pueden ajustarse con el fin de facilitar una construcción más efectiva de los conceptos de implicación lógica.

Asimismo, se propone el desarrollo de la construcción de los conceptos de cuantificadores y predicados, lo cual permitirá avanzar hacia un estudio más profundo sobre la construcción de la implicación generalizada. Esta etapa es fundamental, ya que proporcionará a las y los estudiantes las herramientas necesarias para abordar implicaciones que involucren relaciones entre elementos de conjuntos y funciones. La incorporación de cuantificadores y predicados será clave para expandir su capacidad de razonamiento lógico y sentar las bases para un entendimiento formal y riguroso de la implicación generalizada.

Finalmente, conviene señalar algunas consideraciones prácticas relacionadas con la implementación de las descomposiciones genéticas propuestas. Las actividades fueron aplicadas a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma Metropolitana; por lo tanto, si se desea replicar este enfoque en un contexto social distinto, será necesario ajustar las actividades a las características propias de dicho entorno. Además, el factor temporal debe ser tomado en cuenta, ya que algunas referencias específicas, como aquellas relacionadas con redes sociales, podrían perder relevancia con el paso de los años, afectando la pertinencia de los ejercicios.

Una consideración adicional es la disponibilidad de participantes para la aplicación de las actividades. En este trabajo, la selección del grupo estuvo condicionada a que los estudiantes no hubieran cursado aún el contenido de lógica, lo que limitó la participación a un grupo de seis estudiantes. Por ello, recomendamos que, si se desea tener una participación más amplia en futuras implementaciones, se prevea una mayor apertura de grupos y se garantice la disponibilidad tanto del profesorado como de las y los estudiantes. No obstante, es importante destacar que la teoría APOE adopta un enfoque cualitativo, cuyo objetivo es identificar y analizar las estructuras y mecanismos mentales que las y los estudiantes requieren para aprender un concepto. En este sentido, el tamaño de la muestra resulta secundario frente al análisis sobre la construcción de dichas estructuras mentales.

# Bibliografía


A.P.M.E.P. (1992). *EVAPM91/2. Évaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991.*

Araya, V., Alfaro, M., y Andonegui, M. (2007). Constructivismo: orígenes y perspectivas. *Laurus*, *13*(24), 76-92.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1-32. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *6*(3), 199-219.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*, 5-34.

García-Martínez, I., y Parraguez, M. (2018). Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(1), 349-357.

Grimaldi, R. P. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones.* Pearson Educación.

Maturana, I., y Parraguez, M. (2013). Transformaciones lineales. Una mirada desde la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 881-890.

Noriega-Márquez, J. A. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza de lógica matemática en un curso propedéutico bajo la teoría APOE. *PädiUAQ*, *1*(1), 117-136.

Piaget, J. (1995). *El estructuralismo*. Publicaciones Cruz O., S.A.

Quine, W. V. O. (1962). *Los métodos de la lógica* (M. Sacristán, Trad.) [Original publicado en 1950]. Ariel.

Rivera, A., y Herrera, G. (2025). *Implicación material, condicional lógicamente válido y generalizada* [En preparación].

Rojas-Salinas, P. (2016). Construyendo el esquema del cálculo diferencial e integral, una mirada hacia el futuro de la enseñanza y el aprendizaje. *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemáatica y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemáatica*, 181-186.

Romero-Trenas, F. (2009). Aprendizaje significativo y constructivismo. *Temas para la educación*, *8*.

Saldarriaga-Zambrano, P. J., Bravo-Cedeño, G. d. R., y Loor-Rivadeneira, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporónea. *Dominio de las Ciencias*, *2*(3 Especial), 127-137.

Salinas, P. (2016). Construyendo el esquema del cálculo diferencial e integral, una mirada hacia el futuro de la enseñanza y el aprendizaje. *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*, 181-186.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5-31.

Vega, M., Yañez, J. C., y Andrade, J. S. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 403-429.

# Capítulo 9

# Anexos

A continuación se encuentran en el Anexo 1 las actividades y ejercicios correspondientes a la primera sesión, y en el Anexo 2 las actividades y ejercicios correspondientes a la segunda sesión.

## 9.1. Anexo 1

### Actividades. Parte 1

**Integrantes del equipo:**

---

1. Determina si las siguientes oraciones son verdaderas, falsas o ninguna de las anteriores.

   (a) Todos los triángulos son equiláteros.

