Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

MATERIAL DIDÁCTICO

NOTAS DE CURSO
TALLER DE MATEMÁTICAS

AUTORES:
Dr. Luis Franco Pérez
Dr. Oswaldo González Gaxiola

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
IBSN: 978-607-477-443-6

Febrero 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo

Material Didáctico,

Notas del Curso

"Taller de Matemáticas"

Dr. Luis Franco Pérez

Dr. Oswaldo González Gaxiola

ISBN 978-607-477-443-6

Depto. de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
UAM-Cuajimalpa
11 de Febrero de 2011.

Resumen.

Uno de los objetivos del curso **Taller de Matemáticas** es el buen manejo de las técnicas básicas del álgebra, la geometría plana, la trigonometría y la geometría analítica; temas mínimos necesarios para poder abordar el estudio de problemas de las licenciaturas comprendidas en el área de las Ciencias Básicas y Naturales. El álgebra nos permite obtener la abstracción de la aritmética para la solución general de problemas que modelan algún fenómeno involucrado en el estudio de las Ciencias Naturales o de las Ciencias Básicas en general; además el álgebra nos proporciona los pasos necesarios para que cualquier persona puede manipular las fórmulas de manera sencilla sin perder de vista el rigor necesario que fundamenta cada uno de los pasos realizados. La geometría plana y la trigonometría nos proporcionan técnicas para el manejo de las medidas espaciales en los cuerpos geométricos y con el auxilio del álgebra se pueden hacer abstracciones para formular las leyes generales que clasifican a los objetos básicos de la geometría y sus propiedades fundamentales. La parte final de las presentes notas abarca el estudio de la geometría analítica plana que resulta ser una fusión del álgebra y la geometría con el objetivo de describir lugares geométricos y sus propiedades matemáticas a partir de la ecuación algebraica que los sintetiza. Cabe decir que las presentes notas están escritas con todas las justificaciones y explicaciones necesarias para evitar que el alumno aprenda de manera mecánica a creer de manera dogmática sin preguntar los por qués de cada objeto de estudio. Las presentes notas son una manera práctica de introducirse al formalismo matemático y están escritas de tal forma que cualquier estudiante de las carreras ofrecidas por nuestra División Académica, no sólamente estudiantes de matemáticas aplicadas, las comprendan y cuidando que no capten las fórmulas únicamente. Los autores pensamos que no es necesario la resolución de todos los ejercicios, unos son para tomar confianza en el álgebra, otros para profundizar en algunos temas, otros para aprender la abstracción y llevar un problema de diferente naturaleza al lenguaje matemático y otros para acercar a la realidad las matemáticas siendo así un libro autocontenido para el curso específico de la UAM-Cuajimalpa que todos los estudiantes de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería tienen en su currícula en el primer trimestre de los planes de estudio de sus licenciaturas. Debemos mencionar que en el grueso del texto se justifica todo lo que se refiera a los temas intrínsecos; conceptos y resultados de otras áreas sólo se exponen en el apéndice al final del texto, remitiendo al lector a dicho apéndice cada vez que se requiera.

Índice general

Parte I

Álgebra Básica.

El Álgebra, dicho en términos coloquiales, es el conjunto de símbolos y reglas que permiten desarrollar un lenguaje abstracto con el cual podemos representar, describir y analizar cualquier situación que se nos presente. Este proceso no siempre resulta sencillo, pero resultará menos complicado si entendemos primeramente las reglas básicas del juego en el lenguaje.

En esta primera parte presentamos una introducción al álgebra elemental mínima necesaria para poder abordar los cursos subsecuentes de matemáticas. Uno de los objetivos es mostrar que el álgebra, desde su nivel básico, es una herramienta útil e indispensable para el estudio de otras áreas de la propia matemática, de otras ciencias y prácticamente de cualquier otra actividad. A lo largo de este capítulo relacionamos el álgebra con problemas sencillos que abordan situaciones de aplicación a diferentes disciplinas.

Capítulo 1

Lenguaje algebraico.

El lenguaje algebraico, como cualquier otro lenguaje, está formado por un conjunto de símbolos. En particular, el lenguaje algebraico usa las letras del alfabeto, representando éstas una cierta cantidad específica o pudiendo denotar más de una, dependiendo del contexto. A las primeras se les conoce como *constantes* y a las segundas se les llaman *variables*. Cuando decimos que el lenguaje matemático es abstracto nos referimos justamente a esto, porque la variable x puede representar al número 5 ó a 0.3 ó a $\sqrt{2}$ o un número de un conjunto bajo alguna condición como "los números pares del 1 al 10", aunque visualmente siga siendo la letra x. Así, cuando queremos referirnos a una cantidad que no sabemos a ciencia cierta, es muy común decir "...imagina un número x..." para evitar decir "...imagina un número 5..." o "imagina un número π...", porque es muy probable que estaremos diciendo algo falso. Entonces x es la abstracción de ese número al que nos referimos.

De la misma forma que un conjunto de letras en el español pueden formar una palabra, que es una estructura más compleja que las letras por sí solas, al combinar incógnitas o variables con signos elementales de la aritmética obtenemos *expresiones algebraicas básicas*, así

$$x - y\,, \quad xy\,, \quad \frac{x-y}{x}\,, \quad 2x + y\,, \quad a \cdot b,$$

son ejemplos sencillos de expresiones algebraicas.

Las partes de las cuales consta una expresión algebraica se llaman *términos* y se distinguen porque están separados por los signos ariméticos $+$ y $-$. En la siguiente tabla escribimos algunos ejemplos de expresiones algebraicas e indicamos el número de términos de las que se compone cada una de ellas.

Expresión algebraica	Número de términos
$x + 3y$	2
$x - 3y - yz + 5yz$	4
$x \cdot y$	1
$x + y - z$	3

Según el número de términos que componen una expresión algebraica éstas reciben un nombre que las clasifica. Las expresiones que contienen solamente un término se les denomina *monomios*; una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos se denomina *binomio*; Las expresiones algebraicas que contienen exactamente tres términos se llaman *trinomios* y así podríamos continuar sucesivamente. En general, a todas aquellas expresiones que contienen más de un término se les llaman *polinomios*. Por costumbre, se suelen usar los términos monomio, binomio, trinomio y para cualquier expresión algebraica compuesta por cuatro términos o más se suele utilizar la palabra polinomio, no obstante que los binomios y trinomios también son polinomios.

Como ya dijimos, en una expresión algebraica, las variables o incógnitas representan números, ya sean números naturales, números enteros, números racionales o bien números reales. Así que, al realizar operaciones con expresiones algebraicas aplicamos las mismas reglas que utilizamos al hacer operaciones aritméticas con los números, por lo tanto, se satisfacen las propiedades que se encuncian en seguida.

Si x, y, z representan números reales, se satisfacen las siguientes propiedades:

- ***conmutatividad*: $x + y = y + x$ y $x \cdot y = y \cdot x$,**
- ***asociatividad*: $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$,**
- ***elemento neutro*: $x + 0 = x$ y $x \cdot 1 = x$,**
- ***elemento inverso*: $x + (-x) = 0$ y $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ $(x \neq 0)$,**
- ***distributividad*: $x(y + z) = xy + xz$.**

Ahora, si en una expresión algebraica reemplazamos cada variable por un número dado para obtener un valor numérico, entonces se dice que estamos evaluando la expresión algebraica, al proceso de sustitución y realización de las operaciones aritméticas se le llama *evaluación* de la expresión algebraica.

Ejemplo 1.1 *Escribir una expresión algebraica que exprese la mitad de un número más el triple de otro*

Como las variables representan números, entonces podemos expresar el producto de $1/2$ con x para indicar la mitad de un número. La palabra "mitad" es un número conocido $(1/2)$ y la expresión "de un número" no es un número conocido y por eso lo represantamos como x. De la misma forma escribimos $3y$ para indicar el triple de otro número. Aquí es importante notar que en el enunciado aparece la palabra "otro" para referirse a un número (que no conocemos) distinto a otro número (que no conocemos) y por lo mismo nombramos por x y y (dos letras distintas) los dos números desconocidos y diferentes entre sí.

Finalmente la suma de las dos cantidades es

$$\frac{1}{2}x + 3y\,.$$

❑

Ejemplo 1.2 *El cinco por ciento de un número más el quince por ciento de otro.*

Denotamos por n y m los dos números; el cinco por ciento de n sería $(5/100)n$ y el quince por ciento de m sería $(15/100)m$. Entonces la expresión que corresponde es

$$\frac{5}{100}n + \frac{15}{100}m.$$

¿Y qué pasa si hubieramos escrito $\frac{5}{100}m+\frac{15}{100}n$ como solución al problema? Pues no ocurre nada, es simplemente otra forma de expresar el planteamiento, los variables n y m no tienen un orden en particular para ser tomadas.

❑

Ejemplo 1.3 *Un número entero más su consecutivo es* 8.

Sea n el número entero, por la tanto $n+1$ es el consecutivo y la expresión que corresponde sería la suma, es decir, $n+(n+1)=8$.

❑

En la siguiente tabla se dan más ejemplos de expresiones algebraicas, referidas a los enunciados que las describen.

Lenguaje común.	Lenguaje algebraico.
La suma de 9 y x,	$9 + x$.
El producto de dos números más 4,	$x \cdot y + 4$.
Un número más la quinta parte de otro,	$n + \frac{m}{5}$.
La diferencia entre dos números más el doble del primero,	$x - y + 2x$.
El 20 por ciento de un número más otro número,	$0.2x + y$.
El inverso de una cantidad más el triple de otra,	$\frac{1}{x} + 3z$.
La suma de un ángulo con tres veces otro es igual a 45°	$\alpha + 3\beta = 45°$.
El cociente de dos números menos un tercio de otro,	$\frac{x}{y} - \frac{z}{3}$.
La tercera parte de la suma de un número con el doble de otro,	$\frac{x+2y}{3}$.
Un cuarto de la diferencia de dos números más el doble del primero,	$\frac{x-y}{4} + 2x$.
La suma de tres números enteros consecutivos es 123,	$n + (n+1) + (n+2) = 123$.
La suma de dos números es 133 y uno es 55 más que el otro,	$x + y = 133$ junto con $x + 55 = y$.

Ejemplo 1.4 *Evaluar* $x + 2y$ *cuando* $x = 1$ *y* $y = 3$.

Sustituimos la variable x por el número 1 y la variable y por el número 3 como sigue,

$$x + 2y = 1 + 2(3) = 7\,.$$

Así que, el valor de $x + 2y$ para $x = 1$ y $y = 3$ es 7.

❑

Ejemplo 1.5 *Evaluar* $x + y - 6z$ *cuando* $x = 10$ *y* $y = -3$ *y* $z = 2$.

Sustituimos x por el número 10, y por el número -3 y z por el número 2, así

$$x + y - 6z = 10 + (-3) - 6(2) = -5\,.$$

Así que, el valor de $x + y - 6z$ para $x = 10$ y $y = -3$ y $z = 2$ es -5.

❑

Ejemplo 1.6 *Evaluar $x \cdot y$ cuando $x = -4$ y $y = 3$.*

sustituimos x por el número -4 y y por el número 3, entonces

$$x \cdot y = (-4) \cdot 3 = -12\,.$$

Concluimos que el valor de $x \cdot y$ para $x = -4$ y $y = 3$ es -12.

❑

Ejemplo 1.7 *Evaluar $x \cdot y$ cuando $x = -\frac{3}{5}$ y $y = \frac{9}{7}$.*

Nuevamente, sustituimos en x el número $-\frac{3}{5}$ y en y el número $\frac{9}{7}$ y obtenemos

$$x \cdot y = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right) = -\frac{27}{35}.$$

Por tanto, el valor de $x \cdot y$ para $x = -\frac{3}{5}$ y $y = \frac{9}{7}$ es $-\frac{27}{35}$.

❑

1.0.1. Ejercicios:

1. Escribir la expresión algebraica que corresponde a los siguientes enunciados:

    a) un número disminuido en 12,

    b) la suma de dos enteros consecutivos es 13,

    c) un quinto de un número es 25,

    d) cinco tercios más la mitad de un número,

    e) el quinto de un número más otro número es 20,

    f) un sexto de las personas que asisten a una clase de álgebra, *g*) el producto de dos números menos la mitad del primero,

h) el cociente de dos números es 3,

i) uno entre el doble de x,

j) la suma de dos números es 98,

k) cinco veces y más 3.9,

l) el cinco por ciento de un número más el ocho por ciento de otro es 15.

2. Evalúa las siguientes expresiones algebraicas si $x = 2$, $y = -4$ y $z = 3$:

   a) $8x + 3y - 2z$,

   b) $9z - 2$,

   c) $\frac{xy+4}{z+1}$,

   d) $\frac{x+y}{z} + \frac{z}{4xy}$.

3. Evaluar la expresión algebraica

$$\frac{\frac{x-1}{x+5}}{2x+7} + \frac{x-6}{\frac{x}{3x-3}}$$

   para los siguientes valores de x:

   a) $x = 5$,

   b) $x = 12$.

4. Evaluar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{xy-4}{xy+4} + \frac{y-3x}{5+x}$$

   para los valores de x y y que siguen,

   - $x = 5$, $y = 1$,
   - $x = 2$, $y = 2$.

5. Evaluar la siguiente expresión:

$$\frac{a+5b}{ab-3} + \frac{a+b}{3a}$$

   cuando los valores de a y b son

- $a = -2$, $b = 1$,
- $a = 6$, $b = 2$.

6. Hacer la evaluación de

$$3[x - y + xyz] + 2x[4[y - 1] + 3z[y + 2]x]$$

para los siguientes valores de x, y y z

- $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$,
- $x = 2$, $y = 2$, $z = -3$.

1.1. Aplicaciones.

En realidad, cuaquier planteamiento de la vida real que conlleve matemáticas requiere de un lenguaje algebraico correcto, sin éste se pueden obtener conclusiones falsas e incoherentes.

Ejemplo 1.8 *Las escalas de temperaturas en grados centígrados y en grados Fahrenheit están relacionadas mediante la siguiente expresión algebraica*

$$F = \frac{9}{5}C + 32,$$

donde F representa la temperatura en grados Fahrenheit y C es la temperatura en grados centígrados. Obtener los grados F para $4°C$, $-10°$, $210°$ y $-40°$.

Para saber a cuántos grados F corresponde una temperatura dada en grados C, debemos evaluar la expresión algebraica que relaciona las temperaturas. La siguiente tabla nos muestra a cuántos grados F equivalen ciertas temperaturas en grados C.

Grados centígrados	Grados Fahrenheit
$4°C$	$\frac{9}{5}4 + 32 = 39.2°F$
$-10°C$	$\frac{9}{5}(-10) + 32 = 14°F$
$210°C$	$\frac{9}{5}(210) + 32 = 410°F$
$-40°C$	$\frac{9}{5}(-40) + 32 = -40°F$

❑

En el ejemplo anterior vemos que la misma expresión algebraica puede tomar distintos valores numéricos dependiendo del valor numérico que se les dé a las variables.

Para resolver problemas utilizando el álgebra, lo primero que debemos hacer es traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, necesitamos abstraer el plateamiento. Los siguientes ejemplos ilustran un poco en este sentido.

Ejemplo 1.9 *Traducir al lenguaje algebraico: "Gilberto es 5 años mayor que Felipe."*

Comenzamos por denotar con variables las edades de las personas porque no las conocemos precisamente. Denotamos por G la edad de Gilberto y por F la edad de Felipe, entonces si a la edad de Felipe le adicionamos 5 años obtenemos la edad de Gilberto, así la traducción al lenguaje algebraico es

$$G = F + 5.$$

❑

Ejemplo 1.10 *Sergio es 7 años menor que Julieta.*

Al igual que en el ejemplo anterior, denotamos por S la edad de Sergio y por J la edad de Julieta. De esta forma, la traducción al lenguaje algebraico es

$$S + 7 = J.$$

❑

Ejemplo 1.11 *Si r representa los días que llovió en una año, cuántos días no llovió?.*

Ahora nos dan la variable r, pero nos preguntan por otra cantidad. Consideremos que 365 son los días del año y llueven r días, por tanto los días que no llovieron tiene que ser el resto de los días del año completo, es decir,

$$365 - r\,.$$

❑

1.1.1. Ejercicios:

1. Usar el lenguaje algebraico para los siguientes enunciados:

   a) Laura es 6 centímetros más alta que Carmen,

   b) Ana tiene 12 años menos que Juan,

   c) el costo de una docena de cucharas es n. ¿Cuánto cuesta una cuchara?,

   d) dos litros de aceite cuestan x pesos. ¿Cuánto cuesta un litro?,

   e) tres quintos de la población infantil I,

   f) el total de días en z horas,

   g) la edad de Juan más el doble de la edad de María,

   h) el doble de la suma de las edades de Pedro y Edith,

   i) la edad de Adolfo menos tres años multiplicada por dos es la de Marco,

   j) la velocidad de un auto más el doble de la velocidad de otro es $500\,km/h$.

2. La distancia recorrida por un móvil está dada por el producto de la velocidad por el tiempo, es decir, $d = vt$, en cada caso encuentre la distancia recorrida si:

   - $v = 90\frac{km}{h}$, $t = 1.2h$,
   - $v = 75\frac{km}{h}$, $B = 2.5h$.

3. El área de un trapecio se define por $A = \frac{h}{2}(B + b)$ donde h es la altura del trapecio, B es la base mayor y b la base menor. En cada caso encuentre el área del trapecio si

   - $h = 10$, $B = 25$ y $b = 15$,
   - $h = 9$, $B = 14$ y $b = 4$,
   - $h = 5.4$, $B = 12.6$ y $b = 7.8$.

Capítulo 2

Signos de agrupación.

En este capítulo veremos que signos tales como los paréntesis, corchetes y las llaves, que en conjunto son llamados *signos de agrupación*, sirven para modificar el orden en el que se deben de efectuar las operaciones aritméticas involucradas en una expresión algebraica. Las operaciones aritméticas indicadas en una expresión algebraica se efectúan de la misma forma en la que operamos números, respetando las leyes de los signos

$$(+)(+) = +\,, \quad (+)(-) = -\,, \quad (-)(+) = -\,, \quad (-)(-) = +\,.$$

Los signos de agrupación indican los términos que serán afectados por alguna operación, por ejemplo, cuando tomamos el inverso aditivo de un polinomio, el opuesto o inverso aditivo es el mismo polinomio pero formado por los inversos aditivos de cada término. De esta manera analicemos el siguiente caso:

$$-(x + y - z) = (-x) + (-y) - (-z) = -x - y + z.$$

Esto es lo mismo que decir que aplicamos la propiedad distributiva porque el signo "$-$" representa -1, entonces

$$-(x + y - z) = (-1)(x + y - z) = (-1)x + (-1)y - (-1)z = -x - y + z\,.$$

El uso más frecuente es la simplificación de la escritura, indicando el orden de las operaciones algebraicas a realizar. La palabra "simplificación" la vamos a entender como la forma más sencilla (corta, fácil, reducida, simple,...) de una expresión. Vamos a resolver cuidadosamente los siguientes ejemplos en los que comenzamos a mencionar paso por paso los movimientos algebraicos y poco a poco vamos realizándolos de manera más eficiente evitando demasiado detalle.

Ejemplo 2.1 *Eliminar los signos de agrupación (simplificar) en las siguientes expresiones algebraicas:*

1. $-(x-3)$,

2. $x-(y-8)$,

3. $6a-[(4b-1)-(3c-9)]$,

4. $3\{(x-3)+8[6y-1]\}$,

5. $(w+5)-(x-8)$,

6. $-6(m-n-3)-7$.

1. El signo "$-$" afecta al paréntesis que contiene el binomio $x-3$, por tanto el signo afecta a cada uno de los factores, así

$$-(x-3)=(-)x-(-)3=-x+3\,,$$

rsultando una expresión más sencilla.

2. En este caso, el signo "$-$" afecta al binomio $y-8$, pero no afecta al monomio x, por tanto hacemos

$$x-(y-8)=x+((-)y-(-)8)=x+(-y+8)$$

y hasta aquí hemos distribuido el signo "$-$". Ahora, cuando un paréntesis está precedido por el signo "$+$", éste no cambia en nada la expresión, es decir que podemos eliminar el uso del paréntesis sin afectar la expresión, entonces

$$x+(-y+8)=x+(-y)+(+8)=x-y+8\,.$$

Finalmente escribimos el resultado $x-(y-8)=x-y+8$.

3. Esta expresión ya no es tan sencilla, pero las reglas son las mismas. Comencemos por simplificar la expresión que se encuentran entre los corchetes,

$$\begin{aligned}(4b-1)-(3c-9)&=(4b-1)+((-1)3c-(-)9)\\&=(4b-1)+(-3c+9)=4b-1-3c+9\end{aligned}$$

y aquí sumamos los números que aparecen, porque antes aplicamos la conmutatividad en la suma, por eso

$$4b - 1 - 3c + 9 = 4b - 3c - 1 + 9 = 4b - 3c + 8\,.$$

Ahora, ya que tenemos simplificada la expresión que estaba entre corchetes, ahora simplifiquemos la expresión completa y quedaría

$$\begin{aligned}6a - [(4b - 1) - (3c - 9)] &= 6a - [4b - 3c + 8]\\ &= 6a + (-)4b - (-)3c + (-)8 = 6a - 4b + 3c - 8\,.\end{aligned}$$

En Matemáticas no hay "un sólo camino", pueden existir varias maneras de proceder y debemos llegar a la misma conclusión, sólo basta respetar las reglas del juego. En este ejemplo aplicaremos este principio, porque ahora empezaremos el desarrollo sin simplificar primero lo que se encuentra entre corchetes, entonces

$$\begin{aligned}6a - [(4b - 1) - (3c - 9)] &= 6a + (-)(4b - 1) - (-)(3c - 9)\\ &= 6a - (4b - 1) + (3c - 9)\,,\end{aligned}$$

donde hemos eliminado los corchetes distribuyendo el signo "$-$" entre los términos que agrupan los corchetes. **Nota**: al distribuir el signo "$-$" dentro de los corchetes tomamos primero para cada uno de las agrupaciones de los términos. Lo que sigue es la simplificación de cada expresión agrupada por los paréntesis, por tanto

$$\begin{aligned}6a - (4b - 1) + (3c - 9) &= 6a + (-)4b - (-)1 + 3c - 9\\ &= 6a - 4b + 1 + 3c - 9 = 6a - 4b + 3c - 8\,.\end{aligned}$$

Observemos que por ambos caminos obtuvimos el mismo resultado.

4. Comenzamos aplicando la propiedad distributiva y luego simplificamos la expresión,

$$\begin{aligned}\{(x - 3) + 8[6y - 1]\} &= \{(x - 3) + [8(6y) - (8)1]\}\\ &= \{(x - 3) + [(8 \cdot 6)y - 8]\} = \{(x - 3) + [48y - 8]\}\,.\end{aligned}$$

Nota: al realizar la operación $8(6y)$ estamos aplicando la propiedad asociativa en el producto, por eso el resultado final es $48y$; no es válido escribir $8(6y) = (8)(6)(8y)$.

Finalmente simplificamos,

$$\{(x-3)+[48y-8]\} = \{x-3+48y-8\} = \{x+48y-12\} = x+48y-12\,.$$

5. Simplemente simplificamos distribuyendo el signo "−",

$$\begin{aligned}(w+5)-(x-8) &= (w+5)+((-)x-(-)8)\\ &= w+5-x+8 = w-x+5+8 = w-x+13\,.\end{aligned}$$

6. Primero distribuimos el número -6 y luego eliminamos el parétesis, así

$$-6(m-n-3)-7 = ((-6)m-(-6)n-(-6)3) = -6m+6n+18\,.$$

❑

2.0.2. Ejercicios:

1. Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:
2. $-(y-12)$,
3. $14a-(4b-c-8)$,
4. $(9-x)-(3-y)-(-w)$,
5. $z-[(7x+2)-5-y]$,
6. $x-(2y-14)$,
7. $(x-6)-(-5-y)$,
8. $7a-[(5b-3)-(5c-3)]$,
9. $-(y-\frac{6}{7})-(s-6)$,
10. $4x-\{(8-x)+4(y-3)\}$,
11. $(5-x)-[3-(z-4)]$,
12. $8a-\{(\frac{2}{3}-3b)-(\frac{1}{6}-c)\}$,
13. $(3-x)-[8-(6-y)-z(-\{7-(5-w)\})]$,

14. $-3(m-n-1)+12$,

15. $7x-[3y-(4z-6)+3]-(5-8w)+11$,

16. $12x-[5y+4(z-w)-2]$,

17. $(a-3)+[(8-a)-3(9-b)]$,

18. $4(x-8)-12(y-3)-12(3-x)$,

19. $2a-\{3(b-1)-(3-a)\}$,

20. $(x-2)6-\frac{4}{3}(y-2)+4(x-7)$,

21. $5\{6(y-1)+3[5(1-y)+4(5-y)]+5\}$.

Capítulo 3

Exponentes y términos semejantes.

En el capítulo 1 mencionamos que una expresión algebraica está compuesta por términos y que estos están separados por signos ariméticos $+$ y $-$. Por lo anterior, en una expresión algebraica, cada sumando se llama término; así

$$2x^2y^4 - 6yz + 8(5x - z^3)$$

consta de tres términos, los cuales son

$$2x^2y^4\,, \quad -6yz\,, \quad 8(5x - z^3),$$

y a su vez, la expresión $8(5x - z^3) = 40x - 8z^3$ consta de dos términos.
En álgebra, si consideramos el producto $x \cdot x$ lo vamos a expresar como x^2, es decir, $x \cdot x = x^2$, lo cual se lee como x *cuadrado*; el producto $x \cdot x \cdot x$, el cual se denota por x^3, se dice x *cúbica*. En general, al producto de x por sí misma n-veces se escribe x^n y se dice que es la n*-ésima* potencia de x. Esta regla nos lleva a la siguiente definición.

> **Si n es un número entero, el símbolo x^n se denomina como *n-ésima potencia* de x y es el producto de n factores, cada uno de los cuales es x. La variable x se llama *base* y n es el *exponente*.**

También se pueden tener expresiones con exponentes negativos, que representan el inverso multiplicativo, es decir,

$$x^{-1} = \frac{1}{x}\,, \quad x^{-3} = \frac{1}{x^3}\,, \quad x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

y en general

$$x^n = \frac{1}{x^n}$$

para cualquier valor de n.

Como consecuencia de la definición anterior, se tienen las siguientes leyes aplicables a los productos que comprenden potencias.

Leyes de los exponentes: siendo x y y un par de variables, y m y n números enteros, entonces se cumplen

1. $x^n x^m = x^{n+m}$**,**

2. $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$**,**

3. $(xy)^n = x^n y^n$**,**

4. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$**.**

Mostrar que estas leyes son ciertas no es nada complicado. Por ejemplo, para mostrar que $x^n x^m = x^{n+m}$ se cumple, basta desarrollar cada uno de las potencias, así

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ veces}} \qquad \text{y} \qquad x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ veces}},$$

por lo tanto, al multiplicar estás dos cantidades tenemos

$$x^n x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n+m \text{ veces}} = x^{n+m}.$$

Nota: A partir de la última propiedad sabemos que si $x \neq 0$

$$1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0.$$

Además, es muy importante tener muy claro que para aplicar las propiedades de los exponentes, es necesario que las bases de dos expresiones sean iguales, es decir,

$$x^i x^j = x^{i+j}, \quad ✔ \qquad x^{2n} x = x^{2n+1}, \quad ✔$$

pero

$$x^n y^m = x^{n+m}, \quad ✘ \qquad x^n y^m = xy^{n+m}. \quad ✘$$

Ejemplo 3.1 *Usar las leyes de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones algebraicas:*

1. $z^4 z^3$,
2. $\left(3x^2y^3\right)\left(2x^3y^5\right)$,
3. $\left(4x^2y^3\right)^4$,
4. $\left(x^2y^3\right)^3\left(xy^4\right)^2$,
5. $3m\left(2m^2 - 4mn + 5n^2\right)$,
6. $\frac{6a^2b^{-3}}{5a^{-3}}$,
7. $\left(\frac{3a^{-5}}{b^{-3}}\right)^{-4}$,
8. $\left(-5x\right)^{-4}$.

1. Aplicamos las leyes de los exponentes porque los factores tienen la misma base, así
$$z^4 z^3 = z^{4+3} = z^7 \,.$$

2. Eliminamos primero los paréntesis y luego conmutamos varias veces,
$$\left(3x^2y^3\right)\left(2x^3y^5\right) = 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^5 \,,$$
y luego efectuamos las operaciones indicadas, aplicando las leyes de los exponentes en los factores que tengan la misma base,
$$\Longrightarrow \qquad 6x^5y^8 \,.$$

3. Cuidadosamente seguimos la tercera ley de los exponentes,
$$(4x^2y^3)^4 = 4^4 \cdot \left(x^2\right)^4 \cdot \left(y^3\right)^4 \,,$$
ahora aplicamos la segunda ley de los exponentes,
$$\Longrightarrow \qquad 256x^{(2)(4)}y^{(3)(4)} = 256x^8y^{12} \,.$$

4. Nuevamente aplicamos la tercera y luego la segundo ley de los exponentes, así

$$\left(x^2y^3\right)^3\left(xy^4\right)^2 = x^{2\cdot3}y^{3\cdot3}x^{1\cdot2}y^{4\cdot2} = x^6y^9x^2y^8 \,.$$

   Conmutamos los términos y aplicamos la primera ley de los exponentes para concluir,

$$\Longrightarrow \qquad x^6y^9x^2y^8 = x^6x^2y^9y^8 = x^8y^{17} \,.$$

5. Efectuamos primero el producto y aplicamos las leyes adecuadas,

$$\begin{aligned} 3m\left(2m^2 - 4mn + 5n^2\right) &= (3m)(2m^2) - (3m)(4mn) + (3m)(5n^2) \\ &= 6m^3 - 12m^2n + 15mn^2 \,. \end{aligned}$$

6. Reescribimos el cociente, aplicando la cuarta ley de los exponentes, quedando

$$\frac{6a^2b^{-3}}{5a^{-3}} = 6a^2b^{-3}5^{-1}a^3 \,,$$

   y conmutando los términos, finalmente obtenemos

$$\Longrightarrow \qquad 6(5^{-1})a^5b^{-3} = \frac{6a^5}{5b^3} \,.$$

7. Primero reescribimos el cociente,

$$\left(\frac{3a^{-5}}{b^{-3}}\right)^{-4} = \left(3a^{-5}b^3\right)^{-4} ,$$

   luego aplicamos la cuarta ley de los exponentes y dejamos la expresión final en términos de potencias con exponente positivo,

$$\left(3a^{-5}b^3\right)^{-4} = 3^{-4}\left(a^{-5}\right)^{-4}\left(b^3\right)^{-4} = \frac{a^{(-5)(-4)}b^{3(-4)}}{3^4} = \frac{a^{20}}{81b^{12}} \,.$$

8. Aplicamos correctamente las leyes de los exponentes,

$$\left(-5x\right)^{-4} = (-5)^{-4}x^{-4} = \frac{1}{(-5)^4x^4} = \frac{1}{625x^4} \,.$$

❑

Cuando dos o más términos contienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes, se dice que son *términos semejantes*.

Por ejemplo $8x^2y$ y $-7x^2y$ son términos semejantes, también lo son $7x^3bc$ y $12x^3bc$. Pero ab^2 y a^2b no son términos semejantes, tampoco $6xz$ y $6xw$, ni tampoco $8x^3y$ y $8x^2y$.

Cuando una expresión algebraica tiene dos o más términos semejantes, podemos utilizar las propiedades de los números reales para simplificarla (operaciones aritméticas) y así, decimos que una expresión algebraica está simplificada cuando no tiene términos semejantes.

Ejemplo 3.2 *Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:*

1. $3z + 2z$,
2. $8.5x^2y - 4.9x^2y + 13.2x^2y$,
3. $-4xy^2 + 7xy^2 + 12$,
4. $xyz^3 - 4x^2y + 2xyz^3 + 3x^2y$,
5. $xyz + xy^3 - 4zy + 22xy^3 + 9zy - 12xyx$,
6. $-ab + ba + 4ab - 5ba + 2$,
7. $3a - [2a - (a + b)]$,
8. $3m - [2m + 3n - (m - n)] + 4n$,
9. $(3x - y) - [(2x - y) - (5a - b)]$.

1. Como $3z$ y $2z$ son términos semejantes, los sumamos como dos números reales, así
$$3z + 2z = 5z\,.$$

2. De igual forma,
$$8.5x^2y - 4.9x^2y + 13.2x^2y = 16.8x^2y\,.$$

3. En este caso, sólo los dos primeros sumandos son términos semejantes, por lo que sólo sumamos estos dos términos y el tercero queda indicando la suma por separado,

$$-4xy^2 + 7xy^2 + 12 = 3xy^2 + 12\,.$$

4. Conmutando los términos en la suma podemos juntar los términos semejantes, para finalmente sumarlos. Notemos que no todos son términos semejantes, por eso queda indicada la suma,

$$xyz^3 - 4x^2y + 2xyz^3 + 3x^2y = xyz^3 + 2xyz^3 - 4x^2y + 3x^2y = 3xyz^3 - x^2y\,.$$

5. Operamos como en el ejemplo anterior, así

$$\begin{gathered} xyz + xy^3 - 4zy + 22xy^3 + 9zy - 12xyz = \\ xyz - 12xyz + xy^3 + 22xy^3 - 4zy + 9zy = -11xyz + 23xy^3 + 5zy\,. \end{gathered}$$

6. Identificamos los términos semejantes y los sumamos, notando que $ab = ba$, por eso
$$-ab + ba + 4ab - 5ba + 2 = -ab + 2\,.$$

7. Primero eliminamos los paréntesis y después sumamos los términos semejantes, así

$$3a - [2a - (a + b)] = 3a - [2a - a - b] = 3a - [a - b] = 3a - a + b = 2a + b\,.$$

8. Nuevamente, primero eliminamos los paréntesis y vamos sumando los términos semejantes,

$$\begin{aligned} 3m - [2m + 3n - (m - n)] + 4n &= 3m - [2m + 3n - m + n] + 4n \\ &= 3m - [m + 4n] + 4n = 3m - m - 4n + 4n = 2m\,. \end{aligned}$$

9. Procedemos como lo hemos venido haciendo, como

$$\begin{aligned} (3x - y) - [(2x - y) - (5a - b)] &= 3x - y - [2x - y - 5a + b] \\ &= 3x - y - 2x + y + 5a - b = x + 5a - b\,. \end{aligned}$$

❑

3.0.3. Ejercicios:

1. Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

   - $6x - 10x$,
   - $9y + 3 + 11y + 4$,
   - $8abc - (9 - 3abc) - (5abc - 21)$,
   - $6t - 7s - 5(t - s) - t$,
   - $x^2 + y - 1.5y - 2.5x^2$,
   - $4a - 2a + 5a - y + 23b + 3$,
   - $9y + 3 + 11y + 4 - x$,
   - $x - 15 + 5(3 - 2x)$,
   - $2(3 - m) - \{2 - [5 - (2 + m) - (m + 3)]\}$,
   - $3p - \{4q - [5p - (8q - 7p)]\}$,
   - $10x - \{(3y - 4x) - [2y - (3y - 2x)] - [3y + (5x - 4y)]\}$,
   - $-t - [-5(t - 2r) + 6(3t - r)]$,
   - $3x - 8xy + 15 + 4xy - 8x - 13$,
   - $20x^2y + xy^2 - 45xy^2 - xy + x$,
   - $\big(c^2 - 3cd^2 + 4cd\big) - \big(- 8c^2 + 5cd\big)$,
   - $4a + 2(b - 6a) + 11b$,
   - $4(x + 2y) - 9(2x - 7y) - 11$,
   - $-[-5(6x - 2y) + x] + y$,
   - $-7\big(5x^2 - 2xy\big) - 8y^2 + 3xy$,
   - $\big[a^3 - \big(7 - 4a^3\big)\big] - \big[6 - \big(- 2a^3\big)\big] + 9a^3$.

2. Usar las leyes de los exponentes para simplificar:

   - $\big(3b^2\big)\big(4b^4\big)$,
   - $\big(6r^3s^4\big)\big(4r^2s^3\big)$,
   - $\big(2a^2b\big)^3$,
   - $\big(5a^2b^3c^2\big)^3$,

- $\left(3x^4y^2z\right)\left(2x^3y^5z^2\right)$,
- $\left(4x^2y^3z\right)^3$,
- $\left(3x^2y^3\right)\left(2y^2z\right)\left(xz^3\right)$,
- $\left(3c^3d^2\right)^2$,
- $\left(2a^2b\right)\left(3ac^2\right)\left(4b^2c\right)$,
- $\left(7u^2\right)\left(6uvw^2\right)\left(2u^2v^3\right)$,
- $\left(3x^4y^2z\right)^2\left(x^3y^5z^2\right)$,
- $\left(2x^2y^3\right)\left(5x^3y\right)$,
- $\left(8r^3s^2t^4\right)\left(3r^2s^5t^3\right)$,
- $\left(y^2\right)^4\left(xy^3\right)^3$,
- $\left(8yz^{-3}\right)^4\left(3y^3z^5\right)^{-3}$,
- $\left[\left(xyz^{-2}\right)^{-5}\left(3x^2y^3z^5\right)^3\right]^2$,
- $\left(5y^3\right)\left(3y^5\right)^7$,
- $\left\{\left(xy\right)\left(3xy^3\right)\left(xy^{-1}\right)\right\}^2$,
- $\left[\left(a^2b\right)\left(3ab^2\right)\left(-2ab\right)\right]^2$,
- $\left(5h^2k\right)\left(2hk\right)\left(3k^2\right)$,
- $\frac{3x^{-4}}{(3y)^{-2}}$,
- $\left(\frac{2x}{2y^3}\right)^{-2}$,
- $\left(\frac{2a^{-2}b}{a^{-1}}\right)^{-1}$,
- $\left(\frac{a^3b^5}{ab^{-2}}\right)^{-4}$,
- $\left(\frac{x^2y^0}{z^3}\right)^{-1}$.

3. Eliminar los símbolos de agrupación en las siguientes expresiones:

- $2b((a-2b+3c)-2c(2a+3b)+2a(2c-b))$,
- $6a^2-a\left[2a^2-3(-2a-4b)\right]-3ab$,

- $4c\big[2b^2 - 3c(c-2b) - b(6c+2b)\big] + 4\big(b^2+c^2\big)$,
- $2[2x - 3(x+y)] - 3\big\{x^2 - [2y - x(x+y)]\big\}$,
- $8x^3 - 3x\big\{y^2 - 2\big[3x^2 + y(x-3y)\big] + 3x(2x-y)\big\} - 2x^2(4x+7y)$.

4. Mostrar que son ciertas las leyes de los exponentes 2, 3 y 4.

Capítulo 4

Radicales.

En este capítulo estudiaremos expresiones algebraicas que involucran exponentes que no son necesariamente números enteros, sino números racionales, además vamos a extender las leyes de los exponentes estudiadas en la sección anterior a estos casos. Las potencias con exponente racional se conocen como *radicales*.

Para x, y, dos números reales y n un número natural, decimos que y es la *raíz n-ésima* de x, que se denota por

$$y = \sqrt[n]{x}\,.$$

Esto es lo mismo que decir $x = y^n$.

El símbolo $\sqrt{\cdot}$ se llama *radical*, x se llama *radicando* y n es el *índice*. Si $n = 2$, generalmente no se escribe y es conoce como raíz cuadrada.

Notemos que si n es un número par, entonces $x = y^n > 0$ para cualquier valor de y (que no sea cero); por esta razón no es posible calcular como un número real $\sqrt[2]{-4}$ o $\sqrt[4]{-8}$ porque resulta que

$$y^2 \neq -4 \qquad \text{y} \qquad y^4 \neq -8 \qquad \text{para cualquier } y\,.$$

Entonces, tengamos presente de aquí en adelante que no es posible calcular, como un número real, las raíces con índice par de números negativos.

Ejemplo 4.1 *Calcular* $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt{9}$.

- Sabemos que $5^3 = 125$, entonces 5 es una raíz cúbica de 125; es decir, $\sqrt[3]{125} = 5$.

- Sabemos que $2^5 = 32$, entonces 2 es una raíz quinta de 32; es decir, $\sqrt[5]{32} = 2$.
- Sabemos que
  - $3^4 = 81$, entonces 3 es una raíz cuarta de 81, es decir, $\sqrt[4]{81} = 3$;
  - pero también $(-3)^4 = 81$, entonces -3 también es una raíz cuarta de 81, es decir, $\sqrt[4]{81} = -3$.

  Entonces, $\sqrt[4]{81} = \pm 3$.
- Como $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$, entonces 3 y -3 son raíces cuadradas de 9; es decir, $\sqrt{9} = \pm 3$.

❑

Siguiendo las leyes de los exponentes estudiadas en el capítulo anterior podemos escribir el producto de n veces la expresión $x^{\frac{1}{n}}$ y queda

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x\,.$$

Aplicando la definición de raíz n-ésima, podemos escribir que

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,.$$

Por tanto, ahora contamos con una notación alterna para los radicales. Así,

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x\,.$$

Se cumple la propiedad

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}\,.$$

Esta propiedad nos dice que podemos intercambiar el orden de aplicación de las potencias sin alterar la expresión, porque por un lado

$$x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1}{m}n} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

y por otro lado

$$x^{\frac{n}{m}} = x^{n\frac{1}{m}} = \left(x^n\right)^{\frac{1}{m}}\,,$$

por tanto

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}} = \left(x^n\right)^{\frac{1}{m}} .$$

Y esta propiedad nos auxilia en el cálculo de muchas más potencias, por ejemplo,

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3\,,$
- $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4\,,$
- $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2\,,$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4\,,$
- $(-4)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{-4}\right)^3$ y no lo podemos calcular, no está definida,
- $(-1)^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^4 = (-1)^4 = 1.$

4.1. Operaciones con radicales.

Las operaciones con radicales se reducen a las operaciones entre potencias, porque ya vimos que un radical es en realidad una potencia con exponente fraccionario.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Si $x > 0$, $y > 0$ y n es un número natural entonces**

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

   es decir, la raíz n-ésima de un producto es el producto de las raíces n-ésimas.

2. **Si $x > 0$, $y > 0$ y n es un número natural entonces**

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

   es decir, la raíz n-ésima de un cociente es el cociente de las raíces n-ésimas.

3. Si $x > 0$ y m, n son números naturales entonces

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

es decir, da lo mismo calcular la raíz n-ésima y luego elevar a la potencia m que primero elevar a la potencia m y luego calcular la raíz n-ésima.

4. Si $x > 0$ y m, n son números naturales entonces

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

es decir, da lo mismo sacar raíz n-ésima y luego sacar raíz m-ésima que sacar raíz mn-ésima.

En estas propiedades estamos indicando que $x > 0$ y $y > 0$, pero lo hacemos porque no sabemos sin n es un número par o impar, ya que recordemos que no podemos calcular raíces con índice par a números negativos. Pero teniendo cuidado, estas propiedades también son válidas para $x < 0$ y $y < 0$.

Decimos que estas propiedades (operaciones con radicales) son en realidad las propiedades de las potencias (operaciones con potencias) porque por ejemplo, la primera propiedad nos dice

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}\,.$$

Esto es cierto porque

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}\,,\ \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} = (xy)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{xy}\,.$$

Ejemplo 4.2 *Simplificar*

1. $\sqrt{48}$,

2. $\sqrt[3]{\frac{24}{27}}$,

3. $\sqrt[6]{2^3}$,

4. $\sqrt[3]{8000}$,

5. $\sqrt[4]{\frac{25x^2}{4y^4}}$,

6. $\sqrt[6]{16x^4y^8z^{10}}$,

7. $\sqrt[4]{(81a^8b^{12})^5}$,

8. $\sqrt{\sqrt[6]{(y-1)^{60}(x+5)^{24}}}$.

1. Para simplificar $\sqrt{48}$, como no es una raíz exacta (que exista un número que al cuadrado dé precisamente 48), vamos a escribir en factores el radicando y aplicamos las propiedades de los radicales así,
$$\sqrt{48}=\sqrt{(16)(3)}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,,$$
donde hemos aprovechado que 16 si tiene raíz cuadrada exacta.

   A menos que se indique específicamente lo contrario, es común siempre escribir las raíces con índice par con el signo positivo.

2. Ahora aplicamos primero las propiedades de los radicales y luego factorizamos cada uno de los radicandos (en caso de que no tenga raíz exacta), entonces
$$\sqrt[3]{\frac{24}{27}}=\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{(8)(3)}}{3}=\frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\,.$$

3. Para simplificar, descomponemos el índice 6 del radical en los factores 2 y 3, con el fin de aplicar la propiedad 4, observemos
$$\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt{2}\,.$$

4. Otra vez factorizamos primero el radicando para que, después de aplicar propiedades de los radicales, obtengamos raíces exactas, así
$$\sqrt[3]{8000}=\sqrt[3]{1000}\sqrt[3]{8}=10(2)=20\,.$$

5. Sigamos con cuidado cada una de las igualdades, en las que aplicamos varias veces las propiedades adecuadas,
$$\sqrt[4]{\frac{25x^2}{4y^4}}=\sqrt{\sqrt{\frac{25x^2}{4y^4}}}=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{5x}{2y}\right)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{5x}{2y^2}}=\sqrt{\frac{5x}{2y^2}\frac{2}{2}}=\sqrt{\frac{10x}{4y^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{\sqrt{4y^2}}=\frac{1}{2y}\sqrt{10x}.$$

6. Hacemos algo muy similar al caso anterior, por tanto

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{16x^4y^8z^{10}} &= \sqrt[3]{\sqrt{16x^4y^8z^{10}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(4x^2y^4z^5\right)^2}} \\ &= \sqrt[3]{4x^2y^4z^5} = \sqrt[3]{(y^3z^3)(4x^2yz^2)} = yz\sqrt[3]{4x^2yz^2}.\end{aligned}$$

7. De igual manera,

$$\sqrt[4]{\left(81a^8b^{12}\right)^5} = \left(\sqrt[4]{81a^8b^{12}}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{\left(3a^2b^3\right)^4}\right)^5 = \left(3a^2b^3\right)^5 = 3^5a^{10}b^{15}.$$

8. Ahora en vez de descomponer el radical, lo componemos como

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[6]{(y-1)^{60}(x+5)^{24}}} &= \sqrt[12]{(y-1)^{60}(x+5)^{24}} \\ &= \sqrt[12]{(y-1)^{60}}\sqrt[12]{(x+5)^{24}} = (y-1)^5(x+5)^2.\end{aligned}$$

4.1.1. Ejercicios:

1. Simplificar los siguientes radicales:

- $\sqrt{81x^4}$,
- $\sqrt[3]{8x^6}$,
- $\sqrt[4]{25x^2}$,
- $\sqrt[4]{32n^5m^6}$,
- $\sqrt[6]{25x^8y^4}$,
- $\sqrt[4]{\frac{(x-1)^2}{16x^2}}$,
- $\sqrt{\frac{75a^3}{4}}$,
- $\sqrt[5]{-10000a^{10}}$,
- $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}}$,
- $\sqrt{\sqrt[3]{64b^{12}}}$,
- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{36}y^{24}}}$,
- $\sqrt[7]{64a^2b^4}\sqrt[7]{512a^3b^6}$,

- $\sqrt[4]{256x^{32}y^8z^6}$,
- $\sqrt[6]{x^3y^6z^{12}}$,
- $\frac{\sqrt[8]{a^{15}b^{45}c^{20}}}{\sqrt[8]{a^{79}b^{21}c^{68}}}$,
- $\sqrt{0.01b^6}$,
- $\frac{\sqrt[3]{x^5w^8z^4}}{\sqrt[3]{x^2w^2z^{-11}}}$,
- $\sqrt[9]{\sqrt{(y^2-2)^{54}(5x+3)^6}}$,
- $\sqrt[4]{(\sqrt{2^3}a^4c^2)^3}$,
- $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}}$.

2. Mostrar que son ciertas las propiedades 2, 3 y 4 de los radicales.

Capítulo 5

Productos notables y factorización.

Ya que conocemos las reglas básicas algebraicas, ahora mostramos algunos métodos que permiten efectuar mentalmente muchos pasos involucrados en procesos algebraicos, que resultan elementos básicos de operaciones matemáticas más complejas. De igual manera se ilustrarán algunos métodos para factorizar cierto tipo de expresiones algebraicas. Si entendemos y manipulamos eficazmente lo que a continuación exponemos, el álgebra básica nos resultará muy sencilla y nos ahorraremos muchos problemas en el futuro.

Comenzamos por mostrar métodos eficientes para operar algebraicamente y posteriormente haremos el proceso inverso, indentificaremos productos que dan lugar al desarrollo algebraico encontrado.

5.1. Productos notables.

5.1.1. Producto de dos binomios.

El producto de los binomios $ax+by$ y $cx+dy$ es la suma de los productos de los dos términos de un binomio con los dos términos del otro, entonces conseguimos

$$(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + adxy + bcxy + bdy^2\,,$$

que después de sumar los términos semejantes obtenemos la expresión

$$(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2\,, \tag{5.1}$$

Si observamos cuidadosamente, hacemos las siguientes notaciones sobre cada término obtenido:

- el primer término obtenido en (5.1) es el producto de los dos primeros términos de los binomios,
- el término intermedio en (5.1) es la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo término del otro,
- el tercer término en (5.1) es el producto de los dos segundos términos de los binomios.

Ejemplo 5.1 *Multiplicar* $2x-3$ *por* $7x+5$.

Podemos realizar el producto término a término

$$(2x-3)(7x+5) = 14x^2 + 10x - 21x - 15 = 14x^2 - 11x - 15\,.$$

También podemos identificar las constantes a, b, c y d para poder aplicar (5.1), así $a = 2$, $b = -3$, $c = 7$ y $d = 5$, mientras que $y = 1$, entonces aplicando la ecuación (5.1) obtenemos

$$(2x-3)(7x+5) = (2)(7)x^2+((2)(5)+(-3)(7))x(1)+(-3)(5)(1)^2 = 14x^2-11x-15\,.$$

Por ambos lados obtuvimos lo mismo. Quizás para este ejemplo nos resultó más sencillo realizar la operación indicada, pero veremos en ejemplos posteriores que lograremos reducir el trabajo en ciertas ocasiones muy comunes.

❑

Ejemplo 5.2 *Realizar los productos:*

1. $(x-2)(x+5)$,
2. $(x+6)(-5x+7)$,
3. $(2x-3y)(7x+5y)$,
4. $(x+y)(x+5y)$.

1. $(x-2)(x+5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$,
2. $(x+6)(-5x+7) = -5x^2 + 7x - 30x + 42 = -5x^2 - 23x + 42$,
3. $(2x-3y)(7x+5y) = 14x^2 + 10xy - 21xy - 15y^2 = 14x^2 - 11xy - 15y^2$,
4. $(x+y)(x+5y) = x^2 + 5xy + xy + 5y^2 = x^2 + 6xy + 5y^2$.

❑

Pongamos especial atención en el par de productos $(x+y)(x+y)$ y $(x-y)(x-y)$, porque

$$(x+y)(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

y

$$(x-y)(x-y) = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Los dos ejemplos anteriores son casos especiales de (5.1) que los podemos resumir en el siguiente resultado.

Un binomio al cuadrado es la suma del primer término al cuadrado, el doble producto del primero por el segundo y el cuadrado del segundo término, es decir,

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \,. \tag{5.2}$$

Éste es un producto notable y es conocido como *binomio al cuadrado* o *cuadrado perfecto*.

Ejemplo 5.3 *Multiplicar* $2x+5y$ *por sí mismo.*

Apoyándonos en (5.2), hacemos

$$(2x+5y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 25x^2 + 20xy + 25y^2.$$

❑

Ejemplo 5.4 *Realizar la operación* $(x-3y)^2$.

Seguimos la ecuación (5.2), entonces

$$(x-3y)^2 = (x)^2 + 2(x)(-3y) + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2.$$

❑

Ahora, hagamos el producto $(x+y)(x-y)$,

$$\Longrightarrow \qquad x^2 - xy + xy - y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - y^2\,.$$

El producto de la suma de dos téminos por la diferencia de los dos mismos términos algebraicos se conoce como el producto notable *binomios conjugados* y es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, es decir,

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2\,. \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.5 *Multiplicar $x - 3y$ por $x + 3y$*

Seguimos (5.3) para el cálculo:

$$(x-3y)(x+3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2.$$

❑

Ejemplo 5.6 *Realizar el producto* $(x^3 + 4y)(x^3 - 4y)$.

Sólo seguimos (5.3), así

$$(x^3 - 4y)(x^3 + 4y) = (x^3)^2 - (4y)^2 = x^6 - 16y^2.$$

❑

Aplicando la fórmula (5.1) cuántas veces sea necesario, obtenemos los siguientes *productos notables* esenciales para el estudio del álgebra.

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\,,\\
(x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2\,,\\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\,,\\
(x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\,,\\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\,,\\
(x-y)^4 &= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\,,\\
(x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\,,\\
(x-y)^5 &= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5\,.
\end{aligned}$$

Y como nos podemos imaginar, pues podríamos escribir tantos productos notables como queramos; en realidad, en la práctica sólo se utilizan los primeros productos que escribimos.

5.1.2. Ejercicios:

Encontrar los productos enlistados a continuación, empleando los métodos de productos notables correspondientes:

1. $(x+1)(x+2)$,
2. $(4x+1)(x+5)$,
3. $(3x-1)(6y+4)$,
4. $(2c-b)(4c-6b)$,
5. $(5h+7k)(3h-8k)$,
6. $(4x+5y)(2x+3y)$,
7. $(x-5y)(x+5y)$,
8. $(4x+1)(4x-1)$,
9. $(7b^2+3x^3)(7b^2-3x^3)$,
10. $(3x+4z)(3x-4z)$,
11. $(5b^2+6c^3)(5b^2-6c^3)$,
12. $(a+2x)(a-2x)$,
13. $(6m-5n)^2$,
14. $(7r-3s)^2$,
15. $(x+3y)^2$,
16. $(x-y+z)^2$,
17. $(p-q+2r)^2$,
18. $(3y-z)^3$,
19. $(x-5y)^5$,
20. $(6y+2x)^4$,

21. $(x + 2y^2)^4(x - y)$,

22. $(-xy + z)^3(x + 5)$,

23. $(3x - 1)^3(6y - x)^2$,

24. $(2c + b)^5(4c - 6b)^3$,

25. $(3r - 1)^4)(6 - r)^2$,

26. $[3(a + b) - 2][5(a + b) + 3]$,

27. $[2(3x - y) + 3][5(3x - y) - 7]$,

28. $[4(2a - c) + 5][3(2a - c) - 4]$,

29. $[7(2y + 3z) + 2][3(2y + 3z) - 1]$,

30. $[(a^2 - 1) + a][(a^2 - 1) - a]$,

31. $[(a^2 - 1) + a][(a^2 - 1) - a][(a^2 - 1) - a]^3$,

32. $[(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x]$,

33. $[(2b^2 + c^2) - 2bc][(2b^2 + c^2) + 2bc]$,

34. $[(a^3 + a) + (a^2 + 1)][(a^3 + a) - (a^2 + 1)]$,

35. $[(x^3 - x) + (x^2 - 1)][(x^3 - x) - (x^2 - 1)]$.

5.2. Factorización.

Factorizar una expresión algebraica polinomial o un polinomio es reescribir en factores el polinomio original en polinomios de grado menor, es decir, en polinomios cuya potencia mayor no supera la potencia mayor del polinomio original. Para esto, es necesario encontrar polinomios de menor grado cuyo producto sea el polinomio dado. Vamos a exponer los casos más usuales en polinomios y su posible factorización.

1. Polinomios con un factor común.

2. Binomios conjugados.

3. Cuadrados perfectos.
4. Trinomios factorizables y que no son cuadrados perfectos.

5.2.1. Polinomios con un factor común.

Si cada término de un polinomio se puede descomponer en dos productos de tal suerte que un factor del producto es común a todos los términos, entonces el polinomio se puede factorizar por ese factor mencionado.

Ejemplo 5.7 *Factorizar el polinomio* $3x^3 - 15x^2 + 9x$.

Comenzamos factorizando cada uno de los términos de tal forma que un factor sea común para cada uno de los términos como

$$\begin{array}{lcl} 3x^2 & \Rightarrow & (3x)(x)\,, \\ -15x^2 & \Rightarrow & (3x)(-5x)\,, \\ 9x & \Rightarrow & (3x)(3)\,, \end{array}$$

así, podemos reescribir el polinomio

$$3x^3 - 15x^2 + 9x = (3x)(x) + (3x)(-5x) + (3x)(3)$$

y factorizamos en este momento, que no es otra cosa más que sumar respecto del factor común,

$$(3x)(x) + (3x)(-5x) + (3x)(3) = (3x)(x^2 - 5x + 3).$$

Ahora, notemos que el polinomio que se obtuvo ya no tiene factores en común, por lo que hemos factorizado lo más que es posible.

❑

Ejemplo 5.8 *Factorizar la expresión algebraica* $(a+b)(a-b) + 3a(a+b) + (a+b)^2$.

Hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior, pero ahora nos ayuda el hecho que cada uno de los términos ya está factorizado, así

$$\begin{array}{lcl} (a+b)(a-b) & \Rightarrow & (a+b)(a-b)\,, \\ 3a(a+b) & \Rightarrow & (a+b)3a\,, \\ (a+b)^2 & \Rightarrow & (a+b)(a+b)\,, \end{array}$$

entonces basta sumar respecto del factor $(a+b)$, así

$$(a+b)(a-b)+3a(a+b)+(a+b)^2=(a+b)((a-b)+3a+(a+b))$$

y simplificando sería

$$(a+b)(a-b)+3a(a+b)+(a+b)^2=(a+b)(5a)\,.$$

❑

Ejemplo 5.9 *Factorizar la expresión algebraica* $z(z-1)-12(z-1)$.

Nuevamente los factores ya están dados y distinguimos directamente que el término en común es $(z-1)$ y por lo tanto sólo basta sumar respecto de este término, así

$$z(z-1)-12(z-1)=(z-1)(z-12)\,.$$

❑

Ejemplo 5.10 *Factorizar la expresión algebraica* $ab-3ac+3b-9c$.

Este caso no es tan directo. Sigamos lo pasos cautelosamente,

$ab-3ac+3b-9c$	la expresión a factorizar,
$a(b-3c)+3b-9c$	factorizamos a de dos términos,
$a(b-3c)+3(b-3c)$	factorizamos 3 de otros dos términos,
$(b-3c)(a+3)$	sumamos respecto del término $(b-3c)$.

Finalmente,

$$ab-3ac+3b-9c=(b-3c)(a+3)\,.$$

❑

5.2.2. Binomios conjugados.

Recordamos, del capítulo anterior, que

$$(x-y)(x+y)=x^2-y^2,$$

por lo que, si nos encontramos con una diferencia de cuadrados, la factorización es muy sencilla, sería

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y).$$

La regla es muy sencilla, los factores de la diferencia de los cuadrados de dos términos son, respectivamente, la suma y la diferencia de los dos términos.

Ejemplo 5.11 *Factorizar la expresión* $4x^2 - y^2$.

Escribimos por separado cada término, indicando el cuadrado de la expresión,

$$4x^2 = (2x)^2 \qquad \text{y} \qquad y^2 = (y)^2\,.$$

Notemos que no hemos incluído el signo que separa (en este caso es $-$) los cuadrados en la expresión original. Entonces, la factorización es la suma y la diferencia de los términos que se elevan al cuadrado, como sigue

$$4x^2 - y^2 = (2x)^2 - (y)^2 = (2x - y)(2x + y)\,.$$

❑

Ejemplo 5.12 *Factorizar la expresión* $49x^2 - 9z^2$.

Escribimos los cuadrados como

$$49x^2 = (7x)^2 \qquad\qquad 9z^2 = (3z)^2\,,$$

y ahora factorizamos

$$49x^2 - 9z^2 = (7x)^2 - (3z)^2 = (7x - 3z)(7x + 3z)\,.$$

❑

Ejemplo 5.13 *Factorizar la expresión* $(a - b)^2 - 3c^2$.

Ya no hacemos el paso intermedio y escribimos directamente la factorización,

$$(a - b)^2 - 3c^2 = [(a - b) - \sqrt{3}c][(a - b) + \sqrt{3}c].$$

❑

Ejemplo 5.14 *Escribir los factores de la expresión* $(4x)^2 - (3y + z)^2$.

Este caso es muy sencillo porque ya nos dan quienes son los términos que forman los factores y solamente simplificamos al final, entonces

$$(4x)^2 - (3y + z)^2 = [4x + (3y + z)][4x - (3y + z)] = (4x + 3y + z)(4x - 3y - z).$$

5.2.3. Cuadrados perfectos.

Recordamos que en la primera sección de este capítulo escribimos

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2\,,$$

lo que quiere decir que si nos encontramos con la suma de dos cuadrados y la suma (o resta) del doble producto de estos términos (sin el cuadrado), entonces se trata de un cuadrado perfecto. El signo del doble producto indica si la expresión que debe estar al cuadrado debe estar escrito como una suma o diferencia. Observemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.15 *Factorizar la expresión* $9x^2 - 30x + 25$.

Comenzamos identificando dos términos que se encuentran elevados al cuadrado,

$$9x^2 = (3x)^2 \qquad \text{y} \qquad 25 = (5)^2\,,$$

luego, nos damos cuenta de que el término restante es el doble del producto de los dos términos (sin el cuadrado) que acabamos de escribir, es decir,

$$30x = 2(3x)(5)\,.$$

De esta manera, sabemos que el trinomio dado es un cuadrado perfecto y escribimos

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2 = (3x - 5)^2\,.$$

Escribimos el signo $-$ en la factorización porque en el trinomio el término que aparece sin los cuadrados es negativo. La pregunta podría ser ¿y cómo sabemos cual término es el negativo? Y la respuesta es muy sencilla: no importa. Cualquiera de los dos términos puede ser, porque es muy fácil de verificar que

$$(3x - 5)^2 = (-3x + 5)^2\,.$$

❑

Ejemplo 5.16 *Factorizar la expresión* $4a^2 + 12ab + 9b^2$.

Identificamos los términos que están al cuadrado, entonces

$$4a^2 = (2a)^2 \qquad \text{y} \qquad 9b^2 = (3b)^2\,,$$

entonces, ahora notamos que el término restante se puede escribir como el doble producto de los dos términos anteriores (sin el cuadrado), así

$$12ab = 2(2a)(3b)$$

y finalmente podemos escribir el cuadrado perfecto

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2 = (2a + 3b)^2\,.$$

El cuadrado perfecto tiene el signo positivo porque el término que no está al cuadrado en la expresión original tiene el signo positivo.

❏

Ejemplo 5.17 *Factorizar la expresión* $w^2 + 2w + 1$.

Hacemos el proceso un poco más rápido. Identificamos que los términos que se encuentran al cuadrado son w^2 y 1, y el doble producto de estos términos sin el cuadrado es $2w$, por tanto, el cuadrado perfecto es

$$w^2 + 2w + 1 = (w + 1)^2.$$

❏

Ejemplo 5.18 *Factorizar la expresión* $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

Los términos que se encuentran al cuadrado son x^2 y $9/4$, y el término restante es el doble producto de estos dos sin el cuadrado, por tanto

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

❏

5.2.4. Trinomios factorizables y que no son cuadrados perfectos.

Consideremos un trinomio del tipo $px^2 + qxy + ry^2$, donde indicamos con p, q y r constantes y por x y y las variables. Ahora pensemos que este trinomio se puede factorizar, entonces escribimos

$$px^2 + qxy + ry^2 = (ax + by)(cx + dy)\,,$$

en donde a, b, c y d son constantes que debemos determinar para lograr la factorización. En realidad esto no es muy complicado, sólo tenemos que realizar el producto $(ax + by)(cx + dy)$ para conocer estas constantes, así

$$px^2 + qxy + ry^2 = (ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2\,,$$

por tanto,

$$p = ac\,, \quad r = bd \quad \text{y} \quad q = ad + bc.$$

Es decir, si $px^2 + qxy + ry^2$ se expresa como el producto de dos binomios, los primeros términos de los binomios deben ser factores de px^2; los dos segundos términos deben ser factores de ry^2 y la suma de los productos del primer término de cada binomio por el segundo término del otro, debe ser qxy. A estos dos últimos productos los llamamos productos cruzados.

Ejemplo 5.19 *Factorizar la expresión* $6x^2 + 11x - 10$.

Hacemos la identificación $p = 6$, $q = 11$ y $r = -10$, donde $y = 1$. Entonces tenemos que

$$6 = ac\,, \quad 11 = bd \quad \text{y} \quad -10 = ad + bc.$$

Con las herramientas con las que contamos hasta el momento, la manera de encontrar estos valores es por "ensayo y error". Después de realizar uno que otro intento sabemos que $a = 3$, $b = -2$, $c = 2$ y $d = 5$, por eso

$$6x^2 + 11x - 10 = (3x - 2)(2x + 5).$$

❑

Ejemplo 5.20 *Factorizar la expresión* $x^2 - 5x - 6$.

Hacemos exactamente el mismo proceso anterior, el cual se puede seguir sin ningún problema y el cual ya no hacemos aquí para acostumbrarnos a no realizar tantos pasos intermedios. La factorización sería

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1).$$

❑

Ahora, con los desarrollos que se realizaron en la sección de productos notables podemos factorizar expresiones algebraicas como las de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.21 *Factorizar la expresión* $x^6 + y^6$.

Reescribimos como suma de cubos la expresión, es decir,

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= \left(x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3 \\ &= \left(x^2 + y^2\right)\left[\left(x^2\right)^2 - x^2y^2 + \left(y^2\right)^2\right] = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right). \end{aligned}$$

❑

Ejemplo 5.22 *Factorizar la expresión* $x^{12} - y^{12}$.

Escribimos la expresión como una diferencia de cuadrados y a su vez obtenemos otra diferencia de cuadrados, así

$$\begin{aligned} x^{12} - y^{12} &= \left(x^6\right)^2 - \left(y^6\right)^2 \\ &= \left(x^6 - y^6\right)\left(x^6 + y^6\right) = \left(\left(x^3\right)^2 - \left(y^3\right)^2\right)\left(x^6 + y^6\right) \\ &= \left(x^3 - y^3\right)\left(x^3 + y^3\right)\left(x^6 + y^6\right). \end{aligned}$$

❑

5.2.5. Ejercicios:

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas:

1. $144 - 9t^2$,
2. $3 - 10y + 8y^2$,

3. $16x^2 - 48x + 36$,
4. $5z^2 + 14z - 3$,
5. $6w^2 + 35w - 6$,
6. $16y^2 - 24y + 9$,
7. $18x^2 - 9x + 1$,
8. $100y^2 + 100y + 25$,
9. $25x^2z^2 - 49y^2$,
10. $16x^2 + 48xy + 36y^2$,
11. $6x^4y^4 - 54y^6$,
12. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$,
13. $c^3 - d^3$,
14. $c^3 + 125d^3$,
15. $y^4 - 81$,
16. $x^{12} + (x^3 - 1)^3$,
17. $a^9 - (a^2 - 1)^3$,
18. $64 + (u - v)^3$,
19. $a^{10} - b^{10}$,
20. $6y^5 - 48y^2$,
21. $(x - y)(x - y) + (x - y)y$,
22. $(a - b)2c + (a - b)4b$,
23. $4h^2 - 4h + 1$,
24. $5h^2 + 2h - 3$,
25. $12y^2 + 17yz + 6z^2$,

26. $16u^2 + 32uv + 15v^2$,
27. $49x^2 - (2y - 3z)^2$,
28. $24x^8y^6 + 2x^4y^3 - 35$,
29. $x^3 - 27y^6$,
30. $8a^3 + (c - d)^3$,
31. $27p^3 - 64q^3$,
32. $x^{12} + y^{12}$,
33. $(s + t)^3 + 1$,
34. $p^9 + q^6$,
35. $a^{20} - b^{20}$.

5.3. Álgebra de polinomios

Al inicio del capítulo 1 definimos lo que es un monomio, binomio, trinomio y en general un polinomio; el polinomio más sencillo, sin lugar a dudas, es el monomio, en el cual distinguimos tres partes: el coeficiente, la base y el exponente. En caso de haber más de una variable en un monomio, pues habrá más de un exponente. Por ejemplo, la expresión

$$5x^2yz^3$$

es un monomio donde, 5 es el coeficiente, x, y y z son la base y los exponentes son 2, 1 y 3.

> **LLamamos *grado* del monomio a la suma de los exponentes de éste y llamamos *grado del polinomio* al grado del monomio con mayor grado en éste.**

Ejemplo 5.23 *Indicar el coeficiente, base y exponentes de los monomios dados:*

1. $5x^2$,

2. $43zx^2y^3$,

3. $-18w^4y^8z^3$.

1. Para el monomio $5x^2$, 5 es el coeficiente, x la base y 2 el exponente. El grado del monomio es 2.
2. En el monomio $43zx^2y^3$, 43 es el coeficiente, zxy la base y 1, 2 y 3 son los exponentes y por tanto, el grado del monomio es 4.
3. En el monomio $-18w^4y^8z^3$, -18 es el coeficiente, wyz la base y 4, 8 y 3 son los exponentes y por tanto, el grado del monomio es 15.

❑

Ejemplo 5.24 *¿Cuál es el grado del polinomio dado?*

1. $2xy - 5xy^2$,

2. $3x^3 - 5xy^4 + 12x^3y^4$,

3. $6zx^3 + 5xy^3 - zx + y^5$,

4. $5a^3b^3c + 20ab^4c^3 - 30$.

1. En el binomio $2xy - 5xy^2$ 2 y -5 son los coeficientes, xy es la base y 1, 1, 1 y 2 son los exponentes. El grado del monomio $2xy$ es 2, el grado del monomio $-5xy^2$ es 3 y por tanto el grado del binomio es 3.
2. Dado el trinomio o polinomio $3x^3-5xy^4+12x^3y^4$, tenemos que el grado de los monomios que lo forman son 3, 5 y 7, por lo tanto sabemos que el grado del polinomio es 7.
3. Dado el polinomio $6zx^3 + 5xy^3 - zx + y^5$, observamos que los gados de los monomios que lo componen son 4, 4, 2 y 5, así que el grado del polinomio es 5.
4. Dado el polinomio $5a^3b^3c + 20ab^4c^3 - 30$, sabemos que el grado mayor de entre los monomios es 8 y por tanto éste es el grado del polinomio.

❑

5.3.1. Ejercicios:

Encuentrar el grado de cada polinomio.

1. $5y^2 - 9y + 11$,
2. $8w^2 + 5w^3 - 2(4w^2 - 4w) - 3w$,
3. $-18x^2yz^4$,
4. $36xy^2z^5 + 21x^4y + 13x^2y^7z - 11x^5z^2 - 9y^6x^3 - 8x^7y^5z^4 + 49$,
5. $6x^7 - 28x^9 + 3x^4 - 6x^5 + 22x^3 + x^6 - 7x + 23$,
6. $26a^6b^4 - 11a^5b^8 - 6abc + 70a^4b^2c$,
7. $w^8 - w^2 + 5(w^8 - 2w^{10}) - 7w^{10} - w$,
8. $y^9 + 6y^8 - 3y^4 + 25$,
9. $25x^2z^2 - 49y^2 + 13x^8z^2$,
10. $16x^2 + 48xy + 36y^2 - x^2y^2$.

Hemos visto como sumar y multiplicar monomios, por eso también es posible hacerlo con los polinomios, ya que al fin de cuentas son sumas de monomios. Para operar algebraicamente es muy importante tener claro todo lo referente a términos semejantes, así como las leyes de los exponentes y radicales.

Comezamos por mostrar ejemplos sobre suma y diferencia de polinomios.

Ejemplo 5.25 *Realizar la operación indicada para:*

1. $(4a^2 - 10ab + 6b^2) + (-3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab)$,
2. $(5r - 5s + 2t) + (-7r + 3s - 4t)$,
3. $(3xy - 2xz + 11x^3y) + (11xz + 13x^3y - 2xy^3 - 3xy)$,
4. $(5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) - (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10)$.

1. Tenemos la suma $(4a^2 - 10ab + 6b^2) + (-3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab)$ y lo primero que hacemos es eliminar los paréntesis.

$$\Rightarrow \quad 4a^2 - 10ab + 6b^2 - 3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab\,,$$

identificamos los términos semejantes (los agrupamos entre paréntesis),

$$(4a^2 - 3a^2) + (-10ab - ab) + (6b^2 - 11b^2) + 5a^2b$$

y finalmente sumamos los términos semejantes, obteniendo la suma requerida como

$$\Rightarrow \quad a^2 - 11ab - 5b^2 + 5a^2b.$$

2. Al igual que en el ejemplo anterior, primero eliminamos los paréntesis y luego agrupamos por semejanza de términos para que al final sumemos; así

$$\begin{aligned}&(5r - 5s + 2t) + (-7r + 3s - 4t)\\ &\qquad = (5r - 7r) + (-5s + 3s) + (2t - 4t)\\ &\qquad\qquad = -2r - 2s - 2t.\end{aligned}$$

3. Hacemos el mismo procedimiento de los dos casos anteriores, así

$$\begin{aligned}&(3xy - 2xz + 11x^3y) + (11xz + 13x^3y - 2xy^3 - 3xy)\\ &\quad = (3xy - 3xy) + (-2xz + 11xz) + (11x^3y + 13x^3y) - 2xy^3\\ &\qquad = 9xz + 24x^3y - 2xy^3.\end{aligned}$$

4. Ahora debemos de ralizar la resta

$$(5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) - (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10)\,,$$

que requiere del mismo procedimiento realizado teniendo en cuenta que la eliminación del paréntesis afecta a los términos que se encuentran en el polinomio que está restando; así

$$\begin{aligned}&(5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) - (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10)\\ &\qquad = 5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12 - 6x^3 + 9xy^2 - 8x + 10\\ &\quad = (5x^3 - 6x^3) + x^2y + (-7xy^2 + 9xy^2) - 8x + (12 + 10)\\ &\qquad\qquad = -x^3 + x^2y + 2xy^2 - 8x + 22.\end{aligned}$$

❑

Para multiplicar dos polinomios debemos tener presente las reglas de los exponentes y todo lo concerniente a términos semejantes.

Ejemplo 5.26 *Multiplicar* $-7a$ *por* $3a^2 - 5a + 6$.

Comenzamos escribiendo la operación y la multiplicación se lleva a cabo término a término. Es decir, cada término de un polinomio de multiplicar a cada término del otro polinomio como sigue:

$$\begin{aligned}(-7a)(3a^2 - 5a + 6) &= (-7a)(3a^2) + (-7a)(-5a) + (-7a)(6) \\ &= -21a^3 + 35a^2 - 42a\,.\end{aligned}$$

❑

Ejemplo 5.27 *Realizar la operación* $(8x^2y)(5x^2 - 4xy + y^2 - 3)$

Nuevamente hacemos el producto término a término,

$$\begin{aligned}&(8x^2y)(5x^2 - 4xy + y^2 - 3) \\ &\quad = (8x^2y)(5x^2) + (8x^2y)(-4xy) + (8x^2y)(y^2) + (8x^2y)(-3) \\ &\quad = 40x^4y - 32x^3y^2 + 8x^2y^3 - 24x^2y\,.\end{aligned}$$

❑

Ejemplo 5.28 *Multiplicar* $4x + 6$ *por* $5x^3 - 9x + 5$.

Ahora el producto término a término nos llevará un poquito más de tiempo porque tenemos dos polinomios, pero el procedimiento es exactamente el mismo. Veamos,

$$\begin{aligned}(4x + 6)(5x^3 - 9x + 5) &= (4x)(5x^3 - 9x + 5) + (6)(5x^3 - 9x + 5) \\ &= (4x)(5x^3) + (4x)(-9x) + (4x)(5) + (6)(5x^3) + (6)(-9x) + (6)(5) \\ &= 20x^4 - 36x^2 + 20x + 30x^3 - 54x + 30\end{aligned}$$

y finalmente simplificamos sumando los términos semejantes,

$$20x^4 + 30x^3 - 36x^2 - 34x + 30\,.$$

❑

Ejemplo 5.29 *Realizar el producto* $(a^2b - 3b^2 - 4ab)(5ab - 9a^2b + 8b^2)$.

Comenzamos haciendo el producto término a término y para esto, por facilidad, separamos los productos, escribiendo el producto de cada término del primer polinomio por el segundo polinomio, así

$$\begin{aligned}(a^2b)(5ab - 9a^2b + 8b^2) &= 5a^3b^2 - 9a^4b^2 + 8a^2b^3\,,\\ (-3b^2)(5ab - 9a^2b + 8b^2) &= -15ab^3 + 27a^2b^3 - 24b^4\,,\\ (-4ab)(5ab - 9a^2b + 8b^2) &= -20a^2b^2 + 36a^3b^2 - 32ab^3\,.\end{aligned}$$

Ahora sumamos los respectivos resultados y simplificamos en casos de ser necesario,

$$\Rightarrow \quad 41a^3b^2 - 9a^4b^2 + 35a^2b^3 - 47ab^3 - 24b^4 - 20a^2b^2\,.$$

❑

Ejemplo 5.30 *Multiplicar* $3x - 8$ *por* $x^2 + 7x + 2$.

Realizamos el procedimiento aprendido y resulta que

$$(3x-8)(x^2+7x+2) = 3x(x^2+7x+2) - 8(x^2+7x+2) = 3x^3 + 13x^2 - 50x - 16.$$

❑

5.3.2. Ejercicio:

1. Sumar los polinomios dados en cada ejercicio:

   a) $12x^2 - 18x + 7$ y $6x^3 - 9x^2 - 5x - 19$,

   b) $z^4 - 8z^3 + 2$ y $3z^4 + 8z^3 - 5z^2 + z$,

   c) $8w^2 - 5wy + y^3 - 4$ y $7w^2 - 10wy - 8y^3$,

   d) $4a^3b - 7ab^2$ y $-6a^3b + ab^2 - b^2$,

   e) $c^4d + 3c^2d^2 - 2cd^3$ y $5c^4d - c^2d^2 - 2c$,

   f) $15y^6 - 8y^5 + 2y^3$ y $13y^6 + 4y^5 - 5y^3$,

   g) $14z^9 + 10z^7 + 5z^6 + 7$ y $9 + 12z^7 + 8z^9$, *h*) $16c^8 + 23c - 19$ y $27c^8 - 2c^6 - 3c^3$,

i) $4x^4 + x^3y - 8x^2y^2 + 3xy^5$ y $5x^5 - 4x^4 + 6x^3y - 2x^2y^2 + 1$,

j) $7z^3 - 3wz^2 - 4w^2z + w^3$ y $-5z^3 - 11wz^2 - 12w^2z + 9w^3 - 8$,

k) $5x^7 - 42x^3 + x^2 - 16$ y $25x^6 + 43x^4 - 2x$,

l) $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ y $a^2 - b^2$,

m) $c^3 - d^3$, $c^3 - 3d^3 + 3cd$ y $c^3 + 4cd + 4d^3$,

n) $15x^7y^8 - 18x^5y^9 + 21x^4y^{11} + 5$ y $7x^7y^8 - 14x^5y^9 + 21x^4y^{11} + xy^{14}$,

ñ) $7a^2-5ab+2b^2-9ac+12bc-4c^2$ y $4a^2-6ab+2b^2-8ac+15bc-2c^2$.

2. Multiplicar los polinomios dados en cada ejercicio:

a) $12xy^2$ y $3x^2y + 5xy^2 + 6xy + x + y$,

b) $6x$ y $x^3 + 4x^2 - 7$,

c) $5r^2$ y $8r^4 + 3r^2s - 2rs^2 - s$,

d) $-3cd$ y $2c^3d^2 + c^2d^2 + 3cd - 9$,

e) $2x$ y $x^3 - 4x^2y + 5xy - 2y^3$,

f) $5x^8y^2$ y $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$,

g) $-2xy^2$ y $1 - x^2 - y^2 - z^4 + z^6$,

h) $3x - 9y$ y $2z - 5w$,

i) $a + b$ y $2a^2 - 1$,

j) $3x^2 - 6$ y $5x^2 - 2x^2 - 4x + 1$,

k) $4xy^3 + x^2y^2$ y $-7x^5 - 10x^3y^2 - 5xy^2$,

l) $a^2 - 3a + 6$ y $a^2 + 3a + 6$,

m) $3x^2 + 4xy + 2y^2$ y $5x^2 + xy + 6y^2$,

n) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ y $a + b + c$,

ñ) $7a^6 - 2a^4b^3 + 4ab^5$ y $1 - 2a + b$.

Capítulo 6

Fracciones algebraicas.

Una *fracción algebraica* en general es un cociente de polinomios, por ejemplo

$$\frac{a-b}{a+b}, \qquad \frac{(5x+3)^2}{(x-1)^3}, \qquad \frac{4x^2y^3+5y^2+3x}{6x^2-y} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{60-x},$$

son ejemplos de fracciones algebraicas.

Resulta muy útil en la manipulación algebraica la simplificación de una fracción algebraica. Por ejemplo, en una expresión racional numérica como podría ser

$$\frac{16}{14},$$

si se tiene que tanto el numerador como el denominador tienen como factor común un número, entonces podemos trabajar con la fracción equivalente

$$\frac{16}{14} = \frac{2(8)}{2(7)} = \frac{8}{7}.$$

En el caso en que tanto el numerador como el denominador son polinomios, si ambos poseen un mismo factor, entonces se puede cancelar dicho factor y la expresión simplificada es igual a la anterior (equivalente), *excepto para aquellos valores en los que el factor que se canceló toma el valor de cero*. Decimos que una expresión racional está simplificada cuando el máximo común divisor del numerador y del denominador es 1.

Ejemplo 6.1 *Simplificar las expresiones*

1. $\frac{x-1}{x^2-1}$,

2. $\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+2x}$,

3. $\frac{a^5-a^4c-ab^4+b^4c}{a^4-a^3c-a^2b^2+ab^2c}$.

1. Empezamos factorizando tanto el numerador como el denominador. Por un lado, el numerador $x-1$ ya está factorizado, por otro lado, el denominador x^2-1 se puede factorizar como $(x-1)(x+1)$. Ahora, identificamos los factores comunes entre el numerador y el denominador, así
$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\text{x-1}}{\text{(x-1)}(x+1)}\,.$$
Ahora realizamos el cociente entre los factores en común en la fracción algebraica, obteniendo
$$\frac{\boxed{\text{x-1}}}{\boxed{\text{(x-1)}}(x+1)} = \frac{\text{x-1}}{\text{(x-1)}}\frac{1}{(x+1)} = 1\cdot\frac{1}{(x+1)}\,,$$
por tanto la simplificación es
$$\frac{1}{(x+1)} \qquad \text{siempre y cuando} \quad x \neq -1.$$

2. Como en el caso anterior, factorizamos tanto el numerador como el denominador, así
$$\begin{aligned} x^3+x^2-6x &= x(x-2)(x+3)\,,\\ x^3-3x^2+2x &= x(x-2)(x-1)\,. \end{aligned}$$
Ahora identificamos en la fracción algebraica los factores en común,
$$\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+2x} = \frac{\boxed{\text{x}}\boxed{\text{(x-2)}}(x+3)}{\boxed{\text{x}}\boxed{\text{(x-2)}}(x-1)}$$
y realizamos el cociente de los factores que están en común, obteniendo la simplificación
$$1\cdot 1\cdot\frac{(x+3)}{(x-1)} = \frac{x+3}{x-1},\ \text{siempre que } x\neq 0, x\neq 1.$$

3. Ahora ya no realizaremos todos los pasos por separado, comenzamos por factorizar y luego hacemos el cociente para obtener la simplificación como sigue,

$$\begin{aligned} \frac{a^5 - a^4c - ab^4 + b^4c}{a^4 - a^3c - a^2b^2 + ab^2c} &= \frac{a^4(a-c) - b^4(a-c)}{a^3(a-c) - ab^2(a-c)} \\ &= \frac{(a-c)(a^4-b^4)}{(a-c)(a^3-ab^2)} = \frac{a^4-b^4}{a^3-ab^2} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)} = \frac{a^2+b^2}{a} \end{aligned}$$

si $a \neq 0$.

❑

6.0.3. Ejercicios:

Reducir a su mínima expresión las siguientes fracciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$,
2. $\frac{a^2+4a+3}{a^2-a-2}$,
3. $\frac{2h^2+3h-2}{3h^2+7h+2}$,
4. $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$,
5. $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$,
6. $\frac{ax-ay-2by+2bx}{ax+2bx+2by+ay}$,
7. $\frac{3ah+4bk-2ak-6bh}{2ah-4bh+ak-2bk}$,
8. $\frac{xy+3xz-2wy-6wz}{2xy+wy+3wz+6xz}$,
9. $\frac{3w^2-8w+4}{2w^2-w-6}$,
10. $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3-b^3}$.

6.1. Suma (Resta) de fracciones algebraicas.

Recordamos que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son números racionales con el mismo denominador distinto de cero, entonces, la suma de estos resulta ser

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Si en lugar de números racionales tenemos expresiones algebraicas, procedemos de la misma manera. Es decir, si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son dos fracciones algebraicas, donde $B \neq 0$, entonces la suma es

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}.$$

Evidentemente podría darse el caso expresiones racionales en las que los denominadores sean distintos, pero como es de imaginarse, en ese caso también procedemos de la misma forma en la que se hace para el caso de números racionales.

Ejemplo 6.2 *Efectuar las operaciones indicadas:*

1. $\frac{4t^2-3t}{2t-5} + \frac{7-6t}{2t-5}$,

2. $\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x-10} - \frac{5x+13}{x^2-3x-10}$,

3. $\frac{3t-8}{t^2-2t-3} - \frac{t-4}{t^2+6t+5}$.

1. Como ambas fracciones poseen el mismo denominador, procedemos de manera directa,

$$\frac{4t^2-3t}{2t-5} + \frac{7-6t}{2t-5} = \frac{(4t^2-3t)+(7-6t)}{2t-5} = \frac{4t^2-9t+7}{2t-5},$$

y como no podemos simplificar la fracción, así dejamos el resultado.

2. Nuevamente tenemos un par de fracciones con el mismo denominador, por lo que sólo basta sumar los numeradores, así

$$\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x-10} - \frac{5x+13}{x^2-3x-10} = \frac{(x^2+3x-2)-(5x+13)}{x^2-3x-10} = \frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-10}$$

y ahora procedemos a simplificar la expresión factorizando tanto el numerador como el denominador, obteniendo

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-10} = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}, \text{ si } x \neq 2.$$

3. Ahora estamos frente a un caso de dos fracciones con denominadores diferentes, por lo que procedemos a encontrar el mínimo común múltiplo; los denominadores factorizados serían

$$t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3), \qquad \text{y} \qquad t^2 + 6t + 5 = (t+1)(t+5).$$

Como los denominadores tienen factores en común, resulta que el mínimo común múltiplo es $(t+1)(t-3)(t+5)$ y así procedemos a efectuar la operación

$$\begin{aligned} \frac{3t-8}{t^2-2t-3} - \frac{t-4}{t^2+6t+5} &= \frac{3t-8}{(t+1)(t-3)} - \frac{t-4}{(t+1)(t+5)} \\ &= \frac{(3t-8)(t+5)-(t-4)(t-3)}{(t+1)(t-3)(t+5)} = \frac{2t^2+14t-52}{(t+1)(t-3)(t+5)}. \end{aligned}$$

Como no se puede simplificar más, este es el resultado.

❑

6.1.1. Ejercicios:

Realizar la operación indicada en cada inciso:

1. $\frac{x^2+5}{x+2} - \frac{x^2-3x}{x-2}$,
2. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$,
3. $\frac{7x^2-6x+3}{5x+4} + \frac{3x^2+4x-1}{5x+4}$,
4. $\frac{4b^2-3b}{2b-9} - \frac{3b^2+3b}{2b-9}$,
5. $\frac{z}{z^2-9} - \frac{5}{z^2+6z+9}$,
6. $\frac{w^2}{w^2-4} - \frac{1}{w-2}$,
7. $\frac{a^2-7a+4}{a^2+10a+25} + \frac{1}{a+5}$,
8. $\frac{z-1}{z-8} + \frac{z+5}{z-6}$,
9. $\frac{1+6x}{1-6x} - \frac{1-6x}{1+6x}$,

10. $\frac{x-10}{x^2+4x-32} - \frac{x-8}{x^2-x-72}$,

11. $\frac{2z}{6z^2+7z+2} + \frac{3z-1}{3z^2-10z-8}$,

12. $\frac{4z^2-9}{7z^2+22z+3} - \frac{2z^2-3}{14z^2+2z}$,

13. $\frac{5r-5}{r+1} - \frac{5r+5}{r-1}$,

14. $z + \frac{5z}{z-8} - \frac{6z}{z+8}$,

15. $\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x} - \frac{4x}{4-x^2}$.

6.2. Fracciones algebraicas complejas.

Ahora, bien podría complicarse la situación; de hecho, si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama *fracción compleja*. Para simplificar una fracción compleja se realizan las operaciones indicadas tanto en el numerador como en el denominador y después se simplifica. En realidad ya lo sabemos hacer, nada más que ahora lo tendremos que realizar varias veces.

Ejemplo 6.3 *Simplificar las siguientes expresiones:*

1. $\frac{\frac{w}{w-3}-\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{w-3}-\frac{1}{w+3}}$,

2. $\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}$,

3. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}}$.

1. Recordemos que no existe un sólo camino para proceder, aquí elegimos primero simplificar las expresiones más pequeñas (el numerador y el denominador de la fracción más grande) para que al final simplifiquemos la fracción que engloba toda la expresión, así

$$\frac{\frac{w}{w-3}-\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{w-3}-\frac{1}{w+3}} = \frac{\frac{w(w+3)-3(w-3)}{(w-3)(w+3)}}{\frac{(w+3)-(w-3)}{(w-3)(w+3)}} = \frac{\frac{w^2+3w-3w+9}{(w-3)(w+3)}}{\frac{w+3-w+3}{(w-3)(w+3)}} = \frac{\frac{w^2+9}{(w-3)(w+3)}}{\frac{6}{(w-3)(w+3)}}.$$

Ahora aplicamos la regla del emparedado para fracciones de fracciones y obtenemos

$$\frac{(w^2+3w-3w+9)(w-3)(w+3)}{(w+3-w+3)(w-3)(w+3)}$$

y simplificamos como lo hemos venido haciendo, obteniendo como resultado

$$\frac{w^2+9}{6}.$$

2. Comenzamos por realizar la suma de fracciones del numerador

$$\frac{1+\frac{x}{y}}{x+y}=\frac{\frac{y+x}{y}}{x+y}$$

y luego aplicamos la ley del emparedado, así

$$\frac{\frac{y+x}{y}}{\frac{x+y}{1}}=\frac{y+x}{y(x+y)}$$

y finalmente simplificamos, obteniendo como resultado

$$\frac{y+x}{y(x+y)}=\frac{1}{y}.$$

3. Este caso parece más complejo, pero es lo mismo. Realizamos las fracciones indicadas en le denominador en orden creciente. Sigamos con atención el siguiente desarrollo:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x+1+1}{x+1}}}=\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=\frac{1}{\frac{x+2+x+1}{x+2}}=\frac{x+2}{2x+3}.$$

❑

6.2.1. Ejercicios:

Simplificar la expresión indicada en cada ejercicio.

1. $\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$,

2. $\frac{1+\frac{z}{z-1}}{1-\frac{z}{z+1}}$,

3. $\frac{x+\frac{2-x}{1+2x}}{1-\frac{2x-x^2}{1+2x}}$,

4. $\frac{\frac{b}{4+b}+\frac{4-b}{b}}{\frac{4+b}{b}-\frac{b}{4+b}}$,

5. $\frac{\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}}{1+\frac{x-2}{x+2}}$.

Capítulo 7

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Las expresiones de cada lado de la igualdad se llaman *miembros* de la ecuación. Si sucede que en una ecuación no hay fracciones en cuyos denominadores aparezca la incógnita (incluso después de simplificar) y si ésta es de primer grado, entonces decimos que la ecuación es de *primer grado*. La solución de una ecuación de primer grado con una incógnita se obtiene (como veremos en los ejemplos) usando todas las propiedades para las igualdades entre números reales. Pero, ¿qué es una solución a una ecuación? Vamos a escribir una ecuación de primer grado con una incógnita

$$3x + 7 = 2$$

y decimos que un número x es solución a esta ecuación si al sustituir este valor en la ecuación, la igualdad se satisface (no obtenemos algo absurdo). Para nuestro ejemplo, probemos con los siguientes casos:

posible solución	evaluamos en $3x + 7 = 2$
$x = 0$	$3(0) + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 7 = 2$ ✘
$x = 2$	$3(2) + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 13 = 2$ ✘
$x = -1$	$3(-1) + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2$ ✘
$x = -\frac{5}{3}$	$3\left(-\frac{5}{3}\right) + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$ ✔
$x = \sqrt{2}$	$3(\sqrt{2}) + 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3(\sqrt{2}) + 7 = 2$ ✘

Y a partir de esta tabla podemos asegurar que $x = -5/3$ es una solución a la ecuación $3x + 7 = 2$ porque la satisface, las demás opciones no son soluciones porque no hacen verdadera la igualdad. Pero evidentemente no podemos estar experimentando con cada valor para verificar si corresponde a una solución o no, por lo que aplicaremos el álgebra que hemos venido desarrollando para obtener la solución a una ecuación de primer grado.

En general el procedimiento consiste es despejar la incógnita en la ecuación, lo que quiere decir que tenemos que dejar de un lado de la igualdad la incógnita (únicamente la incógnita) y el resto del otro lado de la igualdad. Para lograr el despeje debemos entender primero que en una igualdad se pueden realizar ciertas operaciones algebraicas sin alterar el sentido de la igualdad, por ejemplo para la ecuación que teníamos de ejemplo $3x + 7 = 2$,

- podemos sumar un término de ambos lados de la igualdad, así

$$3x + 7 = 2 \quad \text{es equivalente a} \quad 3x + 7 + \boxed{3} = 2 + \boxed{3},$$

- podemos multiplicar por un término de ambos lados de la igualdad, así

$$3x + 7 = 2 \quad \text{es equivalente a} \quad \boxed{4}(3x + 7) = \boxed{4}2\,.$$

Lo importante aquí es resaltar que la igualdad no se afecta porque aplicamos la misma operación algebraica de ambos lados de la igualdad, de otra forma no es posible sostener la igualdad.

Ejemplo 7.1 *Resolver la ecuación* $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$.

Resolver esta ecuación significa hallar el valor de x que satisface la igualdad, para esto despejamos la incógnita siguiendo los siguientes pasos algebraicos:

$$\begin{array}{rl}
\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12} & \text{es la ecuación dada,} \\
\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12} - \frac{1}{2}x & \text{restamos } \tfrac{1}{2}x \text{ a la ecuación,} \\
-\frac{2}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} & \text{efectuamos la operación indicada,} \\
-\frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} & \text{restamos } \tfrac{1}{12} \text{ a la ecuación,} \\
-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}x & \text{realizamos la operación indicada,} \\
\left(\frac{4}{1}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\frac{1}{4}x & \text{multiplicamos por 4 la ecuación,} \\
-3 = x & \text{realizamos la operación indicada.}
\end{array}$$

De esta manera ahora sabemos que la solución a la ecuación dada es $x = -3$.

Comprobar que estamos en lo correcto es muy sencillo, basta con evaluar la ecuación en $x = -3$ y verificar que se satisface la igualdad, es decir,

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(-3) - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}(-3) + \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{13}{6} = -\frac{13}{6}. \quad ✔$$

❑

Ejemplo 7.2 *Resolver la ecuación* $\frac{2}{x+1} - 3 = \frac{4x+6}{x+1}$.

Realizamos pasos algebraicos para despejar la incógnita x, así

$$\begin{array}{cl}
\frac{2}{x+1} - 3 = \frac{4x+6}{x+1} & \text{la ecuación dada,} \\
(x+1)\left(\frac{2}{x+1} - 3\right) = (x+1)\left(\frac{4x+6}{x+1}\right) & \text{multiplicamos por } x+1 \text{ la ecuación,} \\
2 - 3(x+1) = 4x+6 & \text{realizamos el producto indicado,} \\
-1 - 3x = 4x + 6 & \text{desarrollamos el producto indicado,} \\
-1 - 3x + 3x = 4x + 6 + 3x & \text{sumamos } 3x \text{ a la ecuación,} \\
-1 = 7x + 6 & \text{realizamos la operación indicada,} \\
-1 - 6 = 7x + 6 - 6 & \text{restamos 6 a la ecuación,} \\
-7 = 7x & \text{efectuamos la operación indicada,} \\
\left(\frac{1}{7}\right)(-7) = \left(\frac{1}{7}\right)7x & \text{multiplicamos por } 1/7 \text{ la ecuación,} \\
-1 = x & \text{realizamos la operación indicada.}
\end{array}$$

Así, la solución es $x = -1$, pero hay un problema de definición porque le expresión dada por ecuación es válida para cualquier valor de x excepto para $x = -1$, por lo tanto esta ecuación no tiene solución.

❑

Ejemplo 7.3 *Resolver la ecuación* $6x - 7 = 2x + 1$.

Análogamente a los dos ejemplos anteriores, resolvemos esta ecuación en la que ya no detallamos por escrito cada paso algebraico, por tanto

$$\begin{array}{rrcl}
 & 6x - 7 & = & 2x + 1, \\
\Rightarrow & 6x - 2x & = & 1 + 7, \\
\Rightarrow & 4x & = & 8, \\
\Rightarrow & x & = & 2.
\end{array}$$

La solución es $x = 2$.

❑

Ejemplo 7.4 *Resolver la ecuación* $-5(3x - 2) + 8x - 1 = 2(8 - 5x)$.

Analicemos con detalle el siguiente desarrollo,

$$\begin{array}{rrcl} & -5(3x-2)+8x-1 & = & 2(8-5x), \\ \Rightarrow & -15x+10+8x-1 & = & 16-10x, \\ \Rightarrow & -7x+9 & = & 16-10x, \\ \Rightarrow & 3x & = & 7, \\ \Rightarrow & x & = & \frac{7}{3}. \end{array}$$

7.0.2. Ejercicios:

1. Determinar cuál es la solución para la ecuación $3x+9=4$:

   a) $x=3$,

   b) $x=-3/5$,

   c) $x=5/3$,

   d) $x-5/3$.

2. ¿Por qué $x=1$ no es solución a la ecuación $4x-1=2$?

3. ¿$x=2$ es solución para la ecuación

$$1=\frac{2}{3x-4}?$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $5x-1=3x+2$,

   b) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+x-5=\frac{1}{4}$,

   c) $x=2-\frac{2x-4}{3}$,

   d) $3(x+2)-(x-4)=0$,

   e) $3(5x-2)+4((1-3x)=0$,

   f) $\frac{3x-1}{2}=2x+3$,

   g) $\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2}=3$,

   h) $x-\frac{1}{2}=2-\frac{x-6}{6}$,

   i) $\frac{4x-3}{6}-\frac{2x+4}{9}=x+1$,

   j) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-4}{x-2}$,

k) $\frac{4x-3}{2x-3} = \frac{8x+5}{4x+1}$,

l) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = \frac{6}{(x-1)(x+3)}$,

m) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{10}{x^2-9}$,

n) $\frac{4x-7}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$,

ñ) $\frac{4}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{8}{x^2-x-2}$,

o) $6d = 4(5d-2) + 20$,

p) $x = \frac{60+x}{12}$,

q) $6(4x+9) - 15x = 4(5x-2) + 3(6-9x)$,

r) $560 + 45x = 1100 - 45x$,

s) $\frac{3}{x} - \frac{1}{5} = \frac{1}{x} + 1$.

7.1. Aplicaciones.

Las situaciones más sencillas se pueden describir por medio del lenguaje algebraico desarrollado hasta el momento y hasta podemos resolver las cuestiones más sencillas de la vida real, como experimentaremos en los problemas que desarrollamos en esta sección. Un problema que se puede resolver mediante una ecuación comprende varias cantidades de las cuales unas son conocidas y otras desconocidas. Los datos que emanan de un problema, que dan lugar a estas cantidades, están relacionadas de manera adecuada, dando lugar a una igualdad (una ecuación). El procedimiento para resolver un problema mediante el uso de una ecuación no es difícil, pero se requiere cierto entrenamiento para desarrollar la intuición necesaria.

Antes de comenzar a resolver un problema es muy importante tener presente que no hay receta o procedimiento único; la gran ventaja de las Matemáticas es que no hay un único camino para llegar a la solución, sólo hay que respetar las reglas hasta ahorita estudiadas. Para lo que sigue tengamos presente el capítulo uno y recomendamos seguir el siguiente esquema general al momento de atacar un problema.

1. Leer cuidadosamente el problema y estudiarlo hasta que quede completamente clara la situación que plantea.

2. Identificar las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas (constantes) como las desconocidas (variables).

3. Elegir una de las cantidades desconocidas y representarla mediante una letra (incógnita). Después expresar las otras cantidades desconocidas en términos de esta letra.

4. Buscar en el problema los datos que indiquen qué cantidades o qué combinaciones de éstas son iguales.

5. Formular la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones apropiadas encontradas en el paso anterior.

6. Resolver la ecuación obtenida.

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita. El procedimiento general que se explica en esos ejemplos se puede aplicar a los problemas similares que se dejan como ejercicios.

Ejemplo 7.5 *Un agricultor puede arar un terreno en* 4 *días empleando un tractor y su ayudante puede hacer el mismo trabajo con un tractor más pequeño en* 6 *días. ¿En cuántos días pueden arar el campo si trabajan conjuntamente?*

Después de leer detenidamente el problema identificamos los siguientes datos:

- Un agricultor ara en 4 días el terreno, es decir, que en un día ara $1/4$ parte del terreno.

- El ayudante ara en 6 días el terreno, es decir, que en un día ara $1/6$ parte del terreno.

- Llamamos x al número de días en los que se ara el terreno juntos, por tanto juntos aran $1/x$ parte del terreno.

Ya que hemos identificado los datos conocidos y desconocidos, el siguiente paso es relacionarlos. Para este problema no es tan complicado, porque pensamos en el trabajo que se hace por día al arar el terreno; ya sabemos cuánto se ara por día por cada personaje y cuánto se ara si lo hacen juntos, entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6},$$

la cual es una ecuación válida para cualquier valor de x excepto 0 (el cual no tiene sentido porque estamos hablando de tiempo de trabajo). Ahora multiplicamos por x la ecuación y obtenemos una ecuación de primer orden con una incógnita

$$1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x\,.$$

Hasta aquí hemos escrito el problema en términos de una ecuación, ahora sólo basta resolverla y analizar el resultado. Procediendo a resolverla,

$$\begin{array}{rrcl} & 1 & = & \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x, \\ \Rightarrow & 1 & = & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x, \\ \Rightarrow & 1 & = & \frac{5}{12}x, \\ \Rightarrow & \frac{12}{5} & = & x, \end{array}$$

por tanto la solución a la ecuación es $x = 12/5$. Así, el resultado de la ecuación nos dice que el agricultor junto con su ayudante aran el terreno en 12/5 días.

❑

En siguiente ejemplo es para mostrar que también se puede determinar si un planteamiento tiene sentido.

Ejemplo 7.6 *Miguel tiene* \$75 *en el banco y ahorra* \$5 *a la semana, Carmen tiene* \$96 *y ahorra* \$5 *a la semana, ¿cuándo tendrán la misma cantidad de dinero ahorrada?*

Identificamos los datos del problema:

- Miguel tiene en principio \$75 y cada semana incrementa en \$5 su ahorro,
- Carmen tiene en principio \$96 y cada semana incrementa en \$5 su ahorro,
- La pregunta se refiere al tiempo y los incrementos se dan por semanas, por tanto llamamos y al número de semanas transcurridas.

Ahora vamos a relacionar los datos que hemos identificado. Después de y semanas transcurridas el dinero acumulado es

- Miguel: $75 + 5y$,
- Carmen: $96 + 5y$.

La pregunta del planteamiento es sobre el tiempo en el que los ahorros de los dos tipos son iguales, por lo tanto la ecuación que hay que resolver es la igualdad de los ahorros, es decir,

$$75 + 5y = 96 + 5y\,.$$

Si sumamos $-5y$ a la ecuación obtenemos que $75 = 96$, lo cual no es cierto. Como hemos obtenido un enunciado falso, entonces el problema no tiene solución, indicando que en ningún momento tendrán la misma cantidad ahorrada.

❑

Ejemplo 7.7 *El padre tiene* 51 *años y el hijo tiene* 9 *años. ¿Al cabo de cuántos años la edad del padre es* 8 *veces la edad del hijo?*

Nuevamente comenzamos por identificar los datos del problema.

- La edad del padre es 51 años.
- La edad del hijo es de 9 años.
- Llamamos x el tiempo que transcurre en años.

Ahora escribimos algunas expresiones como los años que tendrán tanto el padre como el hijo dentro de x años:

- padre: $51 + x$,
- hijo: $9 + x$.

Respecto de la pregunta del planteamiento, debemos de escribir la edad del padre que sea 8 veces la edad del hijo dentro de x años, es decir,

$$x + 51 = 8(x + 9)\,,$$

que resolviendo la ecuación $x = -3$. La solución es un número negativo que interpretamos como que hace 3 años el padre tenía 8 veces la edad del hijo, o sea, cuando el padre tenía 48 años, la edad de éste era 8 veces la edad de su hijo que tenía 6 años.

❑

Ejemplo 7.8 *Encontrar dos números pares consecutivos cuya suma sea* 16.

Sobre los datos del problema sabemos que dos números deben de sumar 16 y que además estos números deben ser pares. Si $2n$ es uno de los enteros pares buscados, el consecutivo sería $2n + 2$, para cualquier valor de n siendo un número entero. Queremos que la suma de ellos sea 16, es decir,

$$2n + (2n + 2) = 16$$

que es equivalente, después de realizar las operaciones, a

$$4n + 2 = 16\,.$$

La solución a la ecuación es $n = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. Como $n = \frac{7}{2}$ no es entero, entonces no tiene solución, es decir, no hay dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 16.

❑

7.1.1. Ejercicios:

1. La edad de Nicolás es $\frac{1}{3}$ de la edad de Juan. Si la suma de las edades de ambos es 32, ¿qué edad tiene cada uno?

2. El largo de un rectángulo es 5 veces su ancho. Si el perímetro mide 90 metros, ¿cuánto mide cada lado?

3. Mario le pregunta a su abuelo su edad. El abuelo le contesta "si a los años que tengo se suman el triple de los años que tenía el año pasado, se obtiene el triple de los años que tengo menos 3". ¿Qué edad tiene el abuelo de Mario?

4. El área de un triángulo isósceles es de 48 kilómetros cuadrados. Si su altura mide 8 kilómetros, cuánto mide la base? ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo?

5. Encuentre dos números enteros consecutivos tales que $\frac{5}{9}$ del mayor sea igual al menor menos 3.

6. Tomás tiene \$13 más que Ricardo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno si entre los dos reúnen ¿\$29 ?

7. Un hombre cercó un terreno rectangular de 60 metros de frente y 400 metros de perímetro a un costo de \$3720. Si el costo de la cerca del frente fue de \$2 mayor por metro que el de los otros tres lados, encontrar el precio por metro en cada caso.

8. Un automóvil sale de Monterrey a las 13 horas con dirección a Torreón y otro sale de Torreón a Monterrey a las 14 horas del mismo día. En el camino se encuentran a las 16 horas. La velocidad del segundo automóvil era de 16 km/hr menor que la del primero y las ciudades antes dichas están a 392 kilómetros una de la otra. Hallar la velocidad de cada automóvil en el trayecto.

9. Si se agrega 27 a un número de dos cifras, los dígitos de las unidades y de las decenas se invierten. Encontrar los números si el dígito de las unidades es doble que el de las decenas.

10. Un tanque que se emplea para regar parques puede llenarse en 6 horas y vaciarse en 4 horas. Si al comenzar un cierto trabajo el tanque está lleno y al mismo tiempo se abren las válvulas de entrada y de salida del agua. ¿En cuánto tiempo se vacía el tanque?

11. Vero tiene que facturar la cuenta por concepto de comida de su jefe. La cuenta es de \$261 y para facturar hay que desglosar el I.V.A. ¿cuál es el monto del I.V.A. ?

Capítulo 8

Razones y proporciones.

La comparación entre dos objetos nos permite analizar y describir mejor la relación entre estos. Supongamos que en este momento dos personas, Simón y Jacinto, tienen 30 y 10 años respectivamente, ¿cuál sería la respuesta a "¿qué tan jóvenes son?". Quizás la respuesta inmediata sería: "Simón le lleva 20 años a Jacinto, Simón es un adulto y Jacinto es un niño", para lo cual sólo tuvimos que encontrar la diferencia entre las edades, es decir, $30 - 10 = 20$. Dentro de 60 años Simón tendrá 90 años y Jacinto tendrá 70 y la diferencia de edades es evidentemente la misma; pero a la pregunta "¿qué tan jóvenes son?" ya no tendríamos la misma respuesta, aunque la comparación de edades, de que se llevan 20 años entre sí sigue siendo la misma. Ahora supongamos que no conocemos la edad actual de ellos, pero si sabemos que se llevan 20 años, la pregunta "¿qué tan jóvenes son?" quizás no tenga respuesta. Pero quizás la comparación no es la ideal para este tipo de cuestionamientos y otro tipo de comparación si nos daría más información. Por ejemplo,

$$\text{hoy:} \quad \frac{30}{10} = 3 \qquad \text{en 60 años:} \quad \frac{90}{70} = \frac{9}{7}$$

es otra forma de comparar y nos da idea sobre la relación entre las dos edades. Primero es notable que la comparación no se preserva, por un lado tenemos 3 y por otro 9/7. En la primera parte nos dice que Simón triplica la edad de Jacinto y en la segunda parte nos dice que la edad de Simón respecto de la de Jacinto es 9/7. El hecho de que el resultado de la comparación no se preserve, nos favorece en el sentido de que la variación ofrece información. De hecho, haciendo un ejercicio rápido, escribimos la siguiente tabla:

Edad Simón	Edad Jacinto	Edad Simón/Edad Jacinto
21	1	21
22	2	11
23	3	$7.66\overline{66}$
24	4	6
25	5	5
26	6	$4.3\overline{3}$
27	7	$3.85\ldots$
28	8	3.5
29	9	$3.22\overline{22}$
30	10	3
31	11	$2.81\overline{81}$
32	12	$2.66\overline{66}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
40	20	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
90	70	$1.28\ldots$

Notamos que conforme los años pasan, el cociente entre la edad de Simón y la edad de Jacinto varía, comienza en 21 y va disminuyendo hasta aproximarse a 1. Con este tipo de comparación, aunque no conozcamos las edades, conociendo el resultado del cociente nos damos una idea sobre la edad de ambos.

La *razón aritmética* entre dos números a y b es $a - b$.

La *razón geométrica* entre a y b es $\frac{a}{b}$. También se escribe $a : b$ y se lee "'a es a b".

¿Cómo se vería gráficamente la *razón aritmética* y la *razón geométrica*? Dibujemos un objeto compuesto de dos "cosas" que queremos comparar en la figura 8.1. Sea a la cantidad de "cosa I" y b la cantidad de la "cosa II". La *razón aritmética* $a - b$ nos dice que tan "distantes" están la "cosa I" y la "cosa II". Notemos que la *razón aritmética* pudiera ser un número negativo, pero generalmente, por razones de interpretación, se colocan las cantidades a y b adecuadamente para que siempre sea un número positivo. La figura 8.2 muestra gráficamente la razón aritmética. La *razón geométrica* indica qué tan grande es la "cosa I" respecto de la "cosa II". Si el número resultante es una cantidad mayor que uno, significa que el objeto que está representando a

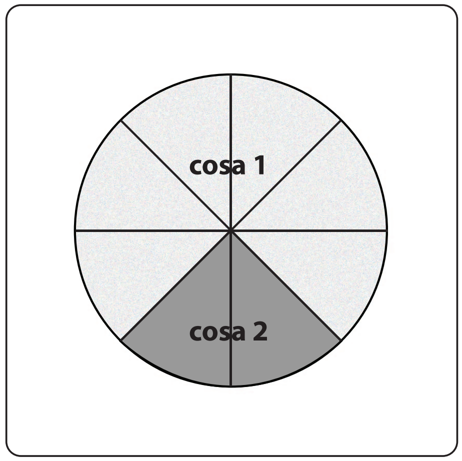


Figura 8.1: *Objeto dividido en dos partes.*

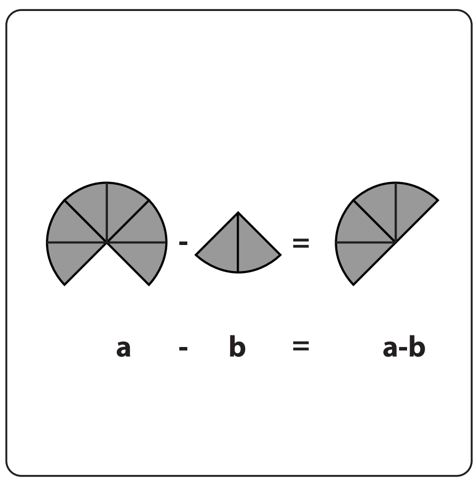


Figura 8.2: *Razón aritmética.*

está en mayor cantidad que lo que representa b. Si por el contrario, el cociente resulta menor que uno, entonces b representa un objeto que está en mayor cantidad que lo que representa a. En la figura 8.3 mostramos gráficamente la razón geométrica.

Ejemplo 8.1 *¿Cuál es la razón aritmética y geométrica entre* 15 *y* 3*?*

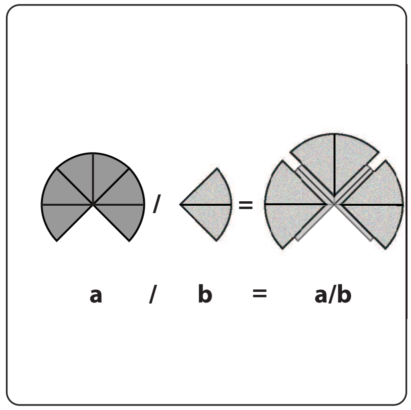
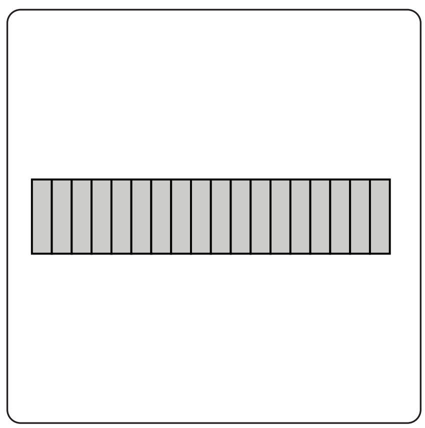


Figura 8.3: *Razón geométrica.*

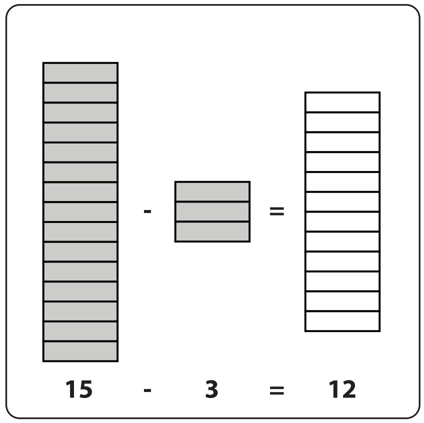
Representamos el 15:


.

Calculamos la razón aritmética:

$$15 - 3 = 12\,,$$

lo que indica que 15 y 3 están alejados una cantidad 12 o gráficamente se vería como

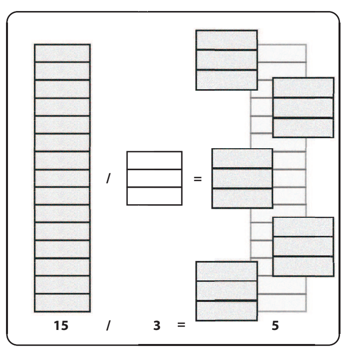


.

Calculamos la razón geométrica.

$$\frac{15}{3} = 5\,,$$

lo que significa que 15 es 5 veces más grande que 3. Se dice que 15 es a 3 como 5 y gráficamente sería

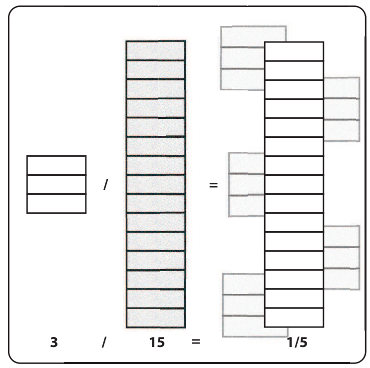


.

De otra forma, pudimos haber calculado

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}\,,$$

indicando que 3 es una quinta parte de 15, que gráficamente sería



.

❑

Los números a, b, c y d forman una *proporción* si la razón geométrica entre a y b es la misma que entre c y d, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y se lee "a es a b como c es a d. También se escribe $a : b :: c : d$.

Una proporción es la igualdad entre dos razones geométricas; si no se cumple la igualdad, se dice que las razones no están en proporción. Es importante notar que la proporción entre cuatro cantidades indica que se relacionan de la misma forma dos a dos, pero no significa que $a = c$ ni $b = d$.

Ejemplo 8.2 *Mostrar que* 3 *y* 4 *están en proporción con* 18 *y* 24

Siguiendo la definición, vamos a verificar que las razones geométricas son iguales:

$$\frac{18}{24} = \frac{(3)(6)}{(4)(6)} = \frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

y por lo tanto, estos cuatro números están en proporción.

❑

Ejemplo 8.3 *Escribir dos cifras que se encuentren en proporción con* $\sqrt{2}$ *y* π*.*

Comenzamos escribiendo la razón geométrica entre $\sqrt{2}$ y π

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

que debe ser igual al cociente entre otro par de cifras que debemos encontrar. Como podría ser natural pensar, si multiplicamos ambas cifras por 2 obtenemos una fracción equivalente,

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2(\sqrt{2})}{2(\pi)}$$

siendo $2\sqrt{2}$ y 2π las dos cifras que están en proporción con $\sqrt{2}$ y π.

❑

De este ejemplo deducimos que un par de cifras a y b están en proporción con una infinidad más, porque basta con multiplicar por un factor c ambas cifras para encontrar muchas más, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}\,.$$

8.0.2. Ejercicios:

1. Dos números están a razón 3/7. Si el menor de ellos es 189, ¿cuál es el otro?

2. Se tiene las parejas de números $\{1, 2\}$, $\{10, 15\}$, $\{2, 1\}$, $\{15, 10\}$.

   - Calcula la razón aritmética y geométrica de cada pareja de números.
   - ¿La razón geométrica siempre es menor a la razón aritmética de los mismos números?

3. Determinar si están en proporción:

   - 23 y 14 con 58 y 35,
   - 68 : 53 con 25 : (53/4),
   - 70 y 14 con 30 y 5.
   - 1 : 1 con 53 : 53.

4. Encuentra el valor de x para cumplir las siguientes proporciones:
   - $\frac{8}{x} = \frac{1}{12}$,
   - $\frac{2}{40} = \frac{x}{8}$,
   - $3 : x = 8 : \frac{2}{3}$,
   - $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$,
   - $\frac{x}{1\frac{4}{5}} = \frac{4\frac{1}{3}}{1\frac{1}{5}}$,
   - $\frac{x}{4.2} = \frac{2}{3}$.

8.1. Aplicación de razones y proporciones.

Es muy común que en actividades diarias tengamos que comparar ciertos objetos o actividades para determinar calidad, mediciones o para escalar información para que sea manipulable.

Ejemplo 8.4 *En un costal hay* 108 *bolillos y hojaldras,* 7/5 *es la razón entre los bolillos y hojaldras. ¿Cuántas hojaldras hay?*

El numero 7/5 representa la razón geométrica entre dos cantidades. Es el resultado del cociente

$$\frac{\#\text{ bolillos}}{\#\text{ hojaldras}} = \frac{7}{5},$$

.

Quiere decir que por cada 7 bolillos podemos encontrar 5 hojaldras, además sabemos que el total de piezas de pan es 108, por lo que basta con multiplicar por un factor adecuado ambas cantidades para encontrar el número de piezas de cada pan, así

$$7(a) + 5(a) = 108$$

es una ecuación lineal con una incógnita. Aunque la incógnita es a, esta no es la solución a la pregunta, pero es necesario para responder adecuadamente. El resultado de la ecuación es $a = 9$. Por lo tanto, $7(a) = 7(9) = 63$ es el número de bolillos que hay y $5(a) = 5(9) = 45$ es el número de hojaldras que hay.

❑

Ejemplo 8.5 *La distancia real entre dos ciudades A y B es de $2400\,km$ y la misma distancia en un mapa mide $1.2\,cm$. Determinar la distancia real entre las ciudades B y C que en el mapa están distanciados por $2\,cm$.*

Lo que tenemos es una proporción dada por la escala a la que se encuentra el mapa. Siguiendo la nomenclatura de las proporciones diríamos que 1.2 es a 2400 como 2 es a la cantidad que queremos encontrar, es decir,

$$\frac{1.2}{2400} = \frac{2}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2(2400)}{1.2} = 4000\,.$$

La distancia real entre las ciudades B y C es de $4000\,km$.

Notemos que respetamos las unidades dadas, al construir la proporción respetamos la razón en las unidades $\frac{cm}{km}$. No combinamos cm con km.

❑

Ejemplo 8.6 *Se realizó una encuesta a 832 personas. Una parte de los encuestados respondió telefónicamente y otra parte vía correo electrónico. Si la razón entre las personas encuestadas telefónicamente y las encuestadas por correo electrónico es $5/8$, ¿cuántos respondieron por cada medio?*

La razón es $5/8$, es decir, por cada 5 personas que contestaron telefónicamente, hubo 8 que lo hicieron por correo electrónico. Si multiplicamos ambas cantidades por el mismo factor obtenemos la población total, porque sumamos el número de personas que contestaron por teléfono con las que contestaron por correo electrónico, entonces hay que resolver la siguiente ecuación lineal

$$5a + 8a = 832 \qquad \Longrightarrow \qquad (5+8)a = 832 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 64\,.$$

Este resultado no es la solución al problema, es un dato que nos servirá para dar solución al problema. El número de personas encuestadas vía telefónica es $5a = 5(64) = 320$ y el número de personas encuestadas vía correo electrónico es $8a = 8(64) = 512$.

❑

8.1.1. Ejercicios:

1. Antonio realizó una llamada de $14\,min$ con su teléfono celular; el costo de la llamada fue de \$70. ¿Cuánto debe pagar por una llamada de 6 minutos?

2. Una mapa señala en el borde inferior: escala 1 : 100 000 000 ¿A cuántos kilómetros equivale una línea de 3 centímetros de largo?

3. En 1974 la razón entre las especies de insectos descritos hasta entonces y el total de ellos era 19/60. Si entonces se tenía la descripción de 950 000 especies. ¿Cuál era el total de insectos?

4. Un ladrón corre a una velocidad de $3\,km/h$ y un policía en su bicicleta es capaz de ir a $9\,km/h$. ¿Qué tan rápido es el policía respecto del ladrón?

5. Un periodista de nota roja que no sabe matemáticas no sabe que nota publicar acerca de una epidemia, de las siguientes dos:

   - "Curados 8/9 de la población infectada, el resto muere".
   - "Curados y muertos a razón de 8/9".

   ¿Con cuál lograría espantar a la población?

6. Al aplicar la vacuna contra la tosferina, la posibilidad de que los niños tengan fiebre como reacción está en razón 1 a 100 000. Si se detectaron 26 niños con fiebre. ¿Cuántos fueron vacunados?

7. Una inversión de \$5 500 produjo un rendimiento de \$385 en un año, otra inversión produjo \$560 a la misma tasa de interés durante el mismo tiempo. ¿Cuál era el valor de la segunda inversión?

8. Para hacer pasteles, Claudia utiliza 4 tazas de harina por una de líquido (que contiene leche, azúcar y mantequilla). Si quiere usar 9 tazas de harina, ¿cuántas tazas de líquido debe agregarle?

9. En 1970 en México el número de kilómetros cuadrados de superficie estaban en razón $1/25$ con el número de habitantes. Si la superficie de México es de $1\,972\,547\,km^2$. ¿Cuántos habitantes había en México en 1970?

10. La razón del promedio de longevidad de un chimpancé es $3/8$ del promedio de longevidad humana. Si el promedio de longevidad humana es de 72.5 años, ¿cuál es el promedio de longevidad de los chimpancés?

11. ¿Qué longitud tiene en un mapa una distancia de $400\,km$ si el mapa señala: escala $1 : 19\,500\,000$?

12. Si una docena de chocolates cuesta \$8, ¿cuánto costarán 500 chocolates?

13. Durante 60 minutos de estar escuchando la radio nos damos cuenta que 18.5 minutos son anuncios. Si escuchamos la radio por 8 horas y 15 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios se escucharán?

Capítulo 9

Desigualdades.

Hasta el momento sólo hemos utilizado igualdades, pero evidentemente si dos expresiones no son iguales, ¿entonces como se relacionan? Comenzamos por entender el término "desigualdad". En una recta numérica ubicamos dos números a y b como se muestra en la figura 9.1: Si a se encuentra a la izquierda

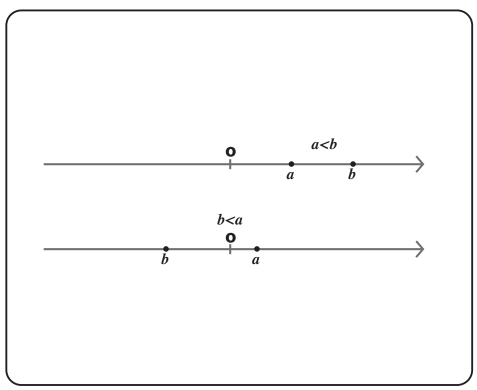


Figura 9.1: *Recta numérica.*

del cero, entonces se dice que $a < 0$ (a es menor que cero); si b se encuentra a la derecha del cero, entonces decimos que $b > 0$ (b es mayor que cero).

Decimos que $a > b$ si $a - b > 0$.

Una desigualdad "ordena", a la vez de comparar dos cantidades. Los siguientes postulados son axiomas (enunciados que se toman como verdaderos sin cuestionamientos) sobre los números y las desigualdades; son las reglas básicas para jugar con las desigualdades.

Sean a, b y c tres números, los axiomas de orden son:

- ***Tricotomía*: $a > b$ o $a = b$ o $a < b$.**
- ***Transitividad*: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.**
- ***Aditividad*: si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.**
- ***Multiplicativa*: si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.**

Por ejemplo, pensemos en cualquier triada de números 2, -7 y 5, y verifiquemos los axiomas de orden.

- *Tricotomía:* para la pareja de números 2 y -7 tenemos que asegurar que se cumple una y solamente una de las sentencias. Decimos que $-7 < 2$ porque por la definición antes escrita $2 - (-7) > 0$. Los enunciados $-7 > 2$ y $-7 = 2$ son falsos.

- *Transitividad:* para la triada de números 2, -7 y 5 tenemos que $-7 < 2$ y $2 < 5$, por lo que podemos afirmar que $-7 < 5$.

- *Aditividad:* tomamos la pareja -7 y 2, la cual satisface $-7 < 2$ y a ambos números les sumamos 5, entonces podemos afirmar que $-7+5 < 2+5$.

- *Multiplicativa:* sabemos que $-7 < 2$ y conocemos un tercer elemento que cumple $5 > 0$. Multiplicando la primera desigualdad por 5 podemos afirmar que $(-7)5 < (2)5$, es decir, $-35 < 10$.

En general, en una recta numérica (apuntando del lado derecho la dirección positiva), dados dos números cualesquiera a y b, decimos que $a < b$ si a se encuentra a la izquierda de b y decimos que $a > b$ si b está a la izquierda de a, como lo mostramos en la figura 9.1. Tengamos presente el axioma de aditividad y el axioma multiplicativo, porque son la base para operar en la desigualdades. El primero indica que si sumamos un número a una desigualdad, la desigualdad se conserva; el segundo indica que si una desigualdad la multiplicamos por un número positivo, la desigualdad se conserva.

Dos propiedades que se derivan de los axiomas de orden los enunciamos ahora.

Si $a < b$ **y** $c < d$**, entonces** $a + c < b + d$**.**

Esto es muy fácil de checar y lo vamos a hacer de la siguiente manera para que podamos apreciar la deducción:

$a < b$ y $c < d$	por hipótesis,
$a + \boxed{c} < b + \boxed{c}$	porque aplicamos aditividad a $a < b$,
$\boxed{b} + c < \boxed{b} + d$	porque aplicamos aditividad a $c < d$,
$a + c < b + d$	aplicamos transitividad en los dos enunciados anteriores.

Ahora veremos qué sucede si una desigualdad la multiplicamos por un número negativo. Sigamos el siguiente razonamiento cuidadosamente, en el cual asumimos que contamos con $c < 0$ y con dos números a y b tales que $a < b$.

$c < 0$ y $b - a > 0$	por hipótesis,
$c(b - a) < 0(b - a)$	aplicamos el axioma multiplicativo a $c < 0$,
$cb - ca < 0$	desarrollando la expresión,
$cb < ca$	sumando de ambos lados,

lo que quiere decir que si una desigualdad la multiplicamos por un número negativo, entonces la desigualdad se invierte. Formalmente se escribe a continuación.

Si $a < b$ **y** $c < 0$**, entonces** $ac > bc$**.**

Ejemplo 9.1 *Si $a > 0$, $b > 0$ y además $a < b$, entonces ¿$a^2 < b^2$ o $a^2 > b^2$? ¿por qué?*

Podríamos tratar con algún caso particular para darnos una idea de la respuesta y luego lo mostramos para cualquier caso. Por ejemplo, $a = 2$ y $b = 3$ cumplen con las hipótesis y resulta que $2^2 = 4 < 9 = 3^2$, por lo que suponemos que la respuesta correcta es $a^2 < b^2$. Con esto ya tenemos una idea de la respuesta correcta, pero debemos tener presente que no es una justificación convincente, ya que sólo hemos mostrado que se cumple para la elección de esos dos números, pero ¿y el resto de los números también cumplen con el resultado seleccionado? Para responder esta pregunta nos apoyamos en los axiomas de orden y en los dos resultados anteriores. Lo único que sabemos es que $a > 0$, $b > 0$ y que $a < b$.

$$
\begin{array}{rl}
a > 0,\ b > 0 \text{ y } a < b & \text{por hipótesis,} \\
a\boxed{a} < b\boxed{a} & \text{por el axioma multiplicativo,} \\
a\boxed{b} < b\boxed{b} & \text{por el axioma multiplicativo,} \\
a\boxed{a} < b\boxed{b} & \text{aplicamos transitividad entre los dos enunciados anteriores,} \\
a^2 < b^2 & \text{efectuando los productos en la expresión anterior.}
\end{array}
$$

Y con esto, suponiendo que a y b son cualquier número que cumpla con las hipótesis hemos mostrado que la respuesta correcta es $a^2 < b^2$.

$\square$

9.0.2. Ejercicios:

1. Si $a < 0$, $b < 0$ y además $a < b$, entonces ¿$a^2 < b^2$ o $a^2 > b^2$? ¿por qué?

2. Si en el ejercicio anterior ahora consideramos $a < 0$ y $b > 0$, ¿qué puedes concluir?

3. Indica la falsedad o veracidad de los siguientes enunciados:

    - $8(2) < 17$,
    - $7 + 9 > 0(17)$,
    - $61(56) < 88 + 970$,
    - $\sqrt{2} + 3 < \frac{\pi}{2} + 3$,
    - $8(a) < 0$, con $a > 0$,
    - $(a + b)^2 > 0$, con $a < 0$ y $b < 0$,
    - $101 < 100 + \frac{a}{a}$, con $a \neq 0$,
    - si $b > 3$, entonces $4b > 12$.
    - si $2\pi < a^2$, entonces $1 - 2\pi > 1 - a^2$,
    - $-81(-1) < 80$,
    - si $2b < 0$, entonces $-100(2b) < 0$.

Parte II

Trigonometría.

La Trigonometría estudia los triángulos. Clasifica los tipos de triángulos, estudia sus propiedades y las relaciones que existen entre éstas.

Esta rama de la matemáticas es increíblemente útil y se desarrolló siglos antes de Cristo, debido a la necesidad de realizar cálculos en la época en la que no se contaban con grandes instrumentos de medición. En realidad es muy difícil pensar en algo que no esté relacionado de alguna manera con algún triángulo.

En esta parte presentamos los triángulos, cada una de sus partes y las principales propiedades que de ellos emanan, con un énfasis particular al estudio de los llamados triángulos rectángulos.

Para entender el concepto y la construcción de las identidades trigonométricas requerimos de conocimientos como el plano cartesiano, los puntos sobre éste y la forma de medir distancia entre ellos. La parte III del libro comienza con estos conceptos, por lo que sugerimos una lectura rápida a sus primeras secciones antes de iniciar la parte II.

Capítulo 10

Ángulos

Comenzamos por definir lo que es un ángulo, objeto que es fundamental en la construcción de triángulos. Introduciremos paulatinamente la notación necesaria.

Se llama *ángulo* a la apertura que existe entre dos rectas que parten del mismo punto llamado vértice.

Por ejemplo, si dibujamos un par de rectas que se cruzan en el punto V, observamos que se forman cuatro ángulos, como en la figura 10.1. Así como las distancias son medibles, los ángulos también y denotamos por $\measuredangle$ la medida de un ángulo. Las unidades de medida son los grados y los radianes. Definimos primero lo que es un grado, sólo porque son más populares.

Dividimos una circunferencia en 360 partes iguales en forma radial. Un grado ($^\circ$) es la apertura de dos rectas que parten del centro y forman una de las 360 partes.

En la figura 10.2 mostramos un grado gráficamente. Notemos que la medida del ángulo es la misma sin importar que tan alejados estemos del vértice porque estamos midiendo qué tan inclinadas están las rectas entre sí y no estamos midiendo distancias. A partir de esta definición de grado deducimos que se necesitan 360° para completar la circunferencia. Dibujamos algunos ángulos que aparecen con frecuencia, en la figura 10.3.

El sistema de medición en grados no siempre es el más adecuado para trabajar, por que las unidades están en una base distinta a la decimal. Los radianes son las unidades para medir ángulos en el sistema decimal y los definimos a continuación.

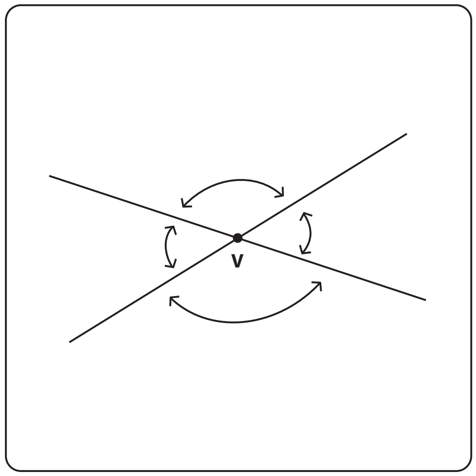


Figura 10.1: *ángulos.*

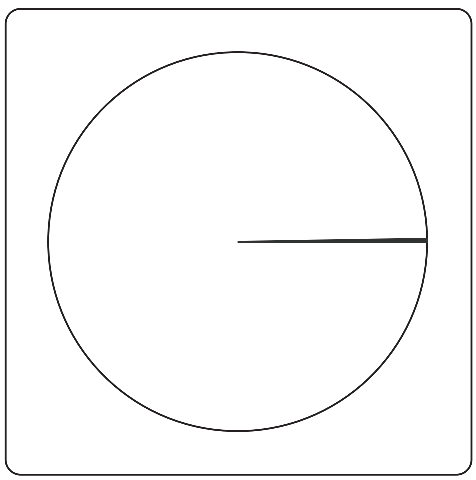


Figura 10.2: *Un grado.*

Un radián (rad) es la apertura definida por la longitud del radio sobre el perímetro de una circunferencia con centro en el vértice del ángulo

La figura 10.4 muestra gráficamente el ángulo correspondiente a un radián y podemos concluir a partir de esta definición que se necesitan $2\pi\, rad$ para

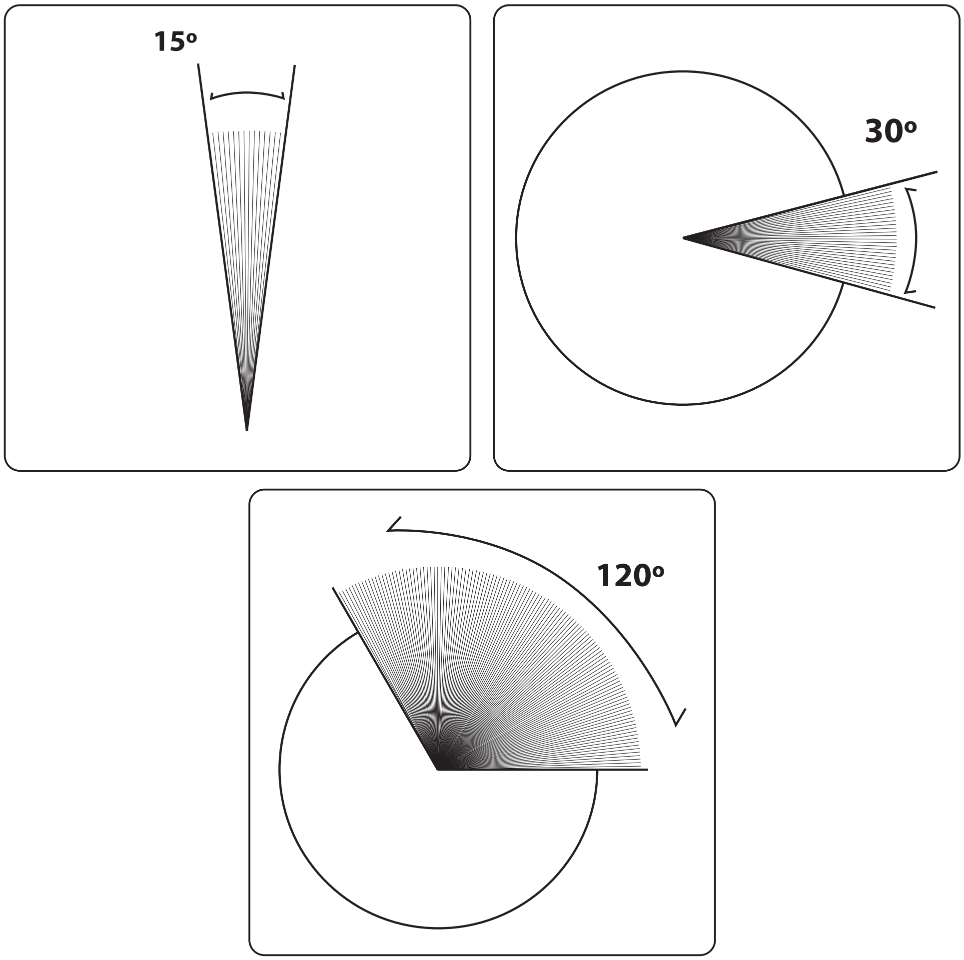


Figura 10.3: *Varios ángulos.*

completar la circunferencia.

Evidentemente hay una relación entre grado y radián y ésta la conocemos gracias a una sencilla proporción; $2\pi\, rad$ es a $360°$ como $1\, rad$ es a $x°$, es decir,

$$\frac{2\pi\, rad}{360°} = \frac{1\, rad}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{360°}{2\pi} \sim 57.29°$$

y ahora sabemos a cuántos grados equivale un radián.

Ejemplo 10.1 *Dibujar los ángulos de* $30°$*,* $90°$*,* $120°$*,* $180°$ *y* $270°$*, dando su equivalencia en radianes.*

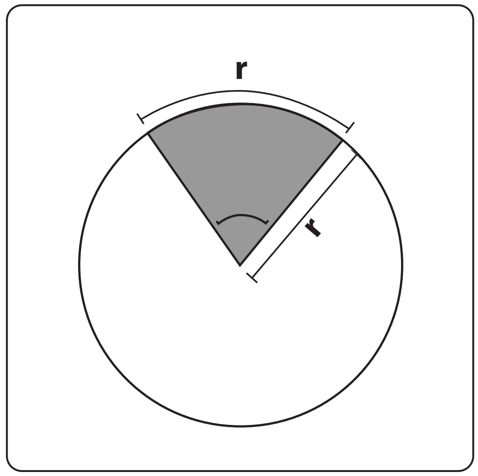
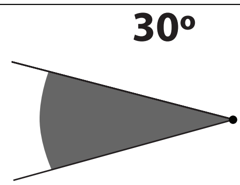
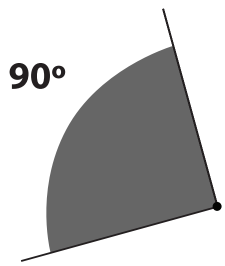
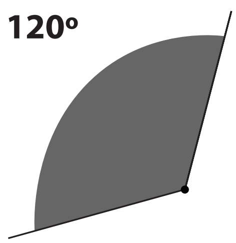
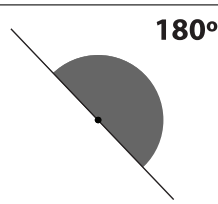
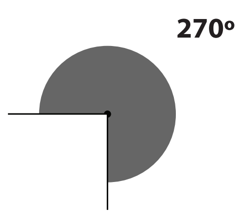


Figura 10.4: *Un radián.*

Para encontrar la equivalencia en radianes, basta con escribir la proporción correcta y resolver la ecuación resultante. Sigamos la siguiente tabla:

grados	dibujo	radianes
30°		$\frac{x}{30} = \frac{2\pi}{360} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$
90°		$\frac{x}{90} = \frac{2\pi}{360} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$
120°		$\frac{x}{120} = \frac{2\pi}{360} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}$
180°		$\frac{x}{180} = \frac{2\pi}{360} \quad \Rightarrow \quad x = \pi$
270°		$\frac{x}{270} = \frac{2\pi}{360} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2}$

Así, 30° equivale a $\pi/6\, rad$, 90° a $\pi/2\, rad$, 120° a $2\pi/3\, rad$, 180° a $\pi\, rad$ y 270° a $3\pi/2\, rad$.

❑

En la práctica, las unidades *rad* no se escriben. En caso de estar hablando de ángulos, si una cantidad no tiene expresadas las unidades, se entiende que ésta está escrita en radianes. Dadas todas las posibilidades de dibujar un ángulo, existe una clasificación extensa basada en la apertura, pero aquí sólo mencionaremos aquellos que consideramos más relevantes para nuestros estudios posteriores.

- **Un ángulo α es llamado *agudo* si $0 < \alpha < 2\pi$ ($0° < \alpha < 90°$).**
- **Un ángulo α es llamado *recto* si $\alpha = \pi/2$ ($\alpha = 90°$).**
- **Un ángulo α es llamado *obtuso* si $\pi/2 < \alpha < \pi$ ($90° < \alpha < 180°$).**
- **Dos ángulos α y β son llamados *consecutivos* si tienen en común una de las rectas que lo forman.**
- **Dos ángulos α y β son *opuestos por el vértice* si los forman las mismas rectas y solo coinciden en el vértice.**

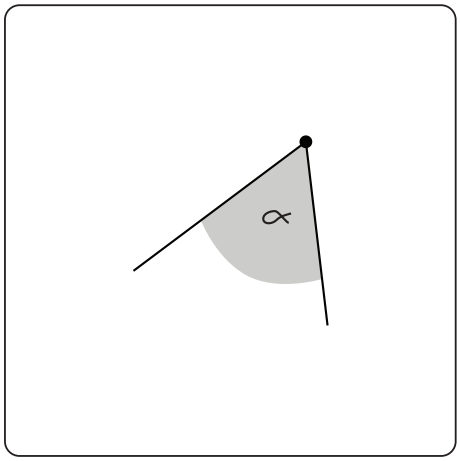
En la figura 10.5 se muestran gráficamente cada uno de los ángulos que acabamos de definir. Subrayamos el caso especial de los ángulos opuestos por el vértice, ya que estos resultan ser iguales ($\alpha = \beta$) y es una propiedad muy importante que usaremos frecuentemente en lo que sigue.

Además, si dibujamos un par de rectas paralelas y una tercera recta que corte a ambas, como en la figura 10.6, los ángulos formados presentan propiedades muy importantes porque resulta que $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$, $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$, $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$ y $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$, también ocurre que $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$ y $\measuredangle 4 = \measuredangle 6$, junto con que $\measuredangle 1 = \measuredangle 7$ y $\measuredangle 2 = \measuredangle 8$. Para referirnos a estos ángulos que guardan estas relaciones escribimos a continuación los nombres adecuados.

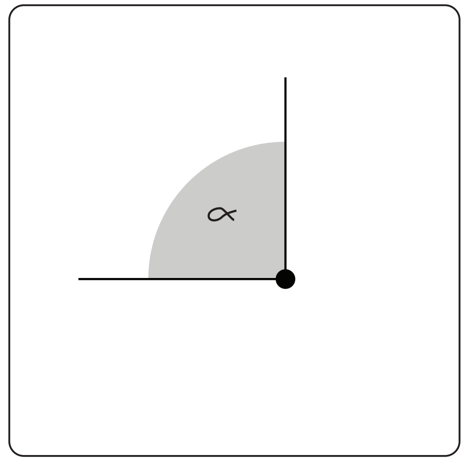
- **Los ángulos 1 y 5, 2 y 6, 4 y 8, 3 y 7 son llamados *correspondientes*.**
- **Los ángulos 3 y 5, 4 y 6 son llamados *alternos internos*.**
- **Los ángulos 1 y 7, 2 y 8 son llamados *alternos externos*.**

10.0.3. Ejercicios:

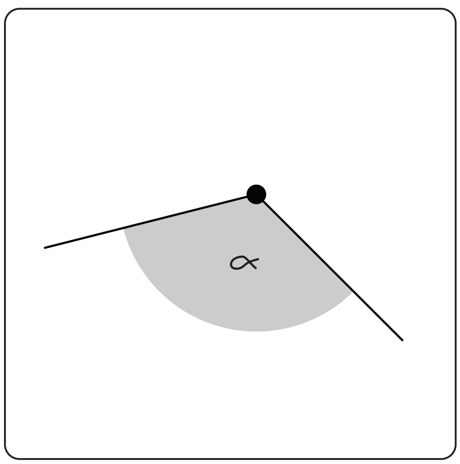
1. Dibujar y convertir a radianes los siguientes grados:
   - $270°$,
   - $60°$,
   - $45°$,
   - $0°$,
   - $210°$.
2. Convertir de grados a radianes y clasificar, si es posible, como agudo, recto u obtuso:
   - $\frac{3\pi}{5}$,
   - $\frac{7\pi}{9}$,
   - $\frac{11\pi}{6}$,
   - $\frac{\pi}{2}$,
   - π,
   - $\frac{4\pi}{3}$.
3. Argumentar por qué los ángulos alternos internos son iguales entre sí.
4. Argumentar por qué los ángulos alternos externos son iguales entre sí.



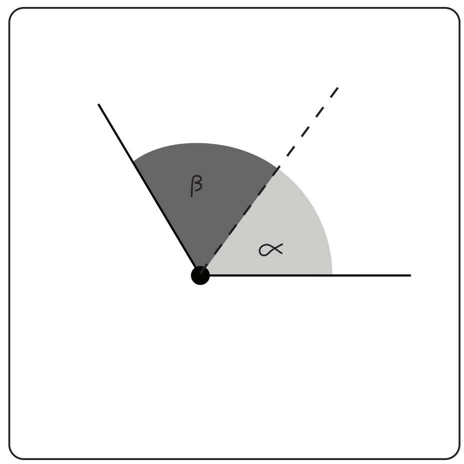
(a) Ángulo agudo.



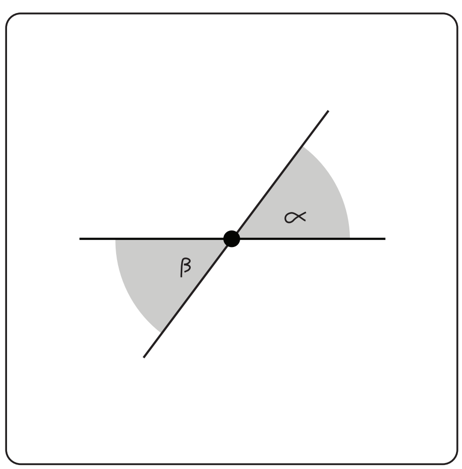
(b) Ángulo recto.



(c) Ángulo obtuso.



(d) Ángulos consecutivos.



(e) Ángulos opuestos.

Figura 10.5: *Algunas clases de ángulos.*

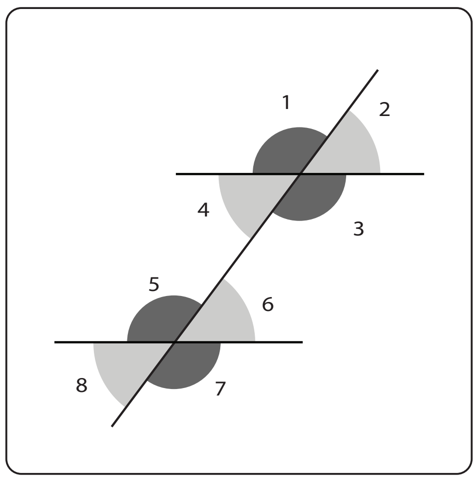


Figura 10.6: *Ángulos alternos internos, externos y correspondientes.*

Capítulo 11

Triángulos

Escribimos $\triangle ABC$ para referirnos a un triángulo con vértices A, B y C, como el de la figura 11.1. Si hacemos referencia a algún ángulo en particular

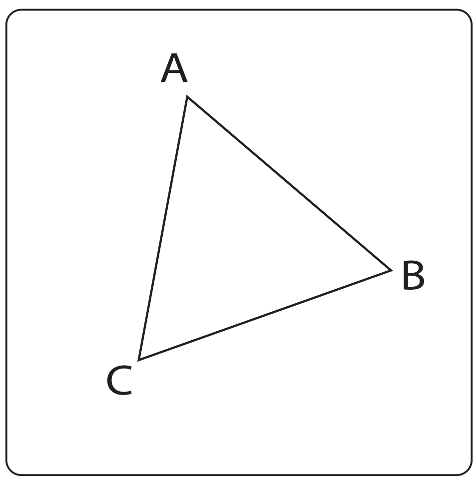


Figura 11.1: $\triangle ABC$.

de $\triangle ABC$ lo hacemos como el ángulo A, ángulo B o ángulo C. Si hacemos referencia a un lado del triángulo lo hacemos como AB, AC o BC. Si nos referimos a sus magnitudes, entonces decimos que la medida del ángulo A es $\measuredangle A$, el del ángulo B es $\measuredangle B$ y el del ángulo C es $\measuredangle C$; la medida del segmento AB es $\overline{AB}$, la del segmento AC es $\overline{AC}$ y la del segmento BC es $\overline{BC}$. Así como los ángulos se clasifican según su magnitud, damos la siguiente clasificación de triángulos según las magnitudes sus lados y ángulos.

- **Un triángulo es *equilátero* si todos sus lados miden lo mismo.**
- **Un triángulo es *isósceles* si dos de sus lados miden lo mismo.**
- **Un triángulo es *escaleno* si ninguno de sus lados miden los mismo.**

En la figura 11.2 se presentan estos tipos de triángulos.