   (b) ¡Feliz cumpleaños!

   (c) $20 + 25 = 45$

   (d) La UAM Cuajimalpa tiene escaleras eléctricas.

2. Escribe el valor de verdad de las oraciones anteriores
   (a)
   (b)
   (c)
   (d)
3. Escribe una oración que sean falsa, una que sea verdadera y una a la que no se le pueda asignar un valor de verdad.
   -
   -
   -
4. Escribe la negación de las siguientes proposiciones simples:
   - $p$: La capital de Francia es París.
     $\neg p$:
   - $p$: $\pi$ es un número irracional.
     $\neg p$:
   - $p$: $2 + 2 = 4$
     $\neg p$:

# Actividades. Parte 2

**Integrantes del equipo:**

---

1. ¿Con cuántas proposiciones simples se construyen las siguientes proposiciones?
   *a*) "Uso Instagram o uso Tiktok"
   *b*) "Uso Instagram o uso Tiktok y uso Facebook"
2. Analiza los posibles valores de verdad de la frase: "Uso Instagram o uso Tiktok".
3. Analiza los posibles valores de verdad de la frase: "Uso Instagram y uso Tiktok".
4. Construye una tabla con todas las posibilidades de valores de verdad y organízalas en la siguiente tabla:

| $p$ | $q$ |
|---|---|
| | |

5. Construye una tabla con todas las posibilidades de valores de verdad y organízalas en la siguiente tabla:

| $p$ | $q$ | $r$ |
| --- | --- | --- |
| | | |

6. Construye la tabla de verdad de la negación y redacta qué puedes decir acerca de la negación:

| $p$ | $\neg p$ (negación de $p$) |
| --- | --- |
| | |

7. Construye la tabla de verdad de $p$ o $q$ (disyunción), y menciona en qué casos $p \vee q$ es falsa:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ ($p$ o $q$) |
| --- | --- | --- |
| | | |

8. Construye la tabla de verdad de $p$ y $q$ (conjunción), y menciona en qué casos $p \wedge q$ es falsa:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ ($p$ y $q$) |
| --- | --- | --- |
| | | |

9. Usa una tabla de verdad para determinar el valor de verdad de los siguientes incisos:

(a) "Uso Instagram, o uso TikTok y veo YouTube".

(b) "No uso Instagram, y uso Tiktok o uso Facebook".

(c) "No es cierto que no uso Instagram y uso TikTok, y uso Instagram o uso TikTok".

(d) "Uso TikTok y, además, o no uso Instagram o uso TikTok".

# Actividades. Parte 3

**Integrantes del equipo:**

---

1. Escribe si consideras si son lógicamente equivalentes las siguientes frases

   (a) $p$: No puedo decirle que no a mi hermanita si me pide algo.
   $q$: Siempre haré lo que me pida mi hermanita.

   (b) $P^1$ : No es cierto que esté lloviendo y el piso esté seco al mismo tiempo.
   $Q$: O no está lloviendo o el piso no está seco.

2. Decide si $p$ es lógicamente equivalente ($\equiv$) a $\neg(\neg p)$.

3. Usa las tablas de verdad para probar la equivalencia de los siguientes incisos:

   (a) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | | |

[1] Se usarán letras mayúsculas para hacer referencia a las proposiciones compuestas.

(b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | | |

(c) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | | |
| $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | | |

# Actividades. Parte 4

**Integrantes del equipo:**

---

1. En los siguientes ejemplos indica cuál es una tautología [2] ($T_0$) y cuál es una contradicción[3]($F_0$):

   (a) Nadé en una alberca, pero no me mojé.

   (b) Fui a la escuela y entré a todas las clases, pero jugué videojuegos en casa todo el día.

   (c) Un triángulo es isósceles o es escaleno o es equilátero.

2. Demuestra mediante tablas de verdad que $P : p \vee \neg p$ es una tautología.

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|---|
| $V$ | | |
| $F$ | | |

3. Demuestra mediante tablas de verdad que $P : p \wedge \neg p$ es una contradicción

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|
| $V$ | | |
| $F$ | | |

4. Mediante tablas de verdad, indica si las siguientes proposiciones compuestas son tautología o una contradicción

   a) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | | |

[2] Una tautología es una declaración que siempre es verdadera.