Sin importar el tipo de triángulo que se estudie, todos cumplen una propiedad muy importante: si sumamos las magnitudes de los ángulos internos de un triángulo da 180°, pero...¿por qué? La razón es sencilla. Comencemos por dibujar cualquier triángulo $\triangle ABC$, después tracemos una recta paralela a uno de los lados del triángulo que pase por el vértice opuesto a ese lado; en la figura 11.3 la recta que trazamos es paralela a BC y pasa por el vértice A. El lado AC forma parte del ángulo α y el lado AB forma parte del ángulo β con la recta paralela que dibujamos en la figura 11.3. Resulta que

$$\measuredangle\beta + \measuredangle A + \measuredangle\alpha = 180^\circ$$

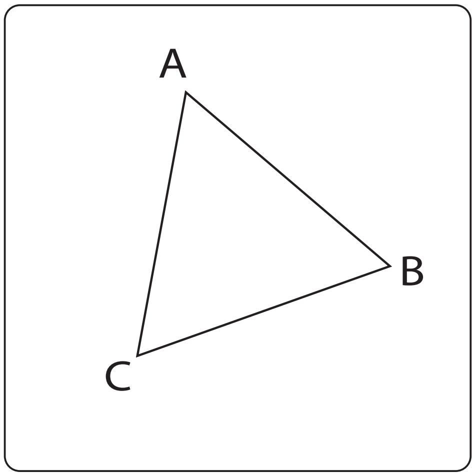
pero $\measuredangle\beta = \measuredangle B$ y $\measuredangle\alpha = \measuredangle C$ por que son ángulos alternos internos, por lo tanto

$$\measuredangle B + \measuredangle A + \measuredangle C = 180^\circ\,.$$

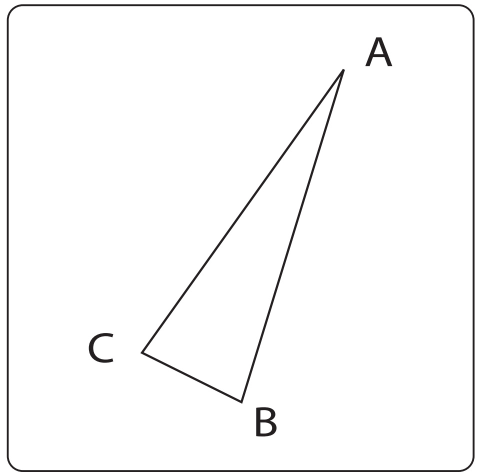
Hay un tipo particular de triángulo que resulta muy interesante por la propiedades que posee y con ello su aplicación en una gran cantidad de áreas.

Se dice que un triángulo es *rectángulo* si alguno de sus ángulos internos es ángulo recto.

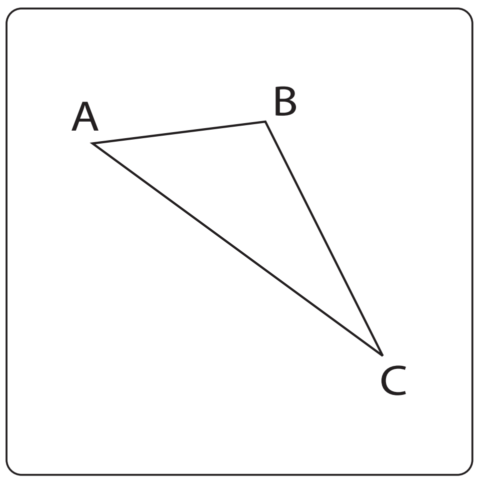
Un triángulo rectángulo se ve como en la figura 11.4, en la que indicamos de manera especial el ángulo recto C. En esta figura las magnitudes de los lados BC, AC y AB los renombramos a, b y c respectivamente. Los lados que forman el ángulo recto son conocidos como *catetos* y el lado restante como *hipotenusa*. Una característica de gran relevancia de los triángulos rectángulos es uno de los resultados más conocidos en Matemáticas y que enunciamos en seguida.



(a) Equilátero



(b) Isósceles



(c) Escaleno

Figura 11.2: *Clasificación de triángulos.*

Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo, con catetos de tamaño a, b e hipotenusa de tamaño c, se cumple:

$$a^2 + b^2 = c^2\,. \tag{11.1}$$

Este resultado se demostró hace más de dos milenios con herramientas geométricas y así lo haremos en este momento. Trazamos un cuadrado cuyos

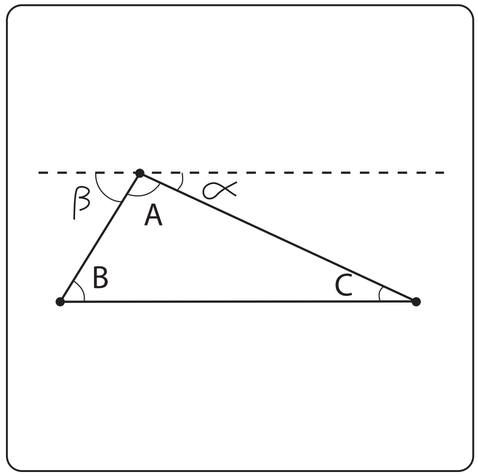


Figura 11.3: *Suma de ángulos internos de un triángulo.*

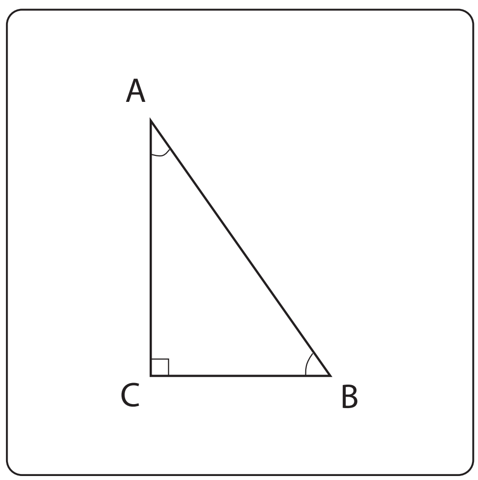


Figura 11.4: *Triángulo rectángulo.*

lados miden $a + b$ y dibujamos dentro de éste cuatro veces un triángulo rectángulo con catetos de tamaño a y b, como se muestra en la figura 11.5. Podemos notar que se forma otro cuadrado inscrito en el primero con lados de tamaño de la hipotenusa de los triángulos. Verificar que el Teorema de Pitágoras se cumple, basta con encontrar el área de este cuadrado. Sabemos que el área del cuadrado inicial es $(a+b)^2$. Esta área es igual a la suma de las áreas de las figuras dentro del cuadrado; el área de cada uno de los triángulos es $ab/2$ y el área del cuadrado inscrito es c^2, por tanto el área del cuadrado que contiene a estas figuras es

$$\text{área}\,\square = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2\,,$$

pero sabíamos que área $\square = (a+b)^2$, por tanto tenemos la igualdad

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = (a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad 2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\therefore\quad c^2 = a^2 + b^2\,.$$

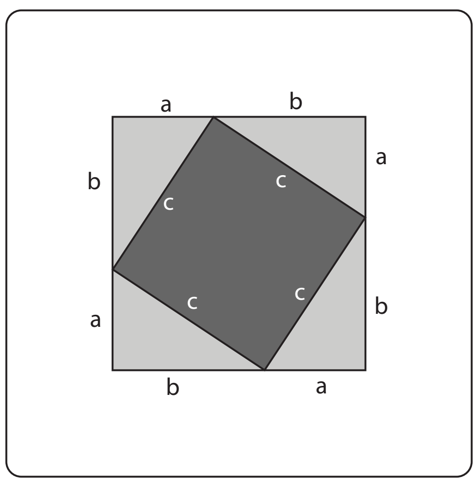
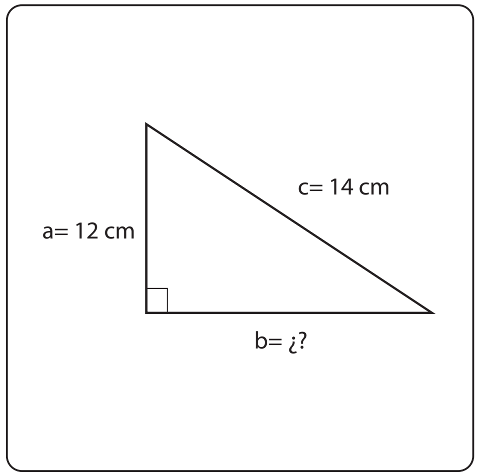


Figura 11.5: *Teorema de Pitágoras.*

Ejemplo 11.1 *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide* $14\,cm$ *y uno de los catetos* $12\,cm$*. Calcular la medida del otro cateto y el área del triángulo.*

Dibujamos el triángulo rectángulo con las medidas que se proporcionan, poniendo nombre a los catetos y a la hipotenusa,



Usamos el Teorema de Pitágoras, ya que contamos con la medida de un cateto y de la hipotenusa, así

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Longrightarrow \quad 12^2 + b^2 = 14^2 \quad \Longrightarrow \quad b = 2\sqrt{13}\,.$$

Por lo tanto, la medida del cateto faltante es $2\sqrt{13}\,cm$.

Sabemos que $(base)(altura)/2$ es el área de todo triángulo. Para el caso particular de los triángulos rectángulos, el conocer el tamaño de los catetos es suficiente porque uno representa la base y el otro la altura, por tanto

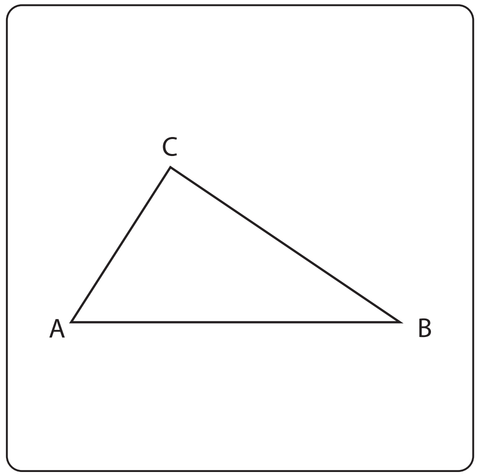
$$\text{área} = \frac{ab}{2} = \frac{12(3\sqrt{13})}{2} = 18\sqrt{13}\,.$$

El área del triángulo rectángulo es $18\sqrt{13}\,cm^2$.

❏

11.0.4. Ejercicios:

1. En el $\triangle ABC$ de la figura adjunta, contestar las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es el ángulo formado por los lados BC y AB?

b) ¿Cuál es el lado que forma parte de los ángulos A y C?

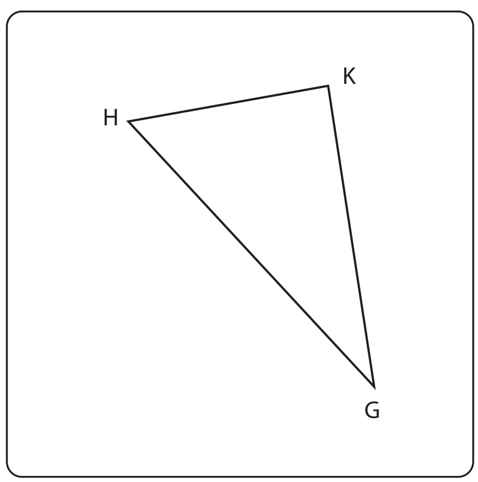
c) ¿Qué lados forman el ángulo C?

d) ¿Qué ángulos están formados por el lado BC?

e) ¿Qué ángulo está formado por los lados AC y AB?

2. ¿Cuánto suman los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

3. En el $\triangle GHK$ de la figura siguiente, contestar las siguientes preguntas:



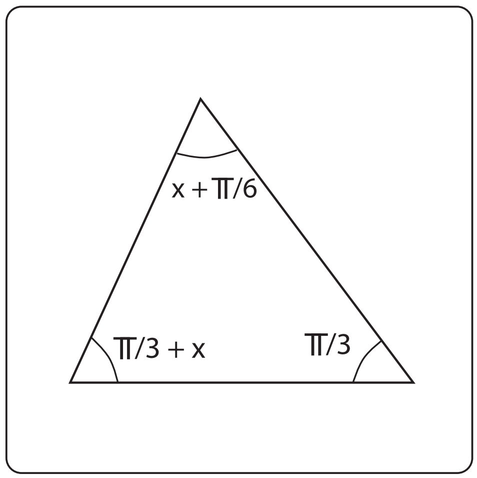
a) ¿Está el ángulo H formado por los lados GH y HK?

b) ¿El lado GK forma parte de los ángulos G y K?

c) ¿Cuál es el ángulo formado por GH y GK?

d) ¿Cuál es el lado que forma parte de los ángulos G y H?

4. Calcular el valor de x si se tiene la siguiente figura:



Nota: los ángulos están dados en radianes.

5. Un triángulo rectángulo ABC tiene un cateto de $5\,cm$ y de hipotenusa tiene $10\,cm$. ¿Cuál es la longitud del otro cateto?

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 unidades y un cateto mide 16 unidades. ¿Cuál es el área del triángulo?

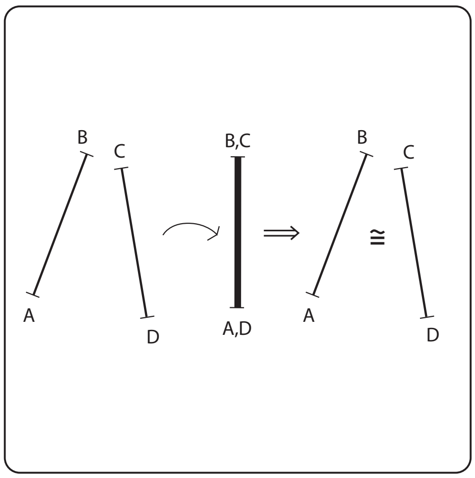
7. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa $40\,m$ y cateto $32\,m$?

11.1. Triángulos congruentes.

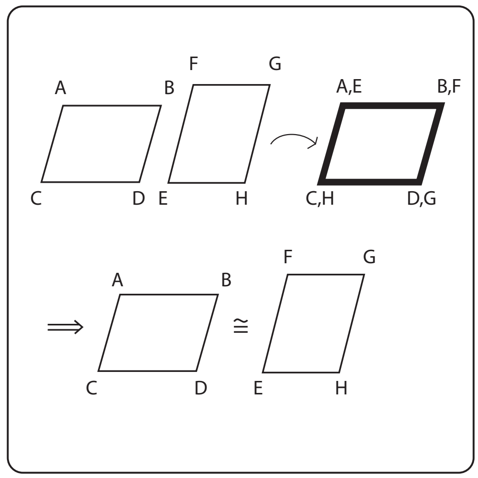
Dos figuras geométricas se pueden comparar colocando una sobre otra. Experimentando diferentes posiciones entre las figuras pudiera darse el caso de que coincidan o quizá nos percatemos de que una tiene la misma forma que la otra, pero en diferente tamaño o que definitivamente son distintas en forma y tamaño. En seguida definimos el caso en que coinciden.

Dos figuras geométricas son *congruentes* ($\cong$) si al colocar una figura sobre la otra no se puede distinguir una de la otra.

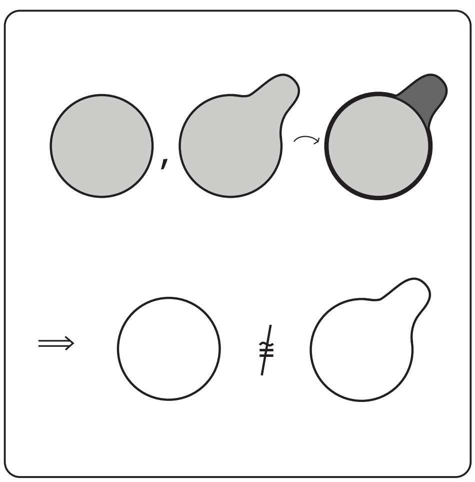
En realidad esta definición no es otra cosa que decir que dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. En la figura 11.6 mostramos dos casos de figuras congruentes y otros dos que no lo son.



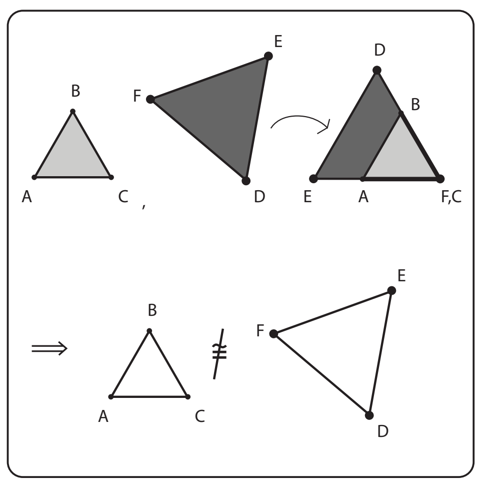
(a) Dos segmentos congruentes.



(b) Dos cuadriláteros congruentes.



(c) Dos figuras que no son congruentes.



(d) Dos figuras que no son congruentes.

Figura 11.6: *Congruencia entre figuras.*

Por ahora nos interesan las congruencias entre triángulos. Decir que $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes es equivalente a que $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC \cong EF$, ángulo $A \cong$ ángulo D, ángulo $B \cong$ ángulo E y ángulo $C \cong$ ángulo F, siguiendo la figura 11.7. En pocas palabras, se cumplen las igualdades $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ y $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, $\measuredangle C = \measuredangle F$. En la figura 11.7 se muestran estos triángulos, que al sobreponerlos resultan ser indistinguibles.

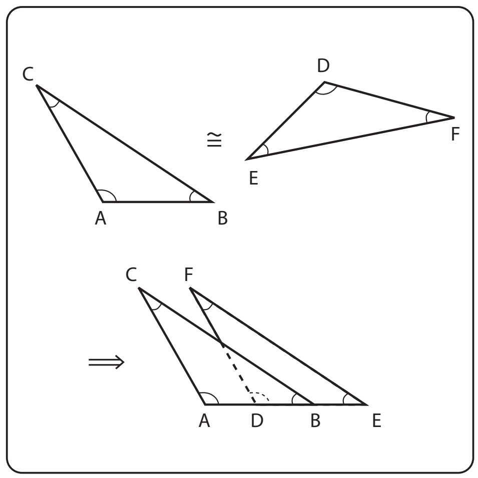


Figura 11.7: *Triángulos congruentes.*

¿Y cómo determinar la congruencia entre triángulos? ¿Realmente es necesario verificar que todos los lados y ángulos correpondientes son congruentes entre sí? Los siguientes postulados [1] nos ayudan a contestar estas preguntas.

- ***Postulado LLL:* dos triángulos son congruentes si todos los lados de un triángulo son congruentes con los lados correspondientes del otro triángulo.**
- ***Postulado LAL:* dos triángulos son congruentes si dos lados de un triángulo son congruentes con los lados correspondientes del otro y el ángulo formado**

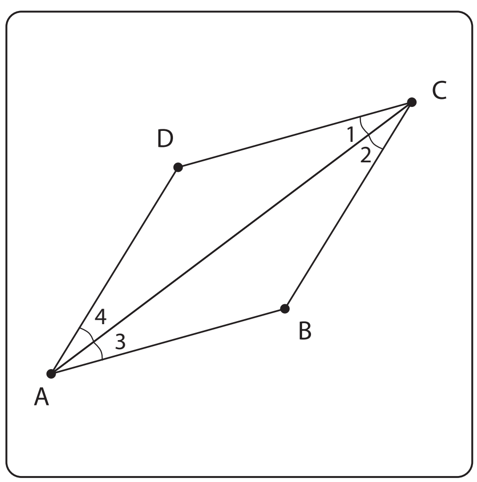
[1] enunciados que ante la evidencia se toman como verdaderos sin necesidad de demostrar su veracidad

por ellos también es congruente con su correspondiente en el otro triángulo.

- ***Postulado ALA:*** **dos triángulos son congruentes si dos ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes del otro y el lado común en ambos ángulos también es congruente con el lado correspondiente del otro triángulo.**

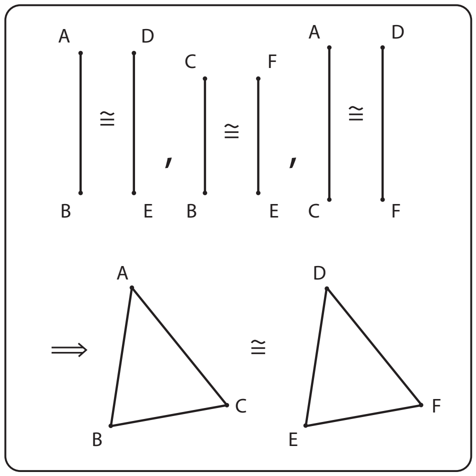
La figura 11.8 se muestra gráficamente cada uno de estos postulados Así tenemos que no es necesario verificar que todos los lados y ángulos internos de un triángulo son iguales a los de otro; basta con tomar los tres lados y compararlos o tomar dos lados y el ángulo que los une o tomar un lado y los dos ángulos que se forman con este lado para mostrar congruencia entre triángulos.

Ejemplo 11.2 *De acuerdo a la figura adjunta,* $\triangle ACD \cong \triangle CAB$*, ángulo* $1 \cong$ *ángulo* 3 *y* $CD \cong AB$*. Hallar todos los lados y ángulos correspondientes,*

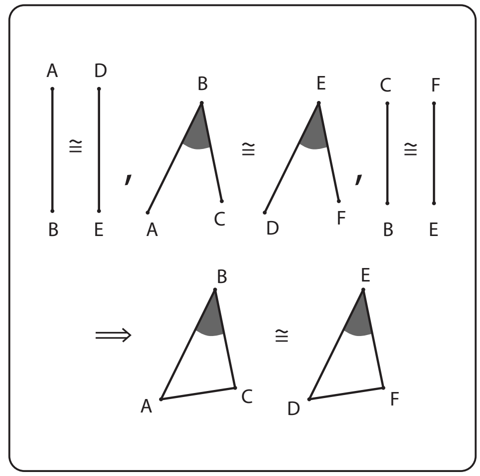


.

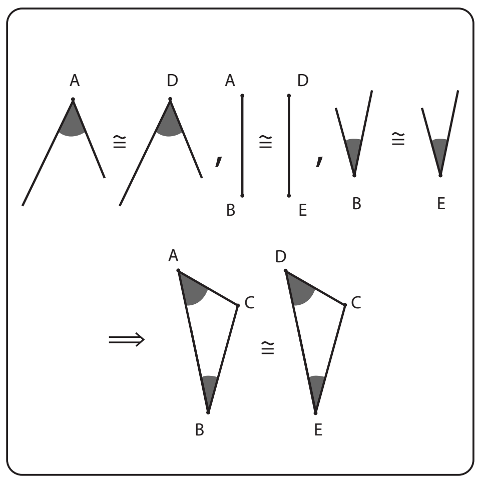
Como los dos triángulos que forman la figura son congruentes, entonces todos los lados de un triángulo miden lo mismo que los lados correspondientes del otro y lo mismo ocurre con sus ángulos internos. Deshacemos la figura dada y colocamos los dos triángulos de tal forma que sea evidente que tienen la misma forma y señalamos ángulo $1 \cong$ angulo 3 y $CD \cong AB$, además del lado AC que tienen en común,



(a) Postulado LLL.

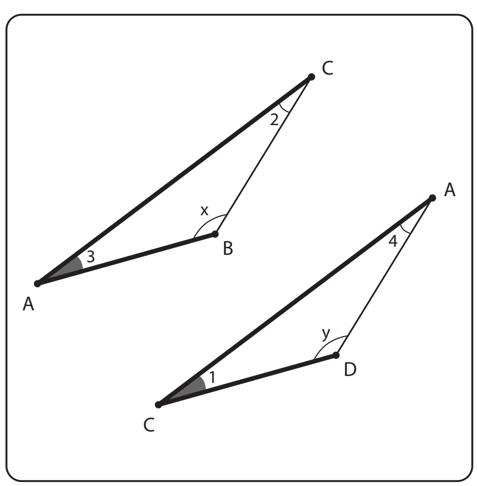


(b) Postulado LAL.



(c) Postulado ALA.

Figura 11.8: *Postulados de congruencia para triángulos.*



.

Así, podemos escribir fácilmente el resto de las correspondencias: $CB \cong AD$, ángulo $2 \cong$ ángulo 4 y ángulo $x \cong$ ángulo y.

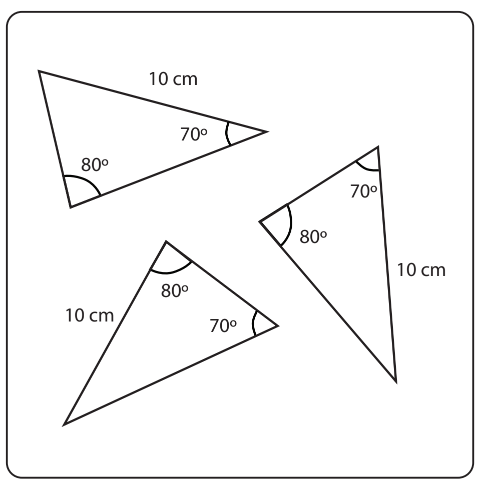
Notemos que aunque los vértices A y C aparecen en ambos triángulos, estos no están indicando congruencia, no señalan que son iguales en medida.

❑

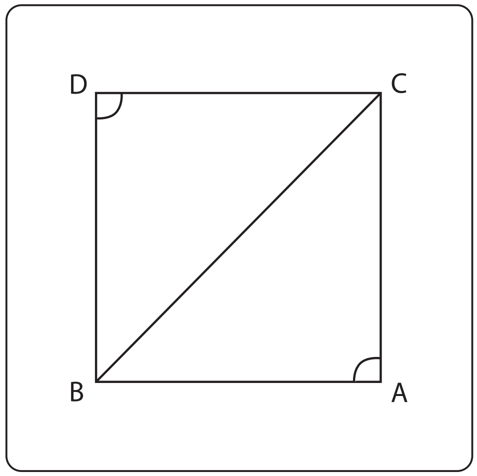
Nota: para el caso particular de triángulos rectángulos, sólo basta verificar dos condiciones, ya que existe un ángulo congruente que corresponde al ángulo recto entre los triángulos.

11.1.1. Ejercicios:

1. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes,



2. Un estudiante, para mostrar en la figura del cuadrado, que $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, determinó que $\overline{AB} = \overline{BD}$, que $\overline{AC} = \overline{DC}$ y que $\measuredangle A = \measuredangle D$, por ser ángulos rectos. ¿Qué postulado de congruencia de triángulos utilizó?



3. Afirmar o negar los siguientes enunciados, justificando la respuesta.

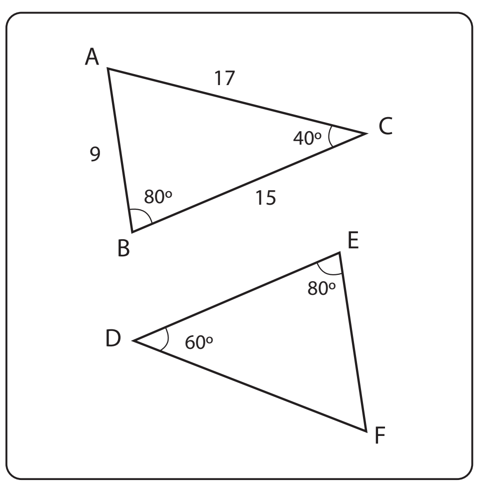
    a) Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus ángulos agudos correspondientes son congruentes.

    b) Dos triángulos son congruentes si sus lados respectivos miden los mismo.

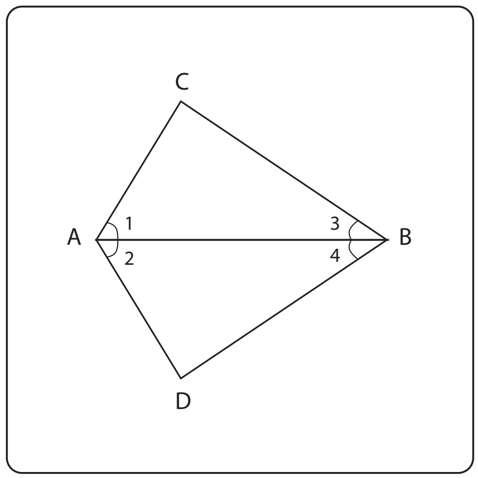
    c) Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son iguales.

    d) Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

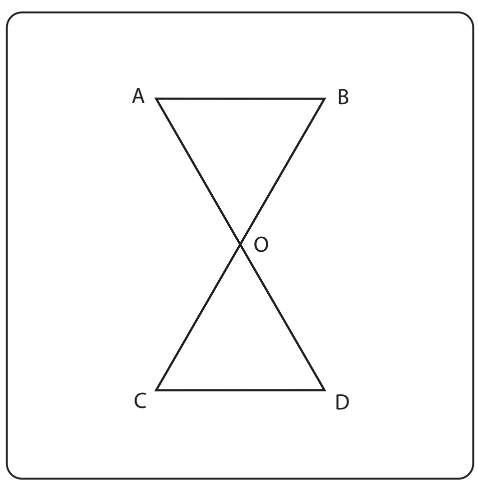
4. En la siguiente figura resulta que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Entonces ¿cuál es la medida de EF?



5. Si $\triangle ABC \cong \triangle ABD$, escribir las respectivas correspondencias de lados y ángulos, de acuerdo a la figura, donde se sabe que ángulo $1 \cong$ ángulo 2 y ángulo $3 \cong$ ángulo 4.



6. Si $\triangle AOB \cong \triangle COD$, indicar los lados y ángulos correspondientes de acuerdo a la figura, si se sabe que AB es paralelo a CD y $\overline{AB} = \overline{CD}$.



7. ¿Cómo explicarías que la congruencia entre dos triángulos rectángulos cualesquiera se cumple verificando la congruencia de dos de sus lados, no importando cuáles sean estos?

11.2. Triángulos semejantes.

En la figura 11.6 inciso b notamos un caso muy especial al querer comparar dos figuras geométricas. Resulta que dos triángulos pueden tener tamaños diferentes, pero conservar la misma figura, algo así como un "zoom" entre ellos.

> **Se dice que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son *semejantes* ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$) si sucede que ángulo $A \cong$ ángulo D, ángulo $B \cong$ ángulo E, ángulo $C \cong$ ángulo F y $\overline{AB} : \overline{BC} :: \overline{DE} : \overline{EF}$, $\overline{AB} : \overline{AC} :: \overline{DE} : \overline{DF}$, $\overline{BC} : \overline{AC} :: \overline{EF} : \overline{DF}$. O sea que los ángulos deben ser iguales y los lados correspondientes están en la misma proporción.**

En otras palabras, si dos triángulos son iguales en forma, pero tienen distinto tamaño, entonces se dice que son semejantes. En la figura 11.9, al sobreponer los triángulos notamos que tienen la misma forma, pero son de tamaño distinto; esta diferencia en magnitudes no es arbitraria. La proporción es la clave.

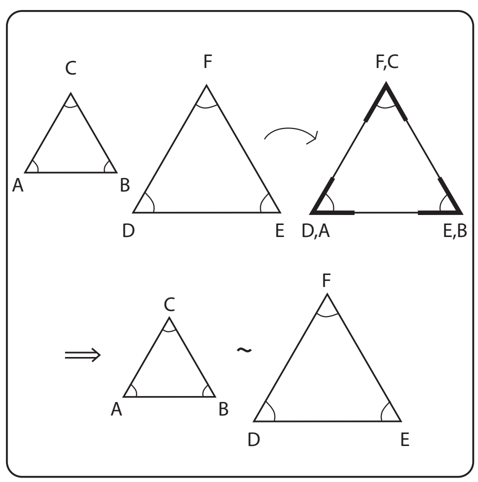


Figura 11.9: *Triángulos semejantes.*

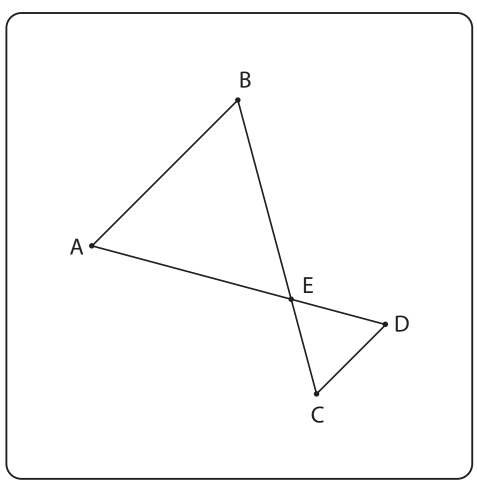
Al igual que en la congruencia de triángulos, existen postulados que ayudan a determinar la semejanza de triángulos.

- ***Postulado AAA:*** **dos triángulos son semejantes si los ángulos internos de uno son congruentes con los ángulos internos correspondientes del otro.**
- ***Postulado LAL:*** **dos triángulos son semejantes si un ángulo interno de un triángulo es congruente con un ángulo interno del otro y los lados que lo forman están en proporción entre los triángulos.**
- ***Postulado LLL:*** **dos triángulos son semejantes si los lados de un triángulo están en proporción con los lados correspondientes del otro.**

La figura 11.10 muestra estos postulados de manera gráfica y nos damos cuenta que no es necesario verificar todos los ángulos y todos los lados para determinar semejanza.

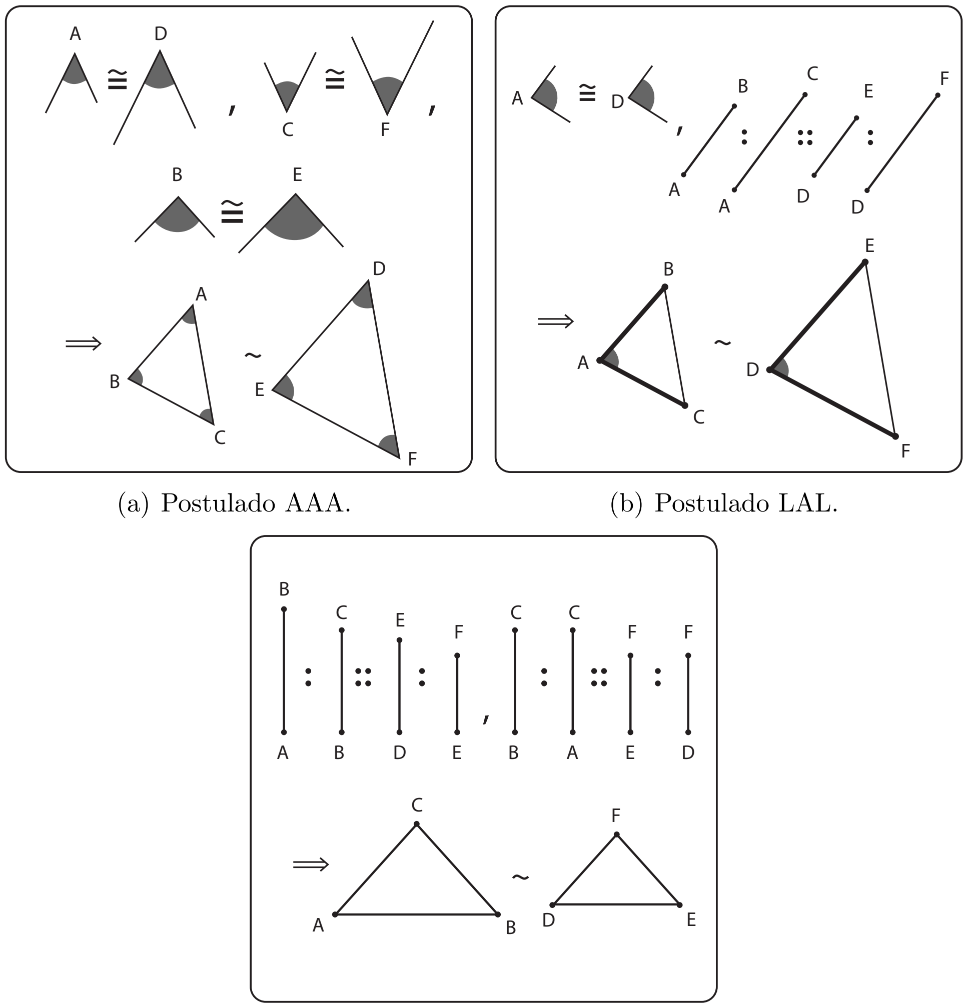
Más aún, de aquí podemos concluir que dos triángulos son semejantes si solamente dos de los ángulos internos de un triángulo son congruentes con los correspondientes del otro (¿por qué?).

Ejemplo 11.3 *En la siguiente figura, si los segmentos* AB *y* CD *son paralelos, mostrar que* $\triangle ABE$ *y* $\triangle CDE$ *son semejantes.*



.

Si $\overline{CD} = 6\,m$, $\overline{EC} = 8\,m$ *y* $\overline{EB} = 24\,m$, *calcular* $\overline{AB}$.



(a) Postulado AAA.

(b) Postulado LAL.

(c) Postulado LLL.

Figura 11.10: *Postulados de semejanza para triángulos.*

Comenzamos por hacer evidente que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son semejantes. Como no nos dicen que exista alguna proporción entre los lados de los triángulos, entonces vamos a recurrir al postulado AAA, porque no requiere de información acerca de los lados. Por tanto, buscamos la existencia de congruencias entre los ángulos correspondientes y notamos primeramente que los ángulos que se encuentran en el vértice E son ángulos opuestos por el vértice y por consecuencia son congruentes. Como AB y CD son segmentos paralelos, entonces B con C y A con D son ángulos alternos internos y por ello son congruentes. Entonces, tenemos que

$$\measuredangle A = \measuredangle D\,, \qquad \measuredangle B = \measuredangle C\,, \qquad \measuredangle E = \measuredangle E$$

y por el postulado AAA concluimos que $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

Hasta aquí sabemos que los triángulos son semejantes, por lo tanto los lados correspondientes están en proporción y este hecho es lo que utilizamos para encontrar la magnitud de $\overline{AB}$. Escribimos la proporción en la que están incluidas las cantidades $\overline{CD} = 6\,m$, $\overline{EC} = 8\,m$ y $\overline{EB} = 24\,m$, entonces

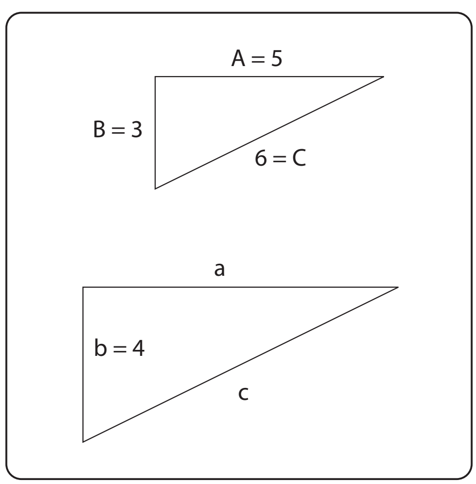
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EC}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{24} = \frac{6}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{AB} = 18$$

y de esta forma sabemos que el segmento AB mide $18\,m$.

❑

Ejemplo 11.4 *Las medidas respectivas de los lados de un triángulo son $3\,cm$, $5\,cm$ y $6\,cm$. Si el más corto de los lados de otro triángulo semejante mide $4\,cm$, encontrar la medida de cada uno de los otros dos lados.*

Como contamos con dos triángulos semejantes, basta con escribir las proporciones correctas. Empezamos por trazar el triángulo con las medidas mencionadas y el triángulo semejante, asignando nombres a los lados para facilitar la notación,



El lado correspondiente a B es b porque se menciona que para ambos triángulos es el lado más pequeño y con esto podemos escribir $B : A :: b : a$ como una proporción entre los triángulos, así

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3}{5} = \frac{4}{a} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{20}{3}$$

y de la misma forma escribimos otra porporción en la que se incluya el lado que nos falta por conocer, así

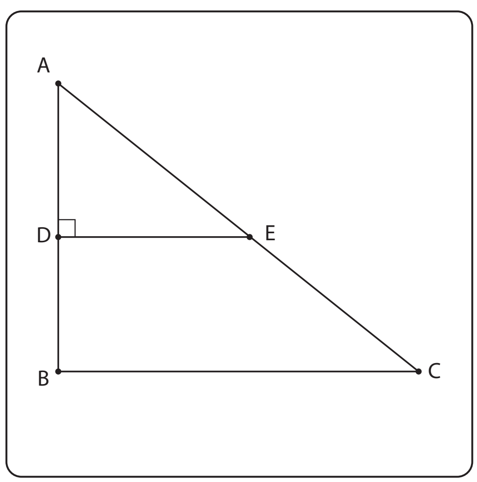
$$\frac{C}{B} = \frac{c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{6}{3} = \frac{c}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 8\,.$$

De esta forma, $a = 20/3\,cm$ y $c = 8\,cm$ son las medidas de los otros lados.

❑

11.2.1. Ejercicios:

1. Calcular la medida del segmento AC sabiendo que DE es paralelo a BC, $\measuredangle D = \pi/2$, $\overline{AD} = 2\,cm$, $\overline{DE} = 3\,cm$ y $\overline{BC} = 18\,cm$.



2. Se sabe que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y que $\overline{BC} = 25\,cm$, $\overline{AC} = 10\,cm$, $\overline{AB} = 30\,cm$, $\overline{B'C'} = 30\,cm$ y $\overline{A'C'} = 12\,cm$. Calcular el lado que falta de $\triangle A'B'C'$.

3. ¿Son semejantes todos los triángulos equiláteros? ¿Por qué?

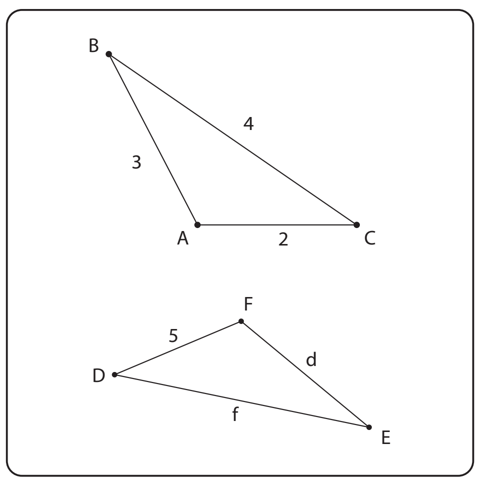
4. ¿Son semejantes todos los triángulos isósceles? ¿Por qué?

5. Los lados de un triángulo rectángulo miden $6\,cm$, $8\,cm$ y $10\,cm$. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero, si su hipotenusa mide $15\,cm$?

6. Un triángulo tiene como medidas de sus lados $8\,cm$, $6\,cm$ y $12\,cm$ y otro triángulo tiene medidas $6\,cm$, $4\,cm$ y $3\,cm$. ¿Son semejantes estos triángulos? ¿Cuál es la razón de proporción?

7. Las medidas respectivas de los lados de un triángulo son $12\,cm$, $14\,cm$ y $9\,cm$. Si el más largo de los lados de otro triángulo semejante mide $350\,cm$, encontrar la medida de los otros dos lados.

8. De acuerdo a la figura, $\measuredangle A = \measuredangle F$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$. Hallar las medidas respectivas de d y e.



9. Los lados de $\triangle ABC$ miden 2, 3 y 4 centímetros; los lados de $\triangle DEF$ miden 8, 12 y 16 centímetros.
   - ¿$\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes?
   - Hallar los perímetros de ambos triángulos y hallar la razón de los perímetros.
   - Comparar la razón de los perímetros con la razón de los lados proporcionales.

- Hallar el área de ambos triángulos (sugerencia: usar la fórmula de Herón) y hallar la razón de las áreas.
- Formula una conclusión en base a las razones obtenidas.

10. ¿Es posible que dos triángulos sean semejantes si el primero contiene ángulos que miden $50°$ y $79°$ y el segundo contiene ángulos que miden $79°$ y $51°$? ¿por qué?

11. ¿Es posible que dos triángulos rectángulos sean semejantes, si el primero contiene un ángulo que mide $26°$ y el segundo contiene un ángulo de $64°$? ¿Por qué?

12. ¿Es posible que dos triángulos rectángulos sean semejantes, si el primero contiene un ángulo que mide $85°$, y el segundo contiene uno de $100°$? ¿Por qué?

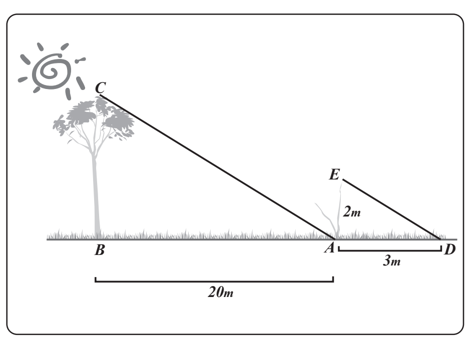
13. Determinar si son semejantes $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ FDE$ si $\measuredangle A = 62°$, $\measuredangle B = 54°$, $\measuredangle D = 54°$ y $\measuredangle E = 64°$.

11.3. Aplicaciones.

Los triángulos rectángulos están en todas partes, su aplicación está en prácticamente todo lo que observamos. La congruencia y semejanza entre triángulos es muy útil y más cuando no se cuentan con los instrumentos adecuados para hallar distancias o magnitudes demasiado grandes o demasiado pequeñas.

Ejemplo 11.5 *Calcular la altura de un árbol si su sombra tiene una longitud de $20\,m$ y una varilla de $2\,m$ de longitud proyecta una sombra de $3\,m$.*

Un dibujo del planteamiento nos aclara la situación,



.

En la figura observamos dos triángulos rectángulos que nombramos por $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$, los cuales son semejantes porque el ángulo A es compartido para ambos triángulos, los ángulos B y D son rectos y por consecuencia, los ángulos C y E son iguales. Así, los lados correspondientes son AB con AD, AC con AE y BC con DE.

Ya que hemos identificado las partes correspondientes entre los triángulos semejantes y ahora sólo necesitamos escribir la proporción correcta que nos permita conocer la altura del árbol, es decir, conocer la magnitud del segmento BC. Por tanto, escribimos una proporción que incluya esta cantidad y los datos proporcionados, entonces

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{BC}}{20} = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{AB} = \frac{40}{3}\,.$$

Por lo tanto, concluímos que la altura del árbol es de $40/3\,m$.

❑

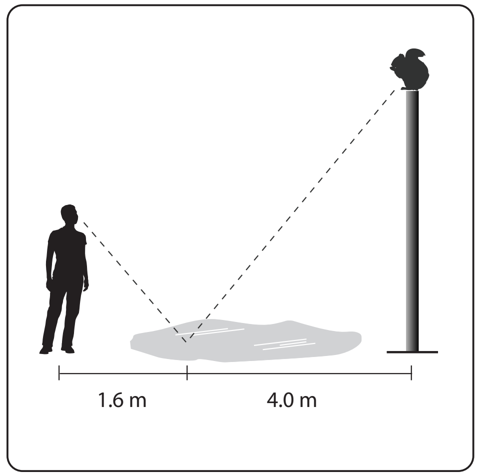
11.3.1. Ejercicios:

1. ¿Qué altura tiene la torre de un templo si su sombra mide $6\,m$, la altura de un árbol que está al lado mide $3\,m$ y la distancia desde la copa del árbol hasta donde termina su sombra es de $5\,m$?

2. Si un hombre de $1.75\,m$ de altura proyecta una sombra de $3.50\,m$, ¿qué sombra aproximada proyectará un poste de $8,25\,cm$?

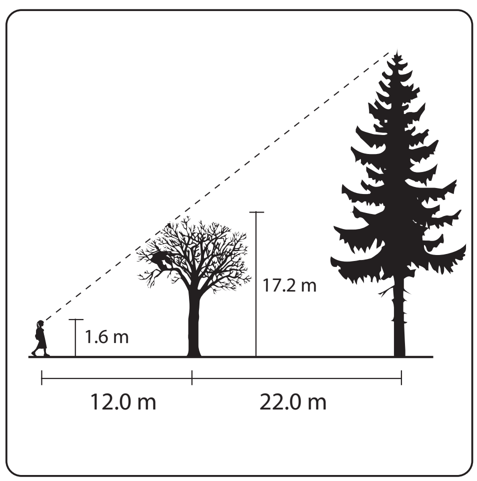
3. Una torre proyecta una sombra de $79.42\,m$ y un poste de altura $3.05\,m$ proyecta una sombra de $5.62\,m$. ¿Cuánto mide la torre?

4. La ardilla de Carlos se ha subido a un poste. Carlos puede ver su ardilla reflejada en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y sabe que la altura de sus ojos es de $144\,cm$. ¿A qué altura se encuentra la ardilla, sabiendo que la luz que entra al agua se refleja con el mismo ángulo de inclinación?



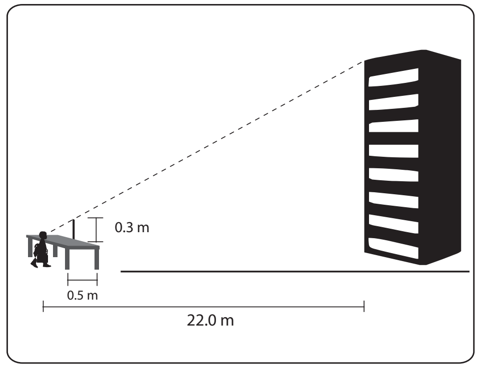
.

5. Un tipo sale al bosque y le encargan medir la altura del pino más alto. El tipo se para frente a un árbol, al cual si le es posible calcular su altura. Siguiendo el siguiente dibujo



definir la altura del pino más grande.

6. Un alumno tiene que calcular la altura de un edificio que ve de frente, pero solo cuenta con su mesa de trabajo de ancho $0.50\,cm$, una regla de $30\,cm$ y su cerebro. Se las ingenia como se muestra en la siguiente figura,



.

¿Cuál será la altura del edificio?

7. Queremos hacer un puente sobre un río muy caudaloso. Para ello es necesario medir la longitud del ancho del río. El proceso que seguimos es el siguiente:

   - Nos fijamos en un árbol que hay en la orilla opuesta del río. Al punto que representa este árbol lo llamamos C.
   - Tomamos dos puntos en la orilla en la que nos encontramos, A y B, y medimos la distancia que los separa, $52\,m$. El punto A lo tomamos de manera que esté justo enfrente del árbol.
   - Situándonos en el punto A medimos el ángulo A, que mide $90°$.
   - Situándonos sobre el punto B medimos el ángulo B, que mide $45°$. Traza un triángulo $A'B'C'$ semejante al triángulo ABC y teniendo en cuenta la razón de semejanza, calcular la longitud del ancho del río (AC).

11.4. Razones trigonométricas.

Recordamos que en un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a este ángulo se llama hipotenusa. Los catetos a su vez se pueden distinguir entre sí, porque si indicamos un ángulo α en uno de los vértices que se forman con la hipotenusa, como está en la figura 11.11, al cateto que forma parte del ángulo α se le llama *cateto adyacente* y al cateto que no forma parte del ángulo α se le llama *cateto opuesto*.

Así, sabiendo que b es el cateto opuesto y que a es el cateto adyacente, el Teorema de Pitágoras dado en la expresión (11.5) se escribiría como

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 .$$

El nombre de adyacente y opuesto para los catetos depende del ángulo del que hablamos, es decir, si ahora consideramos el otro ángulo que denotamos por β en la figura 11.11, el cateto adyacente es b y el cateto opuesto es a, pero esto no cambia en nada el Teorema de Pitágoras.

Los ángulos, en un triángulo rectángulo, están íntimamente relacionados con las razones entre los lados que lo forman. Así definimos tres razones entre las magnitudes de los lados que forman un triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo, respecto del ángulo α,

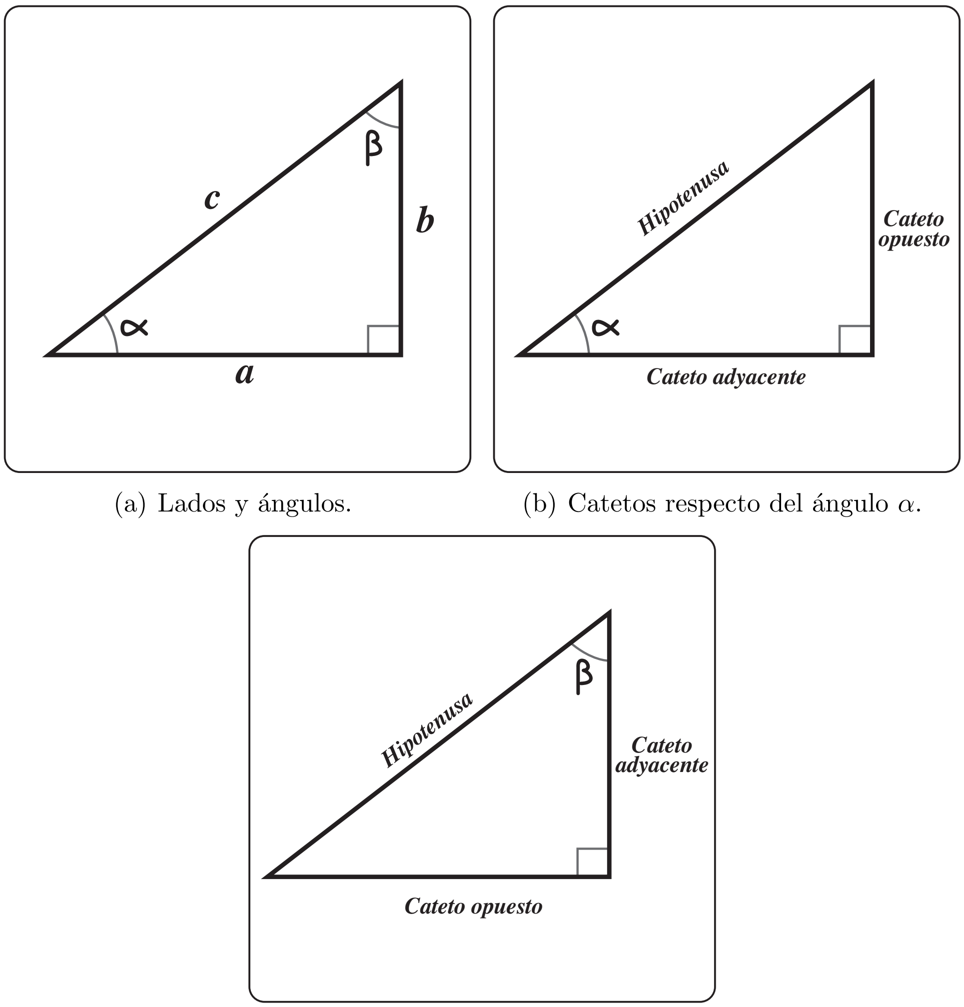
- **la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa se llama *seno*,**
- **la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa se llama *coseno*,**
- **la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se llama *tangente*.**

Otra manera de expresar estas razones, que de hecho es la utilizada en la práctica, es

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}\,, \\
\cos\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}\,, \\
\tan\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}\,,
\end{aligned}$$

respecto de la figura 11.11.

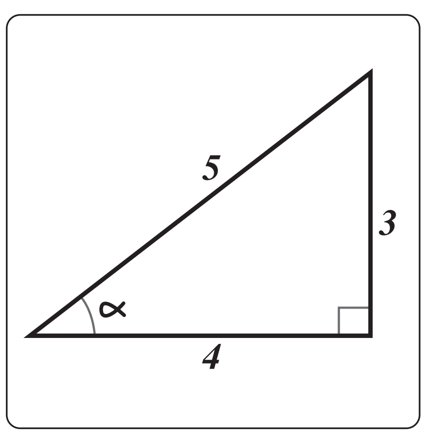
Ejemplo 11.6 *Escribir las razones seno, coseno y tangente del ángulo α en el triángulo rectángulo*



(a) Lados y ángulos. (b) Catetos respecto del ángulo α.

(c) Catetos respecto del ángulo β.

Figura 11.11: *Triángulo rectángulo.*



.

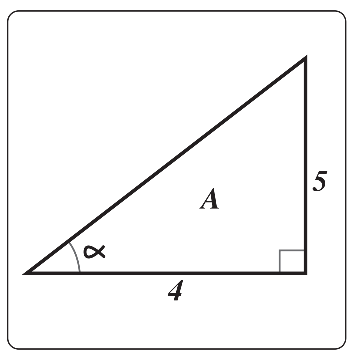
Aunque no conozcamos explícitamente el valor del ángulo α, las razones trigonométricas si las podemos conocer porque sólo involucran las magnitudes de los lados del triángulo. Así, siguiendo las definiciones escribimos

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}\,,\\
\cos\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}\,,\\
\tan\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

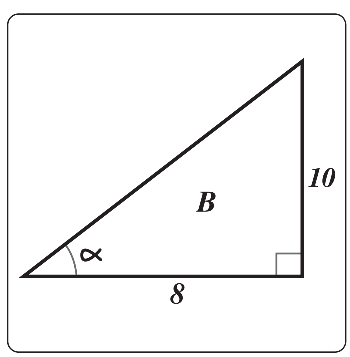
❑

Nota: las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo y no de las medidas del triángulo en cuestión. Esto es porque si dos triángulos rectángulos son congruentes en los ángulos, entonces son semejantes y por tanto están en proporción, es decir, sus lados guardan la misma razón.

Ejemplo 11.7 *Escribir el seno, coseno y la tangente del ángulo α para los triángulos rectángulos*



,



.

Estamos frente a dos triángulos semejantes, porque ambos tiene ángulos congruentes. La hipotenusa de cada uno la calculamos con la relación Pitagórica, por tanto la hipotenusa del triángulo A y del triángulo B son

$$c_A = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}\,, \qquad c_B = \sqrt{8^2+10^2} = 2\sqrt{41}\,,$$

respectivamente.

Ahora escribimos las razones trigonométricas para el triángulo A:

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}\,, \qquad \tan\alpha = \frac{5}{4}\,.$$

Por otra parte escribimos las razones trigonométricas para el triángulo B:

$$\sin\alpha = \frac{10}{2\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}\,, \qquad \tan\alpha = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\,.$$

❑

Si observamos cada una de las razones en el ejemplo anterior para los triángulos semejantes A y B, nos damos cuenta que son las mismas, por eso decimos que las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo y no de las magnitudes del triángulo.

Las razones trigonométricas inversas también reciben un nombre especial.

En un triángulo rectángulo, respecto del ángulo α,

- **la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto se llama *cotangente*,**
- **la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente se llama *secante*,**
- **la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto se llama *cosecante*.**

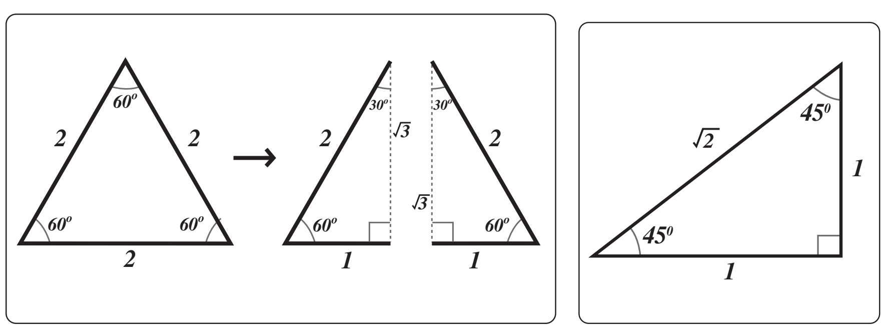
Esto no es otra cosa que escribir seno, coseno y tangente en sentido inverso en la razón, es decir,

$$\begin{aligned}
\cot\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\tan\alpha}\,,\\
\sec\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\cos\alpha}\,,\\
\csc\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{\sin\alpha}\,.
\end{aligned}$$

En total son seis razones trigonométricas que se pueden conocer a partir de las medidas del triángulo, pero ¿cómo determinar las razones trigonométricas si sólo se conocen los ángulos del triángulo? Por decir, ¿cómo determinamos las razones trigonométricas del ángulo de 30°? Es posible determinar estas cantidades conociendo únicamente los ángulos y lo haremos para tres ángulos básicos.

Pensamos en dos triángulos en particular. Por un lado dibujamos un triángulo equilátero de lado 2 y lo partimos justamente a la mitad formándose dos triángulos rectángulos, como está en la figura 11.12. Los ángulos internos de un triángulo equilátero miden 60°, por eso después de la partición los triángulos derivados tienen por ángulos internos 90°, 60° y 30°. Por el Teorema de Pitágoras sabemos que las medidas de los nuevos triángulos son 2 de hipotenusa y 1, $\sqrt{3}$ de catetos. Por otra parte mostramos en la figura 11.12 un triángulo rectángulo isósceles, teniendo por cateto 1 y por ende la hipotenusa es $\sqrt{2}$. A partir de estos dos triángulos podemos determinar las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° como sigue,

$$\begin{array}{lll}
\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \\
\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, & \tan 45^\circ = 1, & \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \\
\cot 30^\circ = \sqrt{3}, & \cot 45^\circ = 1, & \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, & \sec 45^\circ = \sqrt{2}, & \sec 60^\circ = 2, \\
\csc 30^\circ = 2, & \csc 45^\circ = \sqrt{2}, & \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{array}$$



(a) Triángulo equilátero. (b) Un triángulo isósceles.

Figura 11.12: *Dos triángulos básicos.*

Dado que las razones trigonométricas se definen a partir de un ángulo de un triángulo rectángulo, sabemos que éstas sólo las podemos calcular para $0° < \alpha < 90°$. Pero podemos extender estos conceptos para calcular las razones dado cualquier ángulo.

Colocamos un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 sobre el plano Cartesiano, de tal forma que el vértice del ángulo α esté en el origen y el cateto adyacente a este ángulo yace sobre el eje X, como está representado en la figura 11.13. Ahora dejamos fijo el cateto adyacente y movemos la hipotenusa (siempre de tamaño 1) haciendo pivote con el origen, marcando el ángulo α que va desde el eje X hasta la hipotenusa en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si el movimiento es en sentido inverso, entonces decimos que el ángulo es negativo. En la figura 11.13 marcamos este movimiento y notamos que para cada valor de α se está determinando un triángulo rectángulo con cateto adyacente a, cateto opuesto b e hipotenusa 1. El extremo de la hipotenusa que está libre tiene por coordenadas (a, b), que corresponden a las magnitudes de los catetos.

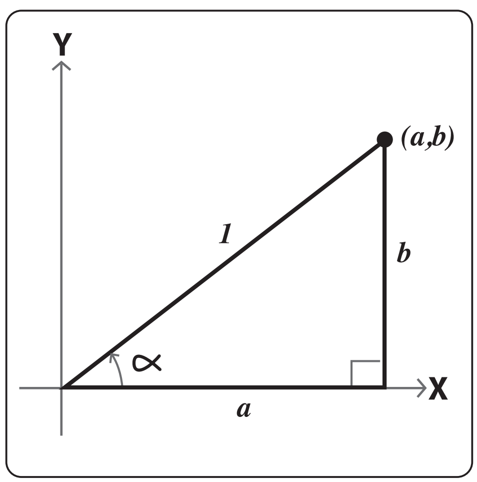


Figura 11.13: *Razones trigonométricas en el plano Cartesiano.*

La extensión de la que hablábamos de las razones trigonométricas consiste en aumentar el ángulo α, moviendo la hipotenusa que va dibujando un círculo de radio 1 conforme avanza sobre el cuadrante I, II, III y IV, como en la figura 11.14. Notamos que para cualquier ángulo se determina un triángulo rectángulo, donde quizás el ángulo α ya no es un ángulo interno. Las razones trigonométricas para cualquier ángulo α se definen a partir de las coordenadas (a, b), es decir,

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{b}{1}, & \cos\alpha &= \frac{a}{1}, \\ \tan\alpha &= \frac{b}{a}, & \cot\alpha &= \frac{a}{b}, \\ \sec\alpha &= \frac{1}{a}, & \csc\alpha &= \frac{1}{b}, \end{aligned}$$

donde hemos dejado indicado que siguen siendo razones entre los catetos y la hipotenusa, pero ahora con signo, porque depende del cuadrante donde se encuentre el extremo libre de la hipotenusa. En otras palabras, seguimos preservando el concepto de razón entre catetos o la razón de alguno de estos con la hipotenusa, con el agregado de que las magnitudes a y b pudieran ser negativas, según si el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I, II, III o IV.

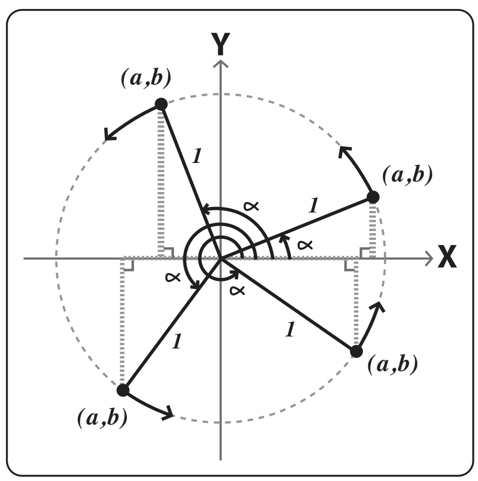


Figura 11.14: *Razones trigonométricas para cualquier ángulo.*

En la figura 11.15 ubicamos los ángulos principales, los que nos sirven de guía para estudiar los demás.

Ejemplo 11.8 *Determinar todas las razones trigonométricas del ángulo determinado en el cuadrante II por una recta que pasa por el origen y por el punto* $(-1, 2)$.

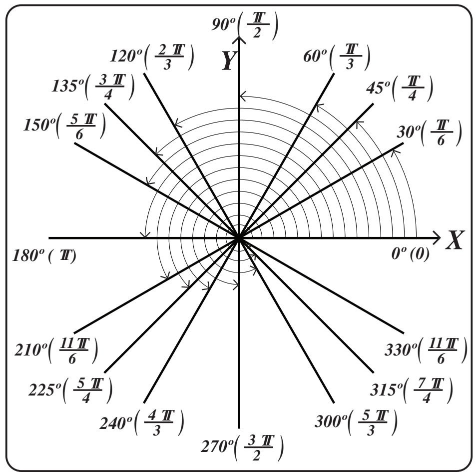
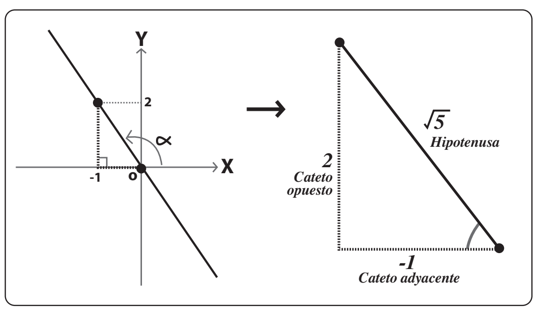


Figura 11.15: *Algunos ángulos principales.*

Hacemos un dibujo para entender el planteamiento,



.

En la figura indicamos el ángulo α y el triángulo rectángulo determinado por la recta. Esta recta hace la función de hipotenusa, y un punto sobre esta nos basta para determinar las coordenadas (a, b). Cualquier punto sobre la recta es útil (excepto el $(0, 0)$) y por facilidad tomamos el que nos dan $(-1, 2) = (a, b)$.

En la figura separamos el triángulo rectángulo formado con las medidas de sus lados y conservamos el signo de las medidas e indicamos los catetos adecuadamente, recordando que el cateto adyacente es el que se encuentra sobre el eje X. De aquí solo falta sustituir para obtener todas las razones trigonométricas,

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}\,,$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{-1} = -2\,, \qquad \cot\alpha = \frac{-1}{2}\,,$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}\,, \qquad \csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

❑

Como en el ejemplo anterior, las razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas; esto depende del cuadrante en el que se encuentre el triángulo rectángulo determinado por el ángulo dado. En la siguiente tabla damos los signos que toman las razones según el cuadrante en el que se encuentre α,

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sec\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\csc\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$

Siendo un poco estrictos nos deberíamos de cuestionar sobre la determinación de las razones trigonométricas en los ángulos $0°$, $90°$, $180°$ y $270°$, porque en estos ángulos no podemos dibujar un triángulo rectángulo como tal. De hecho, si intentamos trazar un triángulo lo que obtenemos es una recta de longitud 1, como se ve en la figura 11.16, porque alguno de los catetos mediría cero; por ejemplo, para los ángulos 0 y π el cateto opuesto sería 0 y para los ángulos $\pi/2$ y $3\pi/2$ el cateto adyacente sería 0. En la misma figura 11.16 indicamos las coordenadas (a, b) que corresponderían a cada ángulo y con esto podemos determinar el valor de las razones trigonométricas para estos ángulos, aunque no tengamos propiamente un triángulo rectángulo; así

$$\begin{array}{llll}
\sin 0 = 0, & \sin\frac{\pi}{2} = 1, & \sin\pi = 0, & \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\\
\cos 0 = 1, & \cos\frac{\pi}{2} = 0, & \cos\pi = -1, & \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\\
\tan 0 = 0, & \tan\frac{\pi}{2} \text{ no existe}, & \tan\pi = 0, & \tan\frac{3\pi}{2} \text{ no existe},\\
\cot 0 \text{ no existe}, & \cot\frac{\pi}{2} = 0, & \cot\pi \text{ no existe}, & \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\\
\sec 0 = 1, & \sec\frac{\pi}{2} \text{ no existe}, & \sec\pi = -1, & \sec\frac{3\pi}{2} \text{ no existe},\\
\csc 0 \text{ no existe}, & \csc\frac{\pi}{2} = 1, & \csc\pi \text{ no existe}, & \csc\frac{3\pi}{2} = 1.
\end{array}$$

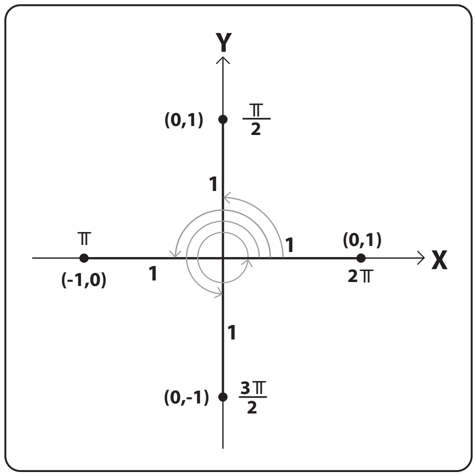


Figura 11.16: *Los ángulos* 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ *y* 2π.

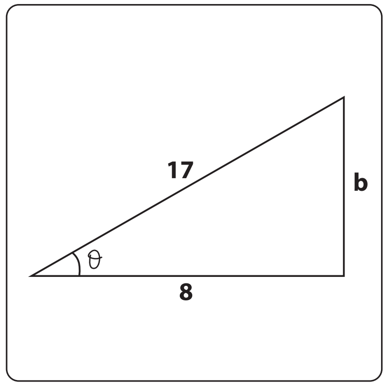
La frase "no existe" se refiere a que tenemos una cociente con cero en el denominador y por tanto no podemos definir la razón trigonométrica para ese ángulo.

Ejemplo 11.9 *Si* $\cos\theta = 8/17$, *con* θ *en el primer cuadrante, encontrar los valores de las otras cinco razones trigonométricas.*

Sabemos que la razón coseno relaciona el cateto adyacente con la hipotenusa, por tanto

$$\cos\theta = \frac{8}{17} \quad \begin{array}{lc} \longleftarrow & \text{cateto adyacente} \\ \longleftarrow & \text{cateto opuesto} \end{array}$$

Así ya conocemos dos de los tres lados de un triángulo rectángulo, siendo uno de sus ángulos θ. Dibujamos el posible triángulo del que se habla, que por estar en el cuadrante I sabemos que los catetos tienen magnitudes positivas,



.

y por el Teorema de Pitágoras podemos conocer el valor de b, el cateto opuesto,

$$8^2 + b^2 = 17^2 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 15\,.$$

Ya conociendo las magnitudes del triángulo, el resto de las razones trigonométricas son

$$\sin\theta = \frac{15}{17}\,, \qquad \tan\theta = \frac{15}{8}\,, \qquad \cot\theta = \frac{8}{15}\,,$$
$$\sec\theta = \frac{17}{8}\,, \qquad \csc\theta = \frac{17}{15}\,.$$

❏

Antes de continuar, vamos a realizar operaciones algebraicas con las razones trigonométricas, para evitar caer en errores comunes. Las expresiones $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ y $\csc\alpha$ son términos y como tales se manejan. A α le llamamos el argumento de las razones trigonométricas y hacemos varias anotaciones especiales.

- Si $A \neq B$, entonces $\tan A \neq \tan B$; quiere decir que si el argumento entre razones trigonométricas es distinto, entonces se tienen dos términos que no son semejantes. Así debemos de considerar lo siguiente:

  $$\sin A + \sin A = 2\sin A\,, \quad \sin 2A \neq 2\sin A\,, \quad \sin A + \sin 2A \neq \sin 3A\,.$$

- El término $\sin A \sin A$ es lo mismo que $(\sin A)^2$ o se estila escribir $\sin^2 A$, pero no es lo mismo que $\sin A^2$. Consideremos los siguientes ejemplos:

  $$(\sin A)(\sin A)^3 = (\sin A)^4\,, \quad \sin A^5 = \sin(AAAAA)\,.$$

- Si alguna operación algebraica está indicada en el argumento, ésta no indica que se deba realizar esa operación para el término de la razón trigonométrica, por ejemplo:

$$\sin(A+A)=\sin(2A)\neq\sin A+\sin A\,,\quad \sin A^2\neq\sin A\sin A\,,$$

$$\sin\sqrt{A}\neq\sqrt{\sin A}\,.$$

Ejemplo 11.10 *Simplificar la expresión* $2\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Consideramos como términos semejantes aquellas razones que tengan el mismo argumento, de otra forma no podemos simplificar. Entonces

$$\begin{aligned}2\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)&=\left(2+\frac{1}{2}\right)\sin x+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\\&=\frac{5}{2}\sin x+\sin\left(\frac{1}{2}x\right).\end{aligned}$$

❑

Ejemplo 11.11 *Resolver la ecuación* $5\tan(3\theta)-6\tan(-\theta+4\theta)=4$*, para* $\tan(3\theta)$.

El término que nos interesa despejar es $\tan(3\theta)$ y lo hacemos como acostumbramos resolver ecuaciones. Identificamos primeramente en la ecuación los términos $\tan(3\theta)$, después de realizar las operaciones indicadas en el argumento de la razón tangente,

$$5\tan(3\theta)-6\tan(-\theta+4\theta)=4\quad\Rightarrow\quad 5\tan(3\theta)-6\tan(3\theta)=4\,,$$

luego factorizamos,

$$\Rightarrow\quad(5-6)\tan(3\theta)=4\quad\Rightarrow\quad-\tan(3\theta)=4$$

y finalmente despejamos,

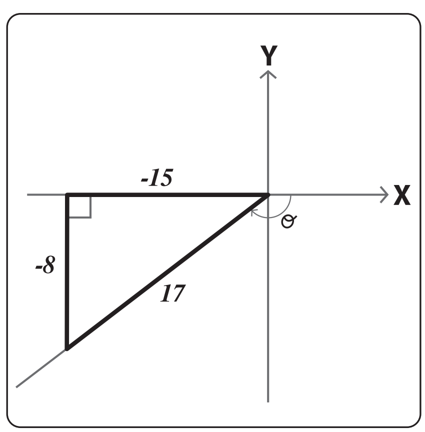
$$\Rightarrow\quad\tan(3\theta)=-4\,.$$

❑

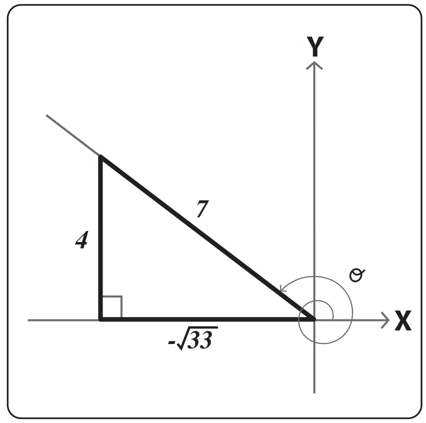
11.4.1. Ejercicios:

1. Determinar sobre que cuadrante yace la recta que forma el ángulo dado con el eje X:
   - $53°$,
   - $-126°$,
   - $253°$,
   - $\frac{3\pi}{4}$,
   - $-\frac{\pi}{4}$.
2. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo formado por el eje X y una recta que comienza en el origen y termina en el punto:
   - $(8, 0)$,
   - $(3, 4)$,
   - $(-3, 7)$,
   - $(0, 8/5)$,
   - $(-1, -5)$,
   - $(2, -6)$,
   - $(0, -2/3)$,
   - $(1/2, -2/3)$.
3. Dado que $\sec A = 5/4$, calcular el resto de las razones trigonométricas, siendo que $0 < A < \pi/2$.
4. Dado que $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ y que el el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante III, ¿cuáles son los valores de las otras cinco razones trigonométricas?
5. Hallar el valor de:
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$,
   - $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$,
   - $3\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2\sec\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.
6. Multiplicar y simplificar:

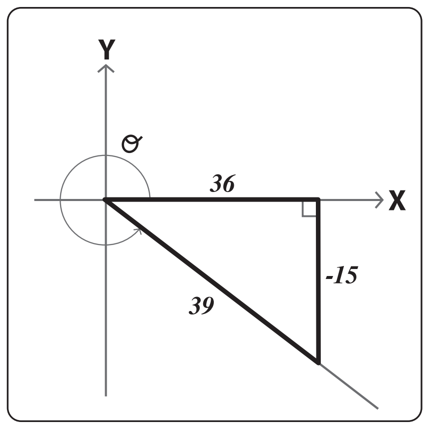
- $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$,
- $\tan x(\cos x - \csc x)$,
- $(\sin y - \cos y)^2$,
- $\cot x(\sin x + \sec x)$.

7. Factorizar y simplificar según sea el caso en las siguientes expresiones:
   - $\sin x \cos x + \cos^2 x$,
   - $\csc^4 \theta + 4\csc^2 \theta - 5$,
   - $4\sin^2 y + 8\sin y + 4$,
   - $\frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^2 x \sin x}$,
   - $\frac{4\sin\theta\cos^3\theta}{18\sin^2\theta\cos\theta}$,
   - $\frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{\cos x - 1}$.
8. Despejar el término $\tan x$ en la ecuación $3\tan x - 7\tan x - 21 = 0$.
9. Resolver la ecuación $\pi \sin\theta + \sin(2\theta - \theta) = 6$ para $\sin\theta$.
10. Calcular el seno, si el coseno de un ángulo es de $-4/5$. ¿Cuántas respuestas son posibles?
11. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ y que $270° < \alpha < 360°$, calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.
12. Encontrar el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo que se muestra:
    - 

,

- 

,

- 

.

13. Suponiendo que $\tan\beta = 2$ y que $180° < \alpha < 270°$, calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo β.

14. Dada $\sec\theta = 2$, con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, calcular el resto de las razones trigonométricas.

15. Determinar un valor de α de tal forma que la razón trigonométrica $\sin\alpha$ toma su valor más grande? ¿Cuál es este valor?

16. ¿Cuál es el valor más pequeño de la razón trigonométrica $\cos\alpha$? ¿Para qué α sucede esto?

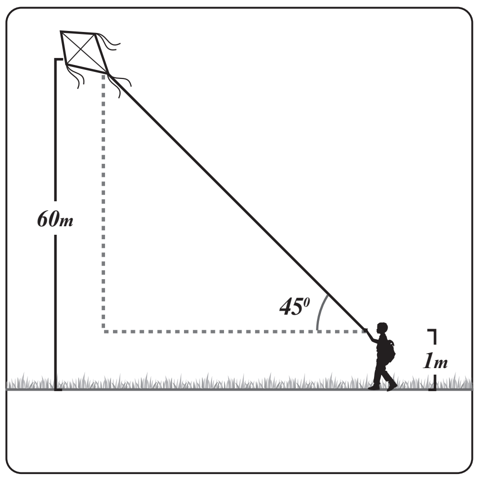
17. Determinar para qué valores de α, en el cuadrante I, la razón $\tan\alpha$ toma valores mayores a cero, pero menores que uno.

18. Determinar para qué valores de α, en el cuadrante I, la razón $\tan\alpha$ toma valores mayores a uno.

11.5. Aplicaciones.

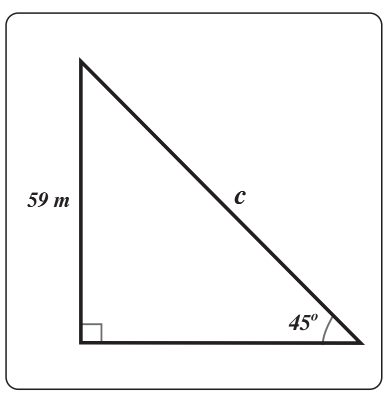
Siempre que logremos visualizar un triángulo rectángulo, tendremos la posibilidad de conocer distancias, alturas, inclinaciones, etc. Las razones trigonométricas son muy útiles para calcular distancias sin necesidad de recorrer éstas físicamente para medirlas.

Ejemplo 11.12 *Un niño eleva su cometa, la cual está a* $60\,m$ *de altura y donde el niño no puede soltarle más cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de* $45°$ *y el niño sujeta a un metro de altura sobre el suelo la cuerda. ¿Cuánta cuerda tenía el cometa?*



.

Siguiendo la figura, se forma un triángulo rectángulo con la cuerda del cometa, que hace la vez de hipotenusa, la altura del cometa y la distancia a la que está el niño del cometa medida horizontalmente, que hacen las veces de catetos. Trazando el triángulo rectángulo es



,

donde a la altura del cometa le hemos sustraído un metro, que corresponde a la altura a la que el niño sostiene la cuerda. La hipotenusa c es la incógnita del problema. Como el ángulo 45° es un ángulo del cual conocemos sus razones trigonométricas, entonces es suficiente escribir una razón que contenga los datos de este triángulo

$$\sin 45^\circ = \frac{59}{c}$$

porque por otra parte sabemos que

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

juntando ambas expresiones tenemos que

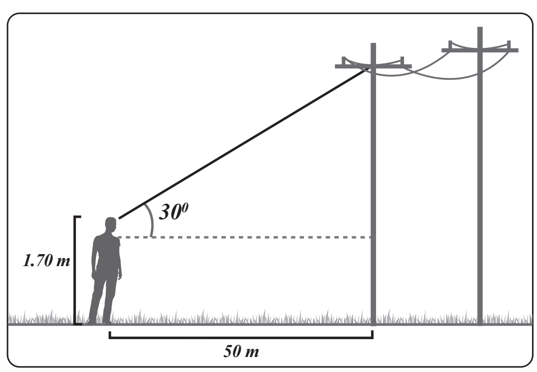
$$\frac{59}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 59\sqrt{2}\,.$$

Así, concluimos que el cometa tiene $59\sqrt{2}\,m$ de cuerda.

❑

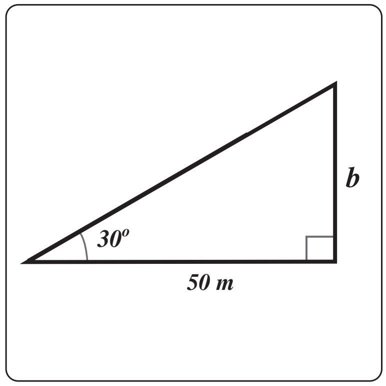
Muchas de las veces, en vez de distancias, se cuentan con datos como *el ángulo de elevación* y *el ángulo de depresión*, que son los ángulos calculados desde la horizontal hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

Ejemplo 11.13 *Juan está a* $50\,m$ *de un poste. El ángulo de elevación del extremo superior del poste es de* 30°. *¿Cuál es la altura del poste?, sabiendo que Juan mide* $1.70\,m$.



.

Como vemos en la figura, entre Juan y el poste se forma de manera natural un triángulo rectángulo, haciendo la horizontal con el poste el ángulo recto. Extraemos este triángulo y lo trazamos,



,

en el cual indicamos la medida del cateto adyacente al ángulo de 30° y dejamos como incógnita la medida del cateto opuesto b. La altura del poste será b adicionándole la altura de Juan. Para conocer b basta con esribir la razón trigonométrica que contenga los datos expuestos, aprovechando que 30° es un ángulo al que le hemos calculado sus razones. Así,

$$\tan 30^\circ = \frac{b}{50}\,, \qquad \text{y sabemos que} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

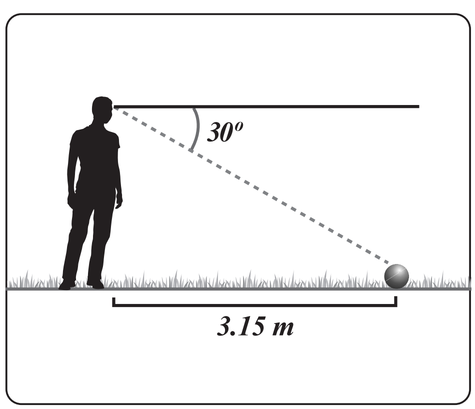
por lo tanto juntamos las dos informaciones,

$$\frac{b}{50} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{50}{\sqrt{3}}\,.$$

Finalmente, la altura del poste es b más la altura de Juan, es decir, $\left(\frac{50}{\sqrt{3}} + 1.7\right) m$.

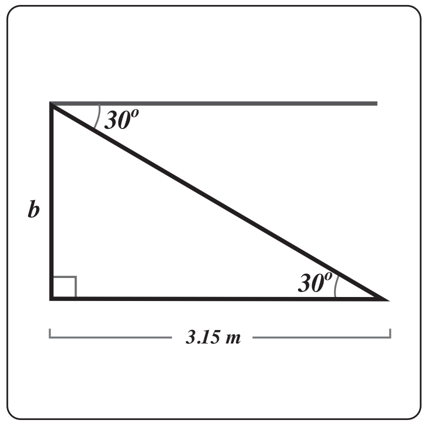
❑

Ejemplo 11.14 *Un futbolista está a* $3.15\,m$ *del balón. El ángulo de depresión es de* 30°*, ¿cuál es la estatura del futbolista?*



.

En la figura se indica el ángulo de depresión, pero éste no forma parte de los ángulos internos del triángulo formado por el futbolista y el balón. Sabemos que la horizontal del ángulo de depresión es paralela al suelo, por lo que el ángulo que se ubica en el balón, medido a partir del suelo es de 30° por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Veamos la figura,



,

donde b indica la altura del futbolista.

Para hallar b usamos la razón tangente, porque relaciona los catetos, además de saber que $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$, así

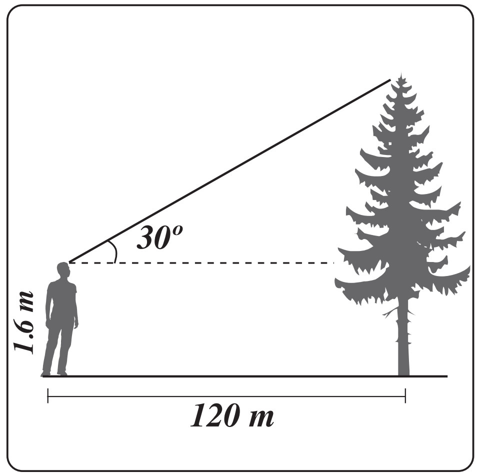
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30° = \frac{b}{3.15} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{3.15}{\sqrt{3}}\,.$$

Por tanto, la altura del futbolista es $3.15/\sqrt{3}\,m$.

❑

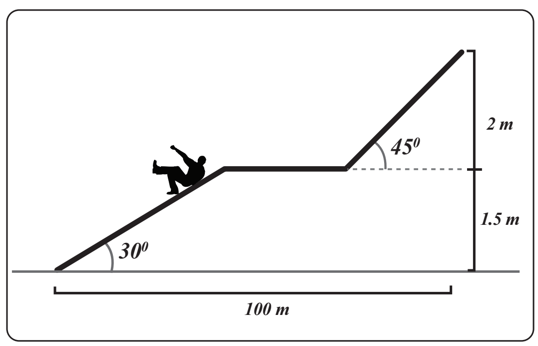
11.5.1. Ejercicios:

1. Un tipo se encuentra a $120\,m$ de un árbol y descubre que la línea de visión de la punta del árbol forma un ángulo de 30° con la horizontal, como está en la figura. La visión del tipo está $1.60\,m$ sobre el nivel del suelo. Encontrar la altura del árbol.



.

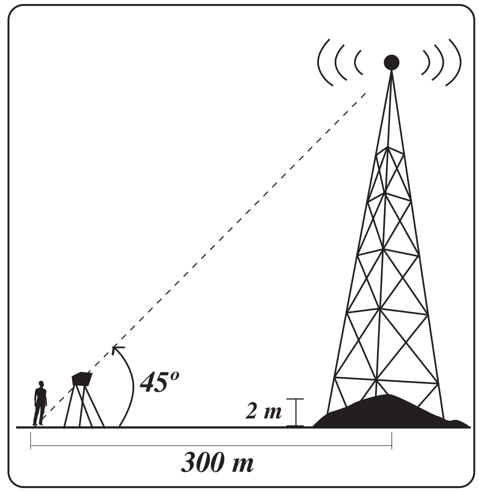
2. Se requiere diseñar un tobogán según el esquema. Calcular la longitud del tobogán que cumple con las especificaciones dadas.



.

3. Un granjero que tiene una granja en forma de hexágono regular necesita comprar paja para cubrir todo el terreno. Para cubrir $1\,m^2$ del terreno con paja le cuesta \$50. Si la cerca que delimita su terreno mide $60\,m$, ¿cuánto tiene que comprar de paja?

4. Para determinar la altura de una torre transmisora que se encuentra sobre un cerrito, un topógrafo se sitúa a $300\,m$ de la torre sobre el suelo nivelado. Si el topógrafo mide que el ángulo de elevación a la cúspide de la torre es de $45°$ y si la elevación del cerrito es de dos metros respecto del suelo nivelado, ¿qué tan alta es la torre?



.

5. La torre del guardabosques tiene una altura de $90\,m$. Desde ahí se percata de dos incendios; el primero se localiza en dirección Oeste, con un ángulo de depresión de $30°$ y el otro hacia el Este con un ángulo de depresión de $45°$. ¿Qué distancia lineal hay entre los dos incendios?

6. Un estadio de fútbol se planea con un ángulo ascendente en las gradas de $30°$ respecto de la horizontal. Si cada $0.76\,m$, medidos horizontalmente, puede haber una fila de asientos, ¿qué altura debe tener el estadio si se quieren colocar 24 filas de asientos?

11.6. Identidades trigonométricas.

LLamamos identidades trigonométricas a ciertas ecuaciones en las que están involucradas las razones trigonométricas que se cumplen para todo valor del ángulo. La más útil y conocida de las identidades es realmente el Teorema de Pitágoras reescrito en términos de las razones trigonométricas. Esto es muy fácil de entender si seguimos la figura (193), porque por un lado el Teorema de Pitágoras dice que

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1\,,$$

pero por otro lado sabemos que, respecto del ángulo α,

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}\,.$$

Entonces, sustituyendo las razones trigonométricas en el Teorema de Pitágoras obtenemos la primera identidad trigonométrica.

Para todo valor de α se cumple

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{11.2}$$

También hay otras identidades que nos ayudan mucho en las manipulaciones algebraicas y que se derivan directamente de las definiciones de las razones trigonométricas; por ejemplo, dado el triángulo en la figura 11.11, sabemos que

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \frac{b}{c},$$
$$\Longrightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{a}{c} = \tan\alpha\,.$$

De la misma forma mostramos la siguiente identidad,

$$\cot\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Para todo valor de α se cumplen,

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \textbf{y} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,. \tag{11.3}$$

De la definición de las razones trigonométricas inversas sabemos directamente las siguientes identidades.

Para todo valor α se cumplen

$$\sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \quad \textbf{y} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\,. \tag{11.4}$$

Notemos que todas las identidades anteriores se cumplen para el mismo argumento en las razones involucradas, por ejemplo es válida la expresión

$$\sin^2(2A) + \cos^2(2A) = 1$$

pero no es válido decir,

$$\sin^2 B + \cos^2(2B) = 1 \quad ✘\,.$$

Las siguientes identidades nacen de la combinación de las que hemos escrito y son muy fáciles de obtener. Primero escribimos la identidad (11.2) y dividimos por el término $\cos^2\alpha$ la ecuación,

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha+\cos^2\alpha &= 1\,,\\
\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos^2\alpha}\big(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\big) &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\,,\\
\Rightarrow\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2,
\end{aligned}$$

ahora aplicamos las identidades (11.3) y (11.4) como corresponda, para obtener

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha\,.$$

Ahora, en vez de dividir por el término $\cos\alpha$ la identidad (11.2), dividimos por el término $\sin\alpha$, para obtener

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha+\cos^2\alpha &= 1\,,\\
\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin^2\alpha}\big(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\big) &= \frac{1}{\sin^2\alpha}\,,\\
\Rightarrow\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2,
\end{aligned}$$

y aplicando nuevamente las identidades (11.3) y (11.4), logramos

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha\,.$$

Para cualquier valor de α se cumplen

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha \tag{11.5}$$

$$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha \tag{11.6}$$

Ejemplo 11.15 *Factorizar y simplificar la expresión* $4\sin^2 y+8\sin y+4$.

Sigamos atentamente los siguientes pasos:

$4\sin^2 y+8\sin y+4$	la expresión dada,
$4\big(\sin^2 y+2\sin y+1\big)$	factorizamos 4,
$4(\sin y+1)^2$	factorizamos el cuadrado perfecto.

Así, la expresión factorizada y simplificada es $4(\sin y + 1)^2$.

❑

Ejemplo 11.16 *Simplificar la expresión* $\tan^4 x - \sec^4 x$

En este caso aplicamos las identidades adecuadamente como sigue:

$$\begin{array}{ll}
\tan^4 x - \sec^4 x & \text{la expresión dada,} \\
\left(\tan^2 x\right)^2 - \sec^4 x & \text{aplicamos propiedad de los exponentes,} \\
\left(\sec^2 x - 1\right)^2 - \sec^4 x & \text{aplicamos la identidad (11.5),} \\
\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1 - \sec^4 x & \text{desarrollamos el cuadrado,} \\
1 - 2\sec^2 x & \text{sumamos términos semejantes.}
\end{array}$$

Y $1 - 2\sec^2 x$ es la simplificación de $\tan^4 x - \sec^4 x$.

❑

Evidentemente las identidades que hemos visto no son las únicas y de hecho hay tantas como uno desee, lo que distingue las anteriores del resto es que son muy sencillas y son utilizadas como base para crear las demás.

Ejemplo 11.17 *Mostrar que la identidad* $\sec\theta - \sin\theta\tan\theta = \cos\theta$ *es cierta.*

Mostrar que la ecuación se cumple para todo valor de θ consiste en manipular algebraicamente esta expresión hasta llegar a una igualdad evidente, sin dar algún valor particular a θ. Por ejemplo, si $\theta = 0$ y la sustituimos en la expresión dada obtenemos

$$\sec 0 - \sin 0 \tan 0 = \cos 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - (0)(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1 \quad ✔$$

lo cual es correcto. Pero aquí sólo hemos mostrado que la ecuación se cumple para el valor particular $\theta = 0$ y ¿qué pasa con el resto de los valores que puede tomar θ? No acabaríamos nunca si mostramos que la identidad es cierta probando para cada valor de θ.

Ahora no damos ningún valor a θ. Ahora nos apoyaremos en las identidades ya conocidas, comenzando por escribir la expresión dada

$$\sec\theta - \sin\theta\tan\theta = \cos\theta\,,$$

usamos las identidades (11.4) para $\sec\theta$,

$$\frac{1}{\cos\theta} - \sin\theta\tan\theta = \cos\theta\,,$$

luego aplicamos las identidades (11.3) para $\tan\theta$,

$$\frac{1}{\cos\theta} - \sin\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

y realizamos las operaciones indicadas,

$$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta\,.$$

Ahora aplicamos la identidad (11.2) del lado izquierdo de la igualdad,

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

y finalmente hacemos la operación indicada

$$\cos\theta = \cos\theta\,. \quad ✔$$

Entonces, ahora sí, hemos mostrado que la identidad es cierta para todo valor de θ.

❑

Una propiedad muy importante de las razones trigonométricas son las simetrías que presentan. Recordando la forma en la que definimos la razones para cualquier ángulo, en la figura 11.17 representamos los ángulos α y $-\alpha$ con sus respectivos triángulos asociados. Siguiendo estas figuras escribimos adecuadamente

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{y} \qquad \sin(-\alpha) = \frac{-b}{a}\,,$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{y} \qquad \cos(-\alpha) = \frac{a}{c}\,,$$

con lo que conseguimos los valores de las razones para los ángulos negativos.

Para cualquier valor de α se cumplen

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \textbf{y} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,. \tag{11.7}$$

Respecto de estas dos identidades, ¿cómo sería $\tan(-\alpha)$? A partir de la identidad (11.3) lo podemos saber,

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha\,.$$

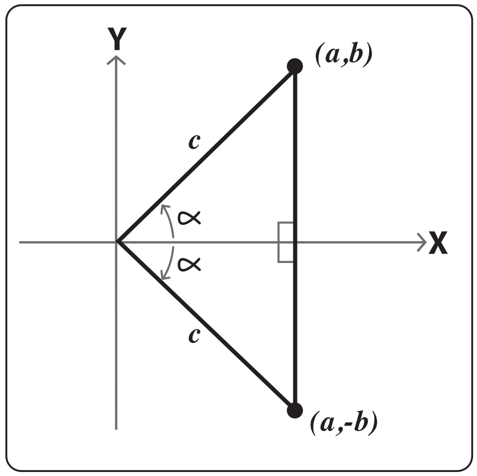


Figura 11.17: *Razones trigonométricas para ángulos negativos.*

11.6.1. Identidades sobre suma de ángulos.

Hasta el momento sabemos calcular las razones trigonométricas para ciertos ángulos especiales, como 0, $\pi/6$, $\pi/4$ y múltiplos de estos. Pero existen tablas e instrumentos que nos permiten conocer las razones para cualquier ángulo...y ¿cómo le hacen? Desarrollaremos en seguida un par de identidades que nos ayudan a conocer los valores de las razones para muchos otros ángulos.

¿Cómo podemos calcular $\cos(\alpha-\beta)$? Dibujamos un círculo de radio uno con centro en el origen del plano Cartesiano [2] y pintamos dos ángulos, α y β, en la figura 11.18. Los segmentos rectos de tamaño uno que parten del origen terminan en los puntos $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ y $(\cos\beta, \sin\beta)$ para los ángulos α y β respectivamente y la distancia que separa a estos dos puntos la denotamos por d. También trazamos la misma figura pero con una rotación de $-\beta$ respecto del origen, así tenemos que la distancia d separa a los puntos $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$ y $(1,0)$. Calculamos d para los dos dibujos; por tanto, para el primer dibujo

$$d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

[2]Sugerimos leer las secciones ()().

y para el segundo

$$d^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2\,.$$

Ahora igualamos las dos expresiones, porque ambas son iguales a d^2, entonces

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2$$

y desarrollamos los cuadrados,

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\ = \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)\,.\end{aligned}$$

Aplicamos la identidad (11.2) para hacer las sustituciones $\sin^2(\alpha-\beta) = 1-\cos^2(\alpha-\beta)$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ y $\sin^2\beta+\cos^2\beta = 1$ en la expresión anterior,

$$1-2\cos\alpha\cos\beta+1-2\sin\alpha\sin\beta = \cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+1-\cos^2(\alpha-\beta)$$

y sumamos términos semejantes,

$$-2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + 2 = -2\cos(\alpha-\beta) + 2\,.$$

Dividimos la expresión por -2, obteniendo

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Hemos obtenido un método para calcular la razón trigonométrica coseno de una diferencia de ángulos. Para hallar la misma razón para una suma no es nada complicado, porque nos apoyamos en las identidades que ya hemos desarrollado. Aprovechemos el resultado que acabamos de obtener para calcular $\cos(\alpha+\beta)$ o lo que es lo mismo

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))\,.$$

De esta manera sólo tenemos que aplicar la identidad adecuadamente,

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

y aplicamos las identidades (11.7) para sustituir las razones que tiene argumento negativo, entonces

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.$$

De esta forma, podemos enunciar la identidad trigonométrica de una suma de ángulos para el coseno.

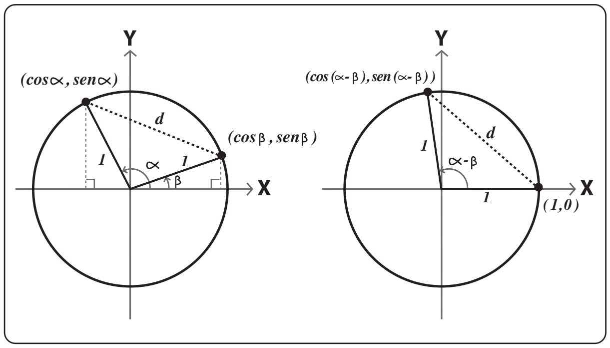


Figura 11.18: *Coordenadas para los ángulos α, β y $\alpha - \beta$.*

Para cualesquier α y β se cumplen,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,, \qquad (11.8)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

De igual manera hay identidades que nos proporcionan la razón seno en una suma y diferencia de ángulos.

Para cualesquier α y β se cumplen,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,, \qquad (11.9)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Para justificar estas dos indentidades, primero necesitamos saber que, siguiendo (11.8),

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos(A)+\sin\frac{\pi}{2}\sin(A)\,,$$

pero sabemos que $\cos(\pi/2)=0$ y $\sin(\pi/2)=1$, por lo que sustituyendo esto en la anterior ecuación obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A$$

y tengamos presente este resultado. Para justificar las identidades de la suma de ángulos en el seno calculamos

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

y apicando (11.8) tenemos

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\,,$$

donde aplicamos el resultado que acababamos de obtener,

$$\Longrightarrow \qquad \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,.$$

Por tanto acabamos de mostrar la identidad sobre la suma de ángulos para seno; para mostrar la de la diferencia de ángulos, es decir, considerar $\sin(\alpha-\beta)$ sólo hacemos el cambio $-\beta=B$ y obtenemos que

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+B)=\sin\alpha\cos B+\cos\alpha\sin B$$

en donde volvemos al ángulo original, es decir, sustituimos B por $-\beta$, entonces

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,.$$

Así, hemos mostrado todas las identidades sobre suma o diferencia de ángulos para seno y coseno y de paso mostramos la identidad que enunciamos a continuación.

Para cualquier valor de α se cumple

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,. \tag{11.10}$$

Esta identidad nos indica que los valores que toma la razón seno y la razón coseno están desfasados por $\pi/2$, o sea, están en desfase por 90°.

Ejemplo 11.18 *Calcular* $\cos 15°$.

No conocemos el valor de la razón coseno directamente, pero nos apoyamos en las identidades sobre suma y diferencia de ángulos. La expresión $\cos 15°$ la podemos reescribir como $\cos(45°-30°)$ y aprovechamos el hecho de que conocemos el coseno de estos dos ángulos. Así, aplicando (11.8) tenemos

$$\begin{aligned}\cos(45°-30°) &= \cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos 15°=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

❑

11.6.2. Identidades sobre el doble y la mitad del ángulo.

En realidad, las identidades que muestran las razones para el doble y la mitad del ángulo se derivan de las que acabamos de obtener en el apartado anterior. En las identidades (11.8) y (11.9) sumemos dos veces el mismo ángulo, así

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

y

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Acabamos de obtener dos identidades más y que enunciamos a continuación.

Para cualquier valor de α se cumplen

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,, \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{11.11}$$

De hecho podemos expresar aún en una forma más sencilla una de las identidades anteriores; apliquemos la identidad (11.2) a $\cos(2\alpha)$,

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{11.12}$$

o también

$$\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\,. \tag{11.13}$$

Para hallar identidades que expresen la mitad de un ángulo nos apoyamos en las expresiones (11.12) y (11.13) en donde hacemos el cambio $2\alpha = \beta$, o lo que es lo mismo $\alpha = \beta/2$. Entonces, las expresiones (11.12) y (11.13) con la sustitución $\alpha = \beta/2$ quedan

$$\cos\beta = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\beta + 1}{2}}$$

y

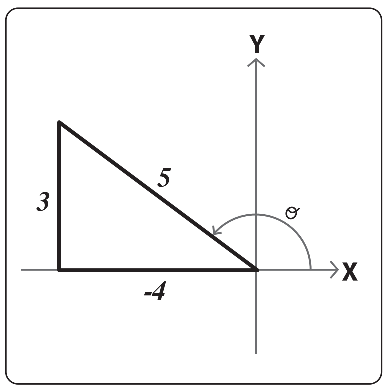
$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}\,.$$

Para cualquier valor de α se cumplen

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}} \quad \mathbf{y} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,. \tag{11.14}$$

Ejemplo 11.19 *Dado que* $\tan\theta = -3/4$ *y que* θ *se encuentra en el segundo cuadrante, encontrar* $\sin(2\theta)$, $\cos(2\theta)$ *y* $\tan(2\theta)$, *además de indicar el cuadrante en el que se encuentra* 2θ.

Como θ está en el segundo cuadrante, entonces en la expresión $\tan\theta = -3/4$ se está indicando que el cateto opuesto del triángulo rectángulo en cuestión es 3 y el cateto adyacente es -4. Trazamos el triángulo rectángulo del que hablamos



.

Por el Teorema de Pitágoras sabemos que la hipotenusa es 5. Ahora seguimos las igualdades (11.11) para obtener

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}\,, \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-4}{5}\right) = -\frac{24}{25}\,. \end{aligned}$$

Para determinar $\tan(2\theta)$ utilizamos la igualdad (11.3) y los cálculos que acabamos de obtener, así

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{-24/25}{7/25} = -\frac{24}{27}\,.$$

El cuadrante en el que se encuentra el ángulo 2θ lo sabemos por los signos que toman las razones en este ángulo; el seno es netativo y el coseno es positivo y esto quiere decir que el cateto opuesto es negativo y el adyacente es positivo y esto ubica al triángulo rectángulo en el cuarto cuadrante.

❑

Ejemplo 11.20 *Mostrar la identidad* $\cos x(\sec x - \cos x) = \sin^2 x$.

Vamos a hacer evidente que los dos lados de la igualdad expresan lo mismo. Partimos de la igualdad dada

$$\cos x(\sec x - \cos x) = \sin^2 x\,,$$

aplicamos la identidad (11.4) para $\sec x$,

$$\cos x\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \sin^2 x\,,$$

hacemos la operación indicada,

$$\cos x\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\right) = \sin^2 x\,,$$

utlizamos la identidad (11.2),

$$\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \sin^2 x$$

y finalmente simplificamos

$$\sin^2 x = \sin^2 x\,. \quad ✔$$

❑

Ejemplo 11.21 *Calcular* $\tan 15°$.

La razón tangente es el cociente de la razón seno y la razón coseno, por lo que comenzamos por encontrar los valores de éstas para el ángulo de $15°$. Aplicamos la identidad (11.14),

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sin\left(\frac{30°}{2}\right)}{\cos\left(\frac{30°}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}}{\sqrt{\frac{\cos 30°+1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\,.$$

Notemos que al aplicar (11.14) elegimos el signo positivo para las raíces, porque el ángulo $15°$ se ubica en el primer cuadrante.

❑

11.6.3. Ejercicios:

1. Calcular las siguientes razones trigonométricas:

   a) $\cos 75°$,
   b) $\cos 105°$,
   c) $\cos 195°$,
   d) $\sin 135°$,
   e) $\tan 15°$,
   f) $\sin \frac{5\pi}{8}$,
   g) $\tan \frac{\pi}{8}$.

2. Calcula las siguientes expresiones:

   a) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$,
   b) $\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3}$.

3. Simplificar las siguientes expresiones:

   - $\frac{\tan A+\cot A}{\csc A}$,
   - $(\sin B+\cos B)^2$,
   - $\tan y\sin y(\cot y-\csc y)$,
   - $\frac{\csc\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta\tan\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$,
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(\sec x-\cos x)$,
   - $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\left(\sec^2 A-\tan^2 A\right)$.

4. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

   a) $225°$,
   b) $\frac{11}{6}\pi$,
   c) $2675°$,
   d) $-840°$.

5. Comprobar las siguientes identidades:

   - $\csc\theta-\cos\theta\cot\theta=\sin\theta$,

- $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\cos\alpha$,
- $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{\tan x}$,
- $\cot^2\alpha = \cos^2\alpha + (\cot\alpha\cos\alpha)^2$,
- $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$,
- $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$,
- $\frac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)} = \frac{\sin(2x)-\sin(2y)}{\sin(2x)+\sin(2x)}$,
- $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$,
- $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

6. Mostrar que $\tan(\pi + A) = \tan A$.

7. Mostrar que $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

8. Resolver la ecuación $\sin^2 A + \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = 6$ para $\sin A$.

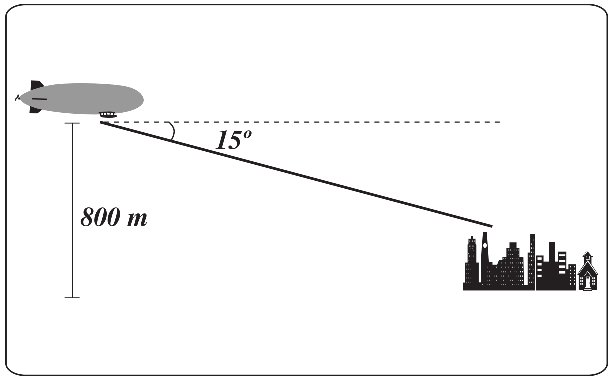
9. Despejar $\sin x$ en la expresión $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 = 0$.

10. Encontrar una fórmula para calcular $\sin(3\theta)$ en términos de razones evaluadas en θ.

11.7. Aplicaciones.

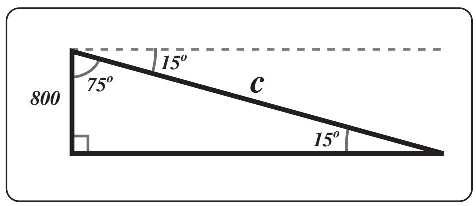
Las aplicaciones son las mismas que hemos trabajando en la sección anterior, salvo que ahora extendemos nuestros cálculos a ángulos no tan conocidos directamente.

Ejemplo 11.22 *Un dirigible que está volando a $800\,m$ de altura distingue un pueblo con un ángulo de depresión de $15°$, ¿a qué distancia del pueblo se halla?*



.

El triángulo formado por el dirigible, el pueblo y el punto sobre el que vuela el dirigible tiene por ángulos los que señalamos en la figura



y está denotado por c la distancia a la que se encuentra el dirigible del pueblo. Para hallar c seleccionamos una razón trigonométrica que incluya los datos que si conocemos, por ejemplo

$$\sin 15^\circ = \frac{800}{c} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{800}{\sin 15^\circ}\,,$$

pero $\sin 15^\circ$ no lo conocemos directamente. Recurrimos a las identidad (11.14) para el respectivo cálculo, así

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\,.$$

El resultado tiene dos signos y nos quedamos con el positivo porque estamos hablando del ángulo 15°, el cual se encuentra en el primer cuadrante y hace que la razón seno sea positiva. Finalmente

$$c = \frac{800}{\sin 15^\circ} = \frac{800}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{1600}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,,$$

por tanto decimos que la distancia del dirigible al pueblo es de $1600/\sqrt{2-\sqrt{3}}\,m$.

❑

11.7.1. Ejercicios:

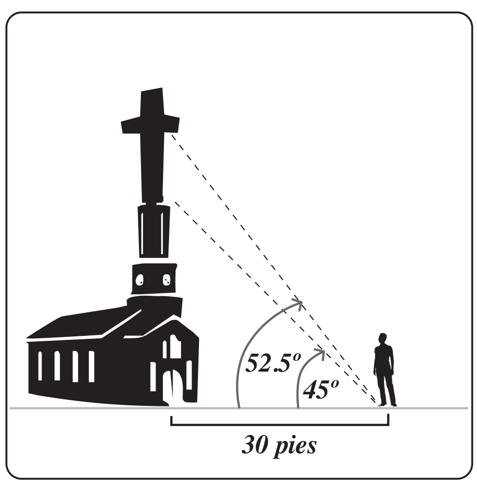
1. Un árbol de $50\,m$ de alto proyecta una sombra de $60\,m$ de largo. Encontrar el ángulo de elevación del Sol en ese momento.

2. Una escalera de $9\,m$ está apoyada contra la pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo un ángulo de $75°$?

3. A $75\,m$ de la base de una antena el ángulo de elevación a su parte más alta es de $22.5°$. Calcular la altura de la antena, tomando en cuenta que la altura del aparato con que se midió el ángulo es de $1.5\,m$.

4. Desde lo alto de un faro de $150\,m$ de altura se observa una embarcación a un ángulo de depresión de $\pi/8$; calcular la distancia del faro a la embarcación.

5. Sobre la azotea de una iglesia se encuentra una cruz monumental como se muestra en la figura. Se hacen dos observaciones desde el nivel de la calle y a $30\,pies$ desde el centro del edificio. El ángulo de elevación hasta la base de la cruz es de $45°$ y el ángulo medido hasta el extremo de la cruz es de $52.5°$. ¿Cuánto mide la cruz?



.

6. Un faro de $36\,m$ de altura se encuentra sobre una colina de $75\,m$. Calcular cuál es la máxima distancia del horizonte visible desde el faro. Considerar que la Tierra es un círculo de radio $6373\,km$

.

7. Un ingeniero advierte que desde cierta posición, el ángulo de elevación al extremo de un edificio es de $7.5°$; camina $50\,m$ hacia el edificio y el ángulo es de $15°$. ¿Qué distancia le falta para llegar al pie del edificio? ¿Cuál es la altura del edificio?

8. Una playa tiene un ángulo de elevación uniforme de $\pi/16$. La diferencia de mareas entre la marea alta y la baja es de $1.9\,m$. ¿Qué distancia se extiende el agua sobre la playa entre las dos mareas?

9. Un salvavidas está en su torre de observación a $20\,m$ de altura. Una persona implora su ayuda y el salvavidas lo observa con un ángulo de depresión de $\pi/16$. ¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?

10. Un cohete se dispara y éste sube a un ángulo constante de $75°$ hasta recorrer una distancia de $12\,000\,m$. ¿Qué altura alcanzó el cohete?

11. Se requiere conocer el ancho de un río y sólo cuenta con un aparato que mide ángulos. Describir un método.

11.8. Leyes de los senos y los cosenos.

Hasta el momento hemos tratado triángulos rectángulos, ahora extenderemos un poquito nuestro estudio y trataremos triángulos sin ninguna característica en particular. Lo que hemos hecho hasta ahora nos ayudará a desarrollar técnicas para estudiar cualquier tipo de triángulos. En general, vamos a considerar el triángulo de la figura 11.19 con ángulos A, B y C y lados a, b y c; por notación clásica se acostumbra nombrar el lado opuesto a un vértice con la misma letra, pero una es mayúscula mientras la otra es minúscula.

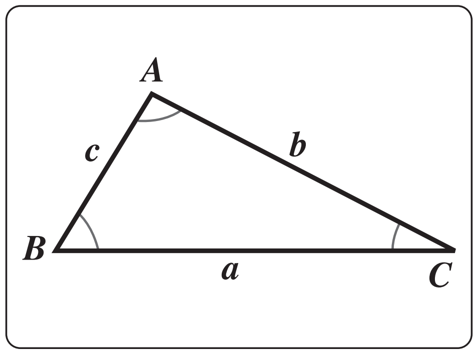


Figura 11.19: *Triángulo ABC.*

Trazando una recta que pase por un vértice y sea perpendicular al lado opuesto en un triángulo se determinan dos triángulos rectángulos como está en la figura 11.20, en la que exponemos los dos casos posibles: si todos los ángulos internos son agudos o si alguno es obtuso. En cualquiera de los dos casos vamos a calcular el seno de los ángulos B y C para los triángulos rectángulos que se formaron; para el caso en el que los todos los ángulos internos son agudos tenemos que

$$\sin B = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c\sin B \qquad \text{y} \qquad \sin C = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b\sin C$$

e igualando ambas expresiones porque tienen en común el valor de h obtenemos

$$c\sin B = h = b\sin C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\,.$$

Y para el caso en el que un ángulo interno es obtuso hacemos uso de la identidad $\sin(180^\circ - B) = \sin B$ (¿por qué?), de esta manera obtenemos precisamente lo mismo que acabamos de calcular, porque

$$h = b\sin C \qquad \text{y} \qquad \sin B = \sin(180^\circ - B) = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c\sin B$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Y si realizamos el mismo proceso de trazar una recta que pase por los otros dos vértices obtenemos la identidad que enunciamos en seguida.

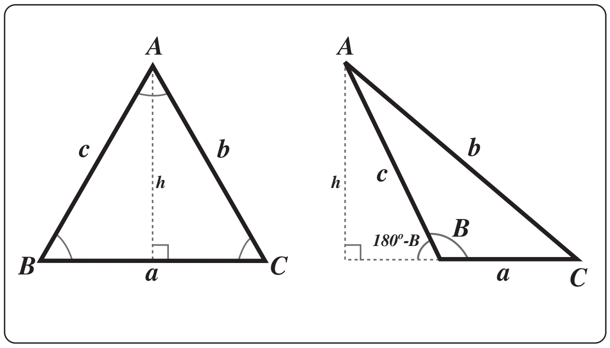


Figura 11.20: *Altura para cualquier triángulo.*

En un triángulo ABC **se cumple la *ley de los senos*, es decir,**

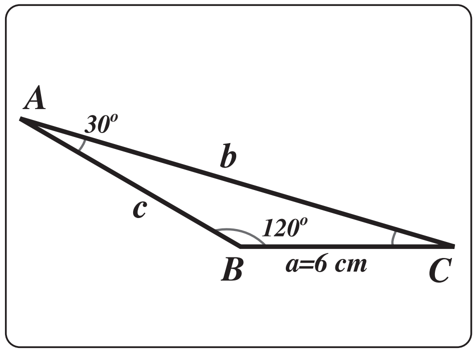
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\,. \tag{11.15}$$

Esta ley nos dice que están en proporción los senos de los ángulos de un triángulo con sus lados, lo cual suena muy lógico: entre más grande es un ángulo más grande es su lado opuesto.

La ley de los senos nos permite conocer un triángulo en su totalidad a partir de unos cuántos datos. El siguiente ejemplo muestra como obtener todos los datos de un triángulo a partir de dos ángulos conocidos y un lado dado.

Ejemplo 11.23 *Para* $\triangle ABC$ *con* $\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle B = 120°$ *y* $a = 6\,cm$, *encontrar el resto de las medidas.*

Con los datos que nos dan podemos trazar el triángulo del que se habla



,

en donde sabemos que $\measuredangle C = 30°$ porque $\measuredangle C = 180° - \measuredangle A - \measuredangle B$.

Para conocer los lados b y c escribimos la igualdad de la ley de senos (11.15) que nos conviene por los datos con los que contamos,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 30°}{6} = \frac{\sin 120°}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{6(3/2)}{1/2} = 18\,,$$

donde ocupamos la identidad (11.14) para calcular $\sin 120°$.

Para determinar el valor de c ahora escribimos la otra igualdad de la ley de senos,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 30°}{6} = \frac{\sin 30°}{c} \quad \Rightarrow \quad c = 6\,.$$

Así, las medidas del triángulo son $\measuredangle A = 30°$, $\measuredangle B = 120°$, $\measuredangle C = 30°$, $a = 6\,m$, $b = 18\,cm$ y $c = 6\,m$.

❑

Un resultado directo a partir de la ley de senos habla sobre el área de cualquier triángulo. Vamos a fijarnos nuevamente en la figura 11.20, y sabemos que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura, entonces

$$\text{área} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C\,.$$

Evidentemente esta fórmula también se puede presentar si conocemos el ángulo B o el A.

El área de $\triangle ABC$ es

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B\,. \tag{11.16}$$

Ejemplo 11.24 *Calcular el área del triángulo que tiene $\measuredangle A = \pi/3$, $b = 9\,cm$ y $c = 12\,cm$.*

Como conocemos los lados b, c y el ángulo A, entonces ocupamos la fórmula

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(9)(12)\sin\frac{\pi}{3} = 23\sqrt{3}\,.$$

Así, el área del triángulo es $27\sqrt{3}\,cm^2$.

❑

Pero la ley de senos no es la única identidad para triángulos cualesquiera, porque colocando un triángulo en el plano Cartesiano de tal forma que uno de sus vértices se ubique en el origen y uno de sus lados coincida con el eje X en sentido positivo, como lo trazamos en la figura 11.21, podemos relacionar los datos de un triángulo en donde sólo intervenga la razón coseno. De la figura 11.21 vemos que a es la distancia que separa al punto B del punto C [3], por tanto

$$\begin{aligned} a^2 = [d(B,C)]^2 &= (c - b\cos A)^2 + (0 - b\sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A \end{aligned}$$

y factorizando b^2 podemos aplicar la identidad (11.2) para obtener

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,.$$

Dependiendo del orden en el que denotamos los vértices y los lados toma distinta forma esta relación que se le conoce como ley de cosenos.

En un triángulo ABC se cumple la *ley de los cosenos*, es decir,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B\,, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C\,. \end{aligned} \qquad (11.17)$$

[3] Sugrimos leer las secciones ()().

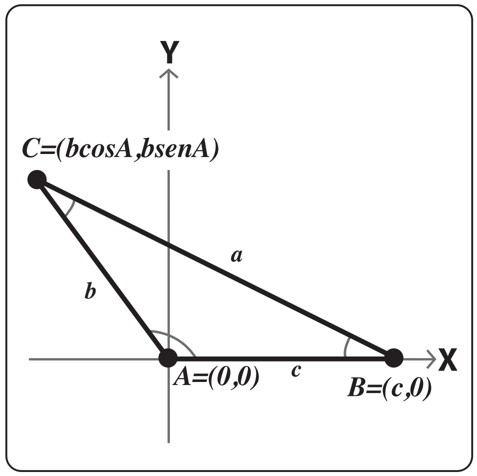


Figura 11.21: *Triángulo en el plano Cartesiano.*

La ley de cosenos nos permite determinar un triángulo completamente partiendo de tres datos, como pueden ser un ángulo y dos lados o como pudieran ser tres lados.

Ejemplo 11.25 *En el triángulo ABC, $a = 24\,m$, $c = 24\,m$ y $\measuredangle B = 60°$, determinar el resto de las medidas.*

Fijándonos en los datos que nos dan, elegimos la forma de la ley de cosenos (11.17) que nos conviene y sustituimos los valores que nos dan,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Rightarrow \quad b^2 = (24)^2 + (24)^2 - 2(24)(24)\cos 60° = 576$$

$$\Longrightarrow \qquad b = \sqrt{576} = 24\,.$$

Con esto ya están determinados todos los lados, ahora faltan los ángulos. Si somos un poco observadores ya nos habremos dado cuenta de que se trata de un triángulo equilátero, porque $a = b = c = 24\,m$, por lo que ya sabemos automáticamente que $\measuredangle B = 60° = \measuredangle C = \measuredangle A$. Pero vamos a calcular el resto de los ángulos como si no supiéramos esta propiedad de los equiláteros, para que sepamos otra manera de determinar los ángulos.

Para determinar el ángulo C escribimos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(24)^2 + (24)^2 - (24)^2}{2(24)(24)} = \frac{1}{2}$$

y aquí nos tenemos que preguntar para que valor de C resulta que $\cos C = 1/2$ y eso sólo puede ocurrir cuando $C = 60°$. Y el ángulo A es $60°$ por defecto.

❑

11.8.1. Ejercicios:

1. Determinar los datos que faltan del triángulo ABC que tiene:

   a) $a = 10\,m$, $\measuredangle A = 30°$ y $\measuredangle B = 45°$,

   b) $a = 10\,cm$, $\measuredangle A = 30°$ y $\measuredangle B = 40°$,

   c) $b = 3\,m$, $c = 4\,m$ y $\measuredangle A = 60°$,

   d) $a = 6\,cm$, $\measuredangle B = 45°$ y $\measuredangle C = 105°$,

   e) $\measuredangle A = 30°$, $a = 6\,u$ y $b = 9\,u$,

   f) $\measuredangle B = 45°$, $a = 15\,u$ y $b = 17\,u$,

   g) $\measuredangle A = \pi/6$, $b = 12\,u$ y $c = 24\,u$,

   h) $\measuredangle C = \pi/3$, $a = 15\,u$ y $b = 12\,u$.

2. Con la ayuda de unas tablas o calculadora calcula todos los elementos de un triángulo que tiene:

   a) $\measuredangle A = 36°$, $\measuredangle B = 48°$ y $a = 12\,cm$,

   b) $\measuredangle A = 120°$, $\measuredangle B = 30°$ y $a = 16\,cm$,

   c) $\measuredangle B = 150°$, $a = 3\,u$, $b = 7\,u$,

   d) $\measuredangle C = 43°$, $c = 28\,u$ y $b = 27\,u$,

   e) $a = 7\,u$, $b = 9\,u$ y $c = 10\,u$,

   f) $a = 22\,u$, $b = 22\,u$ y $c = 35\,u$,

   g) $\measuredangle 133°$, $b = 12\,u$ y $c = 15\,u$.

3. Calcular el área del triángulo ABC que tiene

   a) $b = 8\,cm$, $c = 15\,cm$ y $\measuredangle A = 30°$,

   b) $a = 1\,cm$, $c = 1\,cm$ y $\measuredangle B = 10°$,

   c) $b = 100\,m$, $c = 75\,m$ y $\measuredangle A = 170°$.

4. ¿Es válida la ley de senos para triángulos rectángulos? ¿Por qué?

5. ¿Es válida la ley de cosenos para triángulos rectángulos? ¿Por qué?

6. Obtener la relación Pitagórica (11.5) a partir de las ley de cosenos.

7. Mostrar que el área de un triángulo rectángulo con hipotenusa c y un ángulo A es $\frac{1}{2}c^2 \sin A \cos A$.

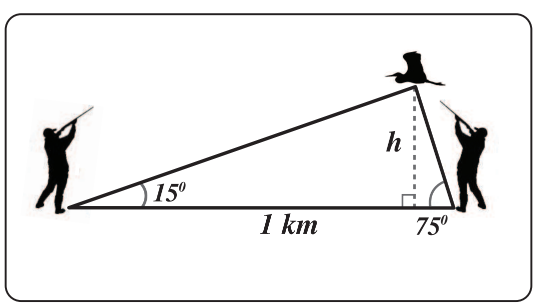
8. Mostrar que el área de un polígono regular de n lados y de longitud a de cada lado está dado por

$$\text{área} = \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

11.9. Aplicaciones

Ejemplo 11.26 *Dos cazadores, separados* $1\,km$ *entre sí, apuntan a un pájaro volando. Un cazador apunta a* $15°$ *y el otro a* $75°$ *desde el suelo. Si el pájaro vuela sobre el segmento recto que une a los cazadores, ¿a qué altura vuela el pájaro cuando los cazadores lo localizan?*

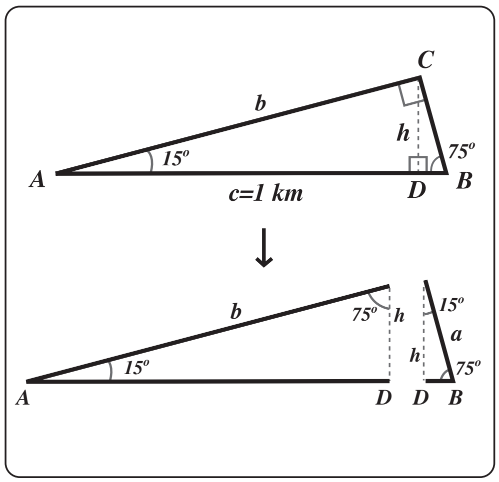
Trazamos un dibujo para que sea más claro el planteamiento,



.

El pájaro y los cazadores forman un triángulo rectángulo, porque el ángulo que no tiene medida es el resultado de $180° - 15° - 75°$. La altura del triángulo, que es la altura del pájaro, determina dos triángulos rectángulos más pequeños, que comparten h como lado.

Para determinar h necesitamos por lo menos el conocimiento de otro lado de alguno de los triángulos rectángulos más pequeños y para esto primero vamos a determinar un lado del triángulo mayor, nombrando por A, B y C los ángulos y por a, b y c los lados opuestos,



.

Por la ley de los senos (11.15),

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 15°}{a} = \frac{\sin 90°}{1} \quad \Rightarrow \quad a = \sin 15° \,.$$

Conociendo a, podemos aplicar nuevamente la ley de senos (11.15) ahora para encontrar h, siendo un lado de uno de los triángulos rectángulos menores, como está en la figura anterior; así

$$\frac{\sin B}{h} = \frac{\sin D}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 75°}{h} = \frac{\sin 90°}{\sin 15°} \quad \Rightarrow \quad h = \sin 15° \sin 75° \,.$$

Finalmente, a partir de las identidades (11.14) y (11.9) calculamos lo que nos falta por determinar,

$$\sin 15° = \sin\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \,,$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Por lo tanto,

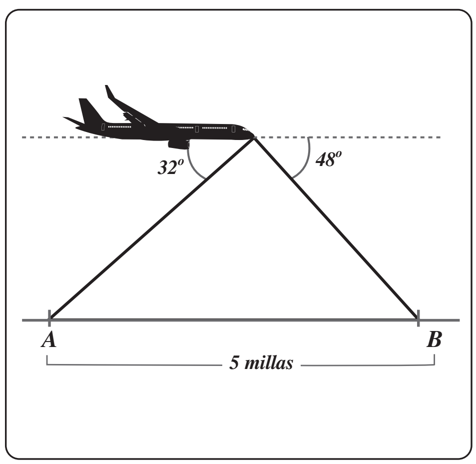
$$h = \sin 15^\circ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

y así la altura a la que vuela el pájaro es $\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}\,km$.

❑

11.9.1. Ejercicios:

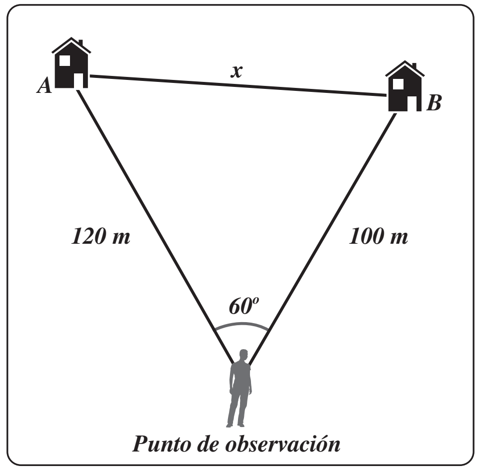
1. Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a 2 postes indicadores de millas, los cuales están a 5 millas de distancia entre sí, tiene los valores 32° y 48° respectivamente, como en la figura



.

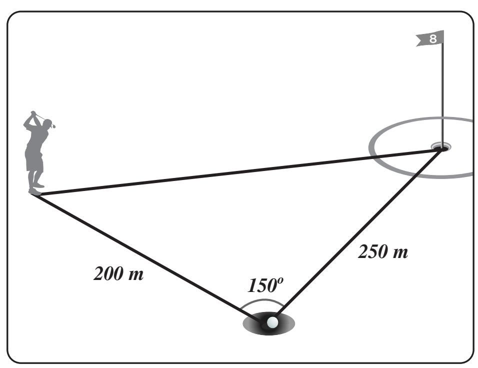
Determinar la distancia del avión al punto A y determinar la altitud del avión.

2. Un topógrafo quiere determinar la distancia entre dos casas A y B. Desde el punto de observación el ángulo entre las dos casas es de 60°. La distancia del punto de observación a la casa A es de $120\,m$ y a la casa B es de $100\,m$. ¿Qué distancia separa las dos casas?



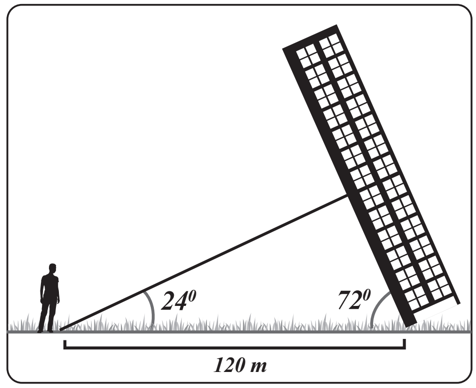
.

3. Un golfista golpea la pelota y la desplaza $220\,m$ en línea recta, la pelota queda a $250\,m$ del hoyo. El ángulo que se forma en el punto donde queda la pelota con la ubicación del golfista y el hoyo es de $150°$. ¿Cuál es la distancia del golfista al hoyo?



.

4. Un tipo se encuentra a $120\,m$ de la base de una torre inclinada, el ángulo de elevación desde su posición a la punta de la torre es de $24°$ y a su vez forma un ángulo con el suelo de $72°$. ¿Cuál es la altura de la torre?



.

5. Asumiendo que las órbitas de Mercurio y Tierra son circulares y se encuentran en el mismo plano. La Tierra se encuentra a $9.3 \times 10^7\, millas$ del Sol y Mercurio se encuentra a $3.6 \times 10^7\, millas$ del Sol. Si Mercurio se ve desde la Tierra y el ángulo entre Mercurio, Tierra y Sol es de $8.35°$, siendo la Tierra el vértice. ¿Qué tan lejos está la Tierra de Mercurio?

6. Las casas de José y Alberto están a los lados opuestos de un río, un ingeniero debe hacer un puente que comunique las dos casas; para esto ubica a 100 metros de la casa de José, por la misma orilla, el teodolito, obteniendo los siguientes datos: el ángulo entre la casa de José, Alberto y el teodolito es de $50°$, siendo esto último el vértice. El ángulo entre la casa de José, Alberto y el teodolito es de $40°$, siendo la casa de José el vértice. ¿Cuál será la longitud del puente entre las casas?

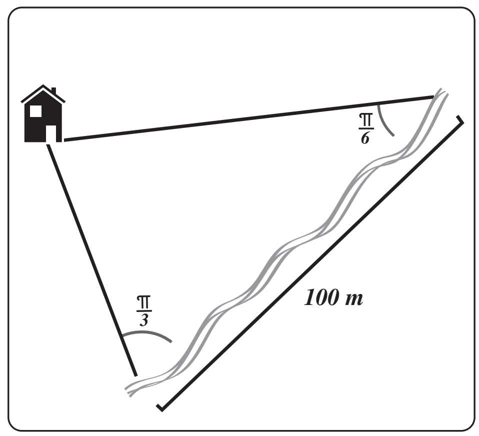
7. Los puntos A y B se encuentran en puntos diametralmente opuestos de un cráter lunar circular. El punto C se halla a $50\, m$ de A. Se determinan las medidas $\measuredangle A = 112°$ y $\measuredangle C = 42°$. ¿Cuál es el ancho del cráter?

8. Un avión de reconocimiento sale de un aeropuerto sobre la costa Este de México y vuela en una dirección de $85°$. A causa del mal tiempo regresa a otro aeropuerto situado a $230\, km$ al Norte de su base. Para regresar, vuela siguiendo una dirección de $283°$. ¿Cuál es la distancia total recorrida durante el vuelo?

9. Dos barcos parten del mismo puerto a la misma hora. El primero navega $N\, 15°\, O$ a $25\, nudos$ (un nudo es una milla náutica por hora). El segundo navega $N\, 32°\, E$ a $20\, nudos$. Después de dos horas, ¿a qué distancia se encuentran los barcos entre sí?

10. De un aeropuerto sale un avión al mediodía hacia el Nor-Este (justo la mitad entre el Norte y el Este) con un velocidad de 100 $millas/h$ y otro hacia el Sur con una velocidad de 500 $millas/h$. ¿Qué distancia están uno del otro a las dos de la tarde?

11. Un tipo se encuentra en la orilla de un río y ve a lo lejos su casa y se pregunta, ¿a qué distancia se encuentra el río de mi casa?, si caminando sobre la orilla del río 100 m (segmento recto) midió los ángulos $\pi/6$ y $\pi/3$ en los extremos entre el río y su casa,



.

Parte III

Geometría Analítica.

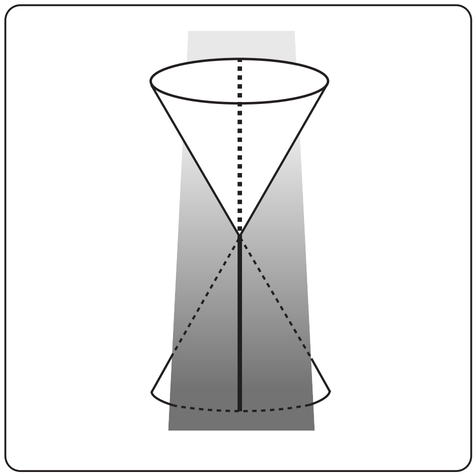
La Geometría Analítica describe objetos mediante expresiones algebraicas y estudia el objeto generado por una expresión algebraica.

En esta parte nos dedicamos a estudiar los objetos geométricos que forman parte de un grupo de curvas muy especiales, las *cónicas*. Estas curvas surgen de cortes entre un plano y un par de conos unidos por su vértice, así estudiaremos la *recta*, la *parábola*, y la *circunferencia*. La *elipse* y la *hipérbola* también son cónicas, pero no abordamos su estudio en esta ocasión. En la figura 11.22 observamos los tipos de cortes y la cónica que se genera.

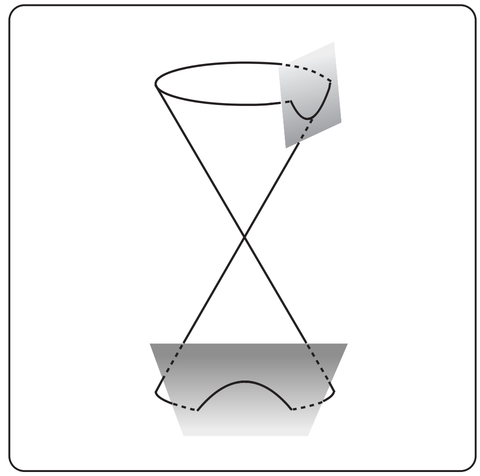
Comenzaremos por definir el sistema coordenado rectangular o plano Cartesiano, en el cual podemos describir estos objetos e introduciremos la notación que utilizaremos a lo largo de esta sección. Posteriormente presentaremos los objetos geométricos puntos, rectas, parábolas y circunferencias definiendo cada uno de estos desde el punto de vista geométrico (la condición que deben de cumplir los puntos para formar parte de una cierta curva). Luego deducimos las expresiones algebraicas que determinan cada una de estas curvas a partir de su definición geométrica, así como las principales propiedades que presenta cuada una de las curvas que abordaremos. A lo largo del capítulo daremos aplicación a diversos problemas prácticos que requieren del uso de estos conceptos y proporcionaremos la interpretación de los resultados.

También intercalamos la solución a ecuaciones lineales y cuadráticas y damos la interpretación geométrica de una ecuación y sus resultados.

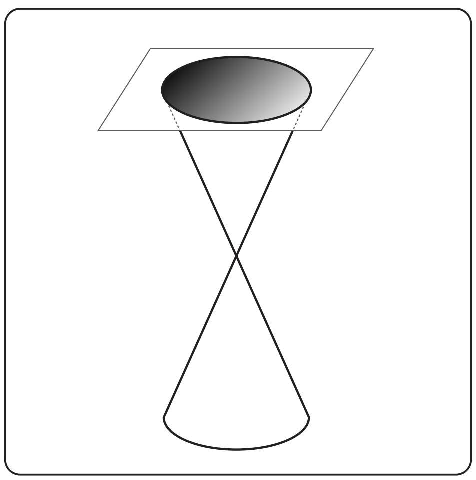
Para esta parte del libro tomaremos en cuenta que el Álgebra requerida está asimilada y haremos énfasis en la abstracción y deducción de los planteamientos y problemas.



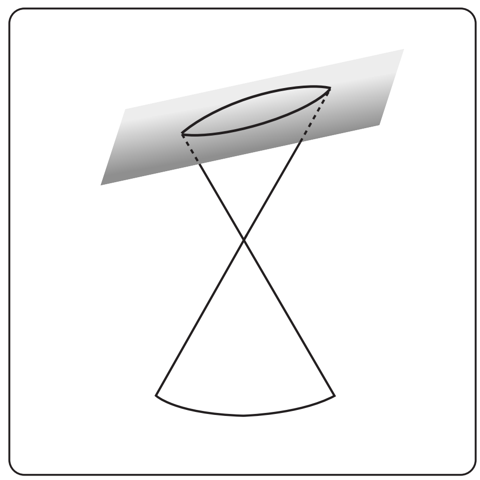
(a) La recta



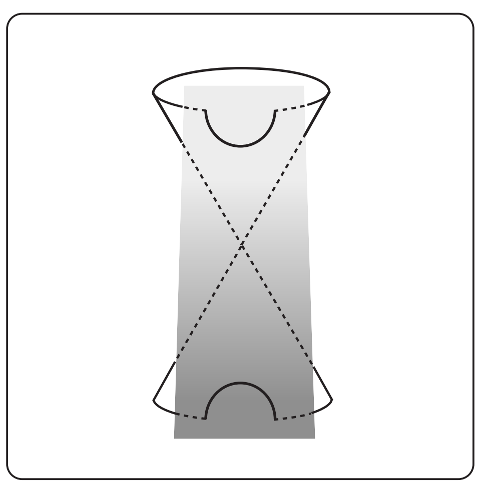
(b) La parábola



(c) La circunferencia



(d) La elipse



(e) La hipérbola

Figura 11.22: *Generación de las cónicas.*

Capítulo 12

Plano Cartesiano.

Necesitamos un sistema que nos ayude a ubicar los objetos que estudiaremos en la Geometría Plana y el más común es el plano Cartesiano. Este sistema consta de dos rectas (rectas numéricas) que se cortan perpendicularmente en el cero de cada una de éstas, que llamamos *origen* y cada una de las rectas se conocen como *eje de coordenadas*, siendo identificadas como *eje* X y *eje* Y, dispuestas como en la figura 12.1. Las flechas en los ejes coordenados indican el sentido positivo de cada una de las rectas. De esta forma tenemos divido el plano en cuatro partes que se llaman *cuadrantes* y se nombran como **I**, **II**, **III** y **IV** en el sentido contrario en el que giran las manecillas de un reloj.

12.1. El punto.

Comenzamos por ubicar los objetos geométricos más sencillos: los puntos. Sigamos la figura 12.1 para la descripción que sigue. Representemos por P un punto en el plano Cartesiano, ahora tracemos una recta paralela al eje Y que pase por P y nombramos por x al valor en donde corta (perpendicularmente) al eje X, tracemos otra recta pero ahora paralela al *eje* X que pase también por P y nombramos por y al valor en donde corta perpendicularmente al *eje* Y. Al valor x se le llama la *abscisa* y al valor y se le llama la *ordenada* del punto P y de esta manera (x, y) son las *coordenadas* del punto P en el plano Cartesiano. Así, cualquier punto en el plano Cartesiano tiene asociada una pareja de valores (x, y) que lo distingue. Pues ahora en sentido inverso, dada una pareja (x, y) podemos ubicar en el plano Cartesiano el punto que

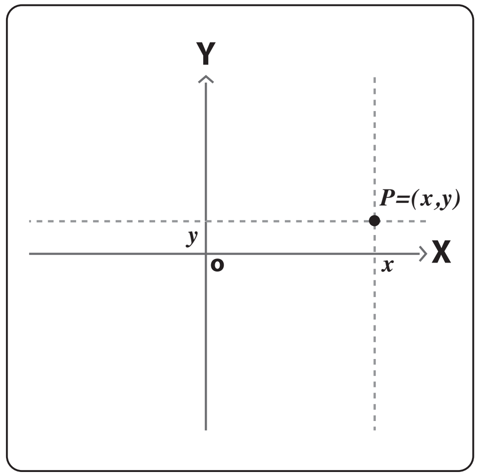
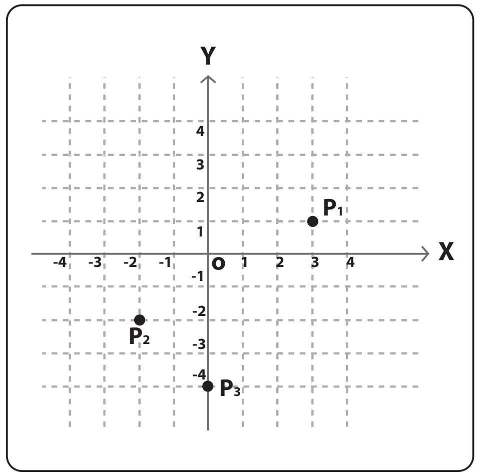


Figura 12.1: *Plano Cartesiano y un punto.*

le corresponde trazando rectas perpendiculares que pasen por x y y en los respectivos ejes y la intersección de las perpendiculares será el punto que ubicamos. Es muy importante notar que la relación de parejas (x, y) con los puntos P en el plano Cartesiano es biunívoca, es decir, a cada pareja (x, y) le corresponde un punto P en el plano y a cada punto P que dibujemos en el plano le corresponde una pareja (x, y), anulando cualquier ambigüedad en la notación.

Ejemplo 12.1 *Trazar los puntos* $P_1 = (3, 1)$, $P_2 = (-2, 2)$ *y* $P_3 = (0, -4)$ *en el plano Cartesiano.*

Para facilitar la ubicación de estos puntos, trazamos previamente una malla cuadriculada en el plano Cartesiano, que proviene de los números enteros en los *ejes coordenados*,



.

❑

El origen (el punto **o**) tiene como coordenadas $(0, 0)$ y es el punto que une los cuadrantes **I**, **II**, **III** y **IV** que parten al plano Cartesiano en cuatro grandes regiones según el signo que toman las coordenadas de los puntos. El cuadrante **I** contiene a todos los puntos en el plano cuyas coordenadas son positivas, el cuadrante **II** abarca aquellos puntos cuya abscisa es negativa y su ordenada es positiva, el cuadrante **III** está formado por los puntos con abscisa negativa, al igual que su ordenada y finalmente el cuadrante **IV** son todos los puntos con abscisa positiva y ordenada negativa, como lo mostramos en la figura 12.2.

Ejemplo 12.2 *Trazar un cuadrado de lado a en el cuadrante **I** de tal forma que un vértice coincida con el origen de coordenadas y los lados que forman este vértice se encuentren sobre los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de los cuatro vértices.*

Primero trazamos el cuadrado planteado,

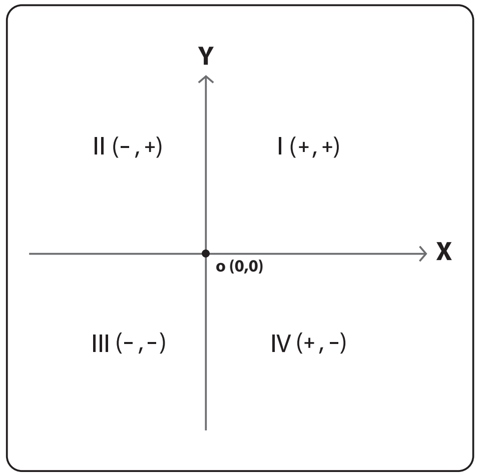
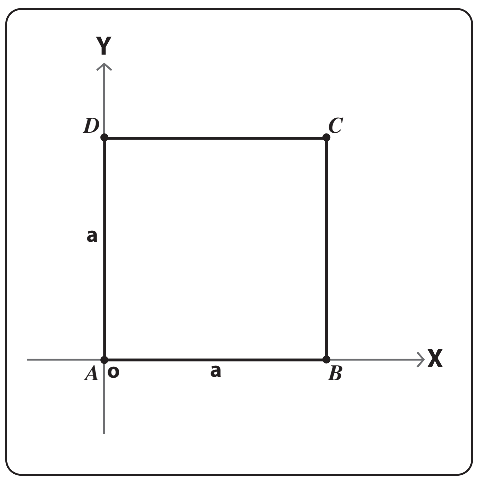


Figura 12.2: *Cuadrantes en el plano Cartesiano.*



.

Nombramos por A, B, C y D los cuatro vértices del cuadrado como se muestra en la figura. El vértice A tiene coordenadas $(0,0)$ por encontrarse en el origen. El vértice B se encuentra sobre el *eje* X por lo que la ordenada correspondiente es 0 y la abscisa es a porque es la longitud del lado del cuadrado; así $B=(a,0)$. De igual manera, el vértice D tiene por abscisa 0 y ordenada a, es decir, $D=(0,a)$. Por último, el vértice C tiene la misma abscisa que B y la misma ordenada que el vértice D, por lo que $C=(a,a)$.

❑

12.1.1. Ejercicios:

1. Traza los puntos $P_1 = (3,1)$, $P_2 = (-3,-1)$, $P_3 = (-\frac{1}{2},1)$, $P_4 = (0,\sqrt{2})$, $P_5 = (-\pi,0)$, $P_6 = (\frac{3}{8},-\frac{6}{16})$, $P_7 = (-\sqrt{5},-3^2)$, $P_8 = (0,-1.5)$, $P_9 = (-0.1,0.1)$. ¿Cuántos puntos se encuentran en el cuadrante **II**?, ¿cuántos se encuentran sobre los ejes coordenados?

2. Tres vértices de un rectángulo son los puntos $(2,-1)$, $(7,-1)$ y $(7,3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

3. Un triángulo equilátero con vértices O, A y B cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el *eje* X del lado positivo y el vértice B está en el cuadrante **I**. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

4. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-1,1)$ y $(3,1)$. Encontrar el (o los) tercer vértice que completa al triángulo. ¿Cuántos triángulos equiláteros distintos se pueden construir?

5. Si se cuenta con los vértices $(-4,0)$ y $(4,0)$ para dibujar un triángulo isósceles, ¿cuál podría ser un tercer vértice?, ¿cuántos triángulos isósceles distintos pueden resultar?

12.2. Distancia entre dos puntos.

Una vez que sabemos ubicar puntos en el plano Cartesiano, podemos relacionarlos y comenzaremos con la noción de distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano, entendiendo por distancia entre dos puntos la magnitud del segmento de recta que los une. Supongamos que los puntos de los que hablamos son A y B, la distancia la denotamos como $d(A,B)$. Empezando por el caso más sencillo, calculamos la distancia entre dos puntos A y B, como están en la figura 12.3.

La distancia entre dos puntos en la recta numérica la calculamos como

$$d(A,B) = |A - B|. \tag{12.1}$$

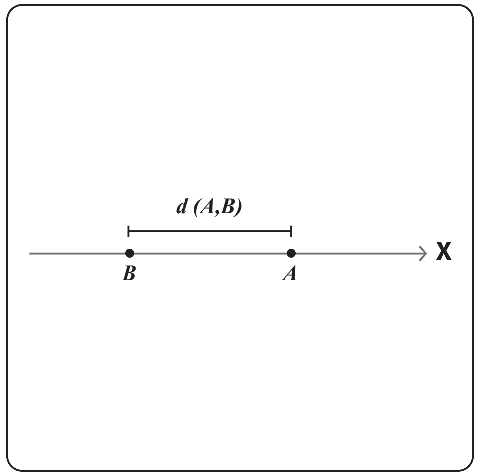


Figura 12.3: *Distancia en la recta.*

Una pregunta inmediata sería, ¿qué pasa con la distancia si en la figura 12.3 el punto A está en el punto B y viceversa? Pues la respuesta es igual de inmediata porque gracias al valor absoluto incluido en el cálculo de la distancia en (12.1) vemos que $d(A, B) = d(B, A)$, lo que quiere decir que la distancia es un número que solo da información sobre qué tan separados están dos puntos y no el orden que guardan estos en una recta. Esto también nos indica que no importa el orden en el que introducimos los datos en el cálculo $d(A, B)$, por lo que no nos tenemos que preocupar por recordar sobre si A o B va primero en la cuenta.

Ejemplo 12.3 *Encuentra la distancia entre los puntos* 4 *y* -7 *en la recta numérica.*

Siguiendo la ecuación (12.1) tenemos que $d(4, -7) = |4 - (-7)| = 11$. Por lo que la distancia entre los puntos 4 y -7 es de 11 unidades.

❑

El siguiente paso es encontrar la distancia entre dos puntos que se encuentra en el plano y para facilitar la escritura vamos a denotar por AB a un segmento de recta que empieza en A y termina en B para así poder dar nombre a las rectas que dibujemos de ahora en adelante. Elegimos dos puntos cualesquiera que llamaremos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

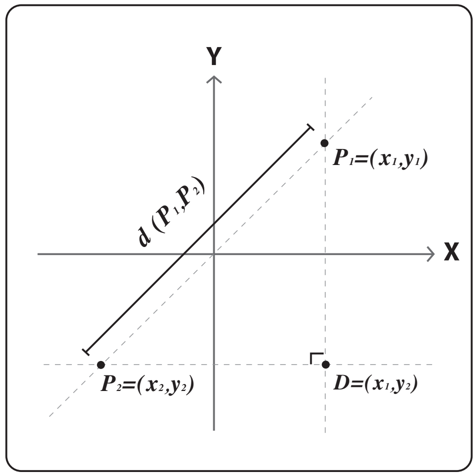


Figura 12.4: *Distancia en el plano.*

respectivamente. Una vez que ubicamos estos puntos como en la figura 12.4, trazamos un triángulo rectángulo siendo P_1P_2 la hipotenusa. Dibujamos una recta paralela al eje X que pasa por P_2 y otra recta paralela al eje Y que pasa por P_1 y la intersección de estas dos rectas es evidentemente perpendicular y a este punto lo llamamos D, terminando así de construir este triángulo, que al ser rectángulo nos permite aplicar el Teorema de Pitágoras.