[3] Una contradicción es una declaración que siempre es falsa.

b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | | |

# Ejercicios sesión 1

**Integrantes del equipo:**

1. Determina si las siguientes oraciones son verdaderas, falsas o ninguna de las anteriores.
   (a) Todos los profesores son estrictos.
   (b) Haz tus deberes.
   (c) $x + 8 = 10$.
2. Escribe el valor de verdad de las oraciones anteriores
   (a)
   (b)
   (c)
3. Redacta un ejemplo de negación, disyunción (o) y conjunción (y).
   -
   -
   -
4. Construye las tablas de verdad de los siguientes incisos:
   (a) $p \wedge (\neg p \wedge q)$
   (b) $\neg p \wedge (q \vee r)$

(c) $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

(d) $(p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

5. Usa las tablas de verdad para probar la equivalencia de los siguientes incisos:

   (a) $p \wedge (\neg q \wedge r) \equiv (p \wedge \neg q) \wedge r$

   (b) $p \wedge (\neg q \vee p) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge p)$

   (c) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \wedge p) \vee p$

(d) $p \wedge (\neg q \vee p) \equiv p \vee \neg q$

6. Prueba o refuta las equivalencias siguientes:

   (a) $\neg(p \wedge (q \vee r)) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

   b) $\neg(p \wedge (q \vee r)) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

7. En los siguientes ejemplos indica cuál es una tautología ($T_0$) y cuál es una contradicción ($F_0$):

   (a) Hoy comeré o no un helado.

   (b) Nadé en una alberca, pero no me mojé.

   (c) Hay un triángulo rectángulo que no tiene un ángulo de 90 grados.

8. Determina si la frase ”hace frío o hace calor, o ni hace frío y ni hace calor” es una tautología o una contradicción.

9. Crea dos proposiciones y verifica mediante tablas de verdad si son tautologías o contradicciones.

    -
    -

10. Comparar la tautología $P \vee \neg P$ con la contradicción $P \wedge \neg P$. ¿Cómo difieren en sus tablas de verdad?

## 9.2. Anexo 2

# Actividades. Parte 5

**Integrantes del equipo:**

---

1. Indica cuál es la premisa (P) y la conclusión (C) de las siguientes proposiciones:

    - “Estudiar lógica implica que sabré demostrar”.
        - ◯ estudiar lógica
        - ◯ sabré demostrar
    - “Viajaré a Japón, si gano la beca de intercambio”.
        - ◯ viajaré a Japón
        - ◯ gano la beca de intercambio
    - “Si la gente miente, entonces siembra desconfianza”.
        - ◯ la gente miente
        - ◯ la gente siembra desconfianza

- "Comenzaré un negocio propio, si no encuentro trabajo este año".
  - ◯ comenzaré un negocio propio
  - ◯ no encuentro trabajo este año

2. Construye la tabla de verdad de $p \to q$ ($p$ implica $q$).

| $p$ | $q$ | $p \to q$ (implicación) |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | |
| $V$ | $F$ | |
| $F$ | $V$ | |
| $F$ | $F$ | |

3. Determina el valor de verdad de los siguientes incisos:

   - Mi abuelita anda en bici $\to$ seré ganador del premio nobel.

   - Si no estudio, entonces reprobaré.

   - $(3 \in \emptyset \wedge A = \{1, 2\}) \to 3 \in A$

4. En el caso de que la implicación "si entregas todos los trabajos, aprobarás la asignatura" es verdadera, qué puedes decir sobre el valor de verdad de su premisa y conclusión.

# Actividades. Parte 6

**Integrantes del equipo:**

---

1. Considera el siguiente argumento:
   "Si hace mucho calor, entonces iré a la playa". $(p \to q)$
   "Si voy a la playa, entonces nadaré en el mar". $(q \to r)$
   "Hace mucho calor". $(p)$

   Si hoy hace mucho calor, ¿qué puedo concluir?

2. Analiza el siguiente argumento:
   "Si el cielo está nublado, entonces podría llover". $(p \to q)$

   Si no llovió $(\neg q)$, ¿podemos afirmar que el cielo no estaba nublado $(\neg p)$?

3. Dado el argumento: "Si estudio con disciplina y descanso bien la noche antes del examen, entonces obtendré una buena calificación".
   Forma un argumento lógico basado en la condición dada e introduce una conclusión que se siga de las premisas.