Las coordenadas del punto D son fáciles de determinar ya que tiene la misma abscisa que P_1 y la misma ordenada que P_2, por tanto $D = (x_1, y_2)$. Con esta información podemos encontrar el tamaño de los catetos del triángulo rectángulo porque el cateto P_1D mide lo mismo que la distancia entre los puntos y_1 y y_2 en el *eje Y*, por ser una recta paralela al eje, por lo que

$$d(P_1, D) = d(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|\,;$$

por otra parte, la medida del cateto P_2D es lo misma que la distancia entre los puntos x_2 y x_1 en el *eje X*, porque el cateto es una recta paralela al eje, por esta razón

$$d(P_2, D) = d(x_2, x_1) = |x_2 - x_1|\,.$$

Finalmente por el famosísimo Teorema de Pitágoras 11.1 tenemos que

$$(d(P_1, P_2))^2 = (d(P_2, D))^2 + (d(P_1, D))^2$$

y sustituyendo los valores de las distancias y despejando $d(P_1, P_2)$ de esta última igualdad obtenemos el siguiente resultado.

La distancia entre dos puntos en el plano es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{12.2}$$

Aunque sabemos que la raíz tiene doble signo, elegimos el signo positivo estamos indicando distancias. Al igual que mencionamos para el caso de la distancia entre dos puntos en la recta numérica, la distancia es un número que nos indica que tan separados están dos puntos en el plano y el signo negativo de la raíz cuadrada no nos refiere nada en este sentido. Hay que notar que en la igualdad (12.2) el valor absoluto no aparece, no es necesario.

Es muy importante resaltar que en ningún momento restringimos las ubicaciones de los puntos P_1 y P_2, pero ¿y eso de qué nos sirve? Nos sirve muchísimo, ya que la fórmula dada por (12.2) aplica para cualquier par de puntos, no importando sus coordenadas en el plano Cartesiano. Hemos logrado abstraer un problema (el cálculo de la distancia entre dos puntos), realizamos cierta álgebra sobre los datos y dimos la solución de la forma más general posible (¡gran utilidad de las Matemáticas!).

Ejemplo 12.4 *¿Cuál será la distancia entre el punto $(-\frac{3}{4}, 4)$ y $(-1, -5)$?*

Basta con sustituir en la ecuación (12.2) los valores correspondientes. Llamemos P_1 a $(-\frac{3}{4}, 4)$ y P_2 a $(-1, -5)$, entonces $(x_1, y_1) = (-\frac{3}{4}, 4)$ y $(x_2, y_2) = (-1, -5)$. Así,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\left(-1 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2 + (-5 - 4)^2} = \frac{1345}{16}\,.$$

Por lo tanto, la distancia entre los dos puntos es de 1345/16 unidades.

❑

Ejemplo 12.5 *Mostrar que los puntos $A = (3, 3)$, $B = (-3, -3)$ y $C = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.*

Nos piden que mostremos que esos puntos forman un triángulo equilátero, cuya característica es que todos sus lados miden lo mismo, por lo que bastará verificar que las distancias $d(A,B)$, $d(B,C)$ y $d(C,A)$ son exactamente las mismas. Siguiendo (12.2),

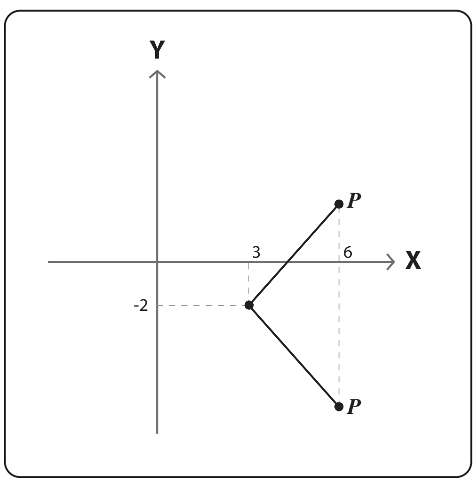
$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(-3-3)^2+(-3-3)^2} = 6\sqrt{2}\,, \\
d(B,C) &= \sqrt{(-3\sqrt{3}-(-3))^2+(3\sqrt{3}-(-3))^2} = 6\sqrt{2}\,, \\
d(C,A) &= \sqrt{(3-(-3\sqrt{3}))^2+(3-3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{2}\,,
\end{aligned}$$

y por ende $d(A,B) = d(B,C) = d(C,A)$.

❑

Ejemplo 12.6 *Uno de los extremos de un segmento recto de longitud* 5 *es el punto* $(3,-2)$*. Si la abscisa del otro extremo es* 6*, halle su ordenada.*

Hagamos un esquema con los datos que nos proporcionan. Dibujamos un segmento recto que inicia en el punto $(3,-2)$ y además indicamos la abscisa 6 con una línea recta punteada paralela al eje Y,



.

Como vemos en la figura, hay dos posibles respuestas, ya que la recta puede descansar sobre la recta vertical que pasa por 6 en el *eje X* en dos distintos puntos. Llamemos P al punto final donde termina el segmento de recta, entonces sus coordenadas son $(6,y)$, donde y es nuestra incógnita. Como se menciona que el segmento mide 5, la distancia del punto $(3,-2)$ al punto P debe ser 5, es decir,

$$5 = d((3,-2),P) = \sqrt{(6-3)^2 + (y-(-2))^2}\,.$$

Despejamos el término (y+2) de la ecuación anterior, obteniendo

$$(y+2) = \pm\sqrt{16}\,,$$

donde notamos que la raíz, al tener doble signo, nos da las dos posibles respuestas, siendo éstas $y = 2$ y $y = -6$.

❑

12.2.1. Ejercicios:

1. Determinar la distancia de los puntos $(-1,-2)$, $(1,3)$, $(4,2)$ al punto $(1,1)$.

2. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3,-1)$, $(0,3)$, $(3,4)$ y $(4,-1)$.

3. Mostrar que los puntos $(-2,-1)$, $(2,2)$ y $(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

4. ¿Cómo harías evidente que los puntos $(1,1)$, $(3,5)$, $(11,6)$, $(9,2)$ corresponden a los vértices de un paralelogramo?

5. Encontrar las coordenadas del punto P que satisface las condiciones siguientes: P está en el eje Y positivo y su distancia al origen es la misma que la del punto $(-7,0)$ al origen.

6. Determinar una expresión algebraica (una fórmula) que indique todos aquellos puntos que equidistan de $(-3,5)$ y $(7,-9)$.

7. ¿Es el cuadrilátero con vértices dados un paralelogramo, un rombo, un rectángulo o un cuadrado?

   a) $A = (2,-2)$, $B = (-4,6)$, $C = (-8,3)$ y $D = (-2,-5)$.
   b) $A = (4,5)$, $B = (-6,2)$, $C = (-3,-8)$ y $D = (7,-5)$.

12.3. Coordenadas del punto medio.

Un punto medio lo definimos como el punto que equidista de otros dos y que se encuentra en el mismo segmento de recta que une a los otros dos. Nuevamente comenzamos por el caso más sencillo, primero buscaremos el punto medio entre dos puntos en la recta numérica. Supongamos que tenemos el punto a y el punto b.

El punto medio p_m entre a y b en la recta numérica es

$$p_m = \frac{a+b}{2}\,. \tag{12.3}$$

En la figura 12.5 se muestra una posible situación, pero la expresión para el punto medio no depende del orden que guardan los puntos en la recta numérica.

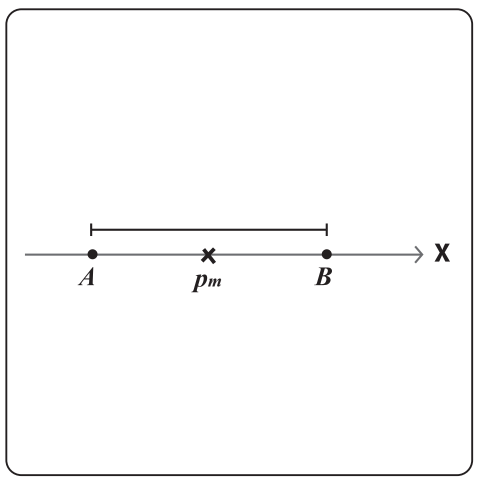


Figura 12.5: *Punto medio en la recta.*

Ejemplo 12.7 *Encontrar el punto medio entre los puntos $a = -3$ y $b = 9$.*

Seguimos la ecuación (12.3), obteniendo $p_m = (-3 + 9)/2 = 3$.

❑

Evidentemente uno puede preguntarse ¿realmente la expresión (12.3) siempre funciona?. Pues la manera de verificarlo es un par de cuentas muy sencillas. Como afirmamos que p_m es el punto medio entre otros dos llamados a y b, el cálculo de las distancias del primer punto a los otros dos deberá coincidir; siguiendo la fórmula de la distancia (12.1) tenemos que

$$d(a, p_m) = |a - p_m| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

y

$$d(p_m, b) = |p_m - b| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|,$$

por lo tanto $d(a, p_m) = d(p_m, b)$, lo que prueba que efectivamente (12.3) es correcto.

Encontrar el punto medio entre dos puntos en el plano no resulta más complicado, entendiendo por punto medio aquel que equidista de otros dos puntos y que se encuentra en la misma recta que une estos dos puntos. Para esto usamos la notación $\triangle ABC$ para indicar un triángulo con vértices A, B y C.

Supongamos que $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano Cartesiano, como está en la figura 12.6. Como hicimos en una ocasión anterior, trazamos un triángulo rectángulo de tal forma que P_1P_2 sea la hipotenusa y denotamos por D al punto donde se ubica el vértice del ángulo recto; los catetos son segmentos de rectas paralelos a los ejes coordenados y por esta razón $D = (x_2, y_1)$. El objetivo es determinar las coordenadas de P_m y la figura 12.6 nos será de mucha utilidad para entender el siguiente razonamiento, comenzando por llamar $P_m = (x_m, y_m)$ al punto medio y trazándolo en la figura. Trazamos dos rectas auxiliares, una paralela al eje X que parte del punto P_m y llega al punto A, cuyas coordenadas son (x_2, y_m) y otra paralela al eje Y que parte de P_m y llega el punto B, con coordenadas (x_m, y_1). Entonces nos bastará con encontrar la ordenada de A y la abscisa de B para lograr el objetivo.

Hemos formado dos triángulos rectángulos, $\triangle P_mAP_2$ y $\triangle P_mP_1B$. El punto P_m equidista de P_1 y P_2, ya que es el punto medio y esto hace que los triángulos $\triangle P_mAP_2$ y $\triangle P_mP_1B$ tengan la misma magnitud en la hipotenusa. Además, al ser paralelas las rectas P_mA y P_1B, los ángulos internos de estos triángulos son iguales y por lo tanto estos resultan ser semejantes (sección ()). Gracias a la semejanza de estos triángulos afirmamos que $d(P_2, A) = d(P_m, B)$ y como $d(P_2, A) = d(A, D)$, entonces $d(P_2, A) = d(A, D)$, lo que

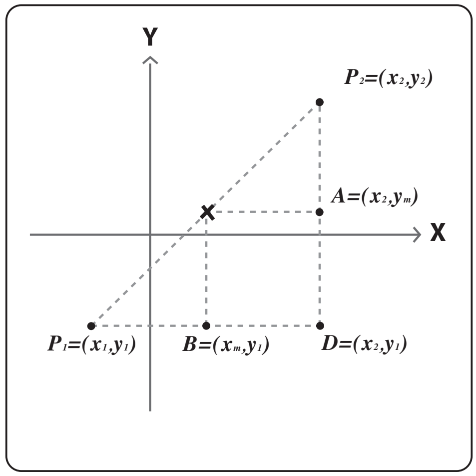


Figura 12.6: *Punto medio en el plano.*

quiere decir que A es el punto medio entre P_2 y D. Pero resulta que A, P_2 y D tienen la misma abscisa, por lo que encontrar la ordenada de A se reduce a encontrar el punto medio en una recta numérica, es decir, siguiendo la fórmula (12.3),

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}\,.$$

De manera análoga al argumento que acabamos de desarrollar, encontramos el valor de la abscisa de B, siendo éste

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Estos valores los hemos conseguido sin objetar nada acerca de la ubicación de P_1 y P_2, por tanto hemos deducido el siguiente resultado.

El punto medio $P_m = (x_m, y_m)$ entre dos puntos dados $P_1 = (x_1, y_2)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$P_m = (x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{12.4}$$

Ejemplo 12.8 *Encontrar el punto medio entre* $(0, -8)$ *y* $(4, 8)$.

Tomando en cuenta la expresión (12.4), nombramos $P_1 = (0, -8)$ y $P_2 = (4, 8)$, entonces

$$P_m = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{-8+8}{2} \right) = (2, 0) \, .$$

❑

12.3.1. Ejercicios:

1. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son:

   a) $(4, 5)$ y $(6, -7)$,

   b) $(-2, 0)$ y $(3, 0)$,

   c) (a, b) y $(a, -b)$.

2. Los vértices de un triángulo son $A = (-1, 3)$, $B = (3, 5)$ y $C = (7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, muestra que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

3. Muestra que el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(2, -2)$, $(-8, 4)$ y $(5, 3)$, equidista de los tres vértices.

4. Dado un triángulo rectángulo cualquiera, ¿el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo? Notemos que el ejercicio es más fácil si se ubica el triángulo rectángulo en el plano Cartesiano de manera astuta.

5. Verifica la fórmula dada por (12.4), es decir, ¿P_m es efectivamente el punto medio entre P_1 y P_2?

6. Encontrar el punto final de un segmento de recta si comienza en el punto $(3, -7)$ y tiene como punto medio $(-7, 3)$.

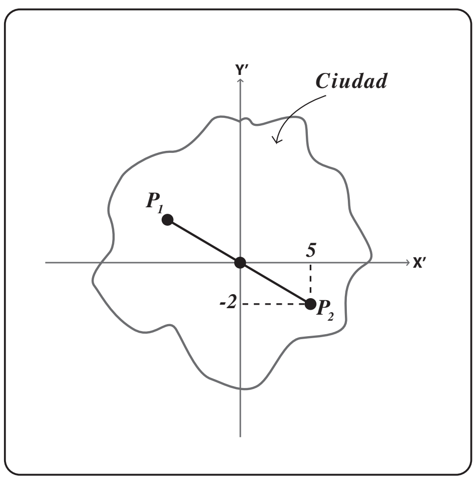
7. Encuentra una fórmula para hallar el punto final de un segmento de recta que comienza en el punto (x_1, y_1) y que pasa por su punto medio en (x_m, y_m).

12.4. Aplicaciones.

En realidad, en la vida diaria hacemos deducciones como las presentadas en estas secciones, pero de manera automática. Es muy común que tengamos que saber la distancia entre dos puntos en la ciudad o las distancia entre dos puntos en un mapa, así como el punto medio de un camino, etc., sin mencionar las gran cantidad de aplicaciones en todas las áreas del conocimiento.

Ejemplo 12.9 *Una vía de tren cruza una ciudad en línea recta pasando por el centro de ésta. Si el tren parte del extremo de la vía ubicado* $5\,km$ *al Este y* $2\,km$ *al Sur de la ciudad y la mitad de su recorrido es el centro de la ciudad, ¿en que punto de la ciudad termina el recorrido?*

Comenzaremos por ubicar en el sistema coordenado los puntos que tenemos como datos. El origen de la ciudad lo colocamos en el origen de coordenadas e indicamos en unidades de km los ejes coordenados, colocando la dirección Norte en el sentido positivo del eje Y. De esta forma el punto de partida del tren es el punto $P_1 = (5, -2)$. Este punto y el recorrido lo mostramos en la figura siguiente:



.

Al punto final del recorrido lo nombramos como $P_2 = (x, y)$. Como sabemos que el punto medio entre P_1 y P_2 es el origen de coordenadas $(0, 0)$, siguiendo (12.4) obtenemos

$$P_m = (0,0) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{y+(-2)}{2}\right),$$

por lo que

$$\frac{5+x}{2}=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y-2}{2}=0$$

y finalmente despejando x y y encontramos que $x=-5$ y $y=2$.

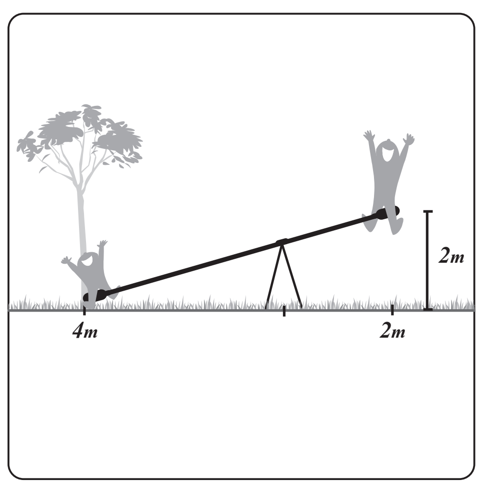
Concluimos que el punto final del recorrido del tren es $5\,km$ al Oeste y $2\,km$ al Norte del centro de la ciudad.

❏

12.4.1. Ejercicios:

1. Un auto se lo llevó la grúa al corralón más cercano. El dueño, quien conoce el corralón al que se llevaron su auto, no acostumbra cargar dinero y sólo trae su tarjeta de débito. Sólo cuenta con el tiempo justo para recoger su auto después de pagar la multa, pero no sabe si dirigirse primero al banco, y luego al corralón a recoger su auto o si pagar directamente en la tesorería con la tarjeta y dirigirse al corralón. Saca un plano de su cartera y traza su ubicación actual ($1\,km$ al Sur del centro de la ciudad y $1.5\,km$ al Oeste), la ubicación del banco más cercano ($100\,m$ al Este y $200\,m$ al Norte del centro de la ciudad), la del corralón ($500\,m$ al Oeste y $1\,km$ al Norte) y la de la tesorería ($700\,m$ al Sur del centro). ¿Qué ruta debe elegir?

2. Un *sube y baja* está mal construído, como se podrá observar en la siguiente ilustración:



.

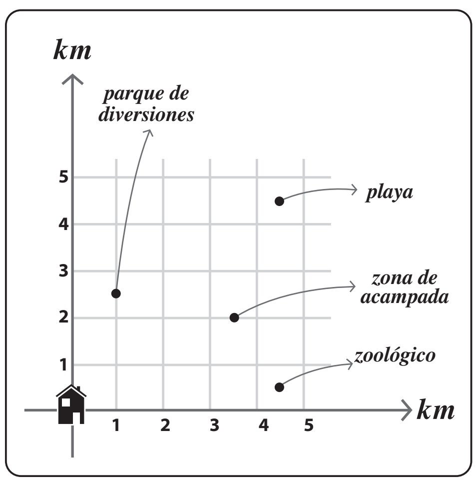
¿A qué distancia de la base del árbol tiene que estar colocada la base del *sube y baja* para que funcione correctamente?

3. Dos amigos salen a correr. Uno corre $3\,km$ hacia el Norte y 2 hacia el Oeste y el otro, partiendo del mismo lugar, corre $4\,km$ hacia el Este y 1 hacia el Sur.

    - ¿A qué distancia están uno del otro?
    - Si los dos amigos quieren almorzar juntos, ¿qué lugar de encuentro está a igual distancia de ambos? ¿Qué distancia tendrían que recorrer para encontrarse?

4. Se planean unas vacaciones familiares y se realiza un mapa coordenado.

    - ¿A qué distancia de la casa está el parque de diversiones?
    - Salen de casa y van al parque de diversiones. Después van a la playa y al final vuelven a casa. ¿Qué distancia recorrieron?
    - Durante las vacaciones quieren visitar todos los lugares del mapa. Hay dos formas de ordenar las visitas recorriendo la distancia más corta. ¿Cuáles son?



.

Capítulo 13

La recta.

La figura más sencilla en la Geometría Analítica es la recta y aunque es muy seguro que todos sepamos a que nos referimos por *recta*, quizás no sepamos como definirla o describirla de manera precisa, para diferenciarla de cualquier otra figura geométrica.

> **La recta es el lugar geométrico donde cada pareja de puntos,** $P_1 = (x_1, y_1)$ **y** $P_2 = (x_2, y_2)$**, pertenecientes a la recta, cumple que la razón**
>
> $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{13.1}$$
>
> **es una constante.**

En esta definición los dos puntos P_1 y P_2 forman parte de una recta. Si hubiera un tercer punto (x_3, y_3) con la característica de que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

entonces podemos decir que (x_3, y_3) también forma parte de la misma recta. En la figura 13.1 mostramos esta situación. Por otra parte, si un punto $A = (a_1, a_2)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2, entonces podemos aseverar que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_2 - y_1}{a_1 - x_1}$$

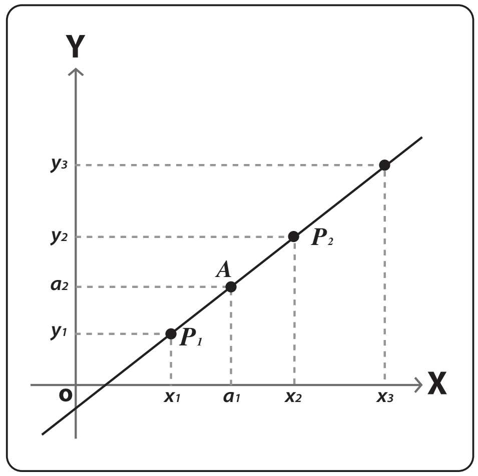


Figura 13.1: *La recta.*

13.1. Pendiente de una recta.

Al cociente dado por (13.1) se le llama *pendiente* de la recta y se denota por m; es una medida para saber qué tan inclinada está una recta. Si observamos los ingredientes de la *pendiente*, en el numerador estamos calculando la diferencia entre dos puntos en el eje Y y en el denominador estamos calculando la diferencia entre dos puntos en el eje X. En realidad, estamos comparando el tamaño de los catetos del triángulo rectángulo formado a partir de los puntos P_1 y P_2 (como ya lo hicimos en el capítulo anterior) donde el vértice del ángulo recto cae en $Q = (x_2, y_1)$. En la figura 13.2 está esta configuración del triángulo rectángulo. Es muy importante darse cuenta que para determinar la pendiente de una recta sólo basta considerar dos puntos que pertenezcan a ella, pero dos puntos cualesquiera, ya que estamos hablando de una constante. Además, la expresión (13.1) se calcula sin importar el orden de los nombres que le damos a un par de puntos P_1 y P_2 (P_1 puede ser P_2 y viceversa), lo que importa es que el orden de las ordenadas de dichos puntos debe ser el mismo para las abscisas. Notemos que la pendiente m puede tomar cualquier valor, es decir, puede ser un número positivo, cero o un número negativo. Analicemos por separado cada caso y eso nos dará una visión sobre la importancia de la pendiente de una recta.

- Si m es una constante positiva quiere decir que la recta va en ascenso,

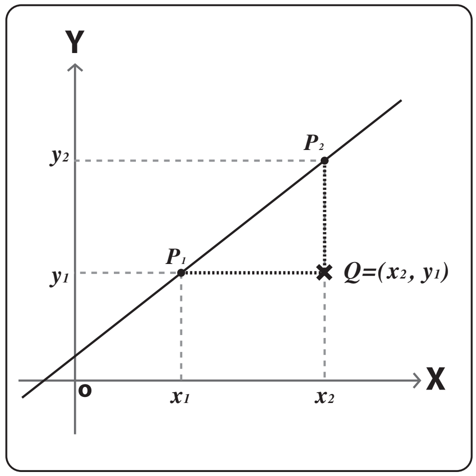
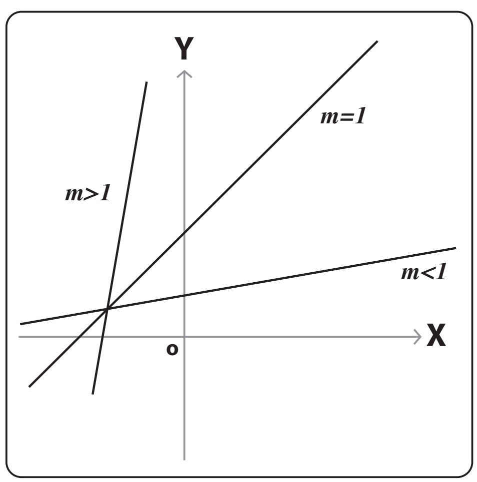


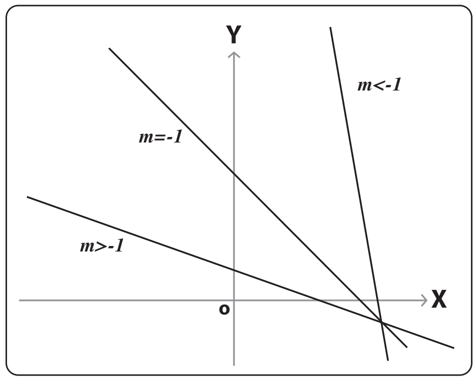
Figura 13.2: *Pendiente de una recta.*

trazándola en dirección positiva respecto del eje X. Notemos que entre más grande sea el cateto P_2Q respecto del cateto P_1Q, tiende a ser una recta paralela al eje Y. En otras palabras, entre más grande sea m, más rápido asciende la recta. Lo veríamos como



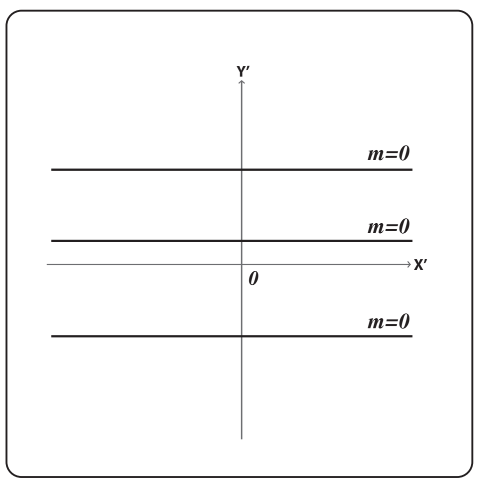
.

- En caso de que m fuera una constante negativa significa que, trazando la recta en dirección positiva respecto del eje X, va en descenso. Entre más grande sea el valor m en sentido negativo tiende a ser una recta paralela al eje Y. Dicho de otra forma, entre más negativo sea m, más rápido desciende la recta. Gráficamente se ve como



.

- Supongamos que $m = 0$, eso quiere decir que el numerador de m dado en la expresión (13.1) es cero, indicando que la recta no asciende ni desciende; estamos hablando de una recta horizontal porque todas las ordenadas de los puntos que forman la recta son la misma. Se vería algo así,



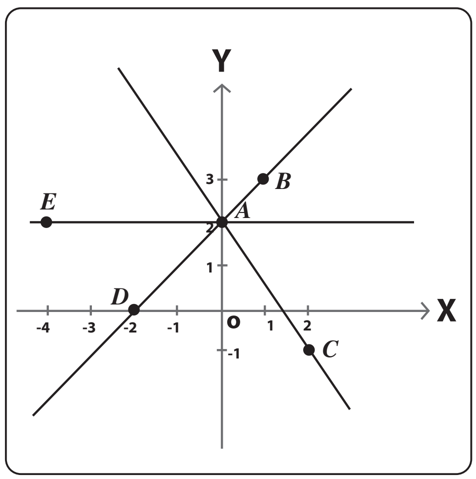
.

Ejemplo 13.1 *Determinar la pendiente de las rectas que pasan por los puntos A y B, A y C, A y D, A y E donde $A = (0, 2)$, $B = (1, 3)$, $C = (2, -1)$, $D = (-2, 0)$, $E = (-4, 2)$. ¿Cuántas rectas son ascendentes, cuántas son descendentes y cuántas son horizontales? ¿Cuántas rectas distintas son?*

Primero determinaremos las pendientes de cada una de las rectas y posteriormente analizaremos estos valores para determinar que tipo de rectas son.

- La pendiente de la recta AB es $m_{AB} = \frac{2-3}{0-1} = 1$.
- La pendiente de la recta AC es $m_{AC} = \frac{2-(-1)}{0-2} = -\frac{3}{2}$.
- La pendiente de la recta AD es $m_{AD} = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$.
- La pendiente de la recta AE es $m_{AE} = \frac{2-2}{0-(-4)} = 0$.

En esta figura dibujamos las respectivas rectas,



.

Como $m_{AB} = m_{AD}$, entonces los puntos A, B y D pertenecen a la misma recta y $m_{AB} \neq m_{AC} \neq m_{AE}$, por lo tanto estamos hablando de tres rectas distintas, de las cuales una es ascendente porque $m_{AB} > 0$, otra es descendente porque $m_{AC} < 0$ y por último, la recta AE es horizontal porque su pendiente es cero.

❏

Ya vimos que si tres puntos distintos A, B y C hacen $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$, como consecuencia podemos asegurar que estos tres puntos pertenecen a la misma recta, pero podríamos cuestionarnos qué pasa si $m_{AB} = m_{CD}$, siendo A, B, C y D cuatro puntos distintos entre sí, ¿todos pertenecen a la misma recta? Pues la respuesta es: no necesariamente. Es decir, pudiera ser que sí, pero no lo podemos afirmar para todos los casos. Por ejemplo,

$A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ determinan una recta, y por otra parte $C = (0, 1)$ y $D = (3, 1)$ determinan también una recta, pero resulta que no son la misma recta (¿podrías dibujarlas?), aunque $m_{AB} = m_{CD}$. Entonces, es claro que calcular la pendiente de una recta no es suficiente para determinar cuando un conjunto de puntos pertenece o no a la misma recta y en la siguiente sección damos solución a este problemita.

13.2. Ecuación de una recta.

Para determinar una ecuación que contenga todos los puntos que formen una recta y no más, tenemos que recurrir a la definición de recta, porque la ecuación que daremos debe de satisfacerla. A partir de la expresión (13.1) escribimos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

donde sólo estamos indicando la pendiente o inclinación de una recta conociendo de antemano dos puntos. Ahora hagamos que uno de los dos puntos sea desconocido, es decir, supongamos que los valores x_2 y y_2 no están dados previamente y los nombramos en forma general como x y y. Así

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}\,.$$

Despejamos de la ecuación anterior la variable y y obtenemos el siguiente enunciado.

La recta que pasa por el punto dado $P_1 = (x_1, y_1)$ y tiene pendiente m, tiene por ecuación

$$y = m(x - x_1) + y_1\,. \tag{13.2}$$

Esta forma de la ecuación es conocida como *punto-pendiente*.

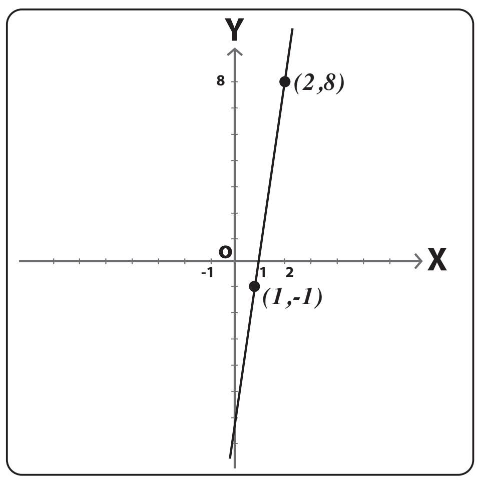
Ahora ya contamos con una expresión que nos permite determinar los puntos que forman una determinada recta. La ecuación (13.2) requiere de un punto conocido por donde pasa la recta y la pendiente de ésta para decir si el punto (x, y) efectivamente forma parte de esa recta o no. Para trazar la gráfica de la recta bastará con pintar el punto conocido (x_1, y_1) y otro punto que se obtiene de (13.2) o tabulando un par de puntos.

Ejemplo 13.2 *Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(2, 8)$ *y tiene pendiente* 9. *Mostrar la gráfica.*

Los datos que nos proporcionan son, efectivamente, los que requerimos para escribir (13.2). El punto conocido es $(2, 8) = (x_1, y_1)$ y la pendiente $m = 9$, entonces sustituyendo estos valores en la ecuación (13.2) escribimos

$$y = 9(x - 2) + 8 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 9x - 10\,,$$

la cual es la ecuación de la recta que nos piden. La gráfica que se muestra a continuación se obtiene gráficando primeramente el punto conocido $(2, 8)$ y otro punto que lo obtenemos de la ecuación de la recta; por ejemplo, si elegimos $x = 1$, sustituyendo este valor en la ecuación obtenemos $y = 9(1) - 10 = -1$ y así el punto $(1, -1)$ es otro punto que pertenece a esta recta. Así,



.

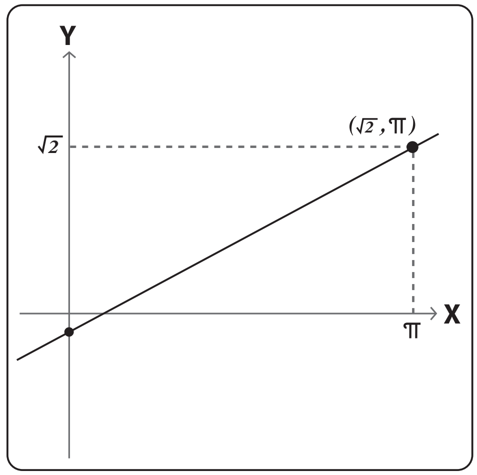
❑

Ejemplo 13.3 *Afirmar o negar el siguiente enunciado: "El punto* $(\pi, \sqrt{2})$ *pertenece a la recta cuya ecuación es* $2y - 2\sqrt{2} = x - \pi$*".*

Tenemos dos opciones para resolver el problema. La primera sería graficar y observar si el punto forma parte de la recta. La segunda opción, la que haremos a continuación, es checar si $(\pi, \sqrt{2})$ satisface la ecuación que nos dan. Procediendo de este modo, $x = \pi$, $y = \sqrt{2}$ y sustituyendo en $2y - 2\sqrt{2} = x - \pi$ obtenemos

$$2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \pi - \pi \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = 0\,,$$

es decir, el punto satisface la ecuación de la recta y por lo tanto afirmamos el enunciado. La gráfica también muestra este hecho.



.

❑

Ahora pensemos en el caso particular de una recta horizontal, ¿cómo es la ecuación de la recta? En realidad no es nada complicado, pero si hay que tenerlo presente porque nos ayudará a entender mejor los conceptos de recta horizontal y vertical. Si la pendiente fuera nula ($m = 0$), considerando (13.2) tendríamos $y = y_1$. En otras palabras, tendríamos una ecuación constante, la variable y siempre toma el valor y_1 no importando el valor que tome la variable x. En la figura 13.3 mostramos una recta horizontal que pasa por k en el *eje* Y, cuya ecuación es $y = k$.

Como en cualquier situación, no siempre el entorno es el más "ad-hoc" y la recta no es la excepción. Por esta razón, ahora buscaremos distintas formas de expresar la ecuación de la recta según los datos que tengamos para analizarla, comenzando por la que se obtiene de manera directa a partir de la ecuación punto-pendiente.

La forma de la ecuación de la recta que llamamos *punto-punto* es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,, \tag{13.3}$$

dados los puntos (x_1, y_1) **y** (x_2, y_2)**.**

En el caso en que conozcamos dos puntos por donde pasa una recta, esta forma de la ecuación es la ideal. Pero una pregunta natural es ¿qué ecuación es la correcta? o ¿porqué usar una en vez de otra? La respuesta para estas

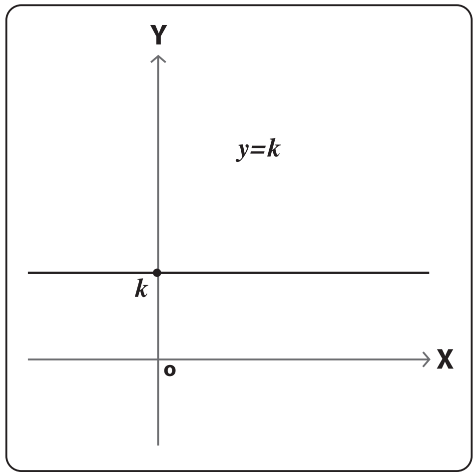


Figura 13.3: *Recta con pendiente cero.*

preguntas se resuelve si mostramos que ambas ecuaciones son equivalentes, es decir, que representan el mismo lugar geométrico (la recta en este caso) y la decisión sobre la ecuación a utilizar se basa únicamente en los datos que tenemos y la facilidad para manipularlos. Partimos de la ecuación (13.3) en donde son conocidos dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Pero sabemos que la pendiente está determinada por dos puntos, entonces $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ y sustituyendo este valor en (13.3) obtenemos la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ que resulta ser la ecuación (13.2).

Ejemplo 13.4 *¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(4, 2)$ *y* $(-5, 7)$*?*

Contamos con dos puntos por los que pasa la recta, por lo que la forma punto-punto de la ecuación de la recta es la idónea para trabajar. Identificamos $(x_1, y_1) = (4, 2)$ y $(x_2, y_2) = (-5, 7)$ y seguimos (13.3):

$$y - 2 = \frac{7-2}{-5-4}(x-4) \qquad \Longrightarrow \qquad y - 2 = \frac{5}{-9}(x-4)\,.$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -\frac{5}{9}x + \frac{38}{9}$.

❑

Una señal de *advertencia* hay que colocar en la ecuación (13.3) cuando $x_1 = x_2$, porque el termino que corresponde a la pendiente m no estaría bien definida al tener una división entre cero. En la figura 13.4 trazamos una recta que pase por dos puntos distintos que cumplan esta condición: Efectivamente contamos con una recta, pero cuya pendiente no se puede de-

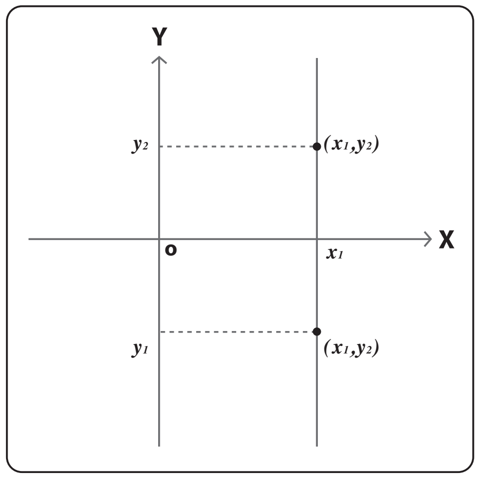


Figura 13.4: *Recta con pendiente indefinida.*

terminar (diríamos que es tan grande que no hay número que la defina), pero eso no impide que no contemos con una expresión analítica que determine este tipo de rectas. Así como las rectas horizontales se pueden determinar con la expresión sencilla $y = k$, con k una constante, pues de igual manera definimos las ecuaciones de las rectas verticales. Para una recta vertical la abscisa no cambia, aunque variemos la variable y, quiere decir que x siempre toma el mismo valor, por lo tanto $x = k$ sería la forma de la ecuación de este tipo de rectas. En la figura 13.4, la ecuación correspondiente sería $x = x_1$.
Nota: la ecuación de la recta (13.2) determina todas aquellas rectas que no son verticales.

Quizá la forma más empleada por su sencillez y fácil manipulación sea la que daremos a continuación. Antes de enunciarla explicaremos qué entendemos por *ordenada al origen* y *abscisa al origen*; son dos puntos en particular, los puntos en donde intersecta la recta con cada uno de los ejes coordenados. La *ordenada al origen* es el valor en donde corta la recta con el eje Y y comúnmente se denota por b y la *abscisa al origen* es el valor en donde corta la recta al eje X, que denotamos por a. Las coordenadas de estos puntos de intersección son muy sencillas porque son $(a, 0)$ y $(0, b)$; obsérvese la figura 13.5.

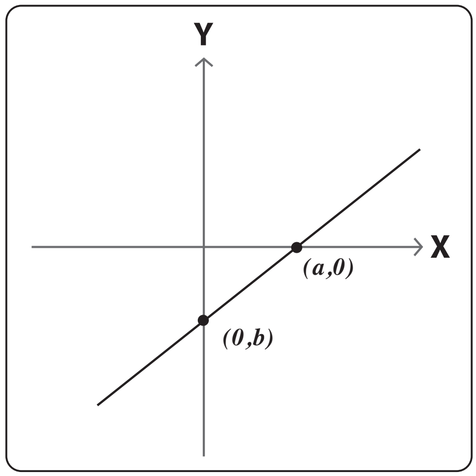


Figura 13.5: *Ordenada y abscisa al origen de una recta.*

La ecuación de la recta que tiene pendiente m y ordenada al origen b es

$$y = mx + b\,, \tag{13.4}$$

y la llamamos ecuación *pendiente-ordenada.*

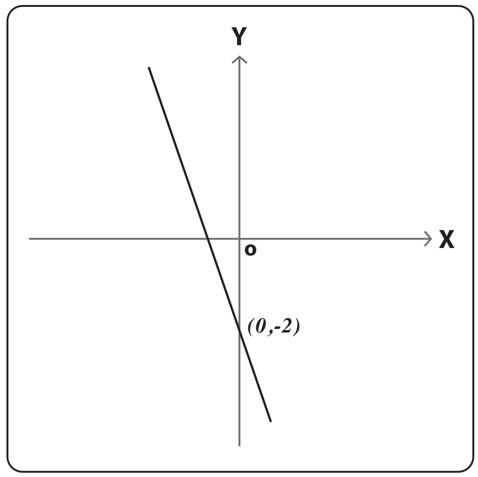
Esta forma de la ecuación de la recta requiere de la pendiente y de un punto en particular por donde pasa la recta, la ordenada al origen. Tomando la ecuación (13.2) y conociendo que la recta pasa por $(0, b)$, entonces basta sustituir este punto y la respectiva pendiente en esta expresión para obtener $y-b = m(x-0)$, o sea, $y = mx+b$. Y con esto hemos mostrado que la ecuación de la forma pendiente-ordenada es realmente de la forma punto-pendiente.

Ejemplo 13.5 *Determinar la ecuación de la recta que tiene pendiente -3 y corta con el* eje Y *en -2 y graficar la recta.*

Los datos que nos dan son la pendiente $(m = -3)$ y un punto por donde pasa la recta, de hecho nos proporcionan la ordenada al origen $((x_1, y_1) = (0, -2))$, por lo tanto $b = -2$ y recurrimos a la ecuación de la forma pendiente-ordenada. sustituyendo adecuadamente tenemos

$$y = -3x + (-2) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -3x - 2\,,$$

la cual es la ecuación de la recta cuya gráfica es



.

❑

Ahora supongamos que no solamente conocemos la ordenada al origen de una recta, supongamos también que conocemos otro punto muy particular, la abscisa al origen, el punto $(a, 0)$. Como conocemos dos puntos por donde pasa la recta, hacemos uso de la ecuación (13.3), nombrando $(x_1, y_1) = (a, 0)$ y $(x_2, y_2) = (0, b)$ y sustituyendo adecuadamente obtenemos

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{b}{a}x + b\,.$$

Pasando del otro lado de la igualdad el término que contiene x y dividiendo toda la expresión por b obtenemos otra forma de la ecuación de la recta.

La forma de la ecuación llamada *simétrica* es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,, \tag{13.5}$$

donde a es la abscisa al origen y b es la ordenada al origen de la recta.

Esta forma de la ecuación no admite rectas que pasen por el origen. ¿Por qué?

Ejemplo 13.6 *Una recta intersecta con el eje de las ordenadas en* $1/8$ *e intersecta en* $\sqrt{2}$ *en el eje de las abscisas, ¿cuál será la ecuación de la recta?*

Nos están dando la ordenada y la abscisa al origen, por lo que usamos la forma simétrica de la ecuación de la recta, identificando el valor de la abscisa $a = \sqrt{2}$ y el valor de la ordenada al origen $b = 1/8$, entonces basta seguir (13.5):

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\frac{1}{8}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{\sqrt{2}} + 8y = 1\,.$$

❑

Finalmente, hay una forma de la ecuación que nos permitirá posteriormente incluirla en un tipo de ecuación que engloba a las rectas y las siguientes figuras geométricas que analizaremos. Quizás no es la forma más cómoda para manipular y obtener información a partir de ésta, pero si es la que nos permitirá tener un panorama más amplio más adelante.

La ecuación *general* de la recta es

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{13.6}$$

donde A**,** B **y** C **son constantes tales que** $A \neq 0$ **y/o** $B \neq 0$**.**

Esta ecuación no es distinta a las demás en el sentido de que despejando y de la expresión (13.6) llegamos a la ecuación

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,,$$

considerando que $B \neq 0$. Es decir, volvimos a obtener una ecuación de la forma pendiente-ordenada, describiendo una recta con pendiente $-A/B$ y ordenada al origen $-C/B$. Observemos que si $A = 0$, estamos hablando de una recta horizontal cuya ecuación es $y = -C/B$. Si estuviéramos en el caso $B = 0$, entonces estaríamos hablando de una recta vertical con ecuación $x = -C/A$. En la definición de la forma general de la ecuación de la recta no tomamos en cuenta el caso $A = 0$ y $B = 0$ porque no estaríamos hablando de una recta.

Todas las expresiones anteriores (de (13.2) a (13.6)) son equivalentes, todas expresan el mismo objeto geométrico, solamente cambia su escritura. Como nos podemos dar cuenta, en todos los casos necesitamos solamente de dos datos, pueden ser dos puntos o un punto y la pendiente, al igual que para graficar necesitamos de dos datos solamente.

Ejemplo 13.7 *Dar la ecuación de la recta que pasa por* $(-2, 4)$ *y tiene una pendiente igual a* -3 *en las formas pendiente-ordenada, simétrica y general.*

Como sabemos que todas las ecuaciones son equivalentes, comencemos por la más fácil de hallar y de esa partimos para encontrar las otras dos. Contamos con un punto y la pendiente por lo que hallamos primeramente la forma punto-pendiente

$$y = -3(x - (-2)) + 4$$

y desarrollando esta expresión obtenemos la forma pendiente-ordenada

$$y = 3x + 10\,,$$

la cual nos indica que la ordenada al origen es 10. Hasta aquí contamos con la ordenada al origen y para encontrar la forma simétrica solo necesitamos acomodar esta ecuación. Despejamos el número 10, entonces $y - 3x = 10$ y dividimos entre 10 toda la ecuación:

$$\frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{10} = 1\,.$$

Esta ecuación indica que la abscisa al origen es $-10/3$. Por último, de la forma simétrica pasamos a la forma general de manera muy sencilla. Acomodamos adecuadamente el coeficiente del termino x y pasamos todos los términos de un solo lado de la igualdad, obteniendo:

$$-\frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y - 1 = 0\,,$$

identificando los coeficientes $A = -3/10$, $B = 1/10$ y $C = -1$ de la forma general.

Hemos obtenido las ecuaciones en la forma requerida y sólo estuvimos reescribiendo (algebraicamente hablando) la primera ecuación que obtuvimos.

❑

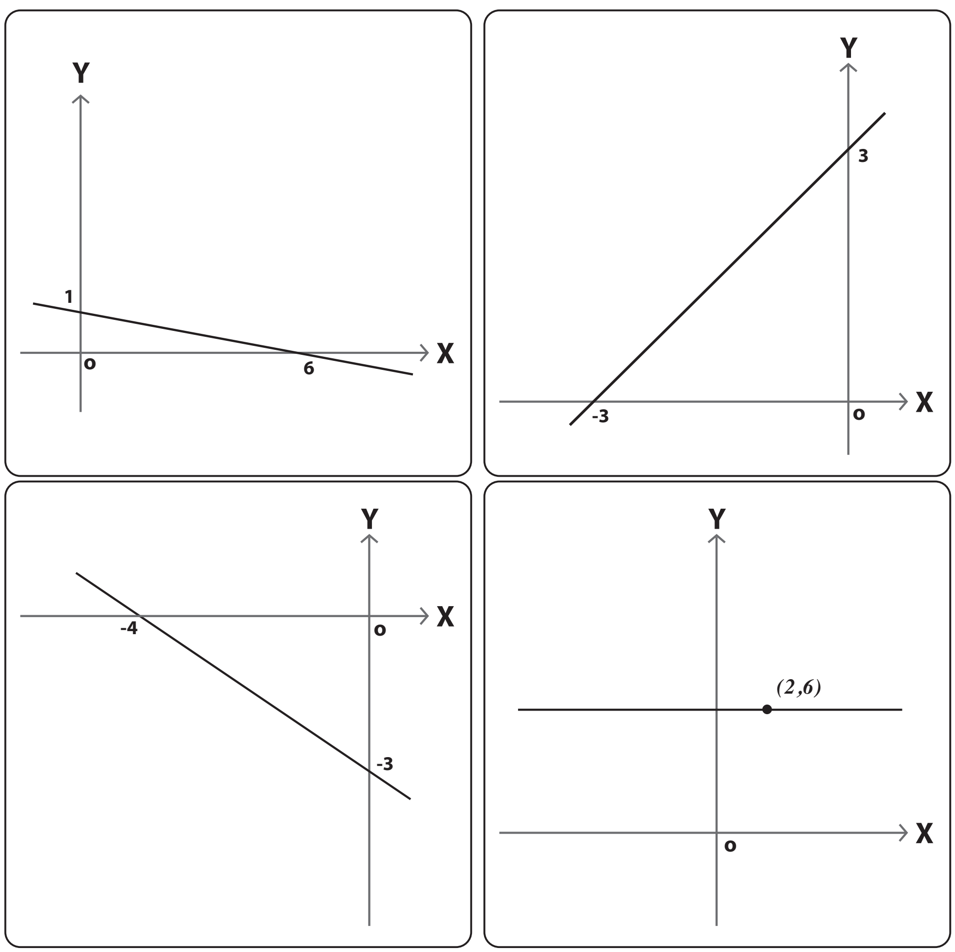
13.2.1. Ejercicios:

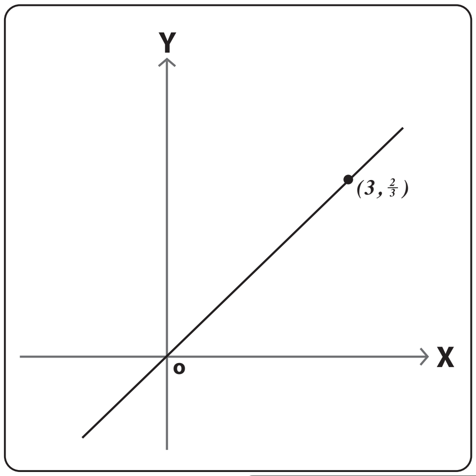
1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,5)$ y tiene de pendiente 2.

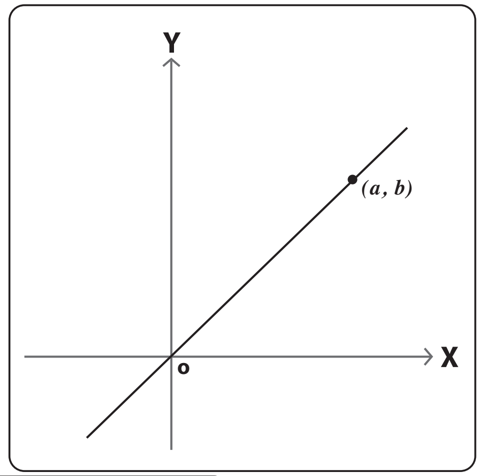
2. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el *eje* Y es -2.

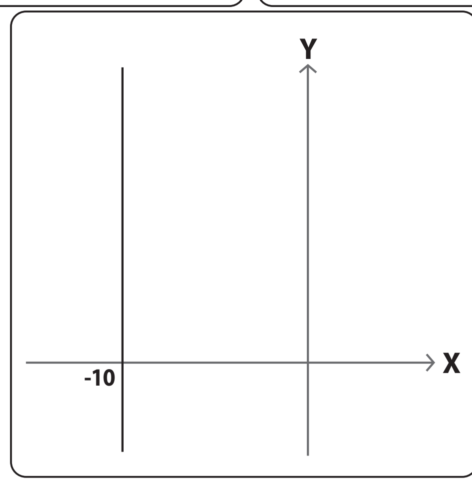
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,2)$ y $(-5,7)$?

4. Dar la ecuación de las siguientes rectas:









.

5. Los vértices de un cuadrilátero son $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$, $C = (6, 7)$ Y $D = (8, 0)$. Hallar las ecuaciones de cada uno de los lados.

6. Una recta corta con el *eje* Y en -3 e intersecta con el *eje* X en 2, ¿cuál es su ecuación?

7. Hallar la ecuación simétrica y general de una recta que pasa por los puntos $(-3, -1)$ y $(2, -6)$.

8. Hallar la ecuación simétrica y general de una recta de pendiente -2 y que pasa por el punto $(-1, 4)$.

9. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una recta que pasa por $(2, 0)$ y $(0, -1)$?

a) $y = 2x - 1$,

b) $2y = 1 - x$,

c) $2y = x - 2$,

d) $y = 1 - x$.

10. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(7, 8)$ y corta con el *eje* X en -9.

11. Muestra que los puntos $(-5, 2)$, $(1, 4)$ y $(4, 5)$ son colineales (que están sobre la misma recta).

12. Dar la pendiente y las intersecciones de la recta con cada uno de los ejes coordenados, cuya ecuación es $7x - 9y + 2 = 0$.

13. Determinar el valor de k para que la recta $4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a 2.5 unidades cuadradas.

14. Determinar la intersección con los ejes coordenados de las rectas dadas por:

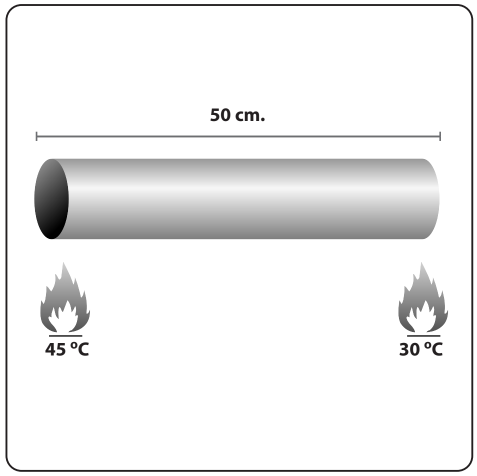
    - $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = y$,
    - $5\left(\frac{1}{4}y + 1\right) = x$,
    - $\frac{x}{3} + 2 = 0$,
    - $-\frac{1}{5}y = 2$.

13.3. Aplicaciones de la recta.

La recta, analíticamente hablando, modela los sistemas más sencillos que podemos encontrarnos en la realidad. Aunque no represente, muchas de las veces, la realidad fielmente si es la primera aproximación a la realidad y nos puede encausar en la modelación de una situación más compleja.

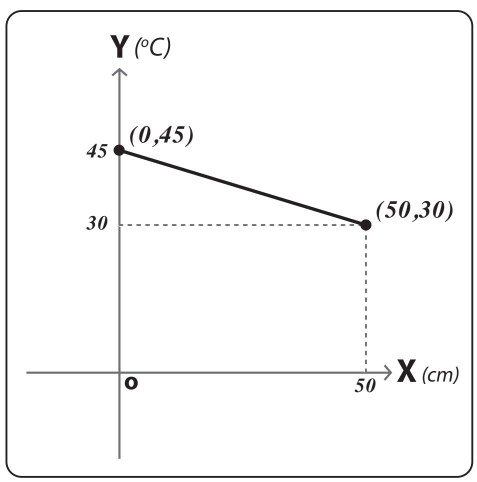
Ejemplo 13.8 *Un tubo cilíndrico de* $50\,cm$ *de largo está aislado a su alrededor, excepto en sus extremos, los cuales son calentados a la izquierda por un soplete de* $45°C$ *y el otro a* $35°C$*. Un químico nota que por cada cm que se traslade al extremo derecho del tubo, la temperatura decrece* $0.3°C$*. (a)*

Determinar la ecuación de la recta que describe el experimento. (b) Explicar qué información da la pendiente de la recta. (c) ¿Cuál es la temperatura del tubo a $5\,cm$ *de distancia del extremo que se calienta a* $45°C$*?*



.

Para el inciso (a) requerimos de dos datos y pensamos que los puntos de calentamiento (son dos) pueden ser los datos necesarios para encontrar la ecuación. Hacemos un gráfica ubicando los dos puntos de manera adecuada en el plano Cartesiano; el eje X tendrá por unidades cm y el eje Y estará en $°C$. Posteriormente trazamos la recta que pasa por estos puntos:



.

Como conocemos dos puntos, pues seguimos la expresión (13.3) para encontrar la ecuación de la recta, llamando $(x_1, y_1) = (0, 45)$ y $(x_2, y_2) = (50, 30)$,

$$y - 45 = \frac{30 - 45}{50 - 0}(x - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{3}{10}x + 45\,.$$

Para el inciso (b), identificamos en la ecuación que obtuvimos en la forma pendiente-ordenada la pendiente que es $-3/10$. Recordemos que la pendiente es el cociente entre la diferencia de valores en eje Y y la diferencia de valores en eje X, por lo tanto, el cociente es una razón entre el cambio en la temperatura y el cambio en distancia. Al ser la pendiente $-3/10$, interpretamos que la temperatura va decreciendo (por el signo negativo) $3°C$ por cada decímetro que avanzamos del soplete a $45°C$ al soplete a $30°C$.

Para el inciso (c) basta evaluar en la recta el punto $x = 5$ y calcular el respectivo y, así

$$y = -\frac{3}{10}(5) + 45 = -\frac{3}{2} + 45 = \frac{87}{2}\,,$$

y por eso la temperatura es de $87/2\,°C$ a una distancia de $5\,cm$ del soplete que está calentando a $45°C$.

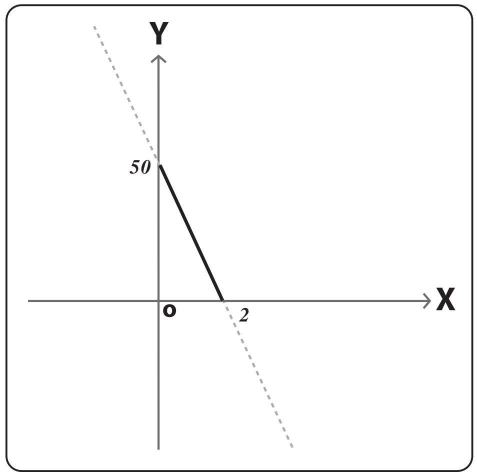
❑

Ejemplo 13.9 *Cada kilogramo del producto A cuesta* \$50 *y del producto B cuesta* \$2. *¿Cuántos kilogramos del producto A y cuántos kilogramos del producto B se pueden comprar con* \$100*? Trazar la gráfica de la solución.*

Comenzamos poniendo nombres adecuados a los datos. Llamamos x a la cantidad en kilogramos del producto A y y representa lo mismo para el producto B. De esta manera, el costo de tener $x\,kg$ de A y $y\,kg$ de B es $50x + 2y$. Pero nosotros solamente contamos con \$100, por lo que igualamos el costo con esta cantidad, teniendo

$$50x + 2y = 100\,,$$

la cual distinguimos como la ecuación de una recta. Quiere decir que, geométricamente, todos los puntos de la recta descrita por la última ecuación satisfacen el costo fijo en \$100. Entonces, la respuesta a la pregunta son todas las parejas (x, y) que satisfacen $50x + 2y = 100$ (una infinidad de puntos, por lo tanto tenemos una infinidad de soluciones). La gráfica correspondiente es



,

donde está remarcada la sección que tiene sentido, porque la cantidad de kg de A y B son números positivos.

❑

Ejercicios:

- La señora Sánchez comenta que su sueldo es de \$120 por cada unidad que venda más una comisión diaria de \$500. Calcula su sueldo de 15 días de trabajo.

- Escribe la ecuación que modela la renta de un automóvil que consiste de \$130 por día por cuota fija y \$1.50 por cada kilómetro, ¿cuánto paga un cliente por 3 días si conduce 120 kilómetros diarios?

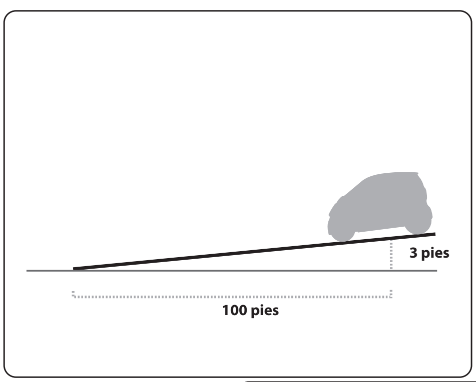
- Un bebé pesa $10\,lb$ al nacer y 3 años después su peso es de $30\,lb$. Suponga que el peso en libras es W y está relacionado linealmente con la edad en años dada por t.

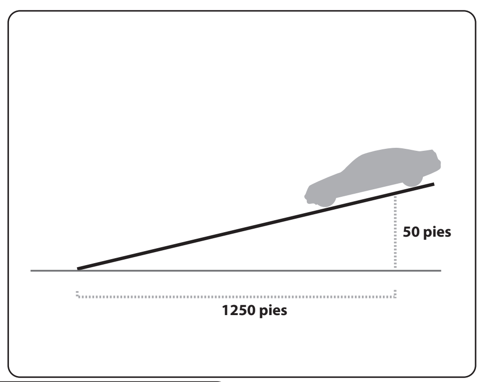
    - Exprese W en términos de t.
    - ¿Cuánto pesa el niño al cumplir 6 años?
    - ¿A qué edad pesará $70\,lb$?
    - Trazar en un plano Cartesiano la relación entre t y W para $0 \leqslant t \leqslant 12$.

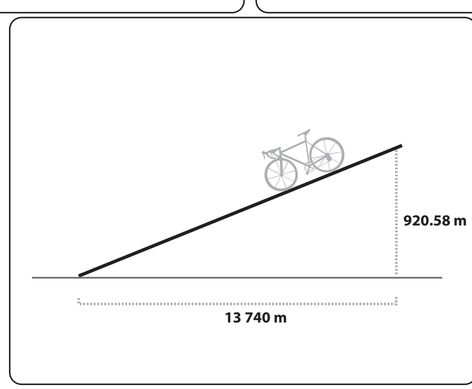
- Durante un experimento, el número de células en una muestra se duplicó cada minuto. Después de un minuto había 4 células, dos minutos más tarde 8 células y así sucesivamente. Si se ajusta una recta a los datos, determina la ecuación de la recta y predice el número de células después de 10 minutos usando la ecuación.

- Suponer que la ecuación de costo para un transporte es lineal. Determinar la ecuación de costo C para un transporte que cobra \$300 por 5 personas y cobra 200 por 50 personas.

- A menudo, número como $2\,\%$, $3\,\%$ y $6\,\%$ se utilizan para representar la pendiente de un camino. Tal número indica lo inclinado que está. Por ejemplo, una pendiente del $3\,\%$ significa que por cada $100\,pies$ horizontales el camino asciende o desciende $3\,pies$. En cada una de las siguientes figuras, calcula la pendiente del camino y una ecuación que proporcione la altura de un vehículo en términos de la distancia horizontal,







.

13.4. Paralelismo y perpendicularidad.

En lenguaje coloquial, dos rectas son paralelas si estas no se intersectan y son perpendiculares si la intersección se da en ángulo recto. Estos conceptos de sabiduría común los traduciremos en los términos en los que hemos definido la recta, para que de esta manera tengamos una herramienta eficaz para determinar estas dos propiedades entre rectas.

Tracemos un par de rectas paralelas en el plano Cartesiano que nombramos L y K, y elijamos dos puntos por cada una de éstas, L_1 y L_2 pertenecen a L, y K_1 y K_2 pertenecen a K. Estos dos puntos los tomamos de manera que las abscisas coincidan entre los puntos de una recta y la otra, como está en la figura 13.6. La pendiente de la recta L y de la recta K las

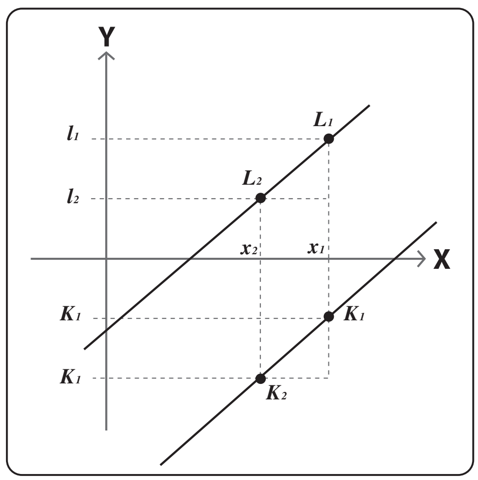


Figura 13.6: *Rectas paralelas.*

calculamos utilizando los puntos seleccionados:

$$m_L = \frac{l_1 - l_2}{x_1 - x_2}\,, \qquad m_K = \frac{k_1 - k_2}{x_1 - x_2}\,,$$

recordando que para obtener la pendiente de una recta no importa la elección de puntos que pertenezcan a la recta, por esta razón los puntos que ubicamos de manera especial son suficientes para nuestros cálculos. Completamos dos triángulos rectángulos como lo hemos hecho anteriormente y resultan dos triángulos semejantes (¿por qué?) por lo que $l_1 - l_2 = k_1 - k_2$ y con esto observamos que $m_L = m_K$.

Las rectas L y K son paralelas si $m_L = m_K$.

Quiere decir que analíticamente dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, una condición muy sencilla de verificar.

Ejemplo 13.10 *Una recta pasa por el punto* $(7, 8)$ *y es paralela a la recta que pasa por* $(-2, 2)$ *y* $(3, -4)$*. Hallar su ecuación.*

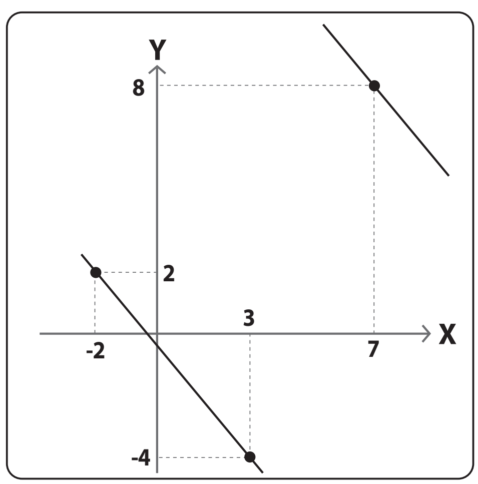
Para determinar la ecuación de la recta necesitamos dos datos; uno es el punto $(7, 8)$, por el que pasa la recta y el otro dato es la pendiente, que resulta ser la misma que tiene la recta que pasa por los puntos $(-2, 2)$ y $(3, -4)$ porque son paralelas. Por esta razón, comenzamos por determinar la pendiente de esta última recta, que es

$$m = \frac{2 - (-4)}{-2 - 3} = -\frac{6}{5}\,.$$

Ahora ya contamos con la pendiente y ya sabíamos que pasa por el punto $(7, 8)$, por lo que sólo basta escribir la ecuación en la forma punto-pendiente,

$$y = -\frac{6}{5}(x - 7) + 8\,,$$

cuya gráfica junto con la de la recta paralela es



.

❑

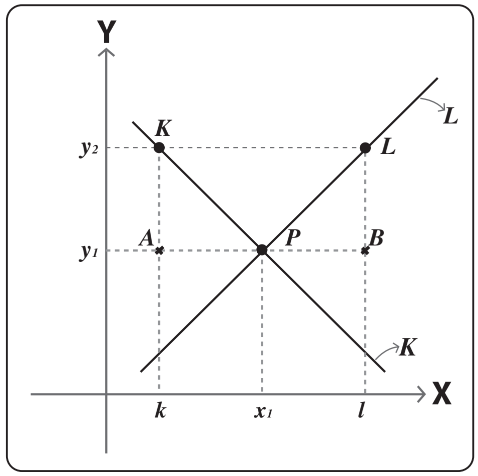


Figura 13.7: *Rectas perpendiculares.*

De igual manera, ahora encontraremos una condición que caracterice a las rectas perpendiculares. Tracemos dos rectas perpendiculares en el plano que llamamos nuevamente L y K, como está en la figura 13.7. Calcularemos las pendientes de estas rectas y como mencionamos en el estudio previo, seleccionamos un par de puntos que nos serán especialmente útiles. Ubicamos el punto de intersección entre las rectas $P = (x_1, y_1)$ y los puntos $L = (l, y_2)$ y $K = (k, y_2)$, los cuales tienen la misma ordenada. Completamos nuevamente dos triángulos rectángulos, formándose $\triangle KPA$ y $\triangle LPB$, los cuales son congruentes (¿por qué?). De esta manera establecemos la siguiente igualdad:

$$\frac{y_2 - y_1}{l - x_1} = \frac{x_1 - k}{y_2 - y_1}\,.$$

Por otro lado, calculamos las pendientes de las rectas L y K:

$$m_L = \frac{y_2 - y_1}{l - x_1}\,, \qquad m_K = \frac{y_2 - y_1}{k - x_1}\,.$$

Observamos que la igualdad sobre triángulos congruentes se puede escribir en términos de las pendientes de las rectas como sigue:

$$m_L = \frac{1}{-m_K}\,.$$

Las rectas L y K son perpendiculares si $m_L m_K = -1$.

En otras palabras, si el producto de las pendientes de dos rectas es -1, entonces estas son perpendiculares.

Ejemplo 13.11 *Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento AB, con $A = (-3, 2)$ y $B(1, 6)$.*

La mediatriz es la recta que parte por la mitad otra recta de manera perpendicular. Para determinar la ecuación de la mediatriz necesitamos de dos datos; por un lado como la mediatriz es perpendicular al segmento AB, basta con encontrar la pendiente del segmento para conocer la pendiente de la mediatriz y por otro lado, el punto medio del segmento AB es un punto que pertenece a la mediatriz. Entonces, la pendiente del segmento AB es

$$m_{AB} = \frac{2-6}{-3-1} = 1\,,$$

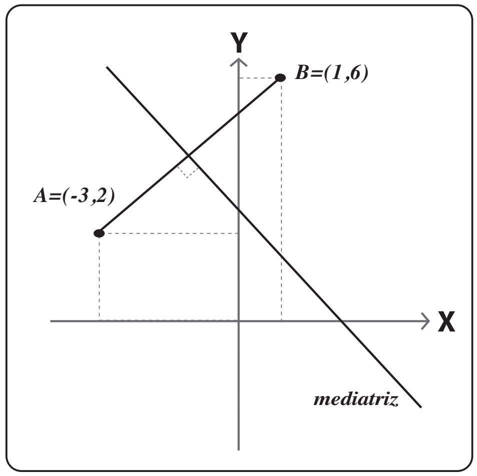
por tanto, la pendiente de la mediatriz es $-1/m_{AB} = -1/1 = -1$ y el punto medio del segmento AB es

$$p_m = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-1, 4)\,.$$

De esta forma ya contamos con la pendiente y un punto para la ecuación de la mediatriz, entonces recurrimos a la forma punto-pendiente (13.2), pudiendo escribir la ecuación pedida como

$$y = -1(x - (-1)) + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -x + 3\,.$$

Resulta ser una recta con pendiente -1 y ordenada al origen 3; gráficamente es



.

❑

La ecuación de una recta es una ecuación lineal o de primer grado, porque las variables tienen potencia 1. La interpretación gráfica de una ecuación lineal es una recta, como lo hemos visto a lo largo de las últimas secciones. En lo que sigue trataremos con varias ecuaciones lineales simultáneamente o dicho de otra forma, estudiaremos varias rectas al mismo tiempo.

13.4.1. Ejercicios:

1. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por la recta $5x + 3y - 15 = 0$ y los ejes coordenados.

2. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 19 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Mostrar que la figura es un paralelogramo.

3. Determinar si cada par de ecuaciones corresponde a rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas:

   - $y + 8 = -6x$, $-2x + y = 5$,
   - $x + 2y = 5$, $2x + 4y = 8$,
   - $y = -x + 7$, $y = x + 3$,
   - $x + 2y = 7$, $2x + y = 1$,
   - $y + 3 = 5x$, $3x - y = -2$.

4. Los puntos $(-2, 7)$, $(6, 9)$ y $(3, 4)$ son los vértices de un triángulo, ¿será triángulo rectángulo?

5. Escribir una ecuación de la recta que tiene ordenada al origen $5/7$ y es paralela a la gráfica de $6x - 3y = 1$.

6. La recta L es perpendicular a la recta M y la recta M es perpendicular a la recta N. Las rectas L y N no coinciden entre sí.

   - ¿Cuál es la relación entre las pendientes de la rectas L y N?
   - ¿Cuántos puntos en común tienen las gráficas de las rectas L y N?
   - Si la recta L tiene por ecuación $y = mx + b$, escribir una ecuación para le recta N.

7. Encontrar el valor a de modo que las gráficas de $5y = ax + 5$ y $\frac{1}{4}y = \frac{1}{10}x - 1$ sean paralelas.

8. Encontrar k para que las gráficas de $x + 7y = 70$ y $y + 3 = kx$ sean perpendiculares entre sí.

9. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y es paralela al *eje* X?

   - $x = 1$,
   - $y = -2x + 1$,
   - $y = -2$,
   - $y = 1$.

Capítulo 14

Sistemas de ecuaciones de primer grado.

Un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que contienen las mismas variables se llama *sistema de ecuaciones lineales o sistema de ecuaciones de primer grado*. Una solución al sistema consiste de los valores que toman las variables de tal forma que cada una de las ecuaciones se satisface. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + y &= 11\,, \\ 3x - y &= 5\,, \end{aligned}$$

es un sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución es $(4, 7)$, es decir, $x = 4$ y $y = 7$. Si sustituimos estos valores en el sistema dado, la primera ecuación hace $11 = 11$ y la segunda hace $5 = 5$, en otras palabras, el sistema se satisface.

En general, un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n &= b_m\,, \end{aligned}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas y los coeficientes son $a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$. Los $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son constantes.

Los sistemas lineales pueden tener una solución, una infinidad de soluciones o ninguna solución y esto depende de la relación que guardan entre sí las ecuaciones en un sistema. Para entender las posibles relaciones que existen entre ecuaciones lineales comenzaremos por resolver los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas de manera gráfica y posteriormente daremos métodos algebraicos para lograrlo. Resolveremos los mismos sistemas de ecuaciones que se plantean utilizando todos los métodos que a continuación exponemos, para que sea fácil una comparación sobre los métodos y mostrar que la solución de un sistema no depende del método que se emplea.

14.1. Sistemas de 2 ecuaciones de primer grado.

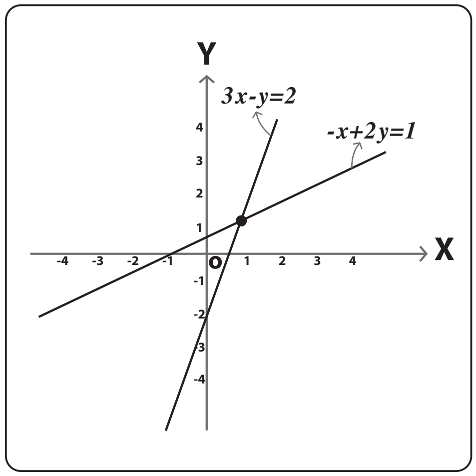
14.1.1. Intersección de rectas.

Como ya mencionamos, una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es una pareja de valores que satisfacen ambas ecuaciones, que traducido al ambiente gráfico es un punto en el plano por el que pasan ambas rectas descritas por las ecuaciones.

Ejemplo 14.1 *Resolver gráficamente el sistema*

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1\,, \\ 3x - y &= 2\,. \end{aligned}$$

Trazamos la gráfica de cada una de las ecuaciones, que lo hacemos de manera directa si las reescribimos en la forma punto-pendiente como $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ y $y = 3x - 2$,



.

El punto donde ambas rectas se intersecan es un punto común a ambas rectas, por lo que esa debe ser la solución. Si nuestro dibujo es correcto, la solución es $(1,1)$ y lo verificamos sustituyendo $x = 1$ y $y = 1$ en el sistema

$$\begin{aligned} -1 + 2(1) = 1 \quad \checkmark \\ 3(1) - 1 = 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

observando que el sistema se satisface, por lo tanto $x = 1$ y $y = 1$ es efectivamente la solución.

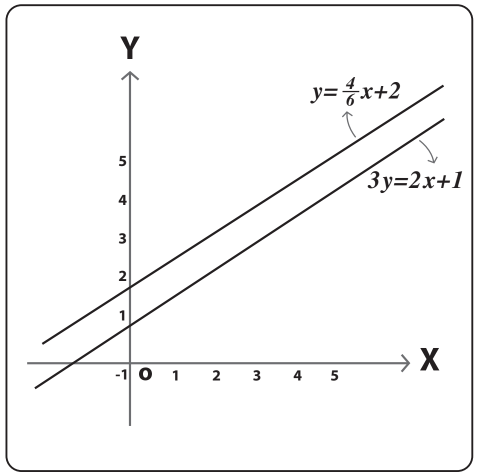
❑

Como podemos darnos cuenta, el sistema tuvo solución porque ocurre una intersección entre las rectas; en este caso se dice que las ecuaciones son independientes entre sí y el sistema es consistente. Pero ¿podría ocurrir otro escenario? ¿cómo se vería gráficamente un sistema que no tenga solución?

Ejemplo 14.2 *Resolver gráficamente el sistema*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 1\,, \\ y &= \frac{4}{6}x + 2\,. \end{aligned}$$

Trazamos la gráfica de cada ecuación y obtenemos



.

Las rectas descritas por ambas ecuaciones son paralelas, por lo que no tienen ningún punto de intersección y por lo tanto no hay un punto tal que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente. Este sistema no tiene solución.

❑

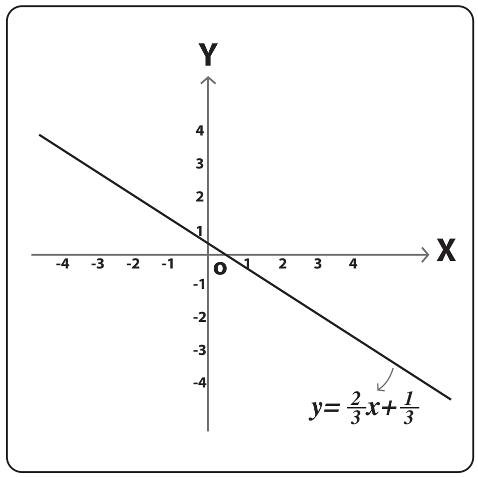
Cuando ocurre un caso como el anterior, se dice que las ecuaciones son dependientes y el sistema no es consistente. Hemos visto un sistema de ecuaciones lineales que tiene una solución, otro que no tiene solución y mencionamos al principio que existe la posibilidad de tener una infinidad de soluciones, ¿cómo sería un sistema con esa característica? Como veremos a continuación, estos sistemas se dicen consistentes, pero donde las ecuaciones son dependientes entre sí.

Ejemplo 14.3 *Mostrar que el sistema*

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= 1\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned}$$

tiene una infinidad de soluciones.

Escribiendo ambas ecuaciones en la forma pendiente-ordenada resulta que ambas son la misma ecuación dada por $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ y por ende, la gráfica de ambas ecuaciones son la misma recta,



.

Entonces, un punto por donde pasa una de las rectas del sistema también pasa la otra recta y de esta manera todos los puntos de una recta también pertenecen a la otra. Por lo tanto, las parejas ordenadas (x, y) que dan solución a este sistema son todas las parejas que corresponden a los puntos de la recta, es decir, una infinidad de soluciones dadas por $(x, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3})$, en donde x puede tomar cualquier valor.

❑

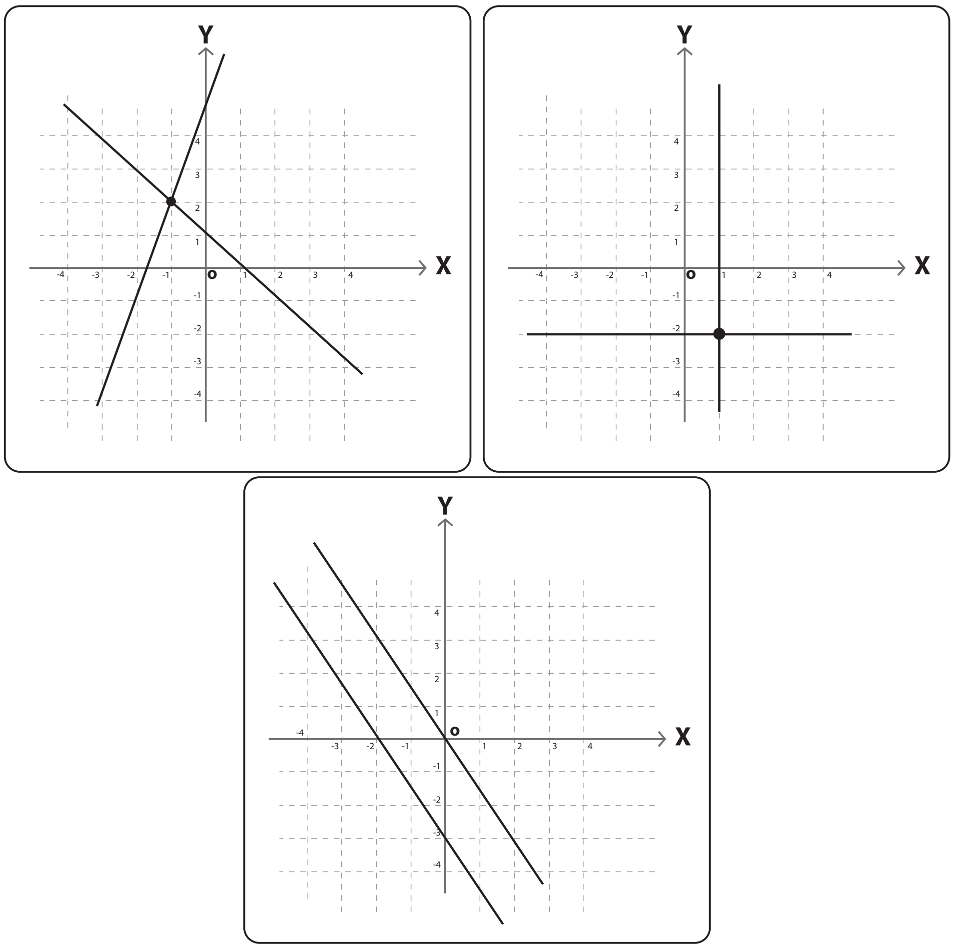
Para un sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas no hay más posibles escenarios. En las siguientes secciones estudiaremos métodos algebraicos para encontrar las soluciones y de igual manera distinguiremos cada una de las soluciones que acabamos de presentar.

14.1.2. Ejercicios:

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales gráficamente:

   - $\begin{cases} y = x - 1\,, \\ y = 3x - 3\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} y + 7 = 2x\,, \\ x + 3 = y + 8\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2(x+1) = y\,, \\ 3y = 4x\,. \end{cases}$

2. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, dar la solución, si es que la tiene o si tiene una infinidad:



3. Escribir un sistema de ecuaciones cuya solución sea $(5, 1)$.

4. Escribir un sistema de ecuaciones que no tenga ninguna solución.

5. Escribir un sistema de ecuaciones tal que tenga una infinidad de soluciones.

6. Resulta que un sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene por soluciones $(1, -1)$ y $(-2, 3)$. ¿Podrías encontrar otra solución? ¿Cuántas soluciones debería haber?

14.1.3. Suma y resta.

Literalmente sumaremos o restaremos a conveniencia las ecuaciones de un sistema para que nos quede una expresión más sencilla en términos de una sola incógnita. Antes de sumar o restar ecuaciones, muchas de las veces multiplicamos por un factor adecuado las ecuaciones para que estas queden de tal forma que al sumar los términos semejantes entre las ecuaciones, alguna de las incógnitas quede con coeficiente cero y así terminar resolviendo una ecuación lineal con una sola incógnita.

Ejemplo 14.4 *Dar la solución del sistema*

$$\begin{aligned} -x+2y &= 1\,, \\ 3x-y &= 2\,. \end{aligned}$$

Comenzamos por identificar los términos semejantes entre las dos ecuaciones. Vamos a sumar las dos ecuaciones para eliminar el término x, por lo que multiplicaremos la primera ecuación por el factor 3, como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{3}(-x+2y &=& 1)\,, \\ 3x-y &=& 2\,, \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} -3x+6y &=& 3\,, \\ 3x-y &=& 2\,, \end{array}$$

y así, sumando las ecuaciones tenemos

$$\begin{array}{ccccc} -3x & + & 6y & = & 3 \\ 3x & - & y & = & 2 \\ \hline 0 & + & 5y & = & 5 \end{array},$$

por lo que ahora sólo basta resolver la ecuación $5y=5$, lo que nos da $y=1$. Ya tenemos la solución para la variable y, falta investigar para qué x esto es válido. sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema el valor de y y despejamos el respectivo valor de x, es decir,

$$-x+2(1)=1 \qquad \Longrightarrow \qquad x=1\,.$$

Por lo tanto, $(1,1)$ es la solución al sistema planteado.

El algoritmo que seguimos fue para eliminar la variable x, pero podemos realizar el mismo procedimiento, eliminando la variable y. Multiplicamos por el factor 2 la segunda ecuación y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -x+2y & = & 1\,, \\ \boxed{2}(3x-y & = & 2)\,, \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} -x+2y & = & 1\,, \\ 6x-2y & = & 4\,, \end{array}$$

y sumando ambas ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} -x & + & 2y & = & 1 \\ 6x & - & 2y & = & 4 \\ \hline 5x & + & 0 & = & \end{array},$$

por lo que basta resolver $5x = 5$, lo que nos da $x = 1$. sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema tenemos que

$$-1+2y=1 \qquad \Longrightarrow \qquad y=1$$

y nuevamente obtenemos que la solución es $(1, 1)$.

❑

Mediante este método también podemos determinar si un sistema es consistente o no y si tiene una o una infinidad de soluciones.

Ejemplo 14.5 *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{array}{rcl} 3y & = & 2x+1\,, \\ y & = & \dfrac{4}{6}x+2\,. \end{array}$$

Vamos a eliminar el término y, por lo que multiplicamos por el factor -3 la segunda ecuación

$$\begin{array}{rcl} 3y & = & 2x+1\,, \\ \boxed{-3}(y & = & \dfrac{4}{6}x+2)\,. \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} 3y & = & 2x+1\,, \\ -3y & = & -2x-6\,. \end{array}$$

y sumando las ecuaciones tenemos

$$\begin{array}{ccccc} 3y & = & 2x & + & 1 \\ -3y & = & -2x & - & 6 \\ \hline 0 & + & 0 & = & -5\text{✘} \end{array},$$

es decir, obtuvimos una proposición falsa en la que no intervienen las variables, lo que significa que no hay x y y tal que satisfaga el sistema dado y por eso decimos que no hay solución, el sistema no es consistente.

❑

Ejemplo 14.6 *Mostrar que el sistema*

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= 1\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned}$$

tiene una infinidad de soluciones.

Nuevamente, identificamos los términos semejantes entre las ecuaciones y decidimos eliminar el término y. Por esta razón multiplicamos por el factor -3 la primera ecuación:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{-3}}(3y + 2x &= 1)\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} -9y - 6x &= -3\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned}$$

y sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\begin{array}{cccccc} -9y & - & 6x & = & -3 \\ 9y & + & 6x & = & 3 \\ \hline 0 & + & 0 & = & 0\checkmark \end{array}\,,$$

la cual es una proposición verdadera en la que no intervienen las variables. Esto quiere decir que cualquier pareja (x, y) que cumpla una de las dos ecuaciones ($3y+2x = 1$ o también $9y+6x = 3$) son soluciones, por lo tanto todos los puntos sobre una de las rectas son soluciones para el sistema y de esta forma contamos con una infinidad de soluciones. Este es un sistema consistente, pero con dependencia entre las ecuaciones, porque una es múltiplo de la otra (por eso al sumar las ecuaciones adecuadamente obtenemos cero).

❑

14.1.4. Ejercicios:

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta:

   - $\left\{ \begin{aligned} -7x + 22y &= 74\,, \\ 4x - 7y &= -20\,, \end{aligned} \right.$

- $\begin{cases} 6x-3y &= 12\,, \\ 2x-4y &= -23\,, \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{2}{5}x-2y &= 17\,, \\ 3x-3y &= 21\,, \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{3}{5}x+2y &= 26\,, \\ 2x+2y &= 19\,, \end{cases}$
- $\begin{cases} -3-2y &= 18\,, \\ 4x-3y &= -13\,, \end{cases}$
- $\begin{cases} -0.3x+0.5y &= -0.1\,, \\ 0.01x-0.4y &= -0.38\,, \end{cases}$
- $\begin{cases} 3(a-b) &= 15\,, \\ 4a &= b+1\,. \end{cases}$

14.1.5. sustitución.

El método de sustitución consiste en despejar una variable en una de las ecuaciones del sistema y sustituir el valor en la otra ecuación, quedando por resolver una ecuación lineal con una incógnita.

Ejemplo 14.7 *Encontrar la solución al sistema*

$$\begin{aligned} -x+2y &= 1\,, \\ 3x-y &= 2\,. \end{aligned}$$

Despejamos de la primera ecuación la variable y, obteniendo

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \qquad (*)$$

y sustituimos en la segunda ecuación

$$3x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=2$$

por tanto, resolviendo tenemos $x=1$. Este valor lo sustituimos en $(*)$ para obtener el respectivo valor $y=1$. Entonces la solución a este sistema es $(1,1)$.

Para resolver este sistema también podemos comenzar despejando la segunda variable. Por ejemplo, despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = 3x - 2 \qquad (**)$$

y sustituimos este valor en la otra ecuación, es decir,

$$-x + 2(3x - 2) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1$$

y finalizamos sustituyendo el valor de x en $(**)$, obteniendo

$$y = 3(1) - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1\,,$$

por tanto, la solución nuevamente es $(1, 1)$.

❑

El caso de un sistema no consistente con este método se determina como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14.8 *Determinar si es o no consistente el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 1\,, \\ y &= \frac{4}{6}x + 2\,. \end{aligned}$$

Aprovechando que la segunda ecuación del sistema tiene la variable y despejada, la sustituimos en la primera ecuación como sigue:

$$3\left(\frac{4}{6}x + 2\right) = 2x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x + 6 = 2x + 1$$

y resolviendo esta ecuación llegamos a

$$6 = 1\,. \quad ✘$$

Culminamos en una proposición falsa, por tanto el sistema no cuenta con una pareja (x, y) que lo satisfaga y decimos que no hay solución. El sistema no es consistente.

❑

De igual manera, con este método podríamos llegar a proposiciones verdaderas en las que no se incluyen las variables, concluyendo que el sistema es consistente con una infinidad de soluciones (hay dependencia entre las ecuaciones).

Ejemplo 14.9 *Mostrar que el sistema*

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= 1\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned}$$

tiene una infinidad de soluciones.

Despejamos de la primera ecuación la variable x, es decir,

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$$

y la sustituimos en la segunda ecuación como sigue

$$9y + 6\left(-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 9y - 9y + 3 = 3\,.$$

Como observamos, resolviendo esta ecuación obtenemos

$$3 = 3 \quad ✔$$

por lo tanto, el sistema es consistente con una infinidad de soluciones.

❑

Ejercicios:

1. Dar la solución a los siguientes sistemas y comprobarla en caso de obtenerla:
   - $\begin{cases} 2x + 4y = 2\,, \\ 4x + 8y = 4\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2\,, \\ x + \frac{5}{4}y = 1\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2x + 4y = -\frac{10}{3}\,, \\ 6x + 3y = -2\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} -2x - 6y = -40\,, \\ -5x + 9y = -28\,. \end{cases}$

14.1.6. Igualación.

Resolver por esta vía un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas significa despejar de ambas ecuaciones la misma variable, para luego igualar sus resultados, quedando por resolver una ecuación lineal con una incógnita.

Ejemplo 14.10 *Dar la solución al sistema*

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1\,, \\ 3x - y &= 2\,. \end{aligned}$$

Comenzamos por despejar de ambas ecuaciones la variable y, así conseguimos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,, \\ y &= 3x - 2\,, \end{aligned}$$

y como y es la misma para ambas ecuaciones, entonces igualamos

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = y = 3x - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 3x - 2$$

y resolviendo esta ecuación tenemos $x = 1$. Finalmente sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema para obtener el correspondiente valor de y, nosotros usamos la primera,

$$-x + 2y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -(1) + 2y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1\,.$$

Así la solución es $(1, 1)$.

También pudimos comenzar por despejar la variable x, escribiendo las ecuaciones despejadas como

$$\begin{aligned} x &= 2y - 1\,, \\ x &= \frac{y}{3} + \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones, porque x es la misma para ambas,

$$2y - 1 = \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1\,,$$

y sólo basta sustituir este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema; lo hacemos en la primera, entonces

$$-x + 2y = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -x + 2(1) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1$$

y la solución al sistema es $(1, 1)$.

❑

Nuevamente, ahora con el método de igualación, analizamos los casos en los que se cuentan con una infinidad de soluciones y cuando no existen soluciones.

Ejemplo 14.11 *Determinar la solución al sistema*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x+1\,, \\ y &= \frac{4}{6}x+2\,. \end{aligned}$$

Escribimos el sistema con la variable y despejada,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\,, \\ y &= \frac{4}{6}x+2\,. \end{aligned}$$

Igualamos las ecuaciones y resolvemos el sistema,

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}x+2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}=2 \qquad ✘$$

y concluimos que el sistema no cuenta con soluciones, decimos que el sistema no es consistente.

❑

Ejemplo 14.12 *Mostrar que el siguiente sistema tiene más de una solución,*

$$\begin{aligned} 3y+2x &= 1\,, \\ 9y+6x &= 3\,. \end{aligned}$$

Despejamos de ambas ecuaciones la variable x y escribimos el sistema resultante,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}\,, \\ x &= -\frac{9}{6}y+\frac{3}{6}\,, \end{aligned}$$

e igualamos

$$-\frac{3}{2}y + \frac{1}{3} = -\frac{9}{6}y + \frac{3}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,, \quad ✔$$

obteniendo una proposición verdadera, lo que nos indica que el sistema es consistente con una infinidad de soluciones. Por ejemplo $(1/2, 0)$ y $(0, 3)$ son soluciones y así mostramos que el sistema tiene más de una solución.

14.1.7. Ejercicios:

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación y verifica las respuestas por medio del método gráfico:

   - $\left\{ \begin{array}{rcl} y &=& 1 + \frac{3}{2}x\,, \\ y &=& 3x - 1\,, \end{array} \right.$
   - $\left\{ \begin{array}{rcl} y - 1 &=& \frac{3}{2}x\,, \\ 2y &=& 3x - 1\,, \end{array} \right.$
   - $\left\{ \begin{array}{rcl} 3y + 5x &=& 6\,, \\ -1 &=& x - y\,. \end{array} \right.$

14.1.8. Regla de Cramer.

La regla de Cramer es un método que requiere del uso de determinantes, una operación definida para matrices. Como el objetivo de este curso no son las matrices, definiremos el determinante como los usaremos para resolver sistemas de ecuaciones. Dada una matriz de tamaño 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,,$$

el determinante de esta matriz se define como

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Su aplicación para solución de sistemas de ecuaciones lineales la exponemos ahora. Supongamos que tenemos el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y &=& b_1\,, \\ a_{21}x + a_{22}y &=& b_2\,, \end{array}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son constantes que se conocen. Formamos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b-2 & a-22 \end{pmatrix}, \qquad A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

La solución al sistema es

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|}.$$

Ejemplo 14.13 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1, \\ 3x - y &= 2. \end{aligned}$$

Comenzamos por escribir las matrices asociadas al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

entonces la solución está dada por

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{(1)(-1) - (2)(2)}{(-1)(-1) - (3)(2)} = 1,$$

$$y == \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{(-1)(2) - (1)(3)}{(-1)(-1) - (3)(2)} = 1.$$

Por tanto, $(1, 1)$ es la solución al sistema.

❑

La regla de Cramer también refleja la consistencia de los sistemas y si la solución es una o una infinidad, como lo explicamos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 14.14 *Determinar la solución al sistema*

$$\begin{aligned} 3y &= 2x + 1, \\ y &= \frac{4}{6}x + 2. \end{aligned}$$

Comenzamos escribiendo las matrices adecuadas para este sistema y para esto primero escribimos el sistema en la forma más cómoda:

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= 1\,, \\ -\frac{4}{6}x + y &= 2\,. \end{aligned}$$

y así escribimos las matrices adecuadas

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{4}{6} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{4}{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los determinantes requeridos:

$$\begin{aligned} |A| &= (-2)(1) - \Big(-\frac{4}{6}\Big)(3) = 0\,, \\ |A_x| &= (1)(3) - (2)(3) = -3\,, \\ |A_y| &= (-2)(2) - \left(-\frac{4}{6}\right)(1) = -\frac{10}{3}\,, \end{aligned}$$

y escribimos las soluciones

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3}{0}\,, \quad ✘ \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-10/3}{0}\,, \quad ✘$$

por tanto, al no poder determinar x y y, entendemos que no existen tales que satisfagan las ecuaciones del sistema y por tanto éste no tiene solución. Es un sistema no consistente.

❑

Ejemplo 14.15 *Mostrar que el sistema*

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= 1\,, \\ 9y + 6x &= 3\,, \end{aligned}$$

es consistente, con una infinidad de soluciones.

El sistema lo reescribimos para facilitar los cálculos posteriores, es decir,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1\,, \\ 6x + 9y &= 3\,, \end{aligned}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_x = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

y calculamos sus respectivos determinantes

$$\begin{aligned} |A| &= (2)(9) - (3)(6) = 0\,, \\ |A_x| &= (1)(9) - (3)(3) = 0\,, \\ |A_y| &= (2)(3) - (1)(6) = 0\,. \end{aligned}$$

Si tratamos de escribir las soluciones obtenemos expresiones no válidas,

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{0}{0} \quad ✘ \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{0}\,. \quad ✘$$

Cuando obtenemos la expresión 0/0 con la regla de Cramer, entendemos que las ecuaciones son dependientes entre sí, una es múltiplo de la otra, lo que provoca la existencia de una infinidad de soluciones.

❑

14.1.9. Ejercicios:

1. Utilizando la regla de Cramer, obtener las soluciones a los sistemas:

   - $\begin{cases} 3x + y = 1\,, \\ -x + y = 3\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 12\,, \\ y - \frac{1}{3}x - 4 = 0\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2x - 13 = y\,, \\ y + 6 = x\,, \end{cases}$
   - $\begin{cases} 3x = 4y\,, \\ 2x - y = 5\,. \end{cases}$

14.2. Sistemas de 3 ecuaciones de primer grado.

Así como una ecuación lineal con dos variables representa gráficamente una recta, resulta que una ecuación lineal con tres variables representa un plano en el espacio, por ejemplo la ecuación $x + 2y + z = 1$ representa el plano en el espacio representado en la figura 14.1. No es la ocasión para

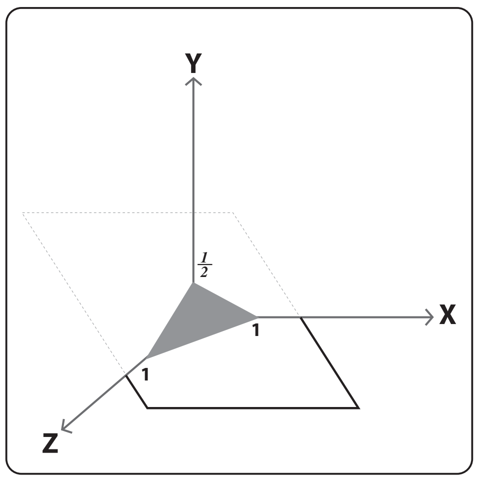


Figura 14.1: *Plano en el espacio.*

estudiar planos, por lo que la solución de sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas no las resolveremos gráficamente, pero basta con saber que al igual que en los sistemas de 2 ecuaciones, podemos encontrar una solución, una infinidad de soluciones o ninguna. Y de igual manera, los sistemas se clasifican en onsistentes o inconsistentes dependiendo si tienen o no solución.

Vamos a resolver un sistema de 3 ecuaciones por todos los métodos desarrollados en la sección anterior. En este caso ya es fácil apreciar cuál método es más adecuado con el fin de reducir cálculos y con ello reducir errores y cansancio. Resolver un sistema por un método no implica sólo aplicar esa metodología, en realidad pueden ocuparse varias al mismo tiempo dependiendo del desarrollo.

Ejemplo 14.16 *Determinar la solución al sistema*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 4\,, \\ x-2y-z &= 1\,, \\ 2x-y-2z &= -1\,. \end{aligned}$$

Antes de comenzar a resolver el sistema, nombremos las ecuaciones para facilitarnos los procedimientos

$$\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & = & 4\,, & & (1) \\ x & - & 2y & - & z & = & 1\,, & & (2) \\ 2x & - & y & - & 2z & = & -1\,, & & (3) \end{array}$$

- **Método Suma y Resta:**
  Identificamos los términos semejantes entre las ecuaciones. Sumaremos adecuadamente para obtener un sistema reducido y lo haremos con el fin de eliminar la variable z, multiplicando previamente por -1 las ecuaciones (1) y (2), así

  $$\begin{aligned} \boxed{\text{-1}}(x+y+z &= 4) \\ \boxed{\text{-1}}(x-2y-z &= 1) \\ 2x-y-2z &= -1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} -x & - & y & - & z & = & -4 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ \hline 0 & + & 0 & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

  De aquí obtenemos la ecuación $-2z = -6$, por lo que deducimos que $z = 3$. sustituimos este valor en el sistema, obteniendo

  $$\begin{aligned} x+y+3 &= 4\,, \\ x-2y-3 &= 1\,, \\ 2x-y-2(3) &= -1\,, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x+y &= 1\,, \\ x-2y &= 4\,, \\ 2x-y &= 5\,. \end{aligned}$$

  Resolver este sistema es como resolver uno de 2 ecuaciones lineales. De hecho lo que tenemos es un sistema sobredeterminado, es decir, contamos con más información de la necesaria, por eso basta con tomar dos ecuaciones de este último sistema para encontrar los valores de x y y. Tomamos las primeras dos ecuaciones y resolvemos por Suma y Resta

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 1\,, \\ \boxed{\text{-1}}(x-2y & = & 4)\,, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & -4 \\ \hline 0 & + & 3y & = & -3 \end{array} \quad \Rightarrow \qquad y=-1.$$

$$\begin{array}{rcl} \boxed{2}(x+y & = & 1)\,, \\ x-2y & = & 4\,, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 4 \\ \hline 3x & + & 0 & = & 6 \end{array} \quad \Rightarrow \qquad x=2.$$

Así, hemos encontrado la solución, que es $(2,-1,3)$.

- **Método sustitución:** Tenemos que despejar una variable de cualquiera de las tres ecuaciones y sustituirla en las otras dos, para después resolver el sistema que queda de 2 ecuaciones con dos incógnitas como ya lo sabemos hacer. Comenzamos despejando x de la ecuación (1)

  $$x = 4 - y - z\,,$$

  el cual lo sustituimos en las ecuaciones (2) y (3)

  $$\begin{array}{rcl} 4-y-z-2y-z & = & 1\,, \\ 2(4-y-z)-y-2z & = & -1\,, \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcll} -3y-2z & = & -3\,, & (3) \\ -3y-4z & = & -9\,. & (4) \end{array}$$

  Aquí tenemos un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas y resolvemos como ya hemos hecho antes. De la primera ecuación despejamos y y la sustituimos en la segunda ecuación,

  $$y = -\frac{2}{3}z + 1 \quad \Rightarrow \quad -3\Big(-\frac{2}{3}z+1\Big) - 4z = -9 \quad \Rightarrow \quad z = 3\,.$$

  Para encontrar el valor de y sustituimos $z = 3$ en (3)

  $$-3y - 2(3) = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -1\,,$$

  finalmente introducimos los valores $z = 3$ y $y = -1$ en (1)

  $$x + (-1) + 3 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2\,.$$

  Por tanto la solución es $(2,-1,3)$.

- **Método Igualación:** Despejamos de las ecuaciones (2) y (3) la variable z y las igualamos como sigue:

$$\begin{aligned} z &= x - 2y - 1\,, \\ z &= x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\,, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x - 2y - 1 = x - \tfrac{y}{2} + \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Despejamos de las ecuaciones (1) y (2) la variable z nuevamente, pero en estas ecuaciones sustituimos el valor obtenido de y, es decir,

$$\begin{aligned} z &= 4 - x - y\,, \\ z &= x - 2y - 1\,, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} z &= 4 - x - (-1)\,, \\ z &= x - 2(-1) - 1\,, \end{aligned}$$

E igualando estas ecuaciones obtenemos $4 - x + 1 = x + 2 - 1$ o equivalentemente $x = 2$. Finalmente, sustituyendo este valor recién obtenido y el obtenido anteriormente ($y = -1$) en la ecuación (1)

$$2 + (-1) + z = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad z = 3\,.$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$.

- **Método Regla de Cramer:** Para resolver el sistema por este método, primero definiremos el determinante en matrices de tamaño 3×3 y las respectivas matrices asociadas para un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Sea el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1\,, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2\,, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3\,, \end{aligned}$$

con las matrices asociadas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\,, \quad A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\,,$$

$$A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}\,, \quad A_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}\,.$$

Definimos el determinante de una matriz de tamaño 3×3 como

$$|B| = \left| \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right| = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - eg)\,.$$

La solución por regla de Cramer para estos sistemas es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}\,, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}\,, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}\,.$$

Para el sistema que tenemos que resolver en particular, escribimos las matrices asociadas al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución al sistema es

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2\,, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-6}{6} = -1\,, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{18}{6} = 3\,.$$

Comprobación: sustituimos la solución en el sistema, llegando a

$$\begin{array}{rcl} 2+(-1)+3 & = & 4 \\ 2-2(-1)-3 & = & 1 \\ 2(2)-(-1)-2(3) & = & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 4 & = & 4\,, \ ✔ \\ 1 & = & 1\,, \ ✔ \\ -1 & = & -1\,. \ ✔ \end{array}$$

❑

Ejercicios:

1. Resuelve y comprueba cada uno de los siguientes sistemas, utilizando el método que mejor convenga:

   - $$\begin{cases} x+y+z = 6\,, \\ 2x-y+3z = 9\,, \\ -x+2y+2z = 9\,. \end{cases}$$
   - $$\begin{cases} 2x-y+z = 10\,, \\ 4x+2y-3z = 10\,, \\ x-3y+2z = 8\,. \end{cases}$$

- $\begin{cases} 3a - 2b + 7c &= 13\,, \\ a + 8b - 6c &= -47\,, \\ 7a - 9b - 9c &= -3\,. \end{cases}$

- $\begin{cases} 2r + 3s + 12t &= 4\,, \\ 4r - 6s + 6t &= 1\,, \\ r + s + t &= 1\,. \end{cases}$

- $\begin{cases} x + z &= 11\,, \\ x - y &= 5\,, \\ z + y &= 6\,. \end{cases}$

- $\begin{cases} 18 + x &= 3y\,, \\ y + z &= x + 4\,, \\ z + x + y - 2 &= 0\,. \end{cases}$

14.2.1. Aplicación de sistemas lineales.

El campo de aplicación de los sistemas lineales es muy grande, y si una ecuación lineal logra modelar situaciones muy sencillas, un sistema de ecuaciones lineales logra modelar situaciones un poquito más complejas.

Nuevamente enfatizamos que es primordial entender primero la situación, para luego identificar los datos, las variables y la pregunta del problema, escribiendo las relaciones (ecuaciones) necesarias. El resto es operativo, es una combinación entre álgebra, alguna metodología y listo. Se da la solución con las unidades adecuadas.

Ejemplo 14.17 *Simón es 7 años menor que su hermana Josefina y hace tres años ella tenía el doble de la edad de él. Determina la edad de cada uno de ellos.*

Identificamos las variables del problema:

- Llamamos por x la edad de Simón.
- Llamamos por y la edad de Josefina.

Escribimos las ecuaciones que relacionan los datos:

- Simón es siete años menor que Josefina, es decir, si le sumamos siete a la edad de Simón será la misma edad de Josefina: $x + 7 = y$.

- Hace tres años Josefina le doblaba la edad a Simón, quiere decir que si a ambos les restamos 3 a su edad, entonces dos veces la edad de Simón es la de Josefina: $2(x-3)=y-3$.

De esta forma, el problema consiste en la solución de un sistema de 2 ecuaciones lineales, dadas como

$$\begin{aligned} x+7 &= y\,, \\ 2(x-3) &= y-3\,. \end{aligned}$$

Resolvemos usando el método de sustitución, aprovechando que la variable y está despejada la primera ecuación. Así, sustituyendo y en la segunda ecuación tenemos

$$2(x-3)=x+7-3 \qquad \Longrightarrow \qquad x=10$$

y con este valor obtenido, evaluamos en la primera ecuación

$$10+7=y \qquad \Longrightarrow \qquad y=17\,.$$

La solución final es que Simón tiene 10 años de edad, mientras que Josefina tiene 17 años.

❏

Ejemplo 14.18 *Un químico tiene dos soluciones de ácido clorhídrico almacenado, una solución al* $50\,\%$ *y otra al* $80\,\%$*, ¿qué cantidad debe usar el químico de cada solución si requiere* $100\,ml$ *de una solución al* $68\,\%$*?*

Identificamos los datos y las variables del problema:

- Hay una solución al $50\,\%$ y la variable x indica la cantidad de ml que toma.

- Hay una solución al $80\,\%$ y la variable y indica la cantidad de ml que toma.

- El total de solución que requiere es $100\,ml$ al $68\,\%$.

Escribimos las ecuaciones que relacionan los datos:

- El químico toma x cantidad de una solución y y de la otra para completar $100\,ml$, es decir,
$$x + y = 100\,.$$
- La solución final debe estar al 68 %, o sea que debe tener $100(68)/100\,ml$ de ácido, que debe lograrse a partir de $50(x)/100\,ml$ de ácido de una solución y $80(y)/100\,ml$ de ácido de la otra. En términos de una ecuación es
$$\frac{50(x)}{100} + \frac{80(y)}{100} = 100\frac{68}{100}\,.$$

Así, ya contamos con un sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} x + y &= 100\,, \\ \frac{x}{2} + \frac{4}{5}y &= 68\,, \end{aligned}$$

el cual solucionamos por el método de sustitución. Despejamos de la primera ecuación x y la sustituimos en la segunda:

$$x = 100 - y \quad \Longrightarrow \quad \frac{100 - y}{2} + \frac{4}{5}y = 68 \quad \Longrightarrow \quad y = 60$$

y ya con este valor obtenemos $x = 40$, sustituyendo $y = 60$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Concluimos que el químico debe mezclar $40\,ml$ de la solución al 50 % y $60\,ml$ de la solución al 80 %.

❑

Ejemplo 14.19 *Un tren sale de la ciudad de México rumbo al Este a* $30\,km/h$*. Dos horas más tarde otro tren sale a* $45\,km/h$ *de la misma ciudad y en la misma dirección sobre una vía paralela. ¿A qué distancia de la ciudad dará alcance el segundo tren al primero?*

Dentro de los datos que se proporcionan están dos velocidades y recordamos que la velocidad se relaciona con el tiempo y la distancia con la ecuación $V = d/t$. La pregunta del problema es la distancia a partir de la ciudad de salida en la que coinciden ambos trenes y esto se logra en un mismo tiempo para los dos. Así, las dos variables que toman el papel de incógnitas son la distancia y el tiempo.

Identificamos las variables del problema y ordenamos los datos que se proporcionan:

- Nombramos por d la distancia recorrida.
- Nombramos por t el tiempo recorrido.
- La velocidad de un tren es de $30\,km/h$.
- Otro tren sale $2\,hrs.$ después a $45\,km/h$.
- De la ecuación $V = d/t$ sabemos que el tiempo de recorrido es $t = d/V$.

Escribimos las relaciones entre las variables, con ayuda de los datos:

- La ecuación que describe el tiempo de recorrido del primer tren que tiene velocidad $30\,km/h$ es
$$t = \frac{d}{30}\,.$$
- La ecuación que describe el tiempo de recorrido del tren que sale 2 horas después es
$$t = \frac{d}{40} + 2\,.$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones que modela el problema es

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{30}\,, \\ t &= \frac{d}{40} + 2\,, \end{aligned}$$

y resolviendo por el método de *igualación* tenemos

$$\frac{d}{30} = \frac{d}{40} + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad d = 24$$

y por lo tanto el tren que sale 2 horas después alcanza al primer tren a los $24\,km$ de recorrido.

Notemos que fue necesario incluir el tiempo como incógnita del problema para escribir el sistema de ecuaciones, más no es necesario encontrar la solución para t.

❑

Ejemplo 14.20 *En una feria campestre, los boletos para adultos se venden en* \$5.50*, para los jóvenes en* \$4.00 *y para los niños* \$1.50*. El día de la apertura, el número de boletos para jóvenes y niños que se vendieron fue* 30 *más que la mitad de los boletos de adultos vendidos. El número de boletos para jóvenes vendidos fue* 5 *más que cuatro veces el número de boletos para niño. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron si la venta total de boletos ascendió a* \$14 970*?*

Identificamos las variables involucradas y los datos proporcionados:

- Nombramos por A el número de boletos para adultos y cada uno cuesta \$5.50.
- Nombramos por J el número de boletos para jóvenes y cada uno cuesta \$4.00.
- Nombramos por N el número de boletos para niños y cada uno cuesta \$1.50.
- La venta total fue de \$14 970.
- Se vendieron 30 boletos más de tipo A que los de tipo J y N juntos.
- Se vendieron 5 boletos más de tipo J que el cuádruple de los boletos para niño.

Ahora escribimos las ecuaciones que contienen las relaciones entre las variables:

- La venta total es de \$14 970, que contiene lo que se vendió de boletos de adultos, $5.50\,A$, lo que se vendió de boletos para jóvenes, $4.00\,J$ y lo que se obtuvo respecto a niños, $1.50\,N$. Entonces

$$5.50\,A + 4.00\,J + 1.50\,N = 14\,970\,.$$

- Se vendieron 30 boletos más de tipo J y del tipo N, que del tipo A; quiere decir que el número de boletos A más 30 es igual a la suma de los otros dos tipos J y N,

$$A + 30 = J + N\,.$$

- Se vendieron 5 boletos más de tipo J que $4\,N$,

$$J = 4\,N + 5\,.$$

Con esto ya tenemos el sistema de ecuaciones que determina la solución al problema y es

$$\begin{aligned} 5.50\,A + 4.00\,J + 1.50\,N &= 14\,970\,, & (1)\\ \frac{1}{2}A + 30 &= J + N\,, & (2)\\ J &= 4\,N + 5\,, & (3) \end{aligned}$$

el cual resolvemos usando el método de sustitución, por la forma que presentan las ecuaciones. La variable J está despejada de la ecuación (3) y la sustituimos en la ecuación (2), obteniendo

$$\frac{1}{2}A + 30 = 4\,N + 5 + N \qquad \Longrightarrow \qquad A = 10\,N - 50$$

y sustituimos este valor obtenido de A en la ecuación (1), junto con el valor J de la ecuación (3),

$$5.50(10\,N - 50) + 4.00(4\,N + 5) + 1.50\,N = 14\,970 \qquad \Longrightarrow \qquad N = 210\,.$$

Teniendo el resultado para N, sustituimos su valor en la ecuación (3) y $J = 4(210) + 5$, es decir, $J = 845$. Finalmente, con este par de valores, en la ecuación (1) obtenemos el valor de A:

$$5.50\,A + 4.00(845) + 1.50(210) = 14\,970 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2050\,.$$

Así, se vendieron 2 050 boletos de adultos, 845 de jóvenes y 210 boletos de niños.

❑

Distancia de un punto a una recta.

Una aplicación directa de los sistemas lineales la desarrollamos en seguida, porque vamos a calcular la distancia de un punto a una recta cualquiera en el plano. Supongamos que el punto tiene por coordenadas $P = (p_1, p_2)$ y la recta tiene por ecuación $Ax + By + C = 0$. Daremos una fórmula que nos permita

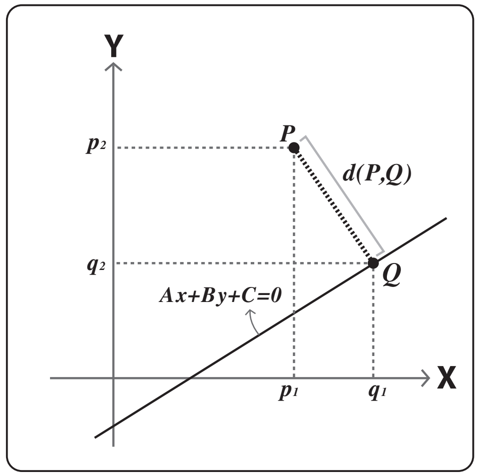


Figura 14.2: *Distancia de un punto a una recta.*

calcular la magnitud de un segmento recto que une el punto P con la recta $Ax+By+C=0$ de manera perpendicular, que es a lo que llamamos *distancia de un punto a una recta*. En la figura 14.2 representamos esta situación. El punto Q representa la intersección de la recta $Ax + By + C = 0$ con la perpendicular que pasa por el P. La distancia que nos interesa determinar es precisamente $d(P,Q)$ y nombrando por (q_1, q_2) las coordenadas del punto Q, $d(P,Q)$ es

$$d(P,Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}\,. \tag{14.1}$$

Lo que se necesita es determinar las coordenadas q_1 y q_2 en términos de los datos conocidos. Como Q es la intersección de dos rectas, entonces podemos encontrar las coordenadas resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Una de las rectas implicadas es $Ax+By+C=0$ (con pendiente $-A/B$) y la otra es una perpendicular a ésta que pasa por P, entonces

$$y - p_2 = \frac{B}{A}(x - p_1)$$

es la ecuación de esta otra recta. Procedemos a escribir el sistema lineal

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,, \tag{14.2}$$

$$y = \frac{B}{A}x - \frac{B}{A}p_1 + p_2\,. \tag{14.3}$$

Usamos el método de igualación para resolver este sistema y por tanto, igualando (14.2) con (14.3) tenemos

$$-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = \frac{B}{A}x - \frac{B}{A}p_1 + p_2$$

y despejando la variable x obtenemos

$$x = \frac{B^2 p_1 - ABp_2 - AC}{A^2 + B^2}\,.$$

sustituimos este valor x en (14.2) para obtener y, así

$$y = -\frac{A}{B}\Big(\frac{B^2 p_1 - ABp_2 - AC}{A^2 + B^2}\Big) - \frac{C}{B}$$

y realizando las operaciones indicadas llegamos a

$$y = \frac{A^2 p_2 - ABp_1 - BC}{A^2 + B^2}\,.$$

De esta forma, hemos obtenido las coordenadas del punto Q, por tanto

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{B^2 p_1 - ABp_2 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 p_2 - ABp_1 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

y con esta información, basta sustituir en (14.1) para obtener la expresión deseada,

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(p_1 - \frac{B^2 p_1 - ABp_2 - AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{A^2 p_2 - ABp_1 - BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

y realizando las operaciones algebraicas indicadas y simplificando adecuadamente llegamos al resultado que estábamos buscando y que enunciamos en seguida.

La distancia d de un punto $P = (p_1, p_2)$ a una recta $Ax + By + C = 0$ es calculada como

$$d = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{14.4}$$

El valor absoluto es para asegurarnos de que d no sea un número negativo, ya que estamos hablando de distancias.

Ejemplo 14.21 *Hallar la distancia de la recta* $4x + 5y + 10 = 0$ *al punto* $(2, -3)$.

Sabemos que (14.4) nos da la distancia de un punto a una recta y para esto sólo necesitamos los datos de la recta en su forma general y las coordanadas del punto. Por esta razón identificamos $A = 4$, $B = 5$, $C = 10$, $p_1 = 2$ y $p_2 = -3$ y procedemos a sustituirlos en la expresión (14.4)

$$d = \frac{4(2) + 5(-3) + 10}{\sqrt{4^2 + 5^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{3}{\sqrt{41}}$$

y por lo tanto, la distancia es $3/\sqrt{41}$.

❑

Ejemplo 14.22 *Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas* $3x - 4y + 8 = 0$ *y* $6x - 8y + 9 = 0$.

La distancia entre rectas paralelas se preserva a lo largo de la longitud entre éstas, por lo que basta tomar la distancia de una paralela a un punto de la otra recta paralela. Así, este ejercicio se traduce en hallar la distancia de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ a un punto de la recta $6x - 8y + 9 = 0$.

El punto que tomamos lo elegimos para facilitar los cálculos, no por otra razón. Supongamos que $x = 0$ en $6x - 8y + 9 = 0$, entonces $y = 9/8$. Así, estamos calculando la distancia del punto $(0, 9/8)$ a la recta $3x - 4y + 8 = 0$, en donde identificamos $p_1 = 0$, $p_2 = 9/8$, $A = 3$, $B = -4$ y $C = 8$, para sustituirlos en (14.4), así

$$d = \frac{3(0) + (-4)\left(\frac{9}{8}\right) + 8}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{7}{10}$$

y con esto ya sabemos cuál es la distancia entre las rectas paralelas, porque es la misma que la distancia de una recta a un un punto que pertenece a la otra recta, entonces $d = 7/10$.

❑

14.2.2. Ejercicios:

1. La suma de dos números es -63. El primer número menos el segundo es -41. Calcula estos números.

2. Un camión de entregas llega al almacén Velázquez con 8 cajas pequeñas y 5 grandes. El cobro total por las cajas, incluyendo el impuesto y los gastos de envío es de $184. El flete de una caja grande cuesta $3.00 más que el de una caja pequeña. ¿Cuál es el costo del flete de cada una de las cajas?

3. La diferencia entre dos números es 11. El doble del más pequeño más tres veces el mayor es 123. ¿Cuáles son los números?

4. La soya contiene un 16 % de proteínas y el maíz un 9 %. ¿Cuántos kilogramos de cada uno de estos ingredientes se debería mezclar para obtener una mezcla de 350 kilogramos con un 12 % de proteínas?

5. Una bebida refrescante tiene 1.5 % de jugo de naranja y otra tiene 5 % de esta sustancia. ¿Cuántos litros de cada una de ellas se debería mezclar para obtener $10\,L$ de bebida refrescante con un 10 % de jugo de naranja?

6. Se hicieron dos inversiones por un total de $15 500. Cierto año estas inversiones produjeron $1 432 en interés simple. Parte de los $15 500 se invirtieron al 9 % y el resto al 10 %. Encuentra la cantidad invertida a cada tipo de interés.

7. Dos aviones viajan aproximándose entre sí después de partir de ciudades que se encuentran a $780\,km$ de distancia, a velocidades de 190 y 200 km/h. La salida fue a la misma hora, ¿en cuántas horas se encontrarán?

8. Una semana, un establecimiento vendió 40 manteles. Los blancos costaban $4.95 y los estampados $7.95. En total las ventas fueron de $282. ¿Cuántos manteles de cada tipo se vendieron?

9. Cuando las bombas A, B y C operan a un mismo tiempo, pueden bombear 3700 litros por hora. Cuando sólo las bombas A y B están

trabajando, se pueden bombear 2200 litros por hora. En cambio, cuando sólo las bombas A y C están en operación, se puede bombear 2400 litros por hora. ¿Cuál es la capacidad de cada bomba?

10. Dos ciudades se encuentran a una distancia de 780 km. De ellas salen dos carros, uno hacia el otro. Si el primer carro sale 2 horas antes que el segundo, se encuentran en 4 horas; pero si el segundo sale 6 horas antes que el primero, entonces se encuentran en 1.5 horas. Determinar la velocidad de ambos carros.

11. Una lancha navega en un río en contra de la corriente recorre 50 km en media hora. Regresa y recorre la misma distancia a favor de la corriente en 20 min. Determinar la velocidad de la lancha y la velocidad de la corriente del río, suponiendo que ambas permanecen constantes.

12. Se desea lanzar al mercado un nuevo tipo de café con un costo de $90 el kilogramo, generado a través de la mezcla de café Uruapan, café Chiapas y café Veracruz. Para experimentar, inicialmente necesitamos hacer 10 kg del nuevo café. Si sabemos que el costo del café Uruapan, Chiapas y Veracruz es de $80, $100 y $120, respectivamente, tomando en cuenta el precio, sabor y aroma deseamos utilizar el triple de café Uruapan que el de Veracruz. ¿Cuántos kilogramos de café se requieren de cada tipo?

13. Una empresa automotriz reporta que el proceso para la producción de automóviles depende de tres departamentos: ensamblado, eléctrico y el de pintura. La empresa reporta que el tiempo estimado para producir un auto es de 30 horas con un costo total de producción de $84 000. Una de las grandes prioridades de la empresa es cuidar los puntos de seguridad por lo que en el ensamblado invierte dos terceras partes del tiempo que invierte en los otros dos departamentos (eléctrico y pintura). Si los costos de producción por hora para cada departamento son $3 000, $4 000 y $1 000 respectivamente, determina el tiempo que emplea cada departamento para la construcción de un automóvil.

14. Un tipo norteño ubica en un mapa de su ciudad natal un segmento del río Bravo y toma nota de que el río pasa en línea recta por una comunidad a 45 km al Norte del centro de su ciudad y 20 km al Este. ¿A qué distancia está su ciudad del río Bravo?

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y tal que la distancia de esta recta al punto sea igual a $2\sqrt{2}$.

16. Dado el triángulo con vértices $A = (-1, 0)$, $B = (2, -2)$ y $C = (4, 3)$, determinar la altura, siendo la base el segmento AB.

Capítulo 15

Desigualdades lineales.

Ya sabemos resolver ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, los cuales vimos que podían tener una solución, ninguna solución o una infinidad. Vimos que gráficamente, resolver este tipo de ecuaciones es encontrar la intersección de rectas. Una desigualdad lineal o inecuación lineal es una expresión lineal que contiene una desigualdad y al menos una variable, por ejemplo:

$$x < 4\,, \quad 4x + 3 < 8\,, \quad 5x + 6 > 4x - 3\,, \quad x + y > 3\,, \quad 3x + 9 < 8y\,,$$

son desigualdades lineales. En este apartado nos enfocaremos a resolver desigualdades lineales con una sola variable, que gráficamente interpretamos como la comparación entre rectas.

> **Una solución de una desigualdad es todo aquel número que la hace verdadera. Al conjunto de todas las soluciones se le llama *conjunto solución*.**

Ejemplifiquemos esta definición. Supongamos que contamos con la desigualdad $5x + 3 > 0$, entonces,

valores para x	sustitución en la desigualdad	se cumple (✔) o no se cumple (✘)	conclusión
0	$5(0) + 3 > 0$	✔	es solución
1	$5(1) + 3 > 0$	✔	es solución
10	$5(10) + 3 > 0$	✔	es solución
-1	$5(-1) + 3 > 0$	✘	no es solución
-10	$5(-10) + 3 > 0$	✘	no es solución

y por tanto decimos que $x = 0$, $x = 1$ y $x = 10$ son soluciones a la desigualdad $5x + 3 > 0$, pero que $x = -1$ y $x = -10$ no son soluciones.

En lo que sigue mostraremos dos formas de hallar todas las soluciones a una desigualdad y con ello dar el conjunto solución, pero antes diremos lo que entendemos por $x > a$, $x \geq a$, $x < a$ y $x \leq a$ (donde a es un número cualquiera) que son las desigualdades más sencillas. Si $x > a$, quiere decir que x puede tomar cualquier valor siempre y cuando sea mayor estrictamente que a, y si $x \geq a$, quiere decir que x puede ser cualquier valor mayor que a e incluso el mismo valor a. De manera análoga decimos que $x < a$ son todos los números x que son menores estrictamente a a y $x \leq a$ son todos los números x menores o iguales al valor a. Gráficamente se vería como en la figura 15.1 En notación de conjuntos, que nos facilitará la escritura posteriormente, es

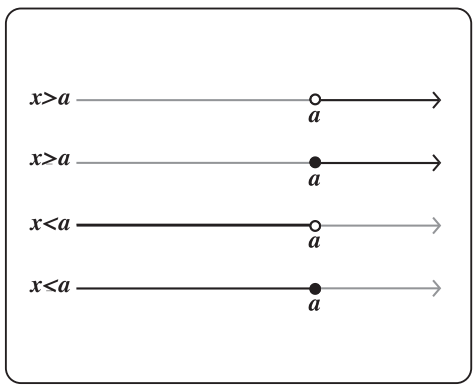


Figura 15.1: *Representación gráfica de desigualdades.*

desigualdad	conjunto	se lee como...
$x > a$	$\{x \mid x > a\}$	todas las x tales que $x > a$.
$x \geq a$	$\{x \mid x \geq a\}$	todas las x tales que $x \geq a$.
$x < a$	$\{x \mid x < a\}$	todas las x tales que $x < a$.
$x \leq a$	$\{x \mid x \leq a\}$	todas las x tales que $x \leq a$.

15.1. Método algebraico.

Resolver desigualdades lineales con una incógnita no es más difícil que resolver el respectivo en ecuaciones. De hecho sólo basta seguir las reglas algebraicas de las desigualdades que vimos al principio y no olvidar que la desigualdad cambia de sentido (de *mayor que* a *menor que* y viceversa) si multiplicamos por un factor negativo toda la desigualdad, en otro caso se queda en el mismo sentido. Al igual que en las ecuaciones, buscaremos despejar la variable realizando operaciones como lo hemos hecho hasta ahora.

Ejemplo 15.1 *Encontrar el conjunto solución para la desigualdad* $x+4>7$.

Sigamos atentamente los pasos algebraicos, buscando despejar x:

$$\begin{array}{cl} x+4>7 & \text{la desigualdad que queremos resolver,} \\ x+4-4>7-4 & \text{sumamos } -4 \text{ a la desigualdad,} \\ x>3 & \text{efectuamos las operaciones.} \end{array}$$

Como ya tenemos despejada x, decimos que el conjunto solución es $x>3$ o $\{x|x>3\}$. Lo que significa esto es que cualquier número más grande que 3 es solución a la desigualdad, en cambio cualquier número menor que 3 e incluso el mismo número 3 no es solución a la desigualdad.

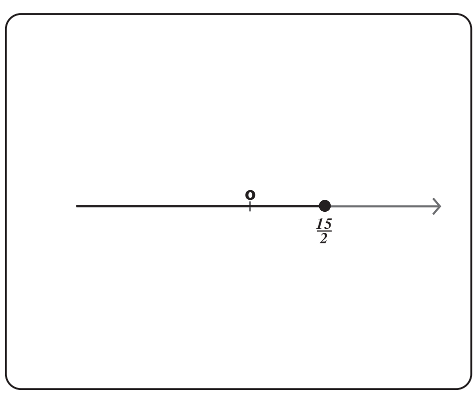
❑

Ejemplo 15.2 *Determinar todas las soluciones para* $5y \leq \frac{3}{2}$.

Sigamos los pasos algebraicos para despejar y:

$$\begin{array}{cl} 5y \leq \frac{3}{2} & \text{es la desigualdad a resolver,} \\ \left(\frac{1}{5}\right)5y \leq \left(\frac{1}{5}\right)\frac{3}{2} & \text{multiplicamos por } \frac{1}{5} \text{ la desigualdad,} \\ y \leq \frac{15}{2} & \text{desarrollamos el álgebra indicada,} \end{array}$$

y por eso, el conjunto solución es $y \leq 15/2$. Gráficamente el conjunto solución se vería como



,

que representa el conjunto $\{y|y \leq 15/2\}$.

❏

Ejemplo 15.3 *Resolver la desigualdad* $16 - 7y \geq 10y - 4$.

Pongamos atención en los siguientes pasos algebraicos, ya que la desigualdad cambia de sentido en algún momento debido a la multiplicación por un factor negativo.

$$\begin{array}{cl}
16 - 7y \geq 10y - 4 & \text{la desigualdad que vamos a resolver,} \\
16 - 7y - 16 \geq 10y - 4 - 16 & \text{sumamos } -16 \text{ a la desigualdad,} \\
-7y \geq 10y - 20 & \text{realizamos las operaciones indicadas,} \\
-7y - 10y \geq 10y - 20 - 10y & \text{sumamos } -10y \text{ a la desigualdad,} \\
-17y \geq -20 & \text{realizamos las operaciones indicadas,} \\
\left(-\frac{1}{17}\right)(-17y) \leq \left(-\frac{1}{17}\right)(-20) & \text{multiplicamos por } -\frac{1}{17} \text{ la desigualdad,} \\
y \leq \frac{20}{17} & \text{realizamos las operaciones indicadas.}
\end{array}$$

El conjunto solución es $\{y|y \leq 20/17\}$.

❏

También podría darse el caso en que una desigualdad no tenga soluciones y por tanto el conjunto solución es vacío. Determinamos está situación si al finalizar el despeje de la variable, la variable desaparece y nos encontramos con un absurdo, algo que no es cierto.

Ejemplo 15.4 *Encontrar el conjunto solución de la desigualdad* $3x - 4 > 5x + 3 - 2x$.

Despejamos paso a paso la variable x y pongamos atención en la conclusión de los pasos.

$$\begin{array}{cl}
3x - 4 > 5x + 3 - 2x & \text{la desigualdad a resolver,} \\
3x - 4 > 3x + 3 & \text{sumamos términos semejantes,} \\
3x - 4 + 4 > 3x + 3 + 4 & \text{sumamos 4 a la desigualdad,} \\
3x > 3x + 7 & \text{efectuamos las operaciones indicadas,} \\
3x - 3x > 3x + 7 - 3x & \text{sumamos } -3x \text{ a la desigualdad,} \\
0 > 7 \quad ✘ & \text{obtenemos una proposición falsa.}
\end{array}$$

Por lo tanto, concluimos que el conjunto solución es vacío, no hay un valor para x de tal suerte que se satisfaga la desigualdad dada.

❑

De igual manera que en las ecuaciones lineales, podríamos encontrarnos el caso extremo en que cualquier valor de x satisface la desigualdad y esto lo determinamos si al finalizar el despeje de la variable llegamos a una sentencia cierta donde la variable no aparece.

Ejemplo 15.5 *Mostrar que el conjunto solución de la desigualdad* $\sqrt{3}x+\pi \geq \frac{3}{\sqrt{3}}x$ *son todos los números reales.*

Realizamos, como de costumbre, los pasos algebraicos necesarios para despejar x y analizamos la conclusión de estos pasos.

$\sqrt{3}x + \pi \geq \frac{3}{\sqrt{3}}x$	es la desigualdad que resolveremos,
$\sqrt{3}x + \pi \geq \sqrt{3}x$	hacemos el cociente indicado,
$\sqrt{3}x + \pi - \sqrt{3}x \geq \sqrt{3}x - \sqrt{3}x$	sumamos $-\sqrt{3}$ a la desigualdad,
$\pi \geq 0$ ✔	obtenemos una proposición verdadera.

Por tanto, el conjunto solución a esta desigualdad son todos los número de la recta numérica, que en forma de conjunto se puede escribir como $\{x|x \in \mathbb{R}\}$. Cualquier número satisface la desigualdad.

❑

15.1.1. Ejercicios:

1. Decidir si 8 es una solución para $5y - 2 > 3y + 8$.

2. ¿Es solución -3 a la desigualdad $6 - y < 9$?

3. Resuelve las siguientes desigualdades:

   - $x + 8 > 3$,
   - $y + 3 < 9$,
   - $a + 9 \leq 12$,
   - $9t < -81$,
   - $-9x \geq -8.1$,
   - $-\frac{3}{4}x \geq -\frac{5}{8}$,
   - $-\frac{5}{6}y \leq -\frac{3}{4}$,
   - $2x + 7 < 19$,
   - $5y + 13 > 28$,
   - $-9x + 3x \geq -24$,
   - $2x - 3 < \frac{13}{4}x + 10 - 1.25x$,
   - $2y - 7 < 5y - 9$,
   - $3x - \frac{1}{8} \leq -\frac{3}{8} + 3x$,
   - $8x - 9 < 3x - 11$,
   - $4(3y - 2) \geq 9(2y + 5)$
   - $4m + 5 \geq 14(m - 2)$.

4. Resolver $\frac{x-2}{3} - \frac{5(x-7)}{4} > \frac{7-x}{2}$.

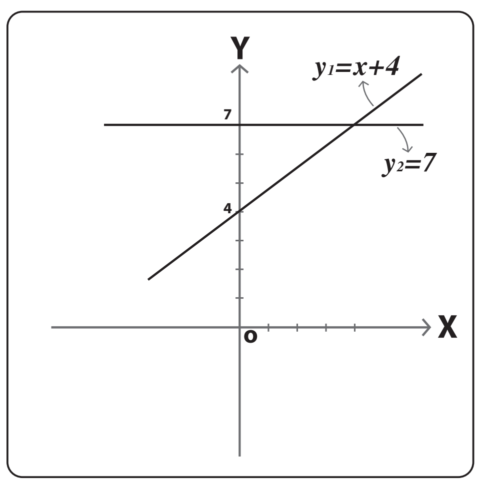
5. ¿Cuál es el conjunto de números para los cuales $\sqrt{4-2x}$ es calculable?

15.2. Método gráfico.

Si los pasos algebraicos nos resultan complicados y confusos, el método gráfico nos salva de todo esto, sólo hay que graficar rectas y listo. Ya sabemos que las expresiones lineales representan rectas, geométricamente hablando, por lo que basta comparar las ordenadas de las rectas que tengamos que dibujar y decidir cuál es el conjunto solución. En lo que sigue resolveremos las mismas desigualdades de las sección anterior para que la comparación entre los métodos resulte sencilla y así comprobar que el método no determina el conjunto solución.

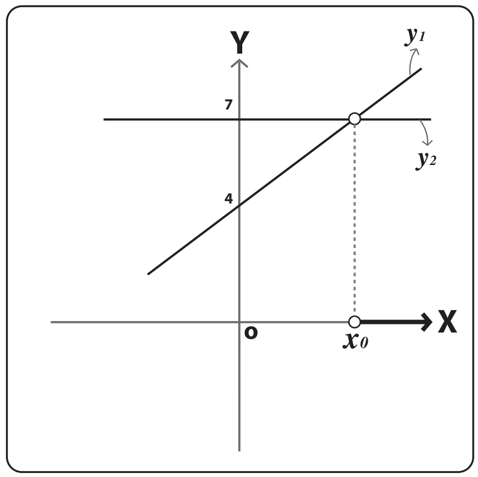
Ejemplo 15.6 *Encontrar el conjunto solución para la desigualdad* $x+4 > 7$.

En la desigualdad estamos comparando la expresión $x + 4$ con la expresión 7 y para compararlos gráficamente los pensaremos como dos expresiones que representan rectas (porque son lineales). Así, dándoles nombres, $y_1 = x + 4$ y $y_2 = 7$ es más claro la interpretación como rectas. Las gráficas se ven así



.

La desigualdad dice que la gráfica y_1 debe tomar valores mayores que y_2, o sea, $y_1 > y_2$, entonces basta indicar los valores que puede tomar x para los cuales la gráfica de y_1 es mayor estrictamente que y_2 en las ordenadas. La gráfica se vería como



.

en la cual señalamos que para valores mayores a x_o la desigualdad se cumple, pero...¿cómo encontramos x_o? Resulta que el valor de x_o corresponde a la intersección de las rectas, entonces terminamos resolviendo la desigualdad como una igualdad para determinar la intersección entre las rectas, es decir, resolvemos

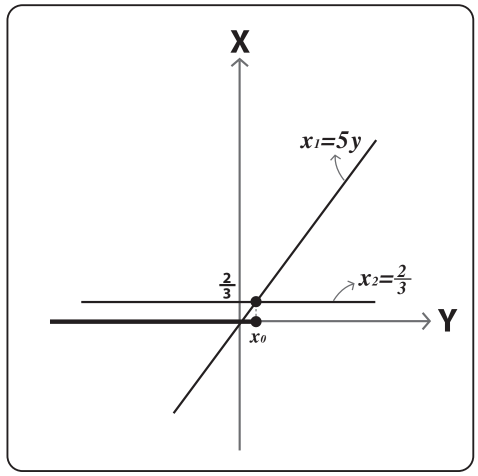
$$x + 4 = 7 \qquad \Longrightarrow \qquad x_o = 3$$

y por lo tanto el conjunto solución es $x > 3$ o $\{x|x > 3\}$..

❑

Ejemplo 15.7 *Determinar todas las soluciones para* $5y \leq \frac{3}{2}$.

La desigualdad compara la expresión $5y$ con la expresión $3/2$, que son un par de rectas. Las nombramos como $x_1 = 5y$ y $x_2 = 3/2$ y las graficamos. Nuevamente nos fijamos para que valores de y la recta x_1 toma valores menores o incluso iguales que la recta x_2 y dibujamos ese conjunto,



.

Ya que tenemos ubicada la intersección de las rectas, nos enfocamos a encontrar el valor de y_o, que sabemos corresponde a la intersección entre las rectas, por lo que ahora tenemos que resolver la desigualdad en el caso de igualdad, es decir

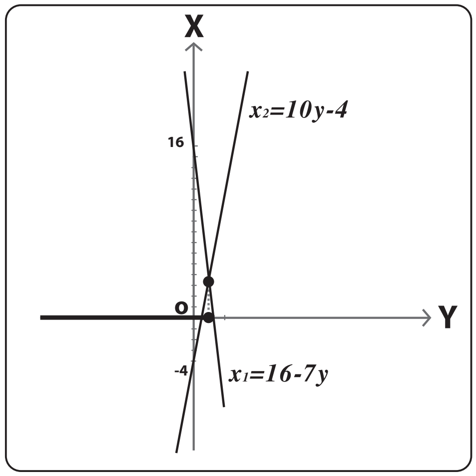
$$5y = \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad y_o = \frac{3}{10}$$

y por eso decimos que el conjunto solución es $\{y|y \leq 3/10\}$.

❑

Ejemplo 15.8 *Resolver la desigualdad* $16 - 7y \geq 10y - 4$.

En este caso, las dos rectas que se están comparando tienen pendiente distinta de cero, pero esto no complica en nada el procedimiento que hemos venido manejando. Vamos a graficar las rectas que intervienen en la desigualdad, $x_1 = 16 - 7y$ y $x_2 = 10y - 4$ y ubicamos la intersección entre las rectas para determinar para qué valores de y la recta $x_1 \geq x_2$,



.

Resulta que para todos los valores iguales o menores que y_o la desigualdad se satisface. Para encontrar el valor y_o basta con resolver la ecuación

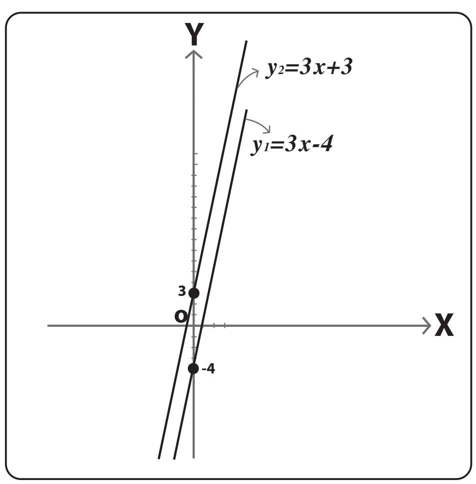
$$16 - 7y = 10y - 4 \qquad \Longrightarrow \qquad y_o = \frac{20}{17}.$$

Entonces decimos que el conjunto solución está determinado por $y \leq 20/17$.

❑

Ejemplo 15.9 *Encontrar el conjunto solución de la desigualdad* $3x - 4 > 5x + 3 - 2x$.

Como hemos hecho en los ejemplos anteriores, vamos a graficar las rectas que determinan la desigualdad, graficamos $y_1 = 3x - 4$ y $y_2 = 3x + 3$ (simplificando la expresión derecha en la desigualdad),



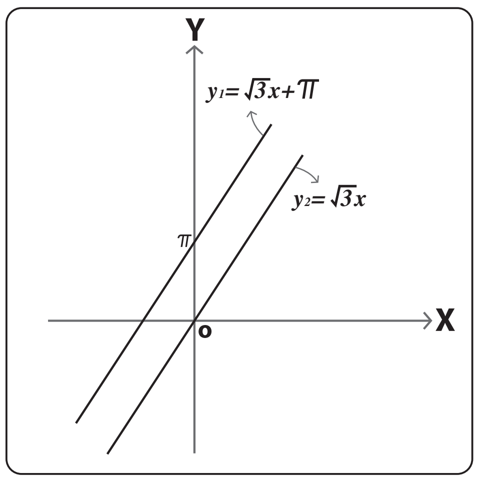
.

Lo que podemos notar en la gráfica y comprobar en la pendiente de las rectas, es que las rectas son paralelas, no hay intersección. La desigualdad indica que la recta y_1 debe estar por encima de la recta y_2, pero esto nunca ocurre. Para ningún valor de x, y_1 es más grande que y_2, por lo que concluimos que el conjunto solución de la desigualdad es vacío.

❑

Ejemplo 15.10 *Mostrar que el conjunto solución de la desigualdad* $\sqrt{3}x + \pi \geq \frac{3}{\sqrt{3}}x$ *son todos los números reales.*

Nuevamente damos nombre a la rectas que intervienen en la desigualdad, $y_1 = \sqrt{3}x + \pi$ y $y_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}x$, y las graficamos,



.

Las rectas que intervienen en la desigualdad son paralelas y por lo tanto no hay intersección. Además, la desigualdad pregunta sobre los valores x para los que la recta y_1 toma valores mayores o iguales que y_2 y resulta que para cualquier valor de x esto sucede, la ordenada y_1 siempre es mayor que la ordenada y_2 para cualquier valor de x. Concluimos que el conjunto solución son todos los números de la recta numérica, es decir, $\{x | x \in \mathbb{R}\}$.

❑

15.2.1. Ejercicios:

1. Usando el método gráfico, resuelve las siguientes desigualdades.

- $2x + 6 > 0$,
- $7x - 2(x - 1) \leq 2(1 - 3x)$,
- $4x - 5 < 2 - 3(1 - 4x)$,
- $\frac{2(x+1)}{3} - 4 \leq 1 + \frac{x-2}{2}$,
- $\frac{x}{2} - x < 4 - \frac{x+1}{7}$,
- $5x - \frac{2x-3}{4} > \frac{x+1}{3} - (6 - x)$.

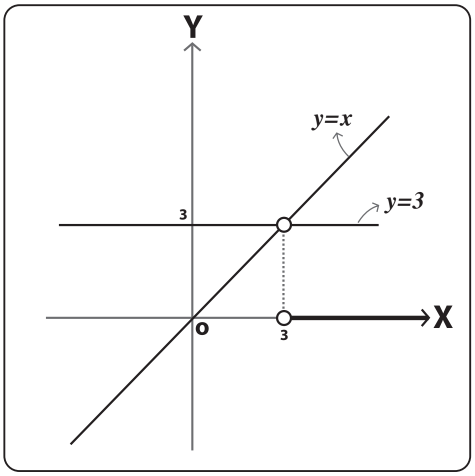
15.3. Desigualdades lineales compuestas.

Una desigualdad compuesta es aquella que contiene más de una desigualdad. Por ejemplo $3 < x < 8$ es una desigualdad compuesta.

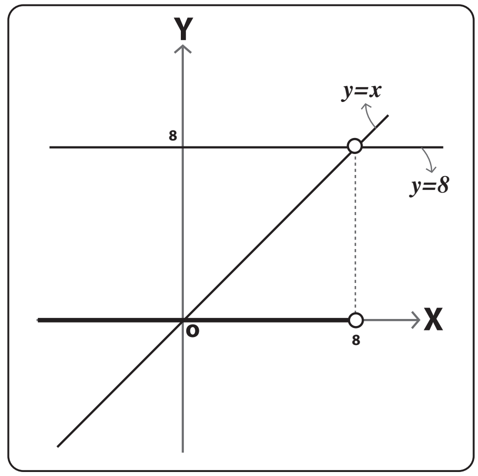
Cuando dos enunciados matemáticos están relacionados con un "y", entonces estamos hablando de una conjunción o intersección de conjuntos ($\cap$); los dos enunciados se tienen que satisfacer simultáneamente. En el caso de las desigualdades, si tenemos por ejemplo $3 < x$ y $x < 8$ como desigualdad compuesta, una solución debe satisfacer $3 < x$ y también debe satisfacer $x < 8$, por eso el conjunto solución para la desigualdad compuesta resulta ser la intersección de los conjuntos solución de cada una de las desigualdades por separado. El conjunto solución para $3 < x$ es $\{x|x > 3\}$ y el conjunto solución para $x < 8$ es $\{x|x < 8\}$ y por lo tanto, el conjunto solución para la desigualdad compuesta es $\{x|x > 3\} \cap \{x|x < 8\}$ que es lo mismo que decir $\{x|3 < x < 8\}$, es decir, solamente los valores de x entre 3 y 8 cumplen ambas condiciones. Gráficamente se vería como en la figura 15.2

Cuando dos enunciados están relacionados con un "o", entonces estamos hablando de una disyunción o unión de conjuntos ($\cup$); basta con que uno de los enunciados se satisfaga. Supongamos que ahora tenemos $3 < x$ o $x < 8$ como una desigualdad compuesta. Sabemos que el conjunto solución para $3 < x$ es $\{x|x > 3\}$ y que el respectivo para $x < 8$ es $\{x|x < 8\}$, entonces el conjunto solución para la desigualdad compuesta sería $\{x|x > 3\} \cup \{x|x < 8\}$, es decir, $\{x|x \in \mathbb{R}\}$ porque x puede ser mayor a 3 y menor que 8 y así, cualquier número en la recta numérica cumple alguna de las dos condiciones. Gráficamente se ve como en la figura 15.3

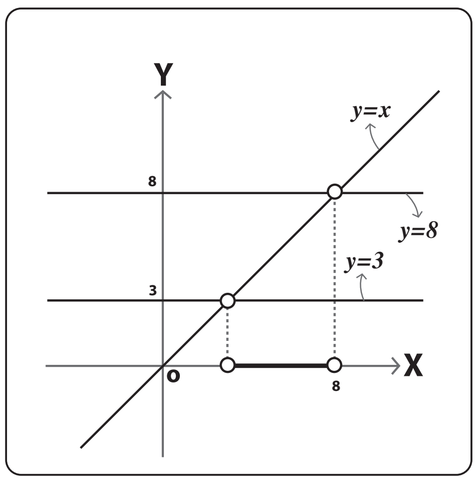
En general, resolver estos sistemas solo requieren de resolver por separado cada una de las desigualdades que componen la desigualdad compuesta y al obtener los conjuntos solución correspondientes sólo basta unirlos o intersectarlos adecuadamente.



(a) Desigualdad $3 < x$



(b) Desigualdad $x < 8$

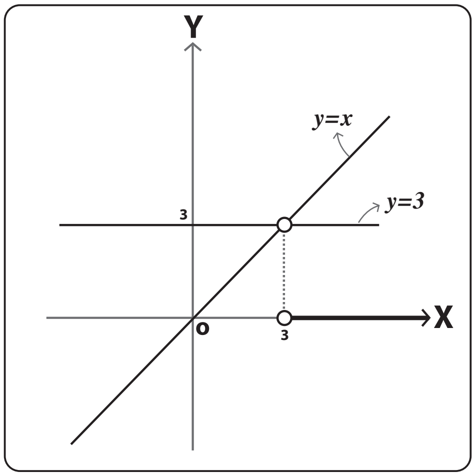


(c) Desigualdad $3 < x$ y $x < 8$

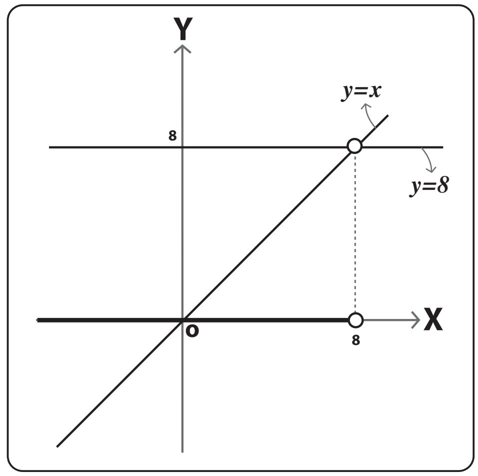
Figura 15.2: *Representación gráfica de la desigualdad* $3 < x$ *y* $x < 8$*.*

Ejemplo 15.11 *Resolver la desigualdad* $-3 < 2x + 5 < 7$*.*

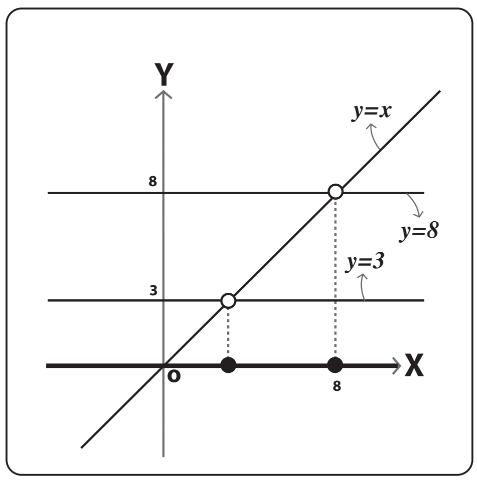
Comenzamos identificando las desigualdades que componen la compuesta. Por un lado tenemos $-3 < 2x+5$ y también tenemos $2x+5 < 7$. Notemos que hemos usado la conjunción “y”, ambas desigualdades se tienen que satisfacer simultáneamente, indicando que los conjuntos solución de las desigualdades por separado los intersectaremos para obtener el conjunto solución pedido.