4. Determina cuál es la premisa y la conclusión $(P \to Q)$ de las siguientes proposiciones compuestas.

   a) $\neg(p \vee q) \to \neg p$
      $P$:
      $Q$:

   b) $p \to (q \to r)$
      $P$:
      $Q$:

c) $(p \to q) \to (q \to p)$
$P$:
$Q$:

d) $[(p \to q) \wedge q] \to p$
$P$:
$Q$:

e) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
$P$:
$Q$:

# Actividades. Parte 7

**Integrantes del equipo:**

---

1. Usa las tablas de verdad para probar la equivalencia lógica de los siguientes incisos:

   a) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | |
| $V$ | $F$ | | | |
| $F$ | $V$ | | | |
| $F$ | $F$ | | | |

   b) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | |

   c) $(p \wedge \neg p) \to q \equiv T_0$

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ | $q$ | $(p \wedge \neg p) \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | | | $V$ | |
| $V$ | | | $F$ | |
| $F$ | | | $V$ | |
| $F$ | | | $F$ | |

2. Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. $p, q, r$ denotan proposiciones simples.

a) $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p$ | $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | | | | |
| $V$ | $F$ | | | | |
| $F$ | $V$ | | | | |
| $F$ | $F$ | | | | |

b) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | | | |
| $V$ | $V$ | $F$ | | | |
| $V$ | $F$ | $V$ | | | |
| $V$ | $F$ | $F$ | | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | | | |
| $F$ | $V$ | $F$ | | | |
| $F$ | $F$ | $V$ | | | |
| $F$ | $F$ | $F$ | | | |

3. ¿Cuáles de las proposiciones compuestas del ejercicio anterior son tautologías?

4. Decimos que $p$ implica lógicamente a $q$ ($\Rightarrow$) si $p \rightarrow q$ es una tautología. De las implicaciones de los problemas 1 y 2, ¿cuáles implicaciones ($\rightarrow$) pueden ser sustituidas por implicaciones lógicas ($\Rightarrow$)?

# Actividades. Parte 8

**Integrantes del equipo:**

---

1. Si $P$ es verdad (tautología) y $P \Rightarrow Q$ (es decir, $P \rightarrow Q$ es tautología), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

2. Considera $P$: los ovíparos nacen de huevo y el huevo tiene yema, $Q$: los canarios son ovíparos y cuando eran huevo tenían yema. Considera que $P$ es cierto, y que $P \Rightarrow Q$. ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

3. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso (contradicción), ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$? Justifica y da un ejemplo.

4. Si tenemos $P$: está lloviendo, $Q$: me mojé el cabello. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

5. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso, ¿qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

6. Considera $P$: el río está seco, $Q$: los peces pueden vivir en el río. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q$ es falso (los peces no pueden vivir en un río seco), ¿qué puedes decir sobre el valor de $P$?

7. $P \Rightarrow Q$ y $Q$ verdadero, ¿Qué puedes decir del valor de verdad de $P$?

8. Si tenemos $P$: es fin de semana, $Q$: voy al cine. Si $P \Rightarrow Q$ y $P$ es falso, ¿qué puedes decir sobre el valor de $Q$?

# Ejercicios

**Integrantes del equipo:**

1. Indica cuál es la premisa (P) y la conclusión (C) de las siguientes proposiciones:
   - "Es necesario que las personas lean para ser cultas".
     - ◯ las personas leen
     - ◯ las personas son cultas
   - "Me inscribiré en clases de baile, si tengo tiempo libre el próximo trimestre".
     - ◯ me inscribiré en clases de baile
     - ◯ si tengo tiempo libre el próximo semestre
   - "Estudiaré psicología, si no apruebo matemáticas".
     - ◯ estudiaré psicología
     - ◯ si no apruebo matemáticas
2. Dada la implicación "si entregas todos los trabajos, aprobarás la asignatura", analiza y construye todos los valores de verdad.
3. Usando tablas de verdad comprueba la equivalencia de la implicación $P \to Q$ con $\neg P \vee Q$

4. Del ejercicio anterior, encuentra otra equivalencia, pero ahora usando el conectivo $\wedge$.

5. ¿$[(p \to (q \to r))] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ es una tautología?

6. ¿Qué puedes decir de la siguiente proposición compuesta?

$$(p \vee q) \to [\neg(p \to q)]$$

7. Dado el argumento "Si la letra es B $\to$ la calificación es 8"
   Si la letra es C, ¿podemos decir que la calificación no es 8?

8. Dado el argumento "Si sacas buenas calificaciones $\to$ puedes ir a la fiesta"
   Si reprobamos 3 materias, ¿qué podemos decir de nuestra asistencia a la fiesta?

9. Dado el argumento "Si entregan todos los trabajos $\to$ exentan el examen"
   Si nos faltó un trabajo por entregar, ¿presentamos el examen?

10. Dado el argumento “Cuando no tenga clases $\rightarrow$ ordenaré mi habitación”
    Estábamos en la primera hora cuando hubo un sismo y nos regresaron a casa, ¿ordenamos nuestra habitación?

11. Encuentra el valor de verdad de $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

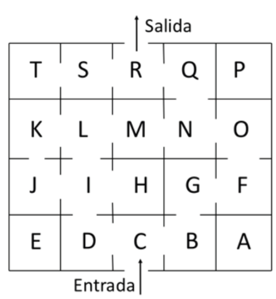
## 9.3. Anexo 3

### Ejercicio 1

Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera: "si $n$ es un número par, entonces $n+1$ es un número primo".

### Ejercicio 2

Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde Entrada hasta Salida) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces. Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR).




Analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas):

1. X cruzó P.
2. X cruzó N.
3. X cruzó M.

4. Si X cruzó O, entonces X cruzó F.
5. Si X cruzó K, entonces X cruzó L.
6. Si X cruzó L, entonces X cruzó K.

Esta idónea comunicación de resultados fue realizada dentro del Programa de Especialización del **Posgrado en Ciencias Naturales e Ingeniería** de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería (DCNI) de la Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Cuajimalpa. El trabajo experimental y teórico fue realizado de octubre de 2022 a marzo del 2025 en el Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas (DMAS) de la DCNI.

DECLARACIÓN DE CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D. F. el día 14 del mes de marzo del año 2025, la que suscribe Kathia Stephanie Esquivel Delgado alumna del Programa de Maestría en Ciencias Naturales e Ingeniería de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Cuajimalpa, manifiesta que es autora intelectual de la presente idónea comunicación de resultados titulada: “La construcción del concepto de implicación como condicional lógicamente válido en estudiantes de nivel superior: un enfoque desde la teoría APOE” realizada bajo la dirección de Julián Alberto Fresán Figueroa y cede los derechos de este trabajo a la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráfico o de datos del trabajo, sin el permiso expreso del director del trabajo como representante de la UAM. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: jfresan@cua.uam.mx

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Kathia S.

Kathia Stephanie Esquivel Delgado

Nombre y firma del alumno

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

"El que suscribe, Kathia Stephanie Esquivel Delgado, alumna del Programa de Maestría en Ciencias Naturales e Ingeniería declara que los resultados reportados en esta idónea comunicación de resultados, son producto de mi trabajo con el apoyo permitido de terceros en cuanto a su concepción y análisis. Así mismo, declaro que hasta donde es de mi conocimiento no contiene material previamente publicado o escrito por otras (s) persona (s) excepto donde se reconoce como tal a través de citas y que este fue usado con propósitos exclusivos de ilustración o comparación. En este sentido, afirmo que cualquier información sin citar a un tercero es de mi propia autoría. Declaro, finalmente, que la redacción de este trabajo es producto de mi propia labor con la dirección y apoyo de mi director y de mi comité tutorial, en cuanto a la concepción del proyecto, al estilo de la presentación y a la expresión escrita."

Kathia S.

Kathia Stephanie Esquivel Delgado

Nombre y firma del alumno

DECLARACIÓN DE NO LUCRO:

El que suscribe, Kathia Stephanie Esquivel Delgado alumna del Programa de Maestría en Ciencias Naturales e Ingeniería, manifiesta su compromiso de no utilizar con fines de difusión, publicación, protección legal por cualquier medio, licenciamiento, venta, cesión de derechos parcial o total o de proporcionar ventajas comerciales o lucrativas a terceros, con respecto a los materiales, datos analíticos o información de toda índole, relacionada con las actividades e intercambios de información derivados de la relación de investigación académica y tecnológica desarrollada entre la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) y Kathia Stephanie Esquivel Delgado.

Kathia S.

Kathia Stephanie Esquivel Delgado

Nombre y firma del alumno