(a) Desigualdad $3 < 8$



(b) Desigualdad $x < 8$



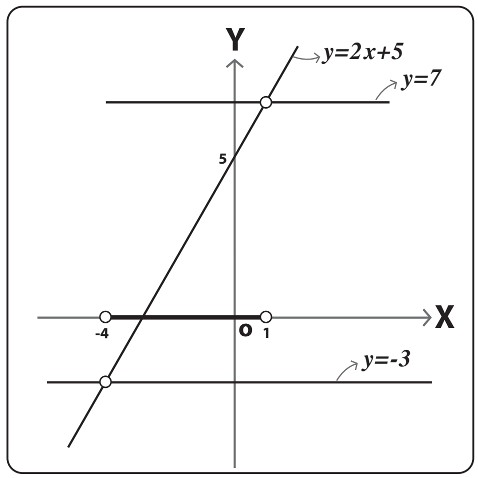
(c) Desigualdad $3 < x$ ó $x < 8$

Figura 15.3: *Representación gráfica de la desigualdad* $3 < x$ *ó* $x < 8$.

- Resolvemos $-3 < 2x + 5$: despejando x tenemos $x > -4$. El conjunto solución es $\{x|x > -4\}$.
- Resolvemos $2x + 5 < 7$: despejando x tenemos $x < 1$. El conjunto solución es $\{x|x < 1\}$.
- Intersectamos ambos conjuntos, $\{x|x > -4\} \cap \{x|x < 1\}$ obteniendo

como resultado $\{x| -4 < x < 1\}$.

Gráficamente lo vemos así

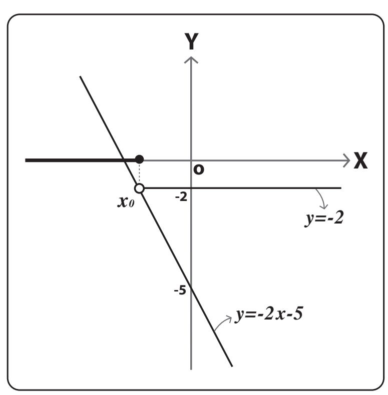


.

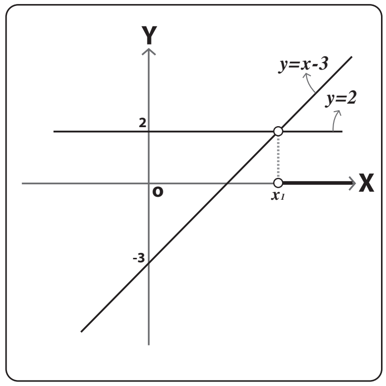
❑

Ejemplo 15.12 *Dar el conjunto solución para la desigualdad compuesta* $-2x - 5 \geq -2$ *ó* $x - 3 > 2$.

Ahora resolveremos vía el método gráfico. Dibujamos por separado cada una de las desigualdades, ubicando los puntos de intersección entre las rectas,

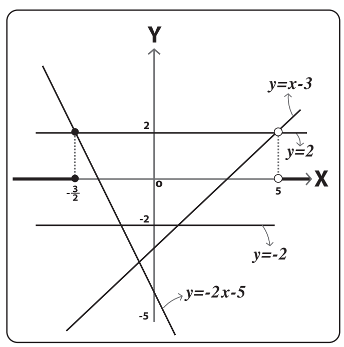


,



.

Para encontrar el valor x_o resolvemos la ecuación $-2x-5=-2$, obteniendo $x_o=-3/2$. Para encontrar el valor de x_1 resolvemos la ecuación $x-3=2$, dando $x_1 = 5$. Ahora hacemos la gráfica con todos los datos que hemos obtenido y dibujamos la unión de los conjuntos solución, porque la conjunción "o" en el enunciado del problema así lo indica,



.

Así, el conjunto solución es $\{x|x \leq -3/2 \,ó\, x > 5\}$.

❑

Las desigualdades compuestas también pudieran tener por conjunto solución un conjunto vacío. Pudiera suceder que ningún número satisface la desigualdad.

Ejemplo 15.13 *Determinar todas las soluciones a la desigualdad* $3x > 4-5x > 5+3x$.

Las desigualdad señala todos los valores de x que cumplan $3x > 4 - 5x$ y $4-5x > 5+3x$, entonces desarrollaremos las dos desigualdades y el conjunto solución será la intersección de los conjuntos solución de cada desigualdad por separado.

Resolvemos primero $3x > 4 - 5x$. Despejamos x y llegamos a $x > 1/2$.

Resolviendo la otra desigualdad, $4-5x > 5+3x$ llegamos a que $x < -1/8$.

Así, los conjuntos solución son $\{x|x > 1/2\}$ y $\{x|x < -1/8\}$, pero la intersección de estos dos conjuntos es vacía. Ningún número cumple con ser mayor que $1/2$ y menor que $-1/8$. Por lo tanto esta desigualdad no tiene solución.

❑

Quizás algunas desigualdades parezcan más complicadas a simple vista, pero si las tratamos un poco más podemos darnos cuenta que son desigualdades lineales y que se resuelven como hasta ahora lo hemos hecho.

Ejemplo 15.14 *¿Cuál es el conjunto solución para* $\frac{x+3}{x-3} > 0$*?*

Esta desigualdad, aunque no lo parezca, es una desigualdad lineal compuesta. Multipliquemos toda la desigualdad por el denominador $(x-3)$, pero debemos tener cuidado porque sabemos que dependiendo del signo del factor $(x - 3)$ la desigualdad se conserva o cambia de sentido. Consideramos los dos casos posibles: $x - 3 > 0$ o $x - 3 < 0$. Entonces escribimos los dos casos:

- Suponiendo que $x - 3 > 0$, entonces

  $$(x-3)\frac{x+3}{x-3} > 0(x-3) \qquad \Longrightarrow \qquad x+3 > 0$$

  que en forma compacta se escribe $x + 3 > 0$ y $x - 3 > 0$ y denotamos por A.

- Suponiendo que $x - 3 < 0$, entonces

  $$(x-3)\frac{x+3}{x-3} < 0(x-3) \qquad \Longrightarrow \qquad x+3 < 0$$

  que en forma compacta se escribe $x + 3 < 0$ y $x - 3 < 0$ y denotamos por B.

Además tengamos presente que la expresión no acepta $x = 3$ porque no está bien definida, es decir, x debe ser mayor o menor a 3. En forma compacta es $x > 3$ o $x < 3$, que denotamos por D.

Esto que acabamos de escribir lo podemos redactar correctamente para que nos quede como una desigualdad descompuesta, teniendo presente que cuando hay casos, estos represetan un "o", entonces:

$$\underbrace{\Big[\underbrace{\big((x+3>0)\ \text{y}\ (x-3>0)\big)}_{A}\quad \text{o}\quad \underbrace{\big((x+3<0)\ \text{y}\ (x-3<0)\big)}_{B}\Big]}_{C}\quad \text{y}\quad \underbrace{\big((x>3)\ \text{o}\ (x<3)\big)}_{D}$$

- Resolvemos A:

$$\begin{array}{cl} x+3>0 \text{ y } x-3>0 & \text{es la desigualdad compuesta a resolver,}\\ x>-3 \text{ y } x>3 & \text{resolvemos cada desigualdad,}\\ \{x|x>-3\}\cap\{x|x>3\} & \text{intersectamos los conjuntos solución,}\\ \{x|x>3\} & \text{es el conjunto solución de } A. \end{array}$$

- Resolvemos B:

$$\begin{array}{cl} x+3<0 \text{ y } x-3<0 & \text{es la desigualdad compuesta a resolver,}\\ x<-3 \text{ y } x<3 & \text{resolvemos cada desigualdad,}\\ \{x|x<-3\}\cap\{x|x<3\} & \text{intersectamos los conjuntos solución,}\\ \{x|x<-3\} & \text{es el conjunto solución de } B. \end{array}$$

- Resolvemos C:

$$\begin{array}{cl} A \text{ o } B & \text{esto es } C,\\ \{x|x>3\}\cup\{x|x<-3\} & \text{unimos los conjuntos solución,}\\ \{x|x>3 \text{ ó } x<-3\} & \text{es el conjunto solución de } C. \end{array}$$

- Resolvemos D:

$$\begin{array}{cl} x>3 \text{ ó } x<3 & \text{es la desigualdad compuesta,}\\ \{x|x<3 \text{ ó } x>3\} & \text{es el conjunto solución.} \end{array}$$

- Resolvemos finalmente la desigualdad compuesta original, que consiste en intersectar C con D. Entonces intersectamos los conjuntos solución respectivos, $\{x|x>3 \text{ ó } x<-3\}\cap\{x|x<3 \text{ ó } x>3\}$, dando como resultado el conjunto solución $\{x|x>3 \text{ ó } x<-3\}$.

❑

15.3.1. Ejercicios:

1. Representa en la recta numérica las siguientes desigualdades:

   a) $1 < x < 6$,

   b) $0 \leq y \leq 3$,

   c) $-9 \leq x < -5$,

   d) $x < -1$ ó $x > 2$,

   e) $t \leq -10$ ó $t \geq -5$.

2. Resuelve las siguientes desigualdades compuestas:

   a) $-2 < x + 2 < 8$,

   b) $3 \leq 5x + 3 \leq 8$,

   c) $-18 \leq -2x - 7 < 0$,

   d) $x + 7 < -2$ ó $x + 7 > 2$,

   e) $2x - 8 \leq -3$ ó $x - 8 \geq 3$,

   f) $4x - 4 < -8$ ó $x - 4 > 12$.

3. ¿Cuál es el conjunto solución de la desigualdad [($x < 5$ ó $x > 9$) y $x < 0$]?

4. Determinar el conjunto solución de las siguientes desigualdades o determinar si es vacío:

   a) $4a - 2 \leq a - 1 \leq 3a + 4$,

   b) $4m - 8 > 6m + 5$ ó $5m - 8 < -2$,

   c) $2x - \frac{3}{4} < -\frac{1}{10}$ ó $2x - \frac{3}{4} > \frac{1}{10}$,

   d) $3x > 4 - 5x > 5 + 3x$.

   e) $-2 \leq 4m + 3 < 7$ y ($m - 5 \leq 4$ ó $3 - m > 12$).

5. Escribir como una desigualdad lineal la desigualdad $\frac{x-2}{x+1} < 0$ y dar todas las soluciones.

6. Resolver $\frac{5}{x-1} \geq 15$.

15.4. Aplicaciones.

Ejemplo 15.15 *En 1967, emitir un anuncio de TV de* 60 *segundos durante el primer Super Bowl costó* \$85 000. *En 1998, se pagaron* \$2.6 *millones por* 60 *segundos de tiempo. Escribir una desigualdad compuesta que represente los diferentes precios que tendrían* 60 *segundos de tiempo publicitario durante los Super Bowl celebrados entre 1967 y 1998.*

Este es de los ejercicios en el que el texto es bastante más largo que la solución. Los datos que nos interesan son los costos por 60 segundos en TV en los dos años que se dan y llamamos por x el costo por el mismo concepto. Así,

$$85\,000 < x < 2\,600\,000$$

es la desigualdad compuesta que representa los precios por 60 segundos de publicidad por TV entre los años 1967 y 1998.

❑

Ejemplo 15.16 *Un boxeador se entrena para su siguiente pelea. El segundo día de entrenamiento corre el doble de lo que corrió el primer día. El tercer día corrió* 6 *millas y la distancia total de los tres días no supera las* 30 *millas, ¿cuál fue la distancia más larga que pudo haber caminado el primer día?*

Identificamos que la distancia corrida es la incógnita del problema y le llamamos x. El segundo día corre el doble que el primer día, es decir, si x es la distancia que corrió el primer día, entonces el segundo día corrió $2x$. El total de distancia corrida es $x + 2x + 6$ y sabemos que esta distancia es menor o igual (porque el enunciado dice "no supera") a 30, entonces escribimos la desigualdad que modela el planteamiento:

$$x + 2x + 6 \leq 6 \qquad \Longrightarrow \qquad 3x \leq 24 \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq 8$$

y concluimos que el primer día pudo haber corrido hasta 8 millas.

❑

15.4.1. Ejercicios:

1. En 1958, el cuadro "Bodegón con manzanas", de Paul Cézanne, fue subastado por $252 00. En 1993, volvió a venderse en subasta por $28.6 millones. Escribe una desigualdad compuesta que represente los diferentes valores que tendría el cuadro entre 1958 y 1993.

2. La temperatura en escala Fahrenheit y Celsius (centígrados) están relacionados por la fórmula $C = (5/9)(F-32)$. ¿A qué temperatura Fahrenheit corresponderá una temperatura en escala centrígrada que se encuentra $40° \leq C \leq 50°$?

3. Las manzanas se mantienen en mejor estado si se almacenan en un intervalo de temperatura de $0°C$ a $5°C$. Un empleado, al tratar de almacenar un embarque de manzanas, encuentra que su refrigerador mide la temperatura en escala Fahrenheit. ¿En qué intervalo debe ajustar el termostato?

4. Un chavo está tomando un curso de historia. Habrá cuatro exámenes. Sus calificaciones en los tres primeros exámenes son 89, 92 y 95. Para obtener una A necesita un total de 360 puntos. ¿Qué puntuación necesita en el último examen para obtener una A?

5. Una empresa que renta autos cobra $300 fijos más $3 por kilómetro recorrido. Otra empresa de la competencia no cobra inicialmente, pero por cada kilómetro recorrido cobra $5. Si pienso tomar carretera para llegar a Puerto Vallarta desde la Ciudad de México, ¿cuál empresa me conviene?

6. Se van a invertir $25 000, una parte al 14 % y otra al 16 %. ¿Cuál es la máxima cantidad que puedes invertir al 14 % para hacer que el pago de intereses al cabo de un año sea al menos de $3600?

7. Según una teoría, el efecto más benéfico de un ejercicio como trotar se obtiene cuando el ritmo pulsatorio se mantiene dentro de cierto intervalo. Los extremos del mismo se obtienen multiplicando el número $(220 - \text{edad})$ por 0.70 y 0.85. Determinar el intervalo del ritmo cardiaco para dos trotadores de 30 y 40 años respectivamente.

8. Una fábrica paga a sus trabajadores \$10 por producto manufacturado, además de un salario fijo de \$3000 a la quincena. Una fábrica nueva ofrece pagar \$15 por artículo manufacturado con un sueldo fijo de \$2000. ¿Cuántos artículos hay que manufacturar por lo menos para que la fábrica nueva sea atractiva para los trabajadores?

9. Al planear un baile escolar, el director encuentra que una banda toca por \$250, más el 50 % del total de venta por entradas. Otra banda lo hace por una cuota fija de \$550. La asistencia será de 300 personas. Para que al colegio le sea más rentable la primera de las bandas, ¿cuál es el máximo precio que puede cobrar el director por entrada?

10. A un carpintero se le puede pagar de dos maneras.

    - Plan A: \$500 más \$9 por hora.
    - Plan B: \$14 por hora.

    La jornada de trabajo del carpintero es de n horas. ¿Para qué horas es mejor para el carpintero el plan A que el plan B?

Capítulo 16

Parábola.

El siguiente lugar geométrico que estudiamos a continuación es la *parábola* y comenzamos definiendo geométricamente esta curva.

> **La *parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija situada en el plano es siempre igual a la distancia a un punto fijo del plano, el cual no pertenece a la recta.**

Esta definición indica, de manera formal, el tipo de puntos que forman una parábola, los cuales nombraremos por P. La recta fija se llama *directriz*, que denotaremos por l, y el punto fijo se le llama *foco*, que nombraremos por F.

Matemáticamente resulta muy sencillo determinar qué puntos sí forman parte de una parábola, porque basta calcular la distancia de un punto P al punto fijo F para compararla con el cálculo de la distancia del punto P a la recta fija l y si los cálculos son iguales, entonces decimos que P forma parte de la parábola. En la figura 16.1 podemos observar esta construcción. A la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz se le conoce como *eje de la parábola*. Denotamos por V el punto conocido como *vértice*, que es el punto de intersección entre la parábola y su *eje*. La intersección del *eje de la parábola* con la directriz lo indicamos por A.

El vértice de una parábola es un punto que pertenece a la parábola misma y como si pertenece a la curva, entonces satisface la condición $d(V,F) = d(V,A)$, que señala que el vértice equidista del foco y de la directriz, o mejor dicho, el V es el punto medio del segmento AF.

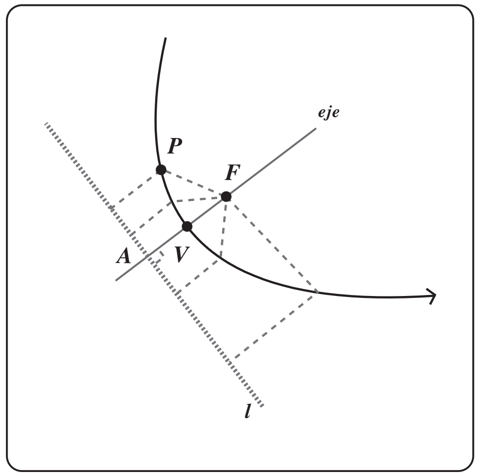


Figura 16.1: *Construcción de una parábola.*

16.1. Ecuación de la parábola.

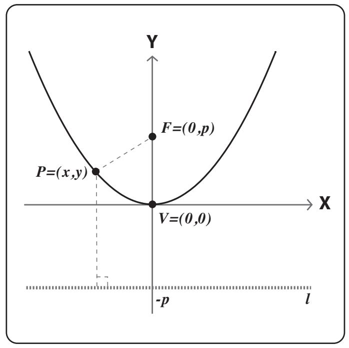
Ya que conocemos la condición para que un punto forme parte de una parábola, deduciremos una expresión algebraica que nos permita representar todos los puntos que dan forma a esta figura, de tal forma que nos sea fácil determinar si un punto en el plano pertenece o no a la parábola. Supongamos que $P = (x, y)$ es un punto sobre una parábola y por la definición antes escrita sabemos que P cumple con

$$d(P, l) = d(P, F)\,. \tag{16.1}$$

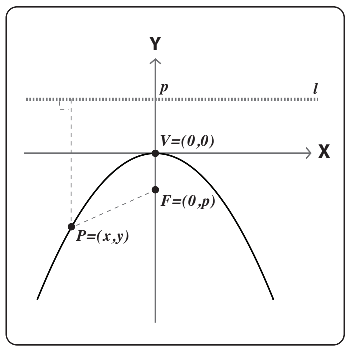
Esta es la condición algebraica que determina el espacio geométrico que corresponde a una parábola.

Comenzamos determinando las ecuaciones de las parábolas más fáciles de determinar, aquellas cuyo *vértice* se ubica en el origen de coordenadas ($V = (0, 0)$) y consideramos dos grandes casos:

- *Eje de la parábola perpendicular al eje X:*



,



.

Sigamos estas gráficas para entender más fácilmente el siguiente procedimiento. En este caso el eje de la parábola coincide con el eje Y, las coordenadas del foco (que se encuentra sobre el eje Y) son $(0, p)$, con $p \neq 0$, y por ende la ecuación de la directriz es $y = -p$, que en su forma general es $y + p = 0$. Con estas especificaciones podemos escribir la condición (16.1) en términos de los datos que tenemos de la parábola, entonces

$$\begin{array}{rcl} d(P,l) = \frac{(0)x+(1)y+p}{\sqrt{0^2+1^2}} & & \text{siguiendo la expresión (14.4),} \\ d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} & & \text{siguiendo la expresión (12.2)}\,. \end{array}$$

Realizando el álgebra indicada, $d(P,l) = y+p$ y $d(P,F) = \sqrt{x^2+(y+p)^2}$. Siguiendo la condición (16.1), solo falta igualar, así

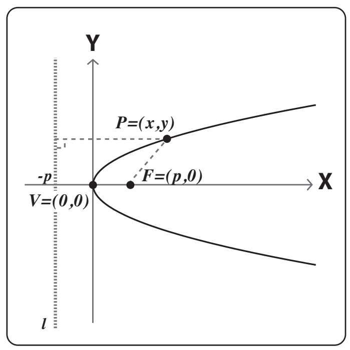
$$\begin{array}{rl} & y + p = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\ \Longrightarrow & (y+p)^2 = x^2 + (y-p)^2 \\ \Longrightarrow & y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2 \\ \Longrightarrow & 2py = x^2 - 2py \\ \Longrightarrow & 4py = x^2 \end{array}$$

y obtenemos finalmente

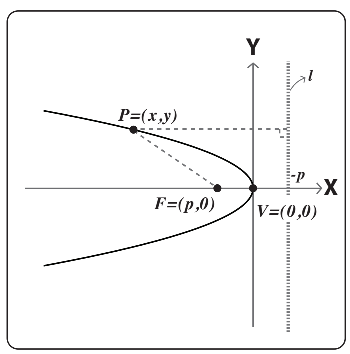
$$y = \frac{x^2}{4p}$$

que determina todos los puntos P que definen una parábola con las características de las que partimos. Notamos que si $p > 0$ entonces estaremos describiendo una parábola que abre hacia el eje Y en sentido positivo y si $p < 0$, entonces la parábola descrita abre hacia el eje Y en sentido negativo, como dibujamos en las anteriores figuras.

- *Eje de la parábola perpendicular al eje Y:*



,



.

En estas figuras se representan las parábolas que queremos describir analíticamente y procedemos de manera análoga al caso anterior. En este caso el foco tiene por coordenadas $(p, 0)$ (se encuentra sobre el eje X) y la directriz tiene por ecuación $x = -p$, que en su forma general es

$x + p = 0$. Y siguiendo el mismo procedimiento anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} d(P,l) &= d(P,F) \\ \frac{(1)x+(0)y+p}{\sqrt{1^2+0^2}} &= \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} \\ x+p &= \sqrt{(x-p)^2+y^2} \\ 4xp &= y^2 \\ x &= \frac{y^2}{4p} \end{aligned}$$

y logramos la expresión que describe una parábola del tipo descrito al inicio del procedimiento. Nuevamente notamos que si $p > 0$ estamos hablando de una parábola que abre hacia el eje X en sentido positivo y si $p < 0$, entonces estamos describiendo una parábola que abre hacia el eje X pero en sentido negativo, como mostramos en las anteriores figuras.

En este par de desarrollos al término p cobra gran importancia porque indica, según su signo, si la parábola abre hacia una dirección o hacia la contraria. De hecho p tiene un nombre en particular, es la *distancia focal.* Aunque el nombre incluye la palabra distancia, en realidad es parte de unas coordenadas (las del punto F) y por ello puede tomar signo positivo o negativo. **Nota:** p señala las unidades, sobre el eje de la parábola, que separa el foco del vértice y la directriz nunca intersecta la curva de la parábola.

Con el par de ecuaciones recién obtenidas podemos escribir los siguientes resultados a manera de resumen.

- **La ecuación de la *parábola* con vértice en el origen y eje de parábola coincidente con el eje Y es**

$$y = \frac{1}{4p}x^2\,. \tag{16.2}$$

- **La ecuación de la *parábola* con vértice en el origen y eje de parábola coincidente con el eje X es**

$$x = \frac{1}{4p}y^2\,. \tag{16.3}$$

De hecho, este par de resultados los podemos generalizar un poco. ¿Cómo serían las ecuaciones de *parábolas* si el vértice se ubicara en las coordenadas (h, k)?

- **La ecuación de la *parábola* con vértice en (h, k) y *eje de la parábola* paralelo al eje Y es**

$$(y - k) = \frac{1}{4p}(x - h)^2 \,. \tag{16.4}$$

- **La ecuación de la *parábola* con vértice en (h, k) y *eje de la parábola* paralelo al eje X es**

$$(x - h) = \frac{1}{4p}(y - k)^2 \,. \tag{16.5}$$

Esta forma de las ecuaciones es la *ordinaria*.

Si el vértice no se encuentra en el origen de coordenadas, las ecuaciones son muy similares porque sólo incluyen una traslación de la figura. En la figura 16.2 representamos esta traslación para una parábola que tiene su vértice en (h, k). En esta figura podemos observar que en el nuevo sistema coordenado dado por el *eje X'* y el *eje Y'*, el origen está en la coordenada (h, k) del sistema coordenado original, el cual está formado por el *eje X* y el *eje Y*. Como en las nuevas coordenadas (x', y') la parábola se encuentra con vértice en el origen (o'), escribimos la ecuación que la describe siguiendo (16.2), entonces

$$y' = \frac{x'^2}{4p} \,.$$

Esta ecuación está escrita en las coordenadas nuevas, pero necesitamos escribir esta ecuación en términos de las coordenadas originales, porque es el sistema coordenado en el que estamos trabajando. Un punto (x, y) del sistema original se escribe en términos de las coordenadas nuevas como $(x' + h, y' + k)$, como está indicado en la figura 16.2. Por lo tanto, $x' = x - h$ y $y' = y - k$ y basta sustituir estas coordenadas en la ecuación anterior para obtener

$$(y - k) = \frac{1}{4p}(x - h)^2 \,,$$

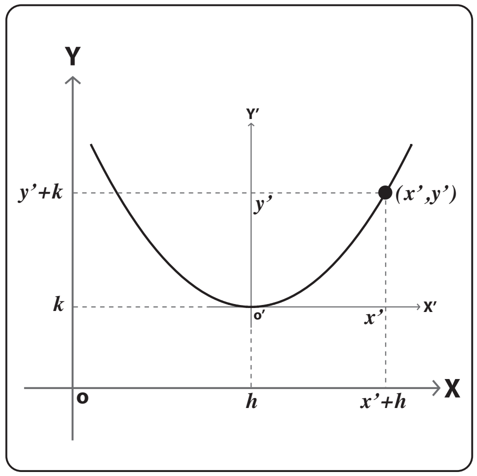


Figura 16.2: *Traslación de parábola.*

que es la ecuación (16.4). De la misma forma se puede mostrar que la ecuación (16.5) es la misma que (16.3) salvo por una traslación de coordenadas.

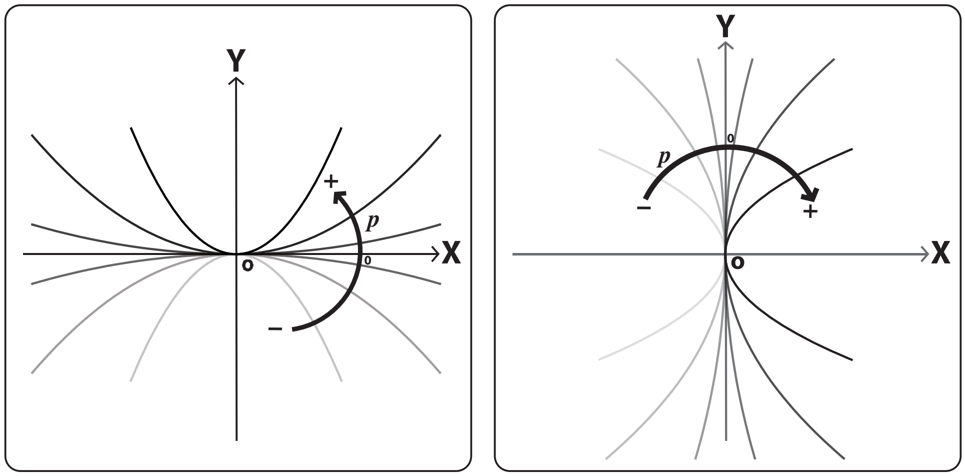
La gráfica de las parábolas no son muy difíciles de realizar, en realidad sólo basta ubicar el vértice y la dirección en la que abre la parábola. Lo "gorda" o lo "delgada" de la parábola lo determina la *distancia focal*, es decir, el término p. De las ecuaciones (16.4) y (16.5) sabemos que si p es muy pequeño la *parábola* se adelgaza, ocurriendo el proceso inverso si p es muy grande. En la figura () se puede observar como cambia la abertura de las parábolas según el crecimiento de p.

Nota: Habrá que tener cuidado con las coordenadas del vértice (h, k), porque el signo negativo que las acompaña en las ecuaciones (16.4) y (16.5) no indican que las coordenadas sean negativas.

El valor p no puede ser cero, si ese fuese el caso querría decir que el foco se encuentra sobre la directriz y por la definición que dimos de la parábola éste caso no describe una figura así.

Ejemplo 16.1 *Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz $y - 5 = 0$. Graficar la parábola.*

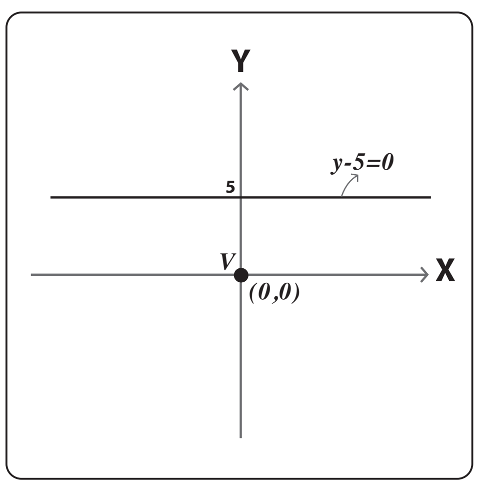
Sabemos que el vértice se halla en el origen, por lo que ocuparemos la ecuación (16.2) o (16.3) y para decidir cual de las dos ocuparemos, la ecuación de la directriz nos ayudará porque la directriz es perpendicular al eje de la



(a) Parábolas con eje paralelo al eje Y (b) Parábolas con eje paralelo al eje X

Figura 16.3: *Parabolas para distintos valores de p.*

parábola. En este caso, la directriz tiene por ecuación $y-5=0$, la cual es una recta paralela al eje X, por tanto el eje de la parábola coincide con el eje Y y con esto decidimos ocupar (16.2). Hasta aquí también sabemos en que dirección sobre el eje Y abre la parábola, porque graficando la directriz y dibujando el vértice nos damos cuenta que la parábola abre en sentido negativo del eje Y,

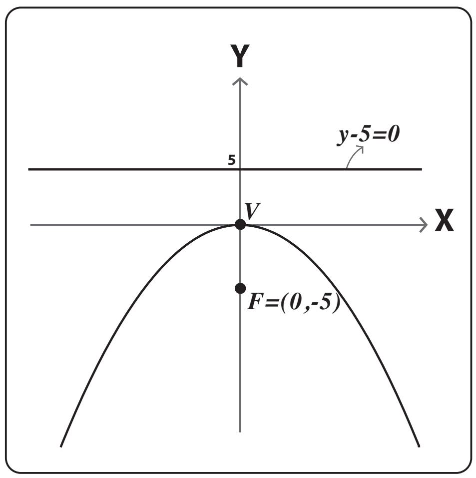


.

La distancia focal p la podemos determinar fácilmente porque sabemos que tiene el mismo valor (en valor absoluto) que la distancia del vértice a la directriz y en este caso la distancia es 5. Tomando en cuenta que la parábola abre en sentido negativo del eje Y, decidimos que $p = -5$ y con esto ya podemos escribir la ecuación

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{4(-5)}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{20}x^2$$

y completando la figura anterior obtenemos la gráfica respectiva



.

❑

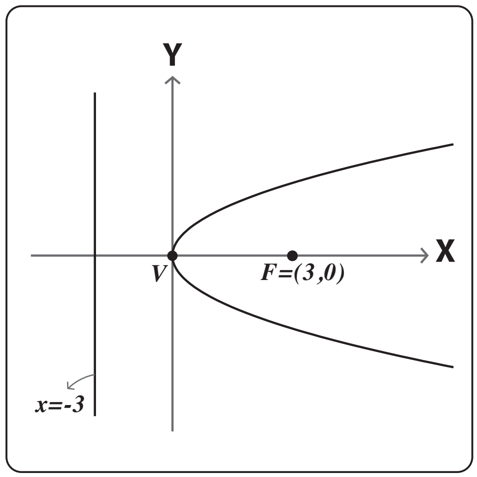
Ejemplo 16.2 *Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y graficar la parábola* $y^2 = 12x$.

A priori no sabemos si el vértice está en el origen, por lo que tomaremos como modelo la ecuación (16.5) para obtener los datos que nos piden. Como el término y está elevado al cuadrado, sabemos que la parábola abre hacia el eje X. Ahora reescribimos la ecuación de la parábola en la forma ordinaria, para identificar fácilmente las coordenadas de V y F,

$$y^2 = 12x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{12}y^2 = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{12}(y-0)^2 = (x-0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(4)(3)}(y-0)^2 = (x-0)$$

en la cual identificamos que las coordenadas del vértice son $(0,0)$ y la distancia focal $p = 3$. Como p tiene signo positivo, la parábola que dibujaremos abrirá hacia el eje X positivo. Sobre el eje de la parábola (que coincide con el eje X) se encuentra el foco, que dista del vértice en 3 unidades hacia donde abre la parábola, por tanto $F = (3,0)$. La directriz es una recta paralela al eje Y que dista del vértice también en 3 unidades en sentido contrario del foco, por tanto la ecuación de la directriz es $x = -3$. La gráfica resulta ser



.

❑

A diferencia de las rectas que sólo necesitan dos datos para graficarse o determinar su ecuación, la parábola requiere tres datos por lo menos. Pudieran ser tres puntos o pudieran ser datos como la distancia focal, la directriz y el foco o alguna combinación entre estos.

Ejemplo 16.3 *Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X. Además pasa por el punto* $(-2,4)$.

El vértice de la parábola está ubicado en el origen y su eje es el eje X, por eso seleccionamos la ecuación (16.3) para determinar la ecuación respectiva. Nos faltaría determinar p y eso lo haremos sabiendo que pasa por el punto $(-2,4)$, porque al ser un punto que pertenece a la parábola quiere decir que este punto satisface la ecuación. sustituimos $(-2,4)$ en la ecuación seleccionada,

$$x = \frac{1}{4p}y^2 \quad \Longrightarrow \quad -2 = \frac{1}{4p}(4)^2 \quad \Longrightarrow \quad p = -2\,.$$

La distancia focal resulta ser 2 con signo negativo, por lo tanto la ecuación que describe esta parábola es

$$x = -\frac{1}{8}y^2\,.$$

❏

Las expresiones (16.4) y (16.5), la forma ordinaria de la ecuación de la parábola, son muy cómodas en el sentido de que permiten distinguir directamente los elementos que definen una parábola como el vértice, la distancia focal y el sentido en el que abre la curva, pero no siempre se cuenta con esa información a la mano. Realizando las operaciones algebraicas indicadas en (16.4) y en (16.5) tenemos las siguientes expresiones

$$(y-k) = \frac{1}{4p}(x-h)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (y-k) = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + \frac{h^2}{4p}\,,$$

$$(x-h) = \frac{1}{4p}(y-k)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x-h) = \frac{1}{4p}y^2 - \frac{k}{2p}y + \frac{k^2}{4p}\,,$$

y pasando todos los términos de un lado de la igualdad llegamos a

$$0 = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + \frac{h^2}{4p} - y + k \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x - y + \frac{h^2}{4p} + k\,,$$

$$0 = \frac{1}{4p}y^2 - \frac{k}{2p}y + \frac{k^2}{4p} - x + h \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \frac{1}{4p}y^2 - \frac{k}{2p}y - x + \frac{k^2}{4p} + h\,,$$

que es otra forma de la ecuación de la parábola.

- **La ecuación general de una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y es**

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (16.6)$$

- **La ecuación general de una parábola cuyo eje es paralelo al eje X es**

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (16.7)$$

A partir de los desarrollos anteriores sabemos que para una parábola con eje paralelo al eje Y, los coeficientes de la ecuación en forma general están dados como $A = 1/4p$, $D = -h/2p$, $E = -1$ y $F = k + h^2/4p$ y para una parábola con eje paralelo al eje X, los coeficientes de la ecuación en forma general están dados por $B = 1/4p$, $D = -1$, $E = -k/2p$ y $F = h + k^2/4p$.

La razón por lo que esta forma de las ecuaciones se denomina como general lo entenderemos si hacemos $A = 0$ o $B = 0$ en alguna de las ecuaciones, ¿qué tipo de ecuación se obtiene? Pues resulta la ecuación $Dx + Ey + F = 0$ que, comparandola con la expresión (13.6), concluimos que es una recta. Quiere decir que la ecuación general contiene todas las ecuaciones de las rectas y de las parábolas.

También es posible, dada la ecuación de una parábola en su forma general, obtener los datos como el vértice, foco, etc.

Ejemplo 16.4 *Hallar las coordenadas del vértice y del foco, además de la ecuación de la directriz de la parábola descrita por la ecuación* $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

Notamos que la ecuación de la parábola que nos dan está en la forma general. Lo que tenemos que hacer es reescribirla para llevarla a la forma ordinaria y para esto nos fijamos que la ecuación que nos dan $4y^2 - 48x - 20y = 71$ tiene la variable y elevada al cuadrado, por tanto buscaremos que esta ecuación tome la forma (16.5).

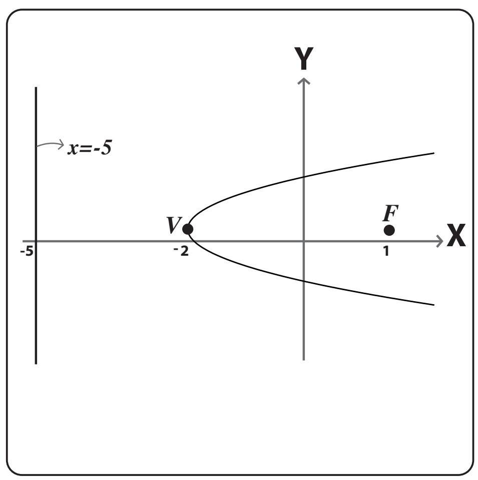
Realizamos cuidadosamente los siguientes pasos algebraicos:

$$
\begin{array}{cl}
4y^2 - 48x - 20y = 71 & \text{la ecuación dada,} \\
4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0 & \text{dejamos cero de un lado,} \\
y^2 - 12x - 5y - \frac{71}{4} = 0 & \text{multiplicamos por } 1/4, \\
y^2 - 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 12x - \frac{71}{4} = 0 & \text{completamos el cuadrado,} \\
\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 12x - \frac{71}{4} = 0 & \text{escribimos el binomio al cuadrado,} \\
\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24 & \text{despejamos el binomio al cuadrado,} \\
\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2) & \text{factorizamos del lado derecho,} \\
\frac{1}{12}\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (x + 2) & \text{despejamos el binomio lineal,} \\
\frac{1}{4(3)}\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (x + 2) & \text{factorizamos adecuadamente 12.}
\end{array}
$$

Entonces,

$$\frac{1}{4(3)}\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=(x-(-2))$$

es la forma ordinaria de la ecuación $4y^2-48x-20y=71$. De la forma ordinaria determinamos que el vértice tiene por coordenadas $V=(-2,5/2)$. La variable y al estar al cuadrado nos indica que el eje de la parábola es paralelo al eje X y abre hacia el sentido positivo del eje X porque la distancia focal es 3 con signo positivo. Las coordenadas del foco son $F=(1,5/2)$ porque está a 3 unidades distante del vértice en sentido positivo del eje X y la ecuación de la directriz es $x=-5$ porque es una recta vertical a 3 unidades, en sentido negativo del eje X, respecto del vértice. La gráfica que le corresponde es



.

❑

Si solo conociéramos tres puntos por donde pasa una parábola, también es posible determinar su ecuación gracias a la forma general de ésta.

Ejemplo 16.5 *Escribir la ecuación de la parábola que pasa por los puntos* $(0,0)$, $(8,-4)$ *y* $(3,1)$ *y cuyo eje es paralelo al eje X.*

Los puntos que nos dan pertenecen a la misma parábola, por tanto los tres puntos deben de satisfacer la ecuación correspondiente. Como la parábola tiene por eje una recta paralela al eje X, entonces consideramos la forma general (16.7). Antes de sustituir los puntos en esta ecuación, dividimos por el coeficiente B, para tener

$$y^2 + \frac{D}{B}y + \frac{E}{B}x + \frac{F}{B} = 0$$

lo cual es posible porque $B \neq 0$, de lo contrario estaríamos trabajando en la ecuación de una recta. Lo que necesitamos es encontrar el valor de cada uno de los coeficientes (que son cuatro) para determinar perfectamente la ecuación que se requiere. Renombramos los coeficientes de la siguiente manera: $a = D/B$, $b = E/B$ y $c = F/B$, entonces la ecuación anterior queda

$$y^2 + ay + bx + c = 0$$

y por lo tanto sólo basta encontrar tres coeficientes. Esta es la razón por la cual dividimos por B la ecuación anterior.

Al sustituir cada uno de los puntos por los que pasa la parábola generamos un sistema lineal de ecuaciones, donde las incógnitas son los coeficientes que necesitamos determinar, es decir,

$$\begin{aligned} c &= 0 \quad \text{ecuación obtenida al sustituir } (0,0), \\ 16 - 4a + 8b + c &= 0 \quad \text{ecuación obtenida al sustituir } (8,-4), \\ 1 + a + 3b + c &= 0 \quad \text{ecuación obtenida al sustituir } (3,1). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos un sistema de tres ecuaciones y aprovechando que en la primera tenemos $c = 0$, sustituimos en las otras dos este valor

$$\begin{aligned} 16 - 4a + 8x &= 0 \\ 1 + a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

y resulta un sistema de dos ecuaciones. Despejamos de la segunda ecuación la incógnita a (nos da $a = -1 - 3b$) y la sustituimos en la primera, obteniendo

$$16 - 4(-1 - 3b) + 8b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad b = -1\,.$$

sustituimos el valor obtenido para b en la segunda ecuación para obtener que $a = -1 - 3(-1) = 2$. Así, la ecuación de la parábola en forma general es $y^2 + 2y - x = 0$.

Si quisiéramos la forma ordinaria, sólo tenemos que manipular algebraicamente de manera adecuada como sigue:

$$y^2 + 2y - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 + 2y + 1 - 1 - x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (y+1)^2 = x+1 \qquad \Rightarrow \qquad (y+1)^2 = \frac{4}{4(1)}(x+1)\,,$$

por lo tanto, la ecuación de esta parábola en su forma ordinaria es

$$(y+1)^2 = \frac{1}{4\left(\frac{1}{4}\right)}(x+1)\,,$$

con $V = (-1,-1)$ y $p = 1/4$.

❏

16.1.1. Ejercicios:

1. Hallar las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

   a) $y^2 = -6x$,

   b) $x^2 + 8y = 0$,

   c) $(x+3) + (y-2)^2 = 0$,

   d) $(x-1)^2 + 8(y+2) = 0$,

   e) $y^2 - 4y - 4x = 0$,

   f) $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

2. Graficar la parábola correspondiente a los datos que se dan:

   a) $y^2 + x + y = 0$,

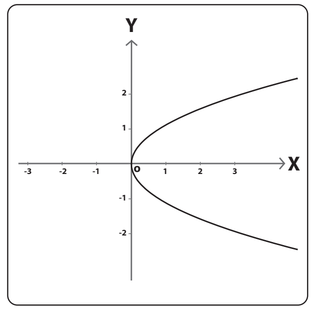
   b) $y^2 - 4x - 4 = 0$,

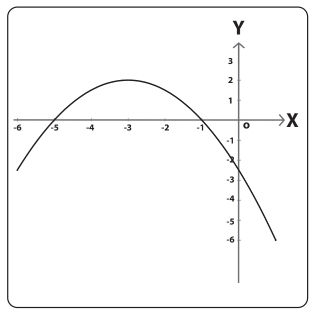
   c) $V = (3,2)$, $F = (1,2)$,

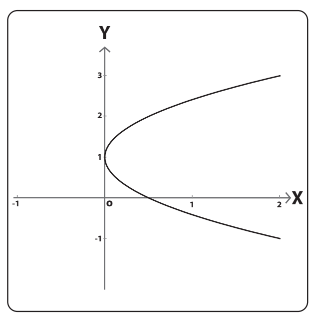
   d) $F = (2,2)$, directriz $x = -2$,

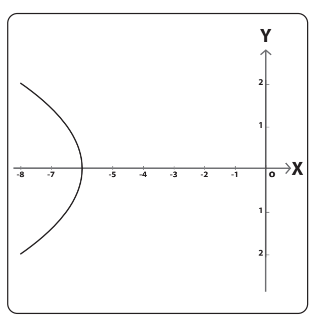
   e) $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 8x + 6)$.

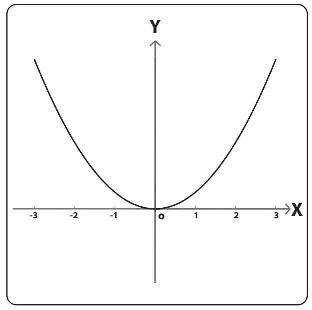
3. Indicar la correspondencia entre las gráficas y las ecuaciones.

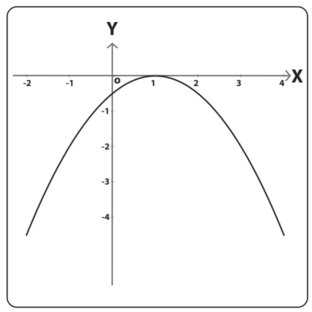

Y
2
1
-1
-2
X
-3
-2
-1
O
1
2
3


Y
3
2
1
X
-6
-5
-4
-3
-2
-1
O
-1
-2
-3
-4
-5
-6


Y
3
2
1
X
-1
O
1
2
-1


Y
2
1
X
-8
-7
-5
-4
-3
-2
-1
O
1
2





a) $x = -\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2} - 3$,

b) $x^2 = 8y$,

c) $x - \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2} = 0$,

d) $(x+3)^2 = -2(y-2)$,

e) $y - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$,

f) $y^2 = 4x$.

4. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

5. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

6. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$ respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

7. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$ y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola.

8. Hallar la ecuación de la parábola con $V = (4, -1)$, la ecuación de su eje dada por $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

9. Hallar la ecuación de una parábola que pasa por los puntos $(3/2, -1)$, $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

10. Muestra que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, las coordenadas de su foco son $(h+p, k)$ y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

11. Muestra que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y-k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k+p)$ y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

12. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre igual a su distancia con el punto $(1, 1)$.

13. Escribe una ecuación en forma ordinaria para la parábola con vértice en $(-3, 1)$ que abre a) hacia el eje X en sentido positivo, b) hacia el eje X en sentido negativo, c) hacia el eje Y en sentido positivo y d) hacia el eje Y en sentido negativo.

14. Escribir en la forma ordinaria la ecuación $y = ax^2 + c$, indicando las coordenadas del vértice y del foco.

15. Escribir en la forma ordinaria las ecuaciones $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $By^2 + Dx + Ey + F = 0$ y determinar las coordenadas del foco.

16.2. Aplicaciones.

Las aplicaciones de la parábola son muchas, tanto que se encuentra presente en las situaciones cotidianas como el aprovechamiento de sus propiedades en la manufactura de objetos. Una propiedad básica de las parábolas es que la luz que incide de manera paralela al eje de la parábola se refleja sobre la parábola de tal forma que todos los rayos coinciden en el foco (véase la figura (16.4), lo cual se aplica para la construcción de telescopios, antenas, faros, etc. Otra aplicación se da en el movimiento entre dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente en el espacio, como el movimiento de cometas.

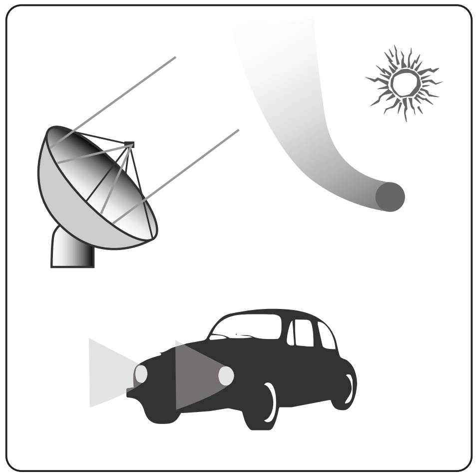
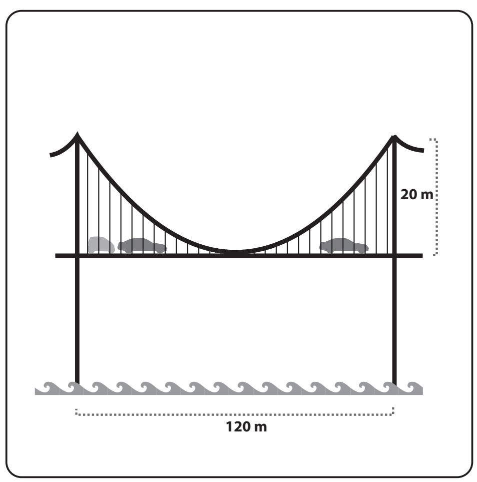


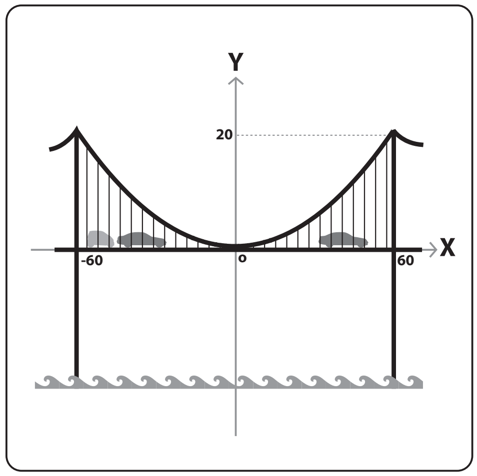
Figura 16.4: *Aplicaciones de la parábola.*

Ejemplo 16.6 *El cable de un puente colgante está suspendido (formando una parábola) de dos torres a* $120\,m$ *una de la otra y a* $20\,m$ *de altura sobre la autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre ambas torres. Hallar la ecuación para la forma parabólica de cada cable,*



.

Se menciona que el cable tiene forma parabólica, por lo que satisface una ecuación en particular. En situaciones como esta, aunque parezca más complejo, en realidad es más sencillo que lo que hemos resuelto hasta ahora porque tenemos la libertad de acomodar el sistema coordenado como más nos convenga. Los datos que nos dan no están referidos a un sistema coordenado en particular, por lo que elegimos que el vértice de la parábola que dibuja el cable se encuentre en el centro (el caso más sencillo ¿no?). Esto se vería así



,

donde hemos localizado la distancia de las torres respecto del eje Y y la altura de las torres respecto de la autopista. Como hemos colocado el origen en el vértice de la parábola con el eje Y coincidiendo con el eje de la parábola, seleccionamos la ecuación (16.2) para modelar la forma del cable, es decir

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \,,$$

en la que nos falta determinar la distancia focal p. Conocemos dos puntos por donde pasa la parábola que dibuja el cable (distinto al origen), que son los extremos superiores de las torres $(60, 20)$ y $(-60, 20)$; hacemos uso de este hecho porque satisfacen la ecuación, por consiguiente, sustituyendo $(60, 20)$ en la ecuación tenemos que

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 20 = \frac{1}{4p}(60)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad p = 45\,.$$

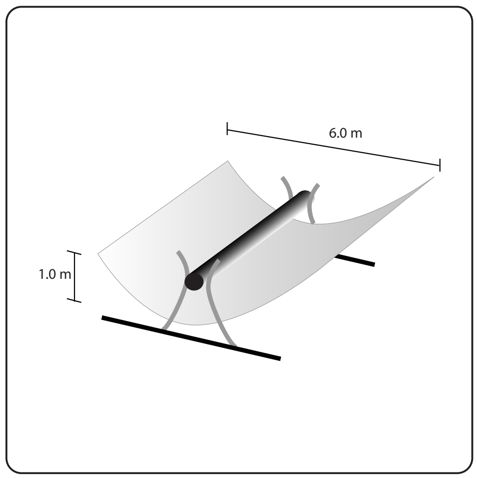
Con la determinación de p, concluimos que la ecuación de la parábola que dibuja el cable es

$$yy = \frac{1}{180}x^2\,.$$

❑

16.2.1. Ejercicios:

1. Un recolector o panel de energía solar para calentar agua se construye con una hoja de acero inoxidable en forma de una parábola. El agua fluye a través de un tubo situado en el foco de la parábola. ¿A qué distancia del vértice se encuentra del tubo?

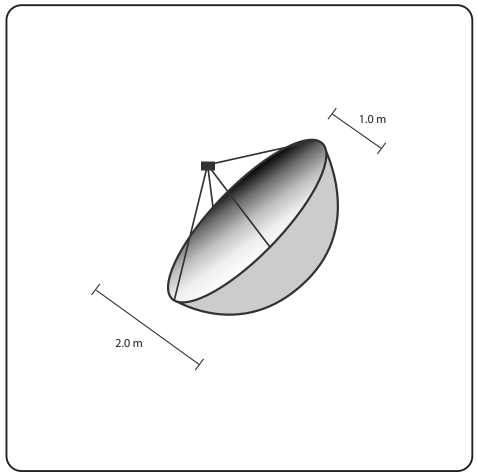


.

2. Un cohete sigue una trayectoria dada por la función cuadrática $y = 1.2x - 0.010x^2$, donde x es la distancia horizontal en metros y y es la distancia vertical en metros. Dibujar la gráfica de la trayectoria mostrando la altura máxima que alcanza el cohete y los puntos donde $y = 0$.

3. El cable de retención de un puente colgante tiene la forma de un arco de parábola. Las dos columnas que lo soportan miden $50\,m$ de altura y están a $400\,m$ una de la otra; quedando el punto más bajo del cable a $10\,m$ de altura sobre la calzada del puente. Tomando como eje X a la horizontal que define la calzada y como eje Y al eje de simetría de la parábola, determinar la ecuación de ésta y calcule la altura a que se encuentra el punto de la parábola que está a $60\,m$ de su eje de simetría.

4. Se construye un plato receptor de sonido con la forma de un paraboliode cuyo foco se encuentra a $2\,m$ pulgadas del vértice. Si la profundidad del plato es de $1\,m$, determine el diámetro del plato.



.

5. Hallar la altura de un ladrillo colocado en una construcción que tiene forma de arco parabólico. Este ladrillo está situado a una distancia de $8\,m$ del centro del arco parabólico. El arco tiene $18\,m$ de altura y $24\,m$ de base.

16.3. Ecuación cuadrática.

Sabemos hasta el momento determinar la solución a ecuaciones lineales, $bx + c = 0$, que representan la intersección de una recta con el eje X. Ahora escribimos una ecuación un poquito más general, agregamos un término cuadrático

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{16.8}$$

siendo a, b y c constantes, donde $a \neq 0$. Una ecuación se dice *cuadrática* si tiene la forma (16.8) y los caminos para encontrar sus soluciones pueden ser varios. En los procedimientos que desarrollamos a continuación hacemos una referencia gráfica para entender la naturaleza de las soluciones, ya que si observamos cuidadosamente, las ecuaciones (16.6) y (16.7), que representan parábolas, tienen la forma de una ecuación cuadrática si hacemos $y = 0$ y $x = 0$ respectivamente. Por tanto, cada ecuación cuadrática representa la intersección de una parábola con alguno de los ejes coordenados.

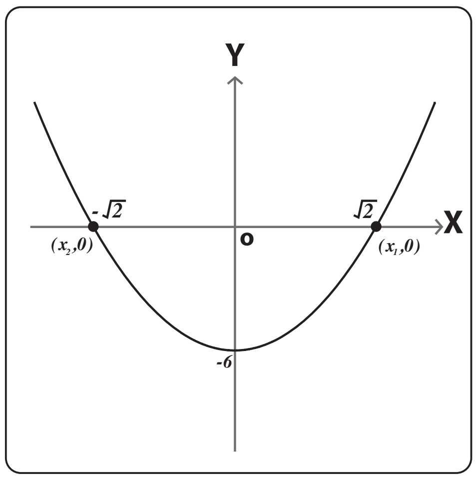
Ejemplo 16.7 *Resolver la ecuación cuadrática* $3x^2 - 6 = 0$.

Despejamos la incógnita x de la ecuación como sigue

$$\begin{array}{cl} 3x^2 - 6 = 0 & \text{la ecuación a resolver,} \\ 3x^2 = 6 & \text{sumamos 6 a la ecuación,} \\ x^2 = 2 & \text{multiplicamos por } 1/3 \text{ la ecuación,} \\ x = \pm\sqrt{2} & \text{elevamos a la potencia } 1/2 \text{ la ecuación.} \end{array}$$

Así, las soluciones a la ecuación cuadrática son $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

Graficamente las soluciones corresponden a la intersección de un parábola con el eje X. Hacemos la gráfica de $y = 3x^2 - 6$ y ubicamos los puntos donde $y = 0$, es decir, localizamos las intersecciones con el eje X



.

Estos puntos particulares satisfacen la ecuación $0 = 3x^2 - 6$ y esto ocurre si $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

❑

El ejemplo anterior es un caso particular de la situación más sencilla de una ecuación cuadrática, cuando ocurre que $b = 0$ en (16.8), quedando por resolver una ecuación del tipo $ax^2 + c = 0$. El primer recurso para resolver una ecuación es tratar de despejar la variable y no es muy difícil para este caso, porque basta seguir estos sencillos pasos:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ \Rightarrow \quad ax^2 &= -c \\ \Rightarrow \quad x^2 &= -\frac{c}{a} \\ \Rightarrow \quad x &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

concluyendo que $x_1 = \sqrt{-c/a}$ y $x_2 = \sqrt{-c/a}$ son las soluciones. Dependiendo de los valores de a y de c, la ecuación pudiera tener una solución, dos soluciones o ninguna solución, como describimos a continuación.

- **Caso** $c = 0$**:** en este caso la única solución es $x = 0$.
- **Caso** $c/a < 0$**:** en este caso hay dos soluciones dadas por $x_1 = +\sqrt{-c/a}$ y $x_2 = -\sqrt{-c/a}$.
- **Caso** $c/a > 0$**:** en este caso no hay soluciones reales porque estamos calculando raíces cuadradas de números negativos y por tanto no se obtienen números reales.

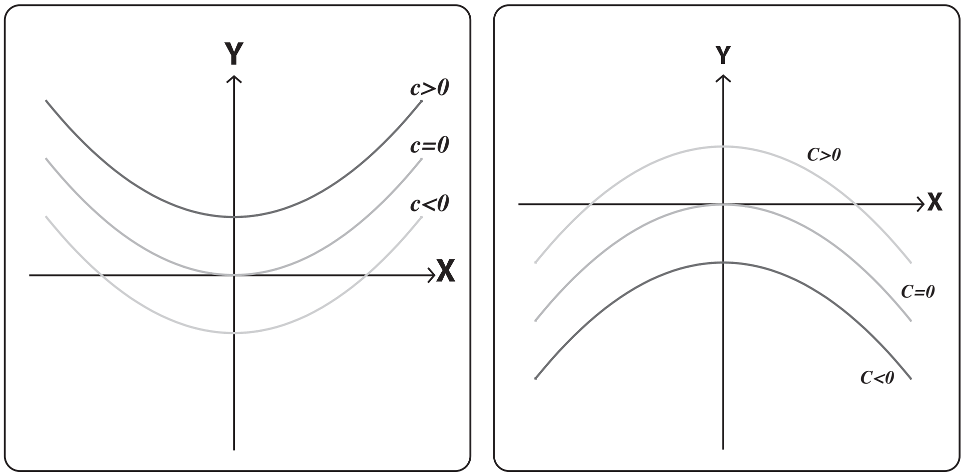
Geométricamente estos casos tienen una razón de ser. Comenzamos por graficar parábolas de la forma $y = ax^2 + c$, que en su forma ordinaria se ven como

$$(y - c) = \frac{1}{4\left(\frac{1}{4p}\right)}(x - 0)^2 .$$

Identificamos fácilmente que el vértice de estas parábolas es $V = (0, c)$ y la distancia focal $p = 1/(4a)$; de esta manera dividimos en dos grandes casos las gráficas, cuando $a > 0$ y $a < 0$, conteniendo cada caso tres subcasos según el valor de c, como dibujamos en la figura 16.5 De las gráficas podemos determinar que si $c = 0$, entonces la única intersección de la parábola con el eje X es para $x = 0$. Si $a > 0$ y $c > 0$ o $a < 0$ y $c < 0$ (es lo mismo que $c/a > 0$), entonces la parábola no presenta intersección con el eje X. Por último, si $c < 0$ y $a > 0$ o $c > 0$ y $a < 0$ (es lo mismo que decir $c/a < 0$), entonces la parábola presenta dos intersecciones con el eje X dadas por $x_1, x_2 = \pm\sqrt{-c/a}$.

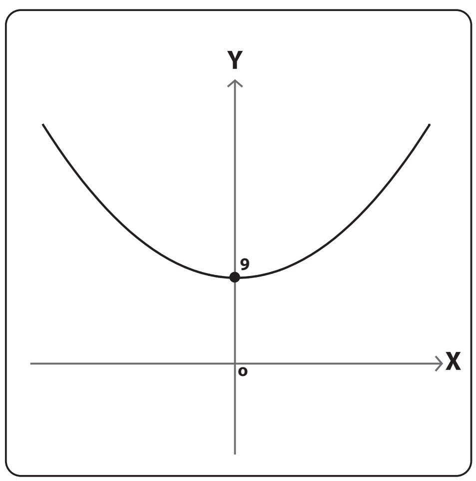
Ejemplo 16.8 *Resolver la ecuación* $4x^2 + 9 = 0$.

Haciendo la gráfica de la parábola $y = 4x^2 + 9$ nos damos cuenta que no hay intersección con el eje X, por tanto $4x^2 + 9 = 0$ no tiene soluciones reales,



(a) Parábolas con $a > 0$ (b) Parábolas con $a < 0$

Figura 16.5: *Gráfica de parábolas de la forma* $y = ax^2 + c$.



.

Algebraicamente intentamos resolver, despejando la variable x, consiguiendo

$$4x^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$$

que son dos soluciones, pero no reales. Por lo tanto concluimos que esta ecuación no tiene solución (en los reales).

❑

16.3.1. Solución por factorización.

Otra opción para encontrar las soluciones a una ecuación cuadrática es la factorización. Aunque no siempre es posible, cuando se logra, resulta muy sencillo resolver la ecuación. Damos ejemplos de solución a este tipo de ecuaciones en distintas situaciones.

Ejemplo 16.9 *Encontrar las soluciones a* $x^2 + 10x + 25 = 0$.

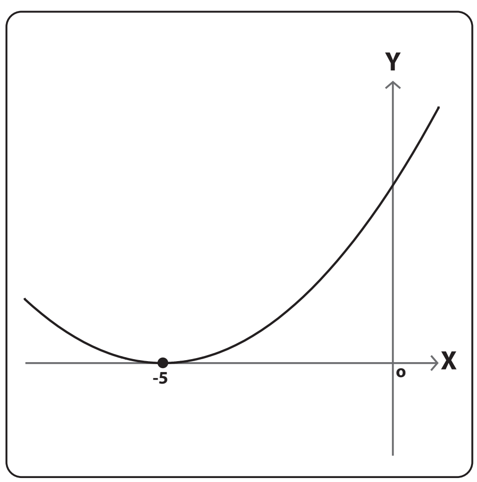
Es posible factorizar un lado de la ecuación como un binomio al cuadrado, por tanto podemos reescribir la ecuación como

$$(x+5)^2 = 0\,.$$

Ahora sólo basta despejar nuestra incógnita y logramos

$$(x+5) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -5\,.$$

Obtuvimos una sola solución, lo cual comprobamos realizando la gráfica de la parábola $y = x^2 + 10x + 25$. Para graficar, es más fácil a partir de la forma ordinaria de la ecuación, siendo ésta $y = (x+5)^2$. Identificamos que $V = (-5, 0)$ con $p = 1/4$ (¿por qué?)



.

La parábola intersecta una sola ocasión el eje X y lo hace cuando $x = -5$.

❑

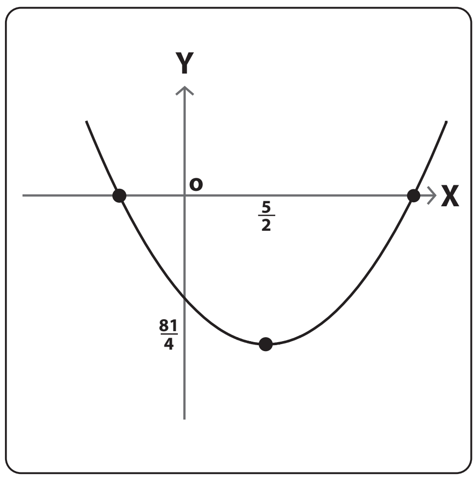
Ejemplo 16.10 *Mostrar que la ecuación* $x^2 - 5x - 14 = 0$ *tiene dos soluciones reales.*

La ecuación de la parábola asociada a la ecuación cuadrática es $y = x^2 - 5x - 14$ y realizamos los pasos necesarios para reescribirla en su forma ordinaria:

$$y = x^2 - 5x - 14 \quad \Rightarrow \quad y + 14 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y + 14 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(y - \left(-\frac{81}{4}\right)\right) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

donde identificamos que $V = (5/2, -81/4)$, con $p = 1/4$. La gráfica respectiva es



,

donde es fácilmente observable que hay dos intersecciones con el eje X, cada una correpondiendo a las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x - 14 = 0$.

Para conocer exactamente las soluciones, factoricemos la ecuación como $(x - 7)(x + 2) = 0$. Tenemos dos casos

- Si $(x - 7) \neq 0$, entonces dividimos $(x - 7)(x + 2) = 0$ por este término y tenemos $x + 2 = 0$, por lo tanto $x = -2$.
- Si $(x + 2) \neq 0$, entonces dividimos $(x - 7)(x + 2) = 0$ por este término y obtenemos $x - 7 = 0$, por tanto $x = 7$.

Así, la ecuación $x^2 - 5x - 14 = 0$ tienes dos soluciones reales dadas por $x_1 = -2$ y $x_2 = 7$.

❑

16.3.2. Solución por fórmula general de segundo grado.

No siempre es posible factorizar o despejar directamente la variable en una ecuación cuadrática, por lo que buscaremos un método más general que nos permita determinar las soluciones en cualquier caso, vamos a desarrollar la conocida *fórmula general de segundo grado*. Supongamos que $ax^2+bx+c=0$ es la ecuación cuadrática que nos gustaría resolver,

$$
\begin{array}{cl}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 & \text{multiplicamos la ecuación por el factor } \frac{1}{a}, \\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 & \text{completamos el cuadrado,} \\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 & \text{factorizamos,} \\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} & \text{despejamos el binomio al cuadrado,} \\
x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{despejamos el binomio} \\
x=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a} & \text{despejamos la variable.}
\end{array}
$$

Así, decimos que las soluciones a una ecuación cuadrática dada por $ax^2+bx+c=0$ están dadas por la *fórmula general de segundo grado*:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como ya vimos en las secciones anteriores, existen tres tipos de escenarios sobre las soluciones de una ecuación cuadrática y la fórmula general también distingue estos escenarios. Para esto, se denomina *discriminante* a la expresión $\Delta=b^2-4ac$, que forma parte de la fórmula y es la que determina si la ecuación tiene dos, una o ninguna solución en los reales.

- **Caso $\Delta>0$:** la ecuación tiene dos soluciones reales dadas por

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- **Caso $\Delta=0$:** la ecuación tiene una sola solución real dado por $x=-b/2a$.

- **Caso $\Delta<0$:** la ecuación no tiene solución en los reales, porque estaríamos calculando la raíz cuadrada de números negativos.

Gráficamente significa lo mismo que hasta el momento se ha respresentado. Si el discriminante es positivo estamos estudiando una parábola que intersecta al eje X en dos puntos distintos, si el discriminante es cero estamos hablando de una parábola que toca al eje X en un sólo punto y si el discriminantes es negativo estamos tratando una parábola que no intersecta al eje X. Véase la figura 16.6.

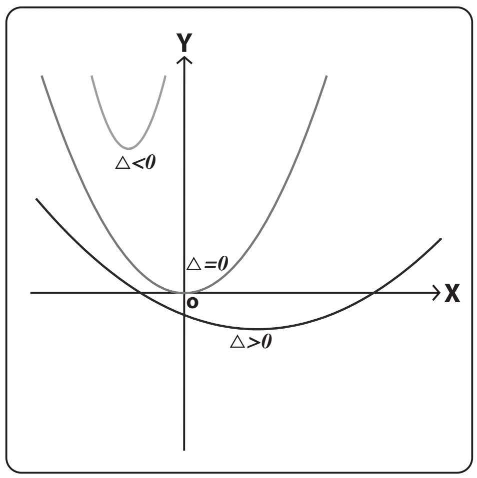


Figura 16.6: *Parábolas asociadas a ecuaciones cuadráticas con distintos discriminantes.*

Ejemplo 16.11 *Resolver la ecuación* $3x^2 + 2x = 7$.

Pasando todos los términos de un solo lado de la igualdad tenemos la ecuación $3x^2 + 2x - 7 = 0$, en la cual identificamos los coeficientes $a = 3$, $b = 2$ y $c = -7$. sustituimos los respectivos valores en la fórmula general de segundo grado obteniendo

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{3}$$

y $\Delta = 88 > 0$, por lo que la ecuación tiene dos soluciones reales, dadas por

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{11}}{3}, \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{11}}{3}.$$

❑

Ejemplo 16.12 *Dar las soluciones a* $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Comenzamos identificando los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática, siendo 9, -6 y 1 respectivamente. Calculamos el discriminante, que es $\delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(9)(1) = 0$, por lo que la ecuación tiene una solución única. La solución es $x = -b/2a = -(-6)/2(1) = 3$.

❑

Ejemplo 16.13 *¿La parábola* $y = 3x^2 - 2x + 1$ *intersecta al eje X?*

La parábola intersectaría al eje X cuando la ordenada toma el valor cero, es decir, buscaremos los valores para x que satisfacen la condición $0 = 3x^2 - 2x + 1$, construyendo una ecuación cuadrática. A partir de aquí, basta con calcular el discriminante de la ecuación para determinar si hay o no soluciones reales. Calculamos el discriminante, sustituyendo $a = 3$, $b = -2$ y $c = 1$ a continuación

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = -8 < 0\,.$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto, la parábola no intersecta en ningún lugar al eje X.

❑

16.3.3. Reducción a formas cuadráticas.

Algunas ecuaciones no son cuadráticas en apariencia, pero realizando algún movimiento algebraico o algún cambio sencillo en la variable podemos convertir esas ecuaciones a la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Veamos el siguiente par de ejemplos para entender mejor.

Ejemplo 16.14 *Dar las soluciones a* $1 + \frac{5}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Aunque a primera vista no parezca una ecuación cuadrática, si nos fijamos bien sabremos que si multiplicamos por el factor x^2 resulta la ecuación

$$x^2 + 5 = 2x \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 2x + 5 = 0\,,$$

la cual tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Usamos a continuación la fórmula general de segundo grado, habiendo identificado $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, para obtener las soluciones:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

y notamos que $\Delta = -16 < 0$, por lo que la ecuación no tiene soluciones en los reales.

❑

Ejemplo 16.15 *¿Cuántas soluciones distintas tiene la ecuación $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$?.*

Este tipo de ecuaciones las podemos convertir a una de tipo cuadrática con un adecuado cambio en la variable. Como queremos que sea cuadrática, llamemos $y = x^2$ y subsitituyendo este cambio en la ecuación tenemos

$$y^2 - 9y + 8 = 0\,.$$

Factorizando esta expresión como $(y-1)(y-8) = 0$ resolvemos que $y_1 = 1$ y $y_2 = 8$ son las soluciones a la ecuación en la variable y.

Regresando a la variable original, aplicamos el cambio $y = x^2$, pero a la inversa, es decir, $x = \pm\sqrt{y}$. De esta manera, las soluciones a la ecuación original son $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ y $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$, es decir,

$$x_1 = 1\,, \qquad x_2 = -1\,, \qquad x_3 = 2\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad x_4 = -2\sqrt{2}\,.$$

y por tanto, la ecuación $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$ tiene cuatro soluciones distintas.

❑

16.3.4. Ejercicios.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas sin usar las fórmula general de segundo grado:

- $7x^2 - 3x = 0$,
- $6x^2 - x - 2$,
- $2x(4x - 5) = 10$,
- $(p - 3)(p - 4) = 42$,
- $4x(x - 2) - 5x(x - 1) = 2$,
- $-2x^2 + 1 = 0$,
- $3x^2 + 15 = 0$,
- $y^2 + 6y - 3 = 0$,
- $x^2 - 5x - 13 = 0$,
- $\frac{1}{2}y^2 - 3y + 9 = 0$,
- $x^2 + 9x + 14$,
- $3y^2 + 10y - 8 = 0$,
- $t(2t + 9) = -7$,
- $16(t - 1) = t(t + 8)$,
- $4x^2 = 20$,
- $\frac{16}{25}x^2 - 1$,
- $x^2 - 3x + 2 = 0$,
- $y^2 + y - 17$,
- $3x^2 - 5x - 10 = 0$,
- $2d^2 + 2d + 4 = 0$.

2. Resuelve la ecuación cuadrática
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right) = 0\,.$$

3. Determinar las soluciones de
   - $\frac{1}{2}(1 + m)(1 - m) = 10m$,
   - $a^2 - 2\sqrt{3}a + 2 = 0$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones:
   - $x^2 + 6x + 4 = 0$,
   - $y^2 + 7y = 30$,
   - $3p^2 = -8p - 5$,
   - $z^2 + 5 = 0$,
   - $4x + x(x - 3) = 0$,
   - $(x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 0$,
   - $x^2 - 6x - 4 = 0$,
   - $y^2 - 7y = 30$,
   - $x^2 + x + 2 = 0$,
   - $2x^2 = 5$,
   - $2y^2 - (y + 2)(y - 3) = 0$,
   - $(x + 3)^2 + (x - 1)^2 = 0$.

5. Dar las soluciones a las siguientes ecuaciones:
   - $1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{5x^2} = 0$,
   - $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$,
   - $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{5}{2}$,
   - $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$,
   - $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x) - 35 = 0$,
   - $(1 + \sqrt{x})^2 + (1 + \sqrt{x}) - 6 = 0$,

- $w^4 - 4w^2 - 12 = 0$,
- $4x^{-2} - x^{-1} - 5 = 0$,
- $2x^{-2} + x^{-1} - 1 = 0$,
- $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 - \left(\frac{x^2-1}{x}\right) - 2 = 0$,
- $5\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 - 3\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - 2 = 0$.

6. Una solución de $kx^2 + 3x - k = 0$ es -2. Encontrar la otra solución.

7. ¿Cómo obtendrías la ecuación cuadrática que tenga por soluciones 4 y 3?

8. Dada la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$, encontrar un valor de k para que la ecuación tenga a)una sola solución real, b)dos soluciones reales, c)no tenga soluciones en los reales.

16.4. Aplicaciones.

Las expresiones cuadráticas modelan muchas situaciones como las que veremos a continuación.

Ejemplo 16.16 *Un ganadero compra corderos por una cantidad de* 120 *dólares. Se le mueren* 3 *y el resto los vende a* 3 *dólares más cada uno de lo que le costó, perdiendo al final* 15 *dólares. ¿Cuántos compró y a qué precio?*

Con el fin de entender e identificar la incógnita del problema, ordenamos la información a continuación:

- Pagó 120 dólares por una cantidad x de corderos.
- Se le murieron 3, por lo que luego sólo vendió $x - 3$.
- Cada cordero lo vendió 3 dólares más caro que lo que le costó originalmente, por tanto si pagó 120 dólares por x corderos, pagó originalmente $120/x$ dólares por cada cordero, entonces los vendió a $\frac{120}{x} + 3$ dólares cada uno.
- Perdió finalmente 15 dólares, entonces $120 - 15$ dólares fue la venta de los $x - 3$ corderos.

Con esto ya podemos plantear una ecuación que nos relacione los datos anteriores. La ecuación que vamos a escribir representa la venta total del ganadero al vender $x-3$ corderos a un precio de $\frac{120}{x}+3$ dólares cada uno:

$$(x-3)\left(\frac{120}{x}+3\right)=120-15\,.$$

Esta ecuación no tiene la forma de una cuadrática, pero si realizamos las operaciones algebraicas indicadas,

$$3x-\frac{360}{x}+6=0$$

y multiplicamos toda la ecuación por el factor x, obtenemos una ecuación cuadrática

$$3x^2+6x-360=0\,.$$

Recurrimos a la fórmula general de segundo grado para resolver esta ecuación, donde $a=3$, $b=6$ y $c=-360$. Así

$$x_1,x_2=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(3)(-360)}}{2(3)}=\frac{-6\pm 66}{6}\,,$$

y las soluciones a la ecuación son $x_1=10$ y $x_2=-12$.

Aunque la ecuación tenga dos soluciones, sólo una tiene sentido para el problema planteado, por eso decidimos que la solución al problema es que el ganadero compró originalmente 10 corderos. El precio al que los compró es 120/10, es decir, compró cada cordero a 12 dólares.

❏

Ejemplo 16.17 *Cuando un reproductor de DVD de una cierta marca se vende a* 3 000 *pesos, la tienda "Todo para su hogar" vende* 15 *por semana. Sin embargo, las estadísticas muestran que al reducir en* 100 *pesos el precio de venta, las ventas aumentan en* 2 *unidades por semana. ¿Qué precio de venta hará que las entradas semanales sean de* 70 000 *pesos?*

Éste es un problema que puede ocurrir de manera recurrente en los negocios, que con el fin de evitar "experimentar" en políticas de venta y quizás perder tiempo en ganancias, se recurre a un par de experiencias para plantear el problema y darle solución. Los datos son:

- La venta de 15 unidades se da con el precio de venta \$3 000.
- Se venden 2 unidades más por cada \$100 de reducción al precio de venta.
- Se requiere que la venta total sea de \$70 000.

Tomaremos como incógnita del problema el número de reducciones en \$100 del precio de venta, porque así la venta total por semana se calcularía de la siguiente manera:

$$(\#\text{ unidades})(\text{precio de venta}) = (15+2x)(3\,000-100x)$$

y como queremos que la venta total sea de \$70 000 entonces igualamos a esta cantidad la expresión anterior, obteniendo la ecuación

$$(15+2x)(3\,000-100x) = 70\,000\,.$$

Realizando las operaciones algebraicas indicadas y sumando términos semejantes concluimos que se trata de la siguiente ecuación cuadrática:

$$200x^2 - 4\,500x + 25\,000 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x^2 - 45x + 250 = 0$$

y recurriendo a la fórmula general de segundo grado sabemos que las soluciones son

$$x_1, x_2 = \frac{-(-45) \pm \sqrt{(-45)^2 - 4(2)(250)}}{2(2)} = \frac{45 \pm 5}{4}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{25}{2}\,, \quad x_2 = 10\,.$$

La ecuación tiene dos soluciones reales y recordemos que x se refiere al número de veces en que hay que reducir en cantidades de \$100 el precio de venta, por lo tanto ambas soluciones pueden resolver nuestro problema. Concluimos que para obtener una venta total de \$70 000 hay que vender cada reproductor de DVD en $\$3\,000 - 100x_1$ o $\$3\,000 - 100x_2$, o sea, en \$2 000 o \$1 750.

❑

Ejemplo 16.18 *Dos embarcaciones A y B parten del mismo punto y a la misma hora en direcciones perpendiculares. B se desplaza $7\,km/h$ más lento que A. Después de 4 horas se encuentran a una distancia de $68\,km$ entre sí. Calcula la velocidad de cada embarcación.*

Recordamos primeramente que la velocidad (promedio) se relaciona con la distancia recorrida y el tiempo como $V = d/t$. Por otra parte, las embarcaciones parten del mismo en sentido perpendicular entre éstas, por lo que junto con la distancia que los separa, dibujan un triángulo rectángulo. De esta manera, por el teorema de Pitágoras, la distancia que los separa entre sí después de 4 horas (la hipotenusa del triángulo) se relaciona con las distancias recorridas por cada una de las embarcaciones como sigue

$$(\text{distancia embarcación } A)^2 + (\text{distancia embarcación } B)^2 = 68^2\,.$$

Pero resulta que es posible calcular la distancia de cada embarcación después de 4 horas. Supongamos (porque no la conocemos) que la velocidad de la embarcación A es V, entonces la embarcación B va a una velocidad de $V-7$. Por consecuencia, la distancia de la embarcación A es $4V$ y la distancia recorrida de la embarcación B es $4(V-7)$. Así, siguiendo la última ecuación tenemos

$$(4V)^2 + (4(V-7))^2 = 68^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 32(V-15)(V+8) = 0$$

por lo tanto las soluciones a esta ecuación son $V_1 = 15$ y $V_2 = -8$.

Aunque la ecuación tenga dos soluciones reales, quizás una de estas no tenga sentido para el planteamiento del problema y como estamos hablando de la velocidad de la embarcación A, nos quedamos con la solución que da un número positivo (la otra solución indicaría que la embarcación va de reversa), así $V = 15\,km/h$. La embarcación B tiene una velocidad de $8\,km/h$.

❑

16.4.1. Ejercicios:

1. Una caja de base cuadrada y sin tapa debe construirse de una hoja de latón, cortando de lado $3\,cm$ de cada esquina y doblando los lados como en la figura. Si la caja debe tener un volumen de $48\,cm^3$, determinar el tamaño de la hoja de latón.

2. Una pelota de baseball se avienta hacia arriba con una velocidad inicial de $64\,pies/s$. Su altura después de t segundos está dada por la ecuación $h = -16t^2 + 64t$. ¿Cuándo estará la pelota a $48\,pies$ del suelo?

3. Si los dos lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles se prolongan, uno $2\,cm$ y el otro $3\,cm$, se determina un triángulo con un área de $21\,cm^2$. ¿Cuánto miden los catetos de cada triángulo?

4. La longitud del lado de un rectángulo es $10\,cm$ mayor que su ancho. Tomando en cuenta que la diagonal del rectángulo dado mide $50\,cm$, encontrar su perímetro.

5. El marco de un cuadro mide $12\,cm$ por $20\,cm$. El cuadro que se encuentra en su interior ocupa un área de $84\,cm^2$. Calcula el ancho del cuadro.

6. Dos ciclistas, Juan y Pedro, parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. Pedro se desplaza a $7\,km/h$ más rápido que Juan. Después de 3 horas se encuentran a $39\,km$ de distancia uno del otro. Determina la velocidad de cada uno de ellos.

7. Un aeroplano A recorre $2\,300\,km$ a cierta velocidad. El aeroplano B recorre $2\,000\,km$ a $50\,km/h$ más rápido que A, en 3 hora menos. Determinar la velocidad de cada uno de ellos.

8. Un grupo de amigos se dividen en partes iguales el costo de $140 de un viaje de taxi. En el último minuto 3 amigos se bajan, lo que aumenta $15 el costo a cada uno de los amigos restantes. ¿Cuántos amigos iban el taxi?

9. Una tipa compró cierto número de libros por 180 dólares. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado 1 dolar más, ¿cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?

16.5. Desigualdades cuadráticas.

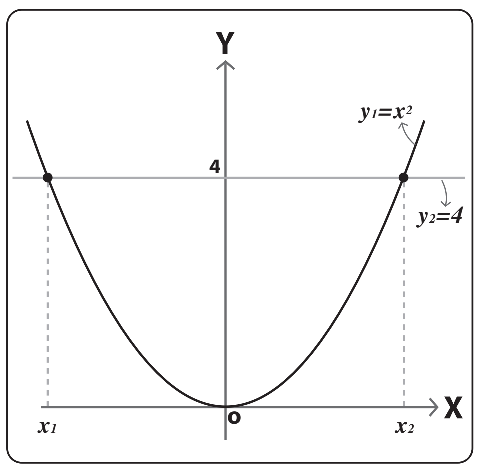
Nuevamente, si ya sabemos resolver ecuaciones cuadráticas, ¿por qué no pensar en inecuaciones cuadráticas?, ¿qué de intersante tienen?, ¿para qué nos sirven?

Una expresión cuadrática (que las variables tengan a lo más grado 2) que contenga una desigualdad es el tema de esta sección. En particular abordamos las desigualdades cuadráticas que contienen una sola variable, como puede ser $x^2 > 3$ o $5x^2 + 4x - 6 < 0$ o como $x^2 - 5 \leq 5x + 8x^2$.

Así como en las desigualdades lineales, en las cuadráticas estamos comparando las ordenadas entre parábolas o alguna mezcla entre parábola y recta. Por ejemplo, la desigualdad $x^2 > 3$ compara la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 3$. En los siguientes desarrollos mostramos más a detalle esta comparación.

Ejemplo 16.19 *Dar el conjunto solución para* $x^2 < 4$

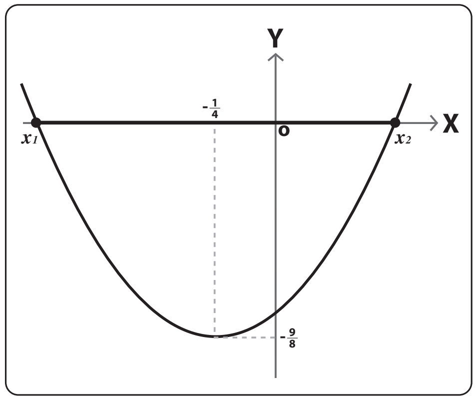
Esta desigualdad compara las ordenadas de la parábola $y_1 = x^2$ con las ordenadas de la recta $y_2 = 4$. Graficamos ambas



.

en donde ubicamos las intersecciones entre las gráficas.

El conjunto solución a la desigualdad son todas las x que hacen que la ordenada y_1 sea menor que la y_2, es decir, las x para las que la parábola se encuentre por debajo de la recta y esto ocurre si $x_1 < x < x_2$. Por esta razón, es necesario determinar x_1 y x_2 y esto lo obtenemos de convertir la desigualdad $x^2 < 4$ en la igualdad $x^2 = 4$ y resolver. Esta ecuación tiene por soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ y por tanto, el conjunto solución a la desigualdad es $-2 < x < 2$, o lo que es lo mismo $\{x | -2 < x < 2\}$. Graficamente sería



.

❏

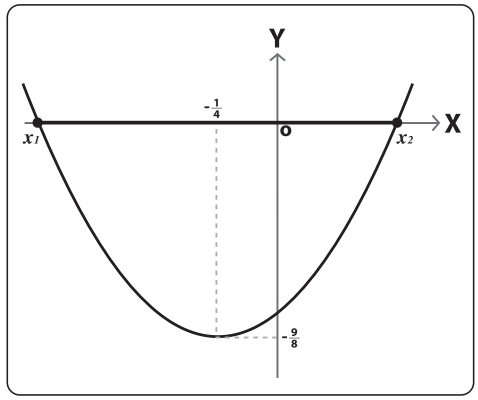
Como en todo lo que hemos hecho hasta ahora, es muy problable que haya más de una forma de darle solución a un problema. Las desigualdades cuadráticas no son la excepción, pero evidentemente tenemos que desarrollar una intuición que nos permita determinar que camino tomar para ahorrar tiempo y esfuerzo.

Ejemplo 16.20 *Resolver la desigualdad* $1 \geq 2x^2 + x$.

Al igual que en el ejemplo anterior, aquí estamos comparando una recta con una parábola, pero si reescribimos esta expresión, quizá resulte más sencilla la comparación. Veamos

$$1 \geq 2x^2 + x \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \geq 2x^2 + x - 1$$

que resulta una desigualdad en donde comparamos la recta que coincide con el eje de las abscisas ($y = 0$) con una parábola y por lo tanto, resulta más fácil sólo graficar una parábola y fijarnos en que parte ésta está por debajo del eje X. Así, reescribiendo $y = 2x^2 + x - 1$ en su forma ordinaria queda como $(y - (-9/8)) = 2(x - (-1/4))^2$, con lo que sabemos que es una parábola con vértice en $(-1/4, -9/8)$ y distancia focal $1/8$. La gráfica de la desigualdad quedaría como



donde señalamos que el conjunto solución es $x_1 \leq x \leq x_2$. Para determinar x_1 y x_2, tenemos que resolver la ecuación $0 = 2x^2 + x - 1$ y para esto factorizamos, porque así

$$0 \geq 2x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1\,, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el conjunto solución es $\{x| -1 \leq x \leq 1/2\}$.

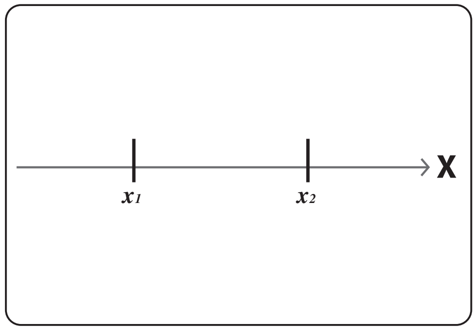
❑

Si las gráficas nos siguen pareciendo muy complicadas de realizar, tenemos otra opción. Pensemos en desigualdades del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0\,, \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

donde a, b y c son constantes. Sabemos que estamos comparando las ordenadas de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el cero, es decir, nos estamos preguntando por aquellos valores de x para los cuales la ordenada y de la parábola está por encima o por debajo del eje X.

Lo primero que tenemos que investigar es aquellos puntos en los que $y = ax^2 + bx + c$ intersecta con el eje X, porque fuera de estos puntos la ordenada y es mayor o menor que cero, pero no igual. Supongamos que estos valores, como lo hemos venido haciendo, son x_1 y x_2 (**nota:** pudieran no existir tales valores o ser iguales, ¿por qué?). Evidentemente, las ordenadas de una parábola no cambian de signo en ningún otro valor de x, por lo que si dividimos la recta numérica de tal suerte que las divisiones correspondan a x_1 y a x_2, entonces podemos determinar los conjuntos solución. La recta numérica quedaría

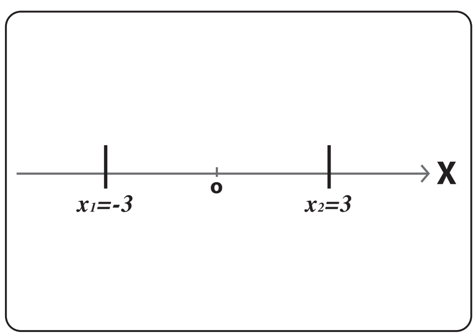


.

y basta dar tres puntos de prueba (a lo más), uno en cada segmento, para conocer el signo de las ordenada y.

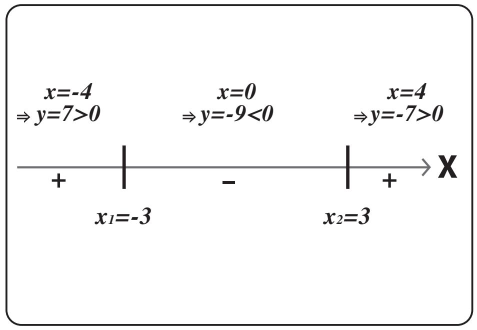
Ejemplo 16.21 *Resolver* $x^2 - 9 \geq 0$.

Para esta desigualdad primero hallamos x_1 y x_2, es decir, primero resolvemos $x^2 - 9 = 0$. Resulta que $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$ y los ubicamos en la recta numérica como



.

y de esta manera tenemos tres segmentos determinados por $x < -3$, $-3 < x < 3$ y $x > 3$. Seleccionamos tres puntos de prueba en cada uno de los segmentos para conocer el signo de las ordenadas. Así, elegimos $x = -4$, $x = 0$ y $x = 4$ como puntos de prueba y evaluamos la expresión de la parábola $x^2 - 9$,



.

en la cual indicamos los segmentos con el respectivo signo que toman las ordenadas. De esta manera, buscamos el o los segmentos que tienen signo positivo, determinando así que el conjunto solución es $x < -3$ y $x > 3$, o sea, $\{x|x \leq -3\,,\, x \geq 3\}$.

Notemos que si en la desigualdad aparece el signo igual (en este caso $\geq$), conservamos también la igualdad en el conjunto solución. Por otra parte, los puntos de prueba no tienen ninguna regla para elegirse, más que el hecho de pertenecer al segmento indicado, por esta razón siempre se buscan aquellos puntos de prueba que faciliten las cuentas.

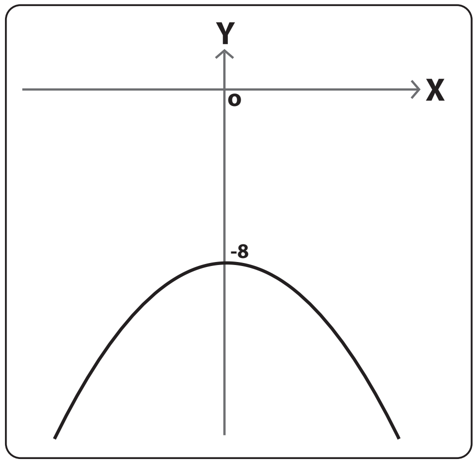
❑

También puede ocurrir que el conjunto solución sea vacío.

Ejemplo 16.22 *Determinar si tiene soluciones la desigualdad* $-5x^2-8 > 0$.

Comenzamos determinando x_1 y x_2, que se derivan de la ecuación $-5x^2-8 = 0$. Esta ecuación no tiene soluciones reales porque obtenemos $x = \sqrt{-8/5}$ al despejar x, por lo tanto, $y = -5x^2 - 8$ es una parábola cuyas ordenadas son todas negativas o todas positivas. Basta con un punto de prueba para determinar esta situación, por ejemplo intentamos con $x = 0$, resultando $y-8 < 0$; por consecuencia, todas las ordenadas de la parábola son negativas y la desigualdad pregunta por la situación contraria. Concluimos que no hay posible solución para la desigualdad.

Observando la gráfica de la parábola en la figura que sigue, entendemos porque esta desigualdad no tiene ninguna solución,



.

No hay una x para la cual la parábola $y = -5x^2 - 8$ tome valores positivos.

❑

O quizás también el conjunto solución son todos los números reales.

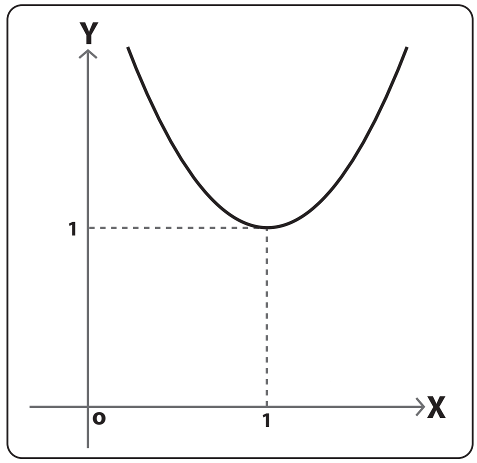
Ejemplo 16.23 *Determinar el conjunto solución de* $-2x^2+2x \leq 2x^2-6x+5$.

Empezamos por escribir la desigualdad de la forma $y = ax^2+bx+c$, entonces, después de pasar todos los términos de un solo lado de la desigualdad y sumar términos semejantes conseguimos $0 \leq 4x^2 - 8x + 5$. Luego, buscamos las soluciones a la ecuación $0 = 4x^2 - 8x + 5$, que aplicando la fórmula general de segundo grado obtenemos

$$x_1, x_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(5)}}{2(4)} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8},$$

pero el discriminante es negativo y por eso no hay solución real a la ecuación.

Esto indica que $y = 4x^2 - 8x + 5$ es positivo o negativo para todas las x. Pues basta un punto de prueba, por ejemplo $x = 0$, para determinar el signo y resulta que $y = 4(0)^2 - 8(0) + 5 > 0$. Las ordenadas de la parábola son positivas, como se puede apreciar en la gráfica



.

Por lo tanto, el conjunto solución a la desigualdad son todos los números reales.

❏

Quizás, reescribiendo alguna expresión se logre una desigualdad cuadrática, que a primera vista no lo es.

Ejemplo 16.24 *Determinar si tiene o no soluciones la desigualdad*

$$\frac{3x^2}{x^2+2} \leq 2\,.$$

Aunque no parezca, esta es una desigualdad cuadrática, porque si multiplicamos por (x^2+2) la desigualdad obtenemos

$$(x^2+2)\frac{3x^2}{x^2+2} \leq 2(x^2+2) \qquad \Longrightarrow \qquad 3x^2 \leq 2x^2+4$$

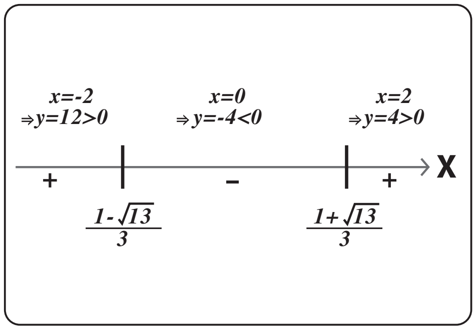
$$\Longrightarrow \qquad 3x^2-2x^2-4 \leq 0\,.$$

Notemos que las desigualdad conservo el sentido porque $x^2+2>0$ para cualquier valor de x.

Buscamos las soluciones a la ecuación $3x^2-2x^2-4=0$ para determinar en que segmentos de la recta numérica la parábola asociada $y=3x^2-2x^2-4$ es menor que el eje X. Mediante la fórmula general de segundo grado buscamos las soluciones,

$$x_1, x_2 = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(-4)}}{2(3)} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{3}\,.$$

La recta numérica queda divida en los segmentos que se señalan a continuación,



.

en los cuales tomamos puntos de prueba e indicamos el signo que toma la ordenada de la parábola. Nos basamos en estos cálculos para determinar que el conjunto solución es

$$\left\{x \middle| \frac{1-\sqrt{13}}{3} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{3}\right\}$$

que es el segmento en el que la parábola se encuentra por debajo del eje X. La desigualdad si tiene soluciones.

❑

16.5.1. Ejercicios:

1. Determinar el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

   - $x^2 + x - 2 > 0$,
   - $x^2 + x < 0$,
   - $x^2 - 7x + 12 > 0$,
   - $16x^2 \geq 9x$,
   - $x^2 \geq 16$,
   - $x(x-2) > 3$,
   - $(3-5x)(1-2x) \leq 0$,
   - $2x^2 + x - 2 > x^2 + 2x$,
   - $x^2 + x - 2(x^2 + 3x) > 0$,

- $(3x-2)(3x+2)-(3x+2)^2 \leq 0$.

2. Resolver $\frac{3t+3}{(t+1)^2} \leq 1$.

3. Resolver $\frac{-2x}{x^2+1} \leq 0$.

4. ¿Para qué valores de x la expresión $\sqrt{x^2-x-2}$ es un número real?

5. Modifica las siguientes expresiones de tal forma que queden como desigualdades cuadráticas:

   - $\frac{x-4}{x-3} > 0$,
   - $\frac{2x-1}{x-5} \leq 2$,
   - $\frac{2x-3}{x-3} \leq 1$.

16.6. Aplicaciones.

Ejemplo 16.25 *Un biólogo determina que el tamaño de la población de una cierta especie de vida marina está relacionado con la temperatura del agua en una localidad particular de la siguiente manera:*

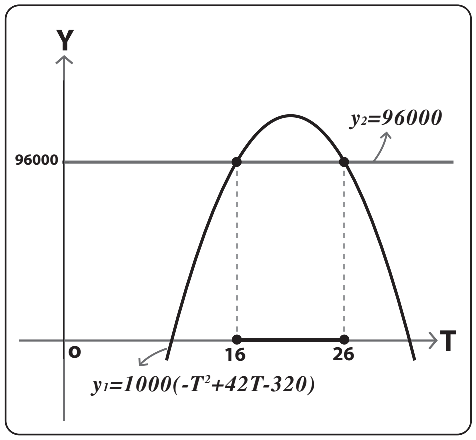
$$N = 1\,000(-T^2+42T-320)\,,$$

donde N es el tamaño de la población y T es la temperatura del agua en grados Celsius. ¿Cuál debe ser el rango de temperatura del agua para que el tamaño de la población sea al menos de 96 000?

Se requiere que el tamaño de la población sea de al menos 96 000 individuos, es decir, se necesita $N \geq 96\,000$. sustituimos el valor de N en términos de la temperatura T obteniendo la desigualdad cuadrática

$$1\,000(-T^2+42T-320) \geq 96\,000\,.$$

Si graficamos la parábola $y_1 = 1\,000(-T^2+42T-320)$ y la recta $y_2 = 96\,000$, las podemos comparar y determinar el conjunto solución,



Notamos que si $T_1 \leq T \leq T_2$ entonces se cumple la desigualdad. Para encontrar T_1 y T_2 resolvemos la ecuación $1\,000(-T^2 + 42T - 320) = 96\,000$, que reescribimos como $-T^2 + 42T - 416 = 0$, entonces por la fórmula general de segundo grado,

$$T_1, T_2 = \frac{-42 \pm \sqrt{(42)^2 - 4(-1)(-416)}}{2(-1)} \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = 16 \quad T_2 = 26\,.$$

Así, concluimos que la temperatura debe estar entre los $16°C$ y los $26°C$.

❑

16.6.1. Ejercicios:

1. La concentración de una cierta droga en la corriente sanguínea varía con el tiempo de la siguiente manera:

$$C = \frac{3t}{t^2 + t + 1}\,,$$

donde C es la concentración de la droga en la corriente sanguínea en mg/l, t horas después de haberla tomado por vía oral. Se determinó que la droga es efectiva si la concentración es de por lo menos $0.6mg/l$ ¿Durante cuánto tiempo es efectiva la droga?

2. Un fabricante puede vender x unidades de un producto cada semana al precio de p dólares por unidad, en donde $p = 200 - x$. ¿Qué número de unidades deberá venderse a la semana para obtener ingresos mínimos por $9 900?

3. Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a \$25 cada una. El costo C de producir x unidades cada semana está dado por $C = 40\,000 + 300x - x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

Capítulo 17

La circunferencia.

De las figuras básicas en geometría más conocidas está la circunferencia. Una circunferencia está determinada por un conjunto de puntos que cumplen una propiedad muy especial y en la cual nos basamos para definir esta figura.

> **Una circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.**

En otras palabras, la circunferencia está formada por aquellos puntos que se encuentran a una misma distancia a partir de un cierto punto que llamamos *centro* y que denotamos por C. La distancia a la que se encuentran todos estos puntos se llama *radio*, que distinguimos por r. La figura 17.1 muestra como se construye una circunferencia a partir de la definición.

17.1. Ecuación de la circunferencia.

De la definición de circunferencia desarrollaremos la expresión algebraica que determina el conjuntos de puntos que la forman. Supongamos que el centro de la circunferencia se encuentra en las coordenadas (h, k) y que el radio de circunferencia es r, entonces un punto $P = (x, y)$ pertenece a la circunferencia si la distancia de P al punto C es igual a r, es decir,

$$d(P, C) = r \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r\,.$$

Veamos la figura 17.2.

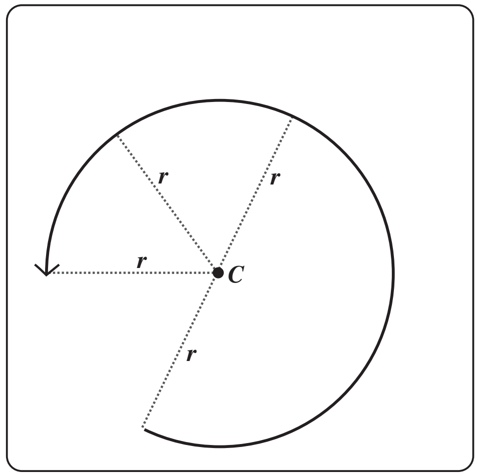


Figura 17.1: *Construcción de una circunferencia.*

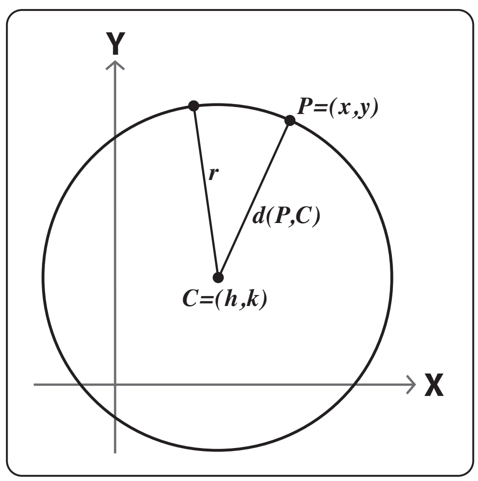


Figura 17.2: *La circunferencia.*

La circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio constante igual a r, tiene por ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\,. \tag{17.1}$$

A esta forma de la ecuación se le conoce como *ordinaria*.

Nota: El radio siempre es una cantidad positiva.

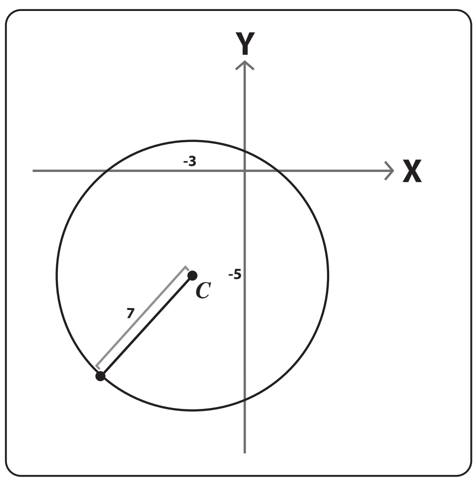
La ecuación más sencilla de este tipo es de una circunferencia centrada en el origen del sistema de coordenadas, porque así $(h, k) = (0, 0)$ y la ecuación corresponde a $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 17.1 *Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3, -5)$ y radio 7. Proporcionar la gráfica.*

La ecuación (17.1) indica adecuadamente las coordenadas del centro de una circunferencia y el tamaño de su radio y por eso la ecuación de la circunferencia se obtiene de manera tan sencilla como sustituir los valores correspondientes,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad (x - (-3))^2 + (y - (-5))^2 = 7^2 \,.$$

La ecuación de la circunferencia es $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$ y su gráfica corresponde a



.

❑

Como en el caso de las rectas y las parábolas, el tipo de información para determinar una circunferencia puede variar mucho.

Ejemplo 17.2 *Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (-4, 5)$. Hallar su ecuación.*

Como nos dan los extremos del diámetro, podemos encontrar el radio correspondiente porque es la mitad del diámetro.

$$\text{radio} = \frac{\text{diámetro}}{2} = \frac{d(A,B)}{2} = \frac{\sqrt{(2-(-4))^2+(3-5)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}\,.$$

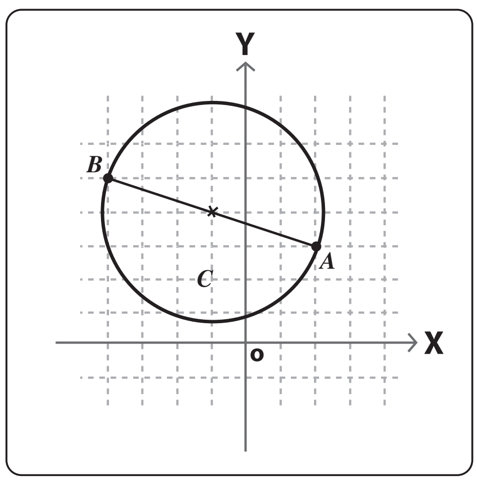
Nos faltan las coordenadas del centro de la circunferencia, que justo se encuentra a la mitad de los extremos del diámetro, por tanto recurrimos a la expresion (12.4), así

$$(h,k) = C = P_m = \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (-1,4)\,.$$

Ya contando con $r = \sqrt{10}$ y $C = (-1,4)$, la ecuación de la circunferencia, siguiendo (17.1), es

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10\,,$$

con la gráfica respectiva



.

❑

Una propiedad muy importante es que cualquier recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como se ilustra en la figura 17.3. Una recta tangente a una circunferencia es aquella que solo intersecta en un solo punto a ésta y no la atraviesa.

Ejemplo 17.3 *Una circunferencia tiene su centro en el punto $C = (0,-2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.*

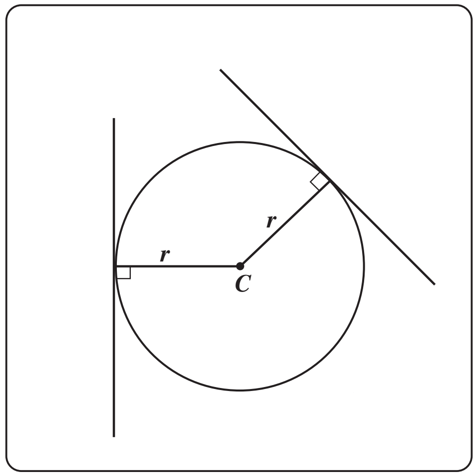
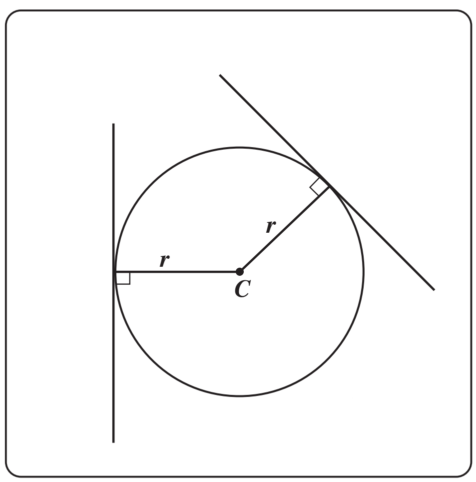


Figura 17.3: *Recta tangente a una circunferencia.*

La situación planteada desde el punto de vista gráfico se vería así



.

Dentro de los datos que se proporcionan se encuentra el centro, por lo que bastaría con determinar el radio para escribir la ecuación requerida. Como el radio de una circunferencia es perpendicular a sus tangentes, entonces la magnitud del radio es la distancia del centro a las tangentes, en particular, el radio es la distancia de C a la recta $5x - 12y + 2 = 0$ que llamamos l. Por esta razón, siguiendo (14.4), calculamos $d(C,l)$ a continuación

$$d(C,l) = \frac{|5(0) - 12(-2) + 2|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{26}{13} = 2\,.$$

Así, con el centro $C = (0,-2)$ y el radio $r = 2$, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-0)^2 + (y-(-2))^2 = 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + (y+2)^2 = 4\,.$$

❑

Y de la misma manera en la que escribimos la forma *general* de las ecuaciones de la recta y de la parábola, hacemos lo mismo con la circunferencia y cuando terminemos nos quedará completamente claro el porqué del nombre *general*. Desarrollemos la ecuación (17.1), para obtener

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

y sumando términos semejantes llegamos a

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0\,.$$

Nombramos como $D = -2h$, $E = -2k$ y por $F = h^2 + k^2 - r^2$, así la ecuación se puede escribir de la forma que describimos a continuación.

La ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{17.2}$$

representa una circunferencia y es la forma *general* de ésta.

Acabamos de deducir la ecuación en su forma general a partir de la forma ordinaria, pero si nos enfrentamos a una ecuación en forma general ¿cuál es su forma ordinaria?, ¿cómo obtener el centro y radio de la circunferencia? A partir de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ vamos a obtener la forma ordinaria, comenzando por completar los cuadrados para x y y,

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = 0$$

y factorizando obtenemos

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2-\left(\frac{D}{2}\right)^2-\left(\frac{E}{2}\right)^2+F=0\,.$$

Despejamos los binomios al cuadrado y llegamos a la forma ordinaria

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}\,.$$

En principio no cualquier valor para D, E y F son aceptables, ya que la cantidad que se encuentra a la derecha de la igualdad de la última ecuación debiera ser positiva (por ser el valor del radio al cuadrado), por eso decimos que si $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación general (17.2) realmente representa una circunferencia. Así, con la condición $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ es una circunferencia con centro en $(-D/2,-E/2)$ y radio $\sqrt{D^2+E^2-4F}/2$.

Ejemplo 17.4 *Deducir si la ecuación* $4x^2+4y^2+28x-8y+53=0$ *representa o no una circunferencia. En caso afirmativo, determinar su centro, radio y gráfica.*

Primero escribimos la ecuación dada en su forma general, que se obtiene dejando en los términos cuadrados el coeficiente uno (basta multiplicar por 1/4 la ecuación):

$$x^2+y^2+7x-2y+\frac{53}{4}=0\,.$$

Completamos el cuadrado para los términos x^2 y y^2 adecuadamente

$$x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+y^2-2y+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+\frac{53}{4}=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y-1)^2=0\,.$$

Esta ecuación tiene toda la forma de una ecuación para la circunferencia, pero resulta que el radio sería 0, por lo tanto estamos ante un caso degenerado en el sentido de que si es una circunferencia, pero con el radio más pequeño posible y de esta manera corresponde a un punto.

Por tanto, la ecuación no representa una circunferencia, representa un punto.

❏

Así como la recta necesitaba de dos puntos distintos para determinar su ecuación y la parábola necesitaba de tres, la circunferencia necesita de tres puntos para determinar su ecuación.

Ejemplo 17.5 *Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos* $(2,-2)$, $(-1,4)$ *y* $(4,6)$.

Cada uno de los puntos dados pertenece a la circunferencia, por lo tanto cada uno satisface la ecuación de la circunferencia, que es de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, por consiguiente sustituimos cada uno de los puntos en la ecuación,

- sustituimos $(2,-2)$ y obtenemos $8+2D-2E+F=0$,
- sustituimos $(-1,4)$ y obtenemos $17-D+4E+F=0$,
- sustituimos $(4,6)$ y obtenemos $52+4D+6E+F=0$.

Ahora contamos con tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y como las incógnitas son las mismas para todas las ecuaciones, entonces las resolvemos como un sistema lineal, es decir,

$$\begin{aligned} 2D-2E+F &= -8\,, && (1)\\ -D+4E+F &= -17\,, && (2)\\ 4D+6E+F &= -52\,. && (3) \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 la ecuación (2) y sumándola a la ecuación (1) tenemos

$$6E+3F=-42\,. \qquad (4)$$

Multiplicando por 4 la ecuación (2) y sumándola a la ecuación (3) tenemos

$$22E+5F=-120\,. \qquad (5)$$

Ahora resolvemos el subsistema de ecuaciones (4)-(5). Multiplicamos por (-5) la ecuación (4) y por 3 la ecuación (5) y las sumamos:

$$\begin{array}{rcccr} \text{-30E} & - & \text{15F} & = & 210 \\ \text{66E} & + & \text{15F} & = & \text{-360} \\ \hline \text{36E} & + & 0 & = & \text{-150} \end{array}$$

por lo que $E = -25/6$. sustituyendo en (4), obtenemos $F = -17/3$. Finalmente sustituimos los valores de E y F en (2) para obtener $D = 16/3$.

Así, con los valores encontrados de D, E y F, podemos escribir la ecuación en forma general

$$x^2 + y^2 + \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0\,.$$

Para hallar el centro y el radio de la circunferencia reescribimos la ecuación anterior en su forma ordinaria como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{16}{3}x + y^2 - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} &= 0 \\ x^2 + \frac{16}{3}x + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{6}y + \left(\frac{25}{12}\right)^2 - \left(\frac{25}{12}\right)^2 - \frac{17}{3} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 &= \frac{17}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2 \\ \left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2465}}{12}\right)^2, \end{aligned}$$

por tanto, el centro está es $(-8/3, 25/12)$, mientras que el radio mide $\sqrt{2465}/12$.

❑

17.1.1. Ejercicios:

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C = (-3, -5)$ y radio 7.

2. Determinar el radio y el centro de la circunferencia dada por $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$.

3. ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia $9x^2+9y^2+72x-12y+103 = 0$? ¿Y cuál es el área?

4. Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C = (7, -6)$ y que pasa por el punto $(2, 2)$.

5. Identificar las ecuaciones con su respectiva gráfica:

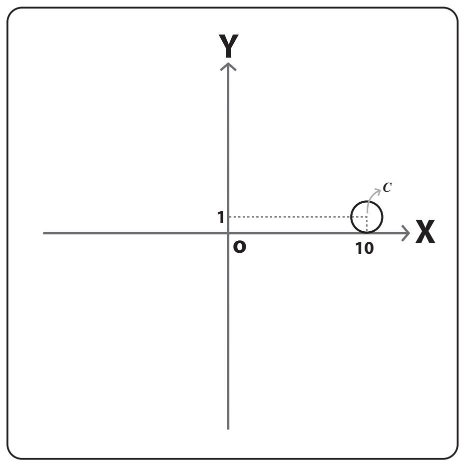
   a) $x^2 + y^2 + 5x = 0$,

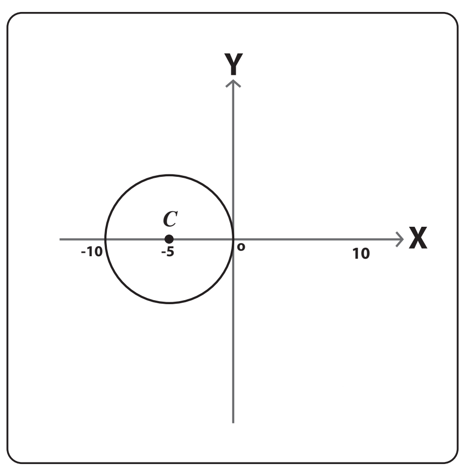
   b) $x^2 + y^2 = 1$,

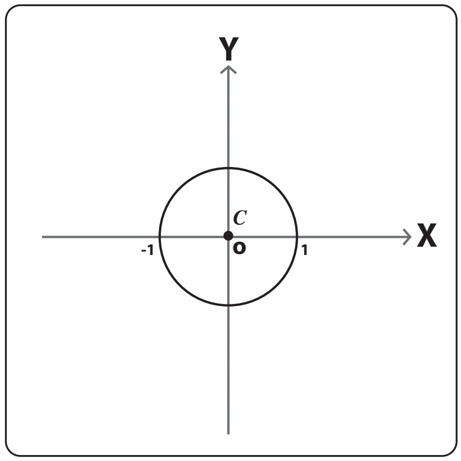
   c) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10} - x - \frac{y}{5} + 10 = 0$,

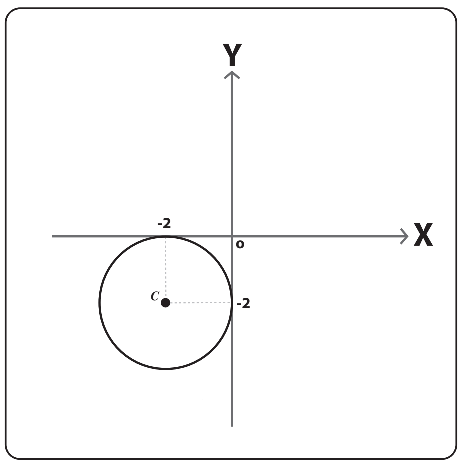
   d) $x^2 + y^2 - 2\pi(x + y) - (1 - \pi)^2 = 0$,

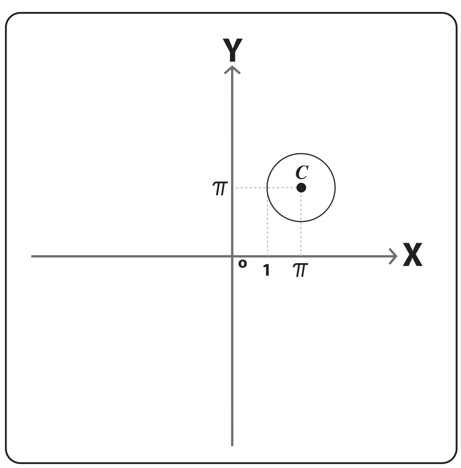
   e) $3x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 12 = 0$.






Y
C
X
-1
O
1


Y
-2
X
o
c
-2


Y
C
π
X
o
1
π

6. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C = (2, -4)$ y que es tangente al eje Y.

7. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C = (-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$?

8. Mostrar que $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$ no se cortan.

9. La ecuación de un circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Mostrar que el punto $A = (2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B = (-4, 1)$ es exterior.

10. Una circunferencia se centra en el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$ y $2x + 7y + 9 = 0$, con un radio de 5. ¿Cuál es su ecuación?

11. Mostrar que los puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$ y $(7, 3)$ son cocíclicos (que pertenecen al mismo círculo).

12. Una circunferencia pasa por los vértices $A = (-1, 0)$, $B = (2, 9/4)$ y $C = (5, 0)$ de un triángulo. Determinar la ecuación de la circunferencia.

13. Dar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$ en el punto $(4, 5)$.

14. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto $(6, 7)$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A = (7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B = (3, -1)$.

16. Con este ejercicio mostramos que no son suficientes dos puntos para determinar una circunferencia: una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(7, 3)$; hallar su ecuación.

17. ¿Por qué una recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ no puede ser tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$?

18. Determinar todas las rectas con pendiente 5 que son tangentes a $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$.

19. Escribir la ecuación de un círculo con área igual a 25π y que pasa por los puntos $(2, 2)$ y $(2, 10)$. ¿Cuántas circunferencias son posibles?

20. Determinar las intersecciones de la recta $y = 4x$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

21. Determinar si la recta $2x-y+3 = 0$ es secante (intersecta en dos puntos distintos), tangente o no intersecta a la circunferencia $x^2+y^2-2y-1 = 0$.

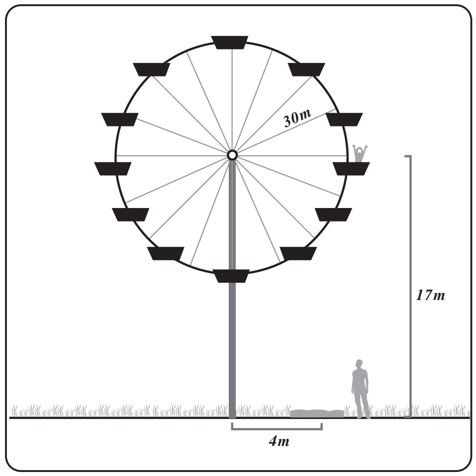
22. Dar las ecuaciones de una circunferencia y de una recta, de tal forma que la recta sea tangente a la circunferencia.

23. Dar las ecuaciones de una parábola y de una circunferencia, de tal forma que estas figuras sean tangentes (que sólo se intersecten en un sólo punto).

17.2. Aplicaciones.

Naturalmente hay muchas situaciones en las que aparecen circunferencias o problemas que se modelan con ecuaciones que dan lugar a circunferencias. A continuación veremos un par de ejemplos.

Ejemplo 17.6 *En un conocido parque de diversiones, la famosa "Rueda de la Fortuna" se atoró. La rueda tiene $30\,m$ de diámetro y está anclada en su centro a un poste que tiene de altura $17\,m$, como está en la figura. Los bomberos llegan a rescatar a una tipa que se quedó en una de las canastillas a una distancia de $9\,m$ respecto del poste y se encuentra por debajo del nivel del centro de la rueda. Los bomberos le piden que salte a una colchoneta que colocaron debajo de su ubicación, ¿desde que altura tendrá que saltar la tipa?*



.

Vamos a determinar la ecuación de la circunferencia que dibuja la rueda, ya que de esta manera podemos ubicar la posición de la tipa que se quedó atorada.

Colocamos el sistema de coordenadas de tal forma que el origen quede en el apoyo del poste con el piso y que el eje X coincida con el piso. A partir de los datos sabemos que el diámetro de la rueda es de $30\,m$, por lo que el radio es de $15\,m$. Como el poste mide $17\,m$, entonces el centro de la "Rueda de la Fortuna" tiene por coordendas $(h, k) = (0, 17)$. Ya con estos datos podemos describir la rueda en términos de la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria (véase la ecuación (17.1)):

$$x^2 + (y - 17)^2 = 15^2\,.$$

El bombero que va a rescatar a la tipa coloca la colchoneta a $9\,m$ respecto del poste que sostiene la rueda, entonces la colchoneta está sobre el eje X en 9, es decir, $x = 9$. Si sustituimos este valor en la ecuación de la rueda podremos obtener y, que nos indicaría la altura a la que se encuentra la tipa, así

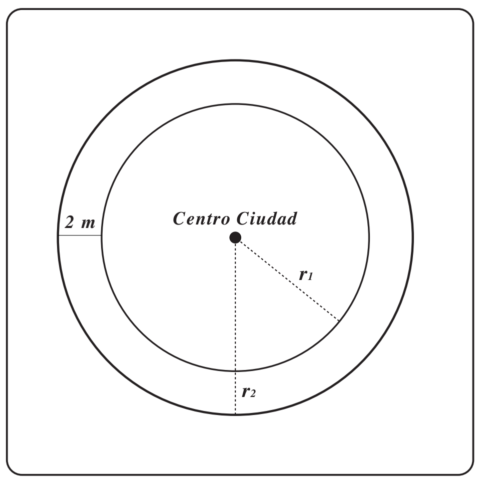
$$9^2 + (y - 17)^2 = 15^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm 12 + 17\,,$$

obteniendo dos valores: $y_1 = 29$ y $y_2 = 5$. Como la tipa se encuentra por debajo del nivel del centro de la rueda, entonces la solución correcta es y_2 y por lo tanto, la tipa tendría que saltar $5\,m$ para ser rescatada.

❑

Ejemplo 17.7 *Las vías de un tranvía se construyen de forma circular rodeando en forma circular el centro de una ciudad con fines turísticos. Debido a la forma de la vías, el desgaste en las llantas del tranvía es distinto, pudiendo ocasionar un accidente muy grave. Si las vías se encuentran a una distancia de* $2\,m$ *entre sí y el plano de las vías muestran que la vía que va por el interior del recorrido tiene por ecuación* $x^2 + y^2 - 250\,000 = 0$ *(en metros). ¿Cuánto recorren las llantas que van por la circunferencia interna de las vías y cuánto recorren las que van por la vía externa?*

Hagamos un trazado de los datos que nos proporciona el planteamiento,



.

Hemos señalado por r_1 el radio de la vía que van por la circunferencia interna y por r_2 el radio de la vía que va de manera externa.

De la ecuación de la vía interna, al escribirla en su forma ordinaria como la ecuación (17.1), resulta

$$x^2 + y^2 = 500^2\,,$$

donde identificamos que su radio es $r_1 = 500$. Por lo tanto, $r_2 = 502$. El recorrido de las llantas del tranvía por la vía interna es el perímetro de la circunferencia interna, es decir, las llantas recorren $2\pi r_1 = 2\pi 500 = 1\,000\pi\,m$ por vuelta, mientras que las llantas que van por la vía exterior recorren $2\pi r_2 = 2\pi 502 = 1\,004\pi\,m$.

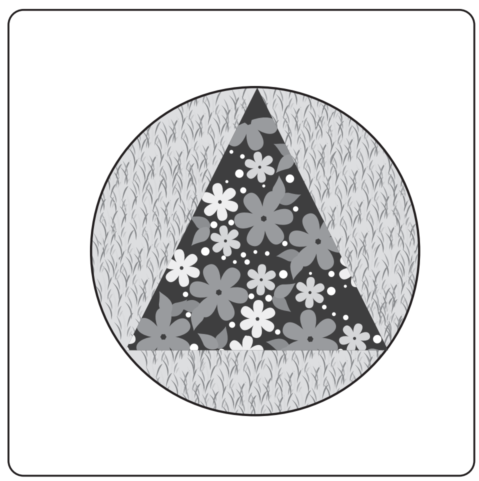
Efectivamente el desgaste de las llantas no es el mismo, las llantas del tranvía que van por la vía externa recorren $4\pi\,m$ más por vuelta recorrida.

❑

17.2.1. Ejercicios:

1. La señal de una radiodifusora tiene un alcance circular de $50\,millas$. Otra estación de radio, que está a $100\,millas$ al oriente y a 80 al norte de la primera tiene un alcance de $80\,millas$. ¿Hay zonas en las que se puede recibir la señal de ambas estaciones?

2. Un jardín exótico de forma circular tiene inscrito un triángulo equilátero de $10\,m$ de lado. Se le pide a un jardinero que siembre flores exóticas en el triángulo equilátero y en el resto que siembre pastito. El jardinero cobra $\$100/m^2$ por sembrar pastito y cobra $\$1\,000/m^2$ por sembrar las flores exóticas, ¿cuánto cobrará por construir el jardín?


.

3. Un incendio se propaga en un bosque. El gobierno inmediatamente toma medidas y pide que tres helicópteros con tanques de agua se coloquen en tres coordenadas específicas (respecto del centro de una ciudad), uno en $(-490, 0)$, otro en $(10, 500)$ y otro en $(510, 0)$. Una vez ubicados en las coordenadas tienen que seguir una misma trayectoria circular que pase por estos tres puntos (dados en metros). De esta manera se cerca el incendio y se evita su propagación más allá del área encerrada por el círculo. ¿Qué área resultará afectada por el incendio?.

4. Un agricultor posee dos terrenos sembrados de manzanos. La suma de sus áreas es de $832\,m^2$ y la diferencia de sus áreas es de $320\,m^2$. Si

los dos terrenos son cuadrados y se requiere la instalación de una malla electrificada por cuestiones de seguridad, ¿cuántos metros de malla debe de comprar?

5. Partiendo del mismo sitio, Marcos camina hacia el este y Eric hacia el norte. Después de tres horas, Eric ha caminado tres kilómetros más que Marcos y se encuentran a 15 kilómetros de distancia entre sí. Encuentra la velocidad a la que avanza cada uno de ellos.

Parte IV

Valor Absoluto.

Hemos hecho uso del valor absoluto anteriormente para referirnos a la distancia que separa dos puntos sobre una línea recta, pero ahora necesitamos definir de manera más general lo que entendemos por valor absoluto para poder aplicarlo en cualquier otra situación.

El *valor absoluto* de un número x se determina como

- $|x| = x$**, si** x **es no negativo,**
- $|x| = -x$**, si** x **es negativo.**

Por ejemplo, el valor absoluto de 5, que se indica como $|5|$, es 5 porque 5 es no negativo; en cambio, el valor absoluto de -5, denotado como $|-5|$, es 5 porque al ser -5 un número negativo, el valor absoluto es el negativo de ese número, es decir, el valor absoluto es $-(-5) = 5$. En pocas palabras, el valor absoluto deja sin cambios a todo número no negativo y a todo número negativo lo cambia de signo para que sea positivo.

Otra opción para definir el valor absoluto es $\sqrt{a^2} = |a|$.

De la propia definición sabemos, como una propiedad prioritaria, que $|a| \geq 0$ para cualquier a. Esto quiere decir que el valor absoluto es la distancia de un número a al 0 en la recta numérica, por eso el valor absoluto de a y de $-a$ es precisamente el mismo, como podemos apreciar en la figura 17.4.

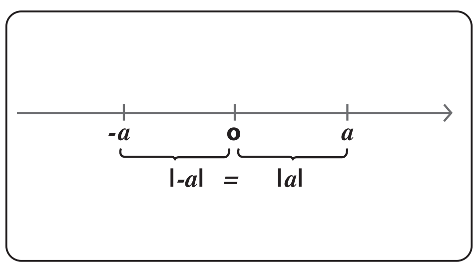


Figura 17.4: *Valor absoluto.*

Otras propiedades del valor absoluto también provienen directamente de su definición. Por ejemplo, si nos encontramos con la expresión $|(-8)(-5+4)|$ podemos determinar al valor final mediante dos formas:

- primero efectuamos el álgebra indicada dentro del valor absoluto, así $|(-8)(-5+4)| = |(-8)(-1)| = |8| = 8$ ó

- podemos calcular el valor absoluto de cada uno de los factores, así $|(-8)(-5+4)| = |-8||-1| = 8(1) = 8$.

O por ejemplo, podríamos considerar la siguiente situación:

$$\underbrace{\frac{7}{6} = \left|-\frac{7}{6}\right| =}_{\text{por una parte}} \left|\frac{7}{-6}\right| \underbrace{= \frac{|7|}{|-6|} = \frac{7}{6}}_{\text{por otra parte}}.$$

Estos resultados los podemos generalizar.

Dados a y b dos números,

$$|ab| = |a||b| \qquad \textbf{y} \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

A partir de aquí podemos concluir que si en la expresión $|a|^n$, n es un número par, entonces $|a|^n = a^n$.

Ejemplo 17.8 *Simplificar la expresión* $|x^2y^3|$.

Utilizamos las propiedades del valor absoluto para reducir esta expresión.

$\lvert x^2y^3\rvert$	es la expresión dada,
$= \lvert x^2\rvert\lvert y^3\rvert$	usamos la propiedad $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$,
$= x^2\lvert y^3\rvert$	usamos la propiedad $\lvert a\rvert^n = a^n$, si n es par,
$= x^2\lvert y^2y\rvert$	separamos la potencia para y,
$= x^2\lvert y^2\rvert\lvert y\rvert$	usamos la propiedad $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$,
$= x^2y^2\lvert y\rvert$	usamos la propiedad $\lvert a\rvert^n = a^n$, si n es par.

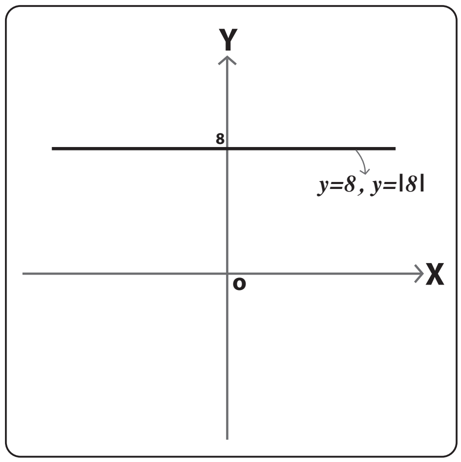
Y finalmente decimos que $|x^2y^3| = x^2y^2|y|$.

❏

En esta parte aplicaremos el valor absoluto a las expresiones que ya conocemos. Como el valor absoluto convierte en positivo cualquier cantidad o expresión algebraica, es muy sencillo graficar las expresiones que hasta el momento conocemos, porque basta graficar como si no hubiera valor absoluto para después reflejar respecto del eje de las abscisas todo lo que tenga como ordenada un número negativo.

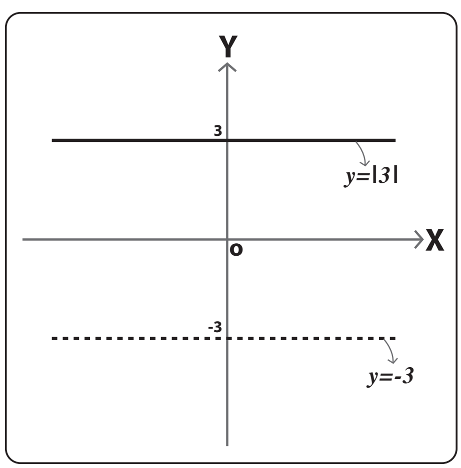
Ejemplo 17.9 *Graficar* $y = |8|$, $y = |-3|$, $y = |5x - 3|$ *y* $y = |-x^2 + 3|$.

- *Gráfica de* $y = |8|$*:* comenzamos graficando la recta horizontal $y = 8$,



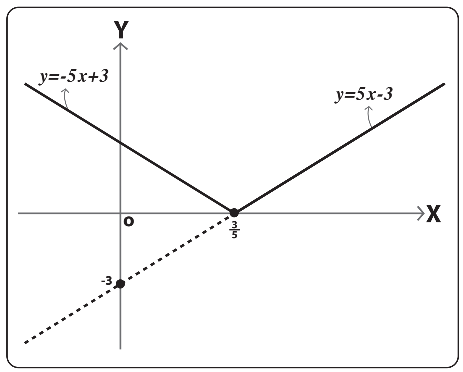
y notamos que toda la gráfica se encuentra por encima del eje X, por lo que la gráfica de $y = |8|$ es exactamente la misma. En realidad, desde antes lo sabíamos porque $y = |8| = 8$, es decir, son la misma recta.

- *Gráfica de* $y = |-3|$*:* al graficar la recta $y = -3$, nos percatamos que toda se encuentra por debajo del eje X, por lo que reflejamos toda la gráfica respecto del eje X y queda como



y así vemos que la gráfica de $y = |-3|$ es como si fuera $y = 3$. Esto es natural porque $y = |-3| = 3$.

- *Gráfica de* $y = |5x - 3|$*:* nuevamente empezamos por graficar como si no tuvieramos valor absoluto indicado ($y = 5x - 3$) y por ser una recta con pendiente 5 intuímos que la recta corta al eje X, presentando una región con ordenadas positivas y otra con ordenadas negativas. La región negativa la reflejamos respecto del eje X y queda



La gráfica de $y = |5x - 3|$ es como una "v". En realidad es la unión de dos gráficas, la de $y = 5x - 3$ y la de $y = -5x + 3$, porque siguiendo la definición de valor absoluto tenemos dos casos:

  - Si $5x - 3 \geq 0$ (que resolviendo queda $x \geq 3/5$), entonces $y = |5x - 3| = 5x - 3$. Quiere decir que para $x \geq 3/5$ la gráfica que debe aparecer es de $y = 5x - 3$.
  - Si $5x - 3 < 0$ (que resolviendo queda $x < 3/5$), entonces $y = |5x - 3| = -(5x - 3) = -5x + 3$. Quiere decir que para $x < 3/5$ la gráfica que debe dibujarse es de $y = -5x + 3$.

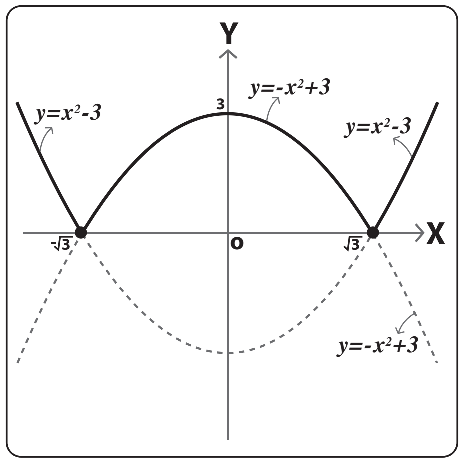
En la anterior figura señalamos cada una de las rectas por separado y la unión es la gráfica que buscamos.

- *Gráfica de* $y = |-x^2 + 3|$*:* la gráfica, al igual que en el caso anterior, es la unión de dos gráficas que resultan de los dos casos que abarca el valor absoluto.

  - Si $-x^2 + 3 \geq 0$ (equivalente a que $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$), entonces $y = |-x^2 + 3| = -x^2 + 3$. Esto significa que tenemos que graficar $y = -x^2 + 3$ para los valores $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

- Si $-x^2+3<0$ (equivalente a que $x \leq -\sqrt{3}$ ó $\sqrt{3} \leq x$), entonces $y = |-x^2+3| = x^2-3$. Esto significa que tenemos que graficar $y = x^2 - 3$ para los valores $x \leq -\sqrt{3}$ y $\sqrt{3} \leq x$.

Y así, con este desglose de datos, hacemos las gráficas respectivas a cada uno de los casos, las cuales indicamos, para luego marcar más claramente la gráfica que resulta para $y = |-x^2+3|$,



❑

17.2.2. Ejercicios:

1. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $|5x|$,

   b) $|-5x|$,

   c) $|x^2|$,

   d) $\left|\frac{x^2}{y}\right|$,

   e) $|x^8|$,

   f) $|5a^2b|$,

   g) $\left|\frac{7a}{b^2}\right|$.

2. Realizar la gráfica de las siguientes expresiones:

a) $y = |-2|$,

b) $y = |x|$,

c) $y = |x - 2|$,

d) $y = |4x - 5|$,

e) $y = \left|\frac{1}{2}x + 4\right|$,

f) $y = |x^2|$,

g) $y = |x^2 - 3|$,

h) $y = |-x^2 + 3|$,

i) $y = |x^2 - 7x + 10|$.

j) $y = |-x^2 - 1|$,

k) $y = |x^2 - x + 2|$.

Capítulo 18

Ecuaciones.

La única diferencia de resolver ecuaciones que contengan valor absoluto con las que no, es que tenemos que tener presente los dos casos que surgen de manera natural por la definición de valor absoluto...eso de que si algo es positivo entonces ocurre una cosa y si es negativo entonces ocurre otra cosa.

En los siguientes desarrollos mostramos distintos caminos para encontrar las soluciones, según sea más cómodo.

Ejemplo 18.1 *Resolver la ecuación* $|x| = 4$.

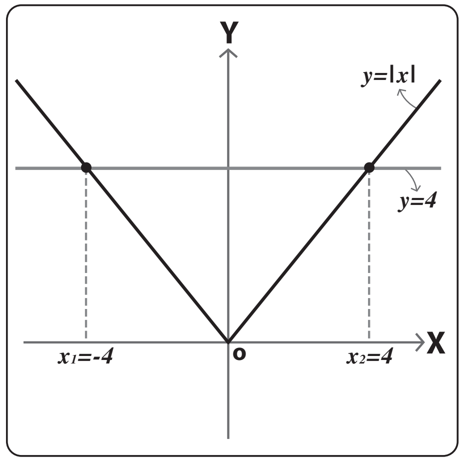
A partir de la definición de valor absoluto, tomamos en cuenta los dos posibles casos:

- Si $x \geq 0$, entonces tenemos la ecuación $x = 4$. La solución es directa y corresponde a la hipótesis de que $x \geq 0$, por lo que si es una solución válida.

- Si $x < 0$, entonces tenemos la ecuación $-x = 4$. La solución es $x = -4$ y correponde a la hipótesis de que $x < 0$, por tanto si es una solución factible.

Así, concluimos que las soluciones a la ecuación $|x| = 4$ son dos, dadas por $x = 4$ y $x = -4$.

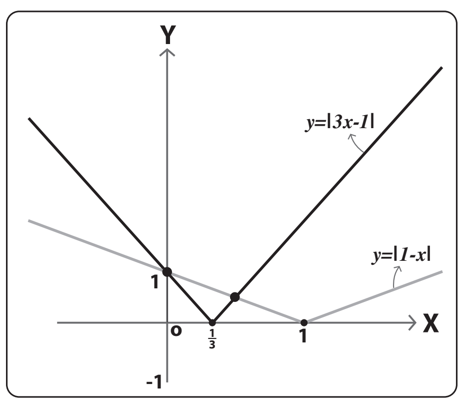
Aunque parezca curioso que haya dos soluciones, si analizamos la gráfica asociada a la ecuación nos daremos cuenta de porqué hay dos soluciones. La ecuación a resolver iguala $y_1 = |x|$ con $y_2 = 4$ y la solución es aquella o aquellos valores de x para los cuales $y_1 = y_2$. Graficando $y_1 = |x|$ y $y_2 = 4$ es fácil ubicar los puntos de intersección, que es donde ocurre $y_1 = y_2$,



Claramente observamos que las dos figuras se intersectan en dos puntos distintos.

Ejemplo 18.2 *Determinar cuántas soluciones tiene la ecuación* $|1 - x| = |3x - 1|$.

Si sólo queremos saber el numero de soluciones de la ecuación, entonces basta con hacer la gráfica asociada y ubicar las intersecciones entre las rectas. Haciendo las gráficas obtenemos



en donde ubicamos dos intersecciones, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones.

Para deteminar las soluciones podemos aplicar una de las propiedades del valor absoluto. Elevamos al cuadrado la ecuación,

$$|1 - x|^2 = |3x - 1|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad (1 - x)^2 = (3x - 1)^2\,,$$

aprovechando que elevamos la ecuación a una potencia par. Esta ecuación resultante es una cuadrática que ya sabemos resolver,

$$(1-x)^2 = (3x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(2x-1) = 0$$

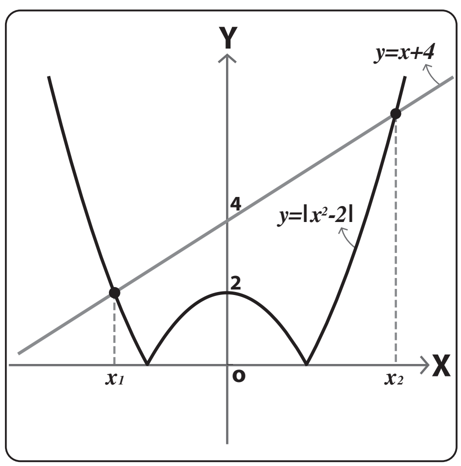
y por lo tanto, las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1/2$.

❑

¿Cuántas soluciones podría tener una ecuación que contenga en valor absoluto una expresión cuadrática? Pudiera darse el caso desde no tener ninguna solución hasta tener cuatro, además de tomar en cuenta el caso de contar con una infinidad de soluciones.

Ejemplo 18.3 *Dar las soluciones a* $|x^2 - 2| = x + 4$.

Graficamos primero para darnos una idea de las posibles soluciones a la ecuación. Por un lado graficamos $y_1 = |x^2 - 4|$ y por otro $y_2 = x + 4$, así



y hemos marcado las intersecciones entre las gráficas. Al parecer hay dos soluciones.

Para determinar las soluciones tenemos que resolver la ecuación $x^2 - 2 = x + 4$. La gráfica nos ayuda a decidir en cual de las dos opciones del valor absoluto trabajamos, en este caso elegimos el caso positivo, es decir, la parte de la parábola que $x^2 - 4 \geq 0$. De esta manera,

$$x^2 - 2 = x + 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0$$

y obtenemos que las soluciones son $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$.

Sin conocer la gráfica que nos diga que caso tomar en el valor absoluto, podemos calcular las soluciones para la otra ecuación, que sería $-x^2 + 2 = x + 4$, pero no nos arroja ninguna solución real, por tanto no altera lo que la gráfica señala.

❏

18.0.3. Ejercicios:

1. Resolver las ecuaciones que sigen:
   - $|3 - x| = 4$,
   - $5x - 3| = 2$,
   - $1 - |2 - x| = -6$,
   - $\left|\frac{1-x}{2}\right| = 1$,
   - $\left|x - \frac{3}{2}\right| = 2$,
   - $|3 - x| + |x| = 0$,
   - $\left|\frac{1-2x}{x}\right| = 4$,
   - $|2x + 1| = x + 3$,
   - $|-6x + 1| = 4x - 7$,
   - $|3 - x| = |1 + x|$,
   - $|2x - 1| = |4x + 3|$.
2. ¿Para qué valores de x la igualdad $\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = 1$ se satisface?
3. ¿Cuáles son las soluciones de $|3x - 5| = -1$?
4. Determinar la soluciones a las siguientes ecuaciones:
   - $|x^2 + x - 9| = 3$,
   - $|x^2 - 2x - 16| = 8$,
   - $|x| = x^2 + x - 3$,
   - $|x^2 - 4| = x + 2$.

5. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\left(\sqrt{-x^2+4x+1}\right)^2 = 1$?

6. Escribir una ecuación con valor absoluto que tenga 3 soluciones distintas y no más.

7. Escribir una ecuación que tenga 4 soluciones distintas.

8. Dar una ecuación que tenga solamente una solución.

9. ¿Qué se puede decir sobre el conjunto solución a la ecuación $|4x-3| = |3-4x|$?

10. Dada la ecuación $|x|^2 + |x| - 6 = 0$. ¿Cuál enunciado es correcto?

    a) Hay una sola solución.

    b) La suma de las soluciones es 1.

    c) La suma de las soluciones es 0.

    d) El producto de las soluciones es 4.

    e) El producto es las soluciones es -6.

11. Determinar el valor de p para los cuales la ecuación $|x^2 - 2x - 3| = p$,

    - tiene dos soluciones,
    - tiene tres soluciones,
    - tiene cuatro soluciones,
    - no tiene solución.

Capítulo 19

Desigualdades.

Nuevamente tratamos desigualdades y no mostraremos un método como tal, en realidad depende de la situación para elegir un camino. Como recomendación, mientras sea posible, es mejor comenzar por la gráfica, ya que nos podemos ahorrar mucho trabajo posteriormente. Comenzamos desarrollando algunas situaciones muy sencillas y vamos complicando poco a poco los planteamientos.

Ejemplo 19.1 *Dar el conjunto solución de* $|x| > 3$.

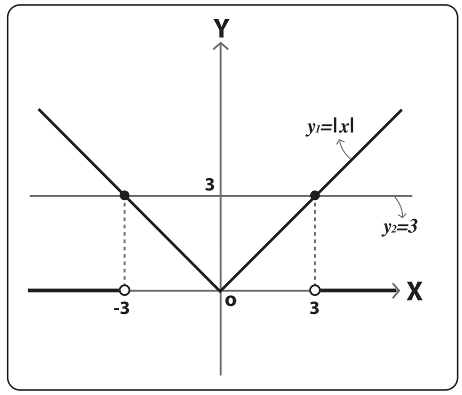
Escribimos los dos casos que abarca el valor absoluto de una expresión.

- Si $x \geq 0$, entonces la desigualdad que nos ocupa es $x > 3$. Estamos suponiendo que $x \geq 0$ y tenemos $x > 3$, entonces el conjunto solución es la intersección $\{x|x \geq 0\} \cap \{x|x > 3\}$, por tanto obtenemos $\{x|x > 3\}$.

- El otro caso es cuando $x < 0$, entonces la desigualdad que nos interesa es $-x > 3$. Es muy importante notar que lo que cambió fue la expresión que está en el valor absoluto, no multiplicamos por -1 la desigualdad. Continuando con el desarrollo, el conjunto solución en este caso es $\{x|x < 0\} \cap \{x| - x > 3\}$, o lo que es lo mismo $\{x|x < 0\} \cap \{x|x < -3\}$, por tanto obtenemos $\{x|x < -3\}$.

El conjunto solución solución final es la unión de los conjuntos solución de cada uno de los casos, recordando que cuando tenemos casos en una desigualdad, la unión de cada uno de estos es el conjunto que buscamos. Así, $\{x|x > 3\} \cup \{x|x < -3\}$ son todas las soluciones a la desigualdad.

Si graficamos $y_1 = |x|$ y $y_2 = 3$ podemos representar el resultado que obtuvimos,



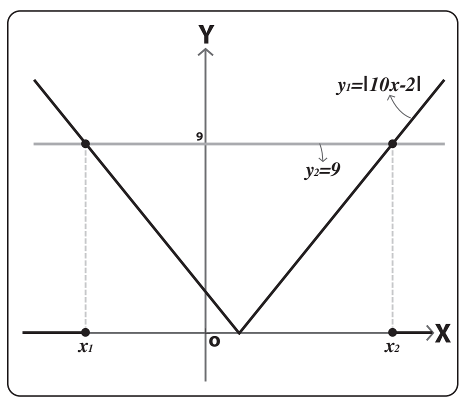
[h!]

donde señalamos los valores que puede tomar x para que $|x|$ sea mayor que 3.

❑

Ejemplo 19.2 *Resolver* $|10x - 2| \geq 9$.

Comenzamos haciendo la gráfica asociada a esta desigualdad, nombrando $y_1 = |10x - 2|$ y $y_2 = 9$,



En la figura indicamos la intersección entre las gráficas y localizamos los valores de x para los cuales $|10x - 2|$ toma valores mayores o iguales que 9.

Para hallar x_1 y x_2 resolvemos la respectiva ecuación $|10x - 2| = 9$. Elevamos al cuadrado toda la expresión y la resolvemos como sigue

$$(|10x - 2|)^2 = 9^2 \quad \Rightarrow \quad 100x^2 - 40x - 77 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{7}{10}\,, x_2 = \frac{11}{10}\,.$$

Siguiendo la gráfica que hicimos y tomando los valores x_1 y x_2, concluímos que el conjunto solución es

$$x \leq -\frac{7}{10} \quad \text{y} \quad x \geq \frac{11}{10}\,.$$

❑

Ejemplo 19.3 *Dar solución a* $|x-1| < 2|x-3|$.

Primero reescribimos la desigualdad, aprovechando que $2 = |2|$ y utilizando propiedades del valor absoluto,

$$|x-1| < 2|x-3| \quad \Rightarrow \quad |x-1| < |2||x-3| \quad \Rightarrow \quad |x-1| < |2x-6|.$$

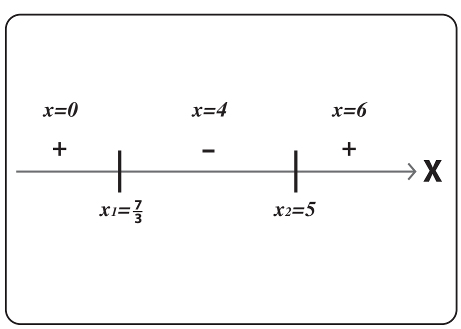
Aunque la gráfica no es muy difícil, ahora la evitaremos. Elevamos al cuadrado la desigualdad obtenida y pasamos todos los términos de un lado de la desigualdad,

$$\begin{aligned} (|x-1|)^2 < (|2x-6|)^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 < 4x^2 - 24x + 36 \\ &\Rightarrow \quad 0 < 3x^2 - 22x + 35\,. \end{aligned}$$

La desigualdad contiene todos los valores de x para los cuales la parábola $3x^2 - 22x + 35$ es mayor que cero, por lo que primero encontramos los puntos para los que la parábola es cero. Mediante la fórmula general de segundo grado tenemos

$$x_1 = \frac{7}{3}\,, \qquad x_2 = 5\,.$$

Fuera de estos dos valores especiales, la expresión $3x^2 - 22x + 35$ es mayor o menor que cero, pero no cero. Por esta razón dividimos en segmentos la recta numérica y después de ubicar x_1 y x_2, damos puntos de prueba en cada uno de los segmentos para determinar el signo que toma la expresión en cada uno de estos,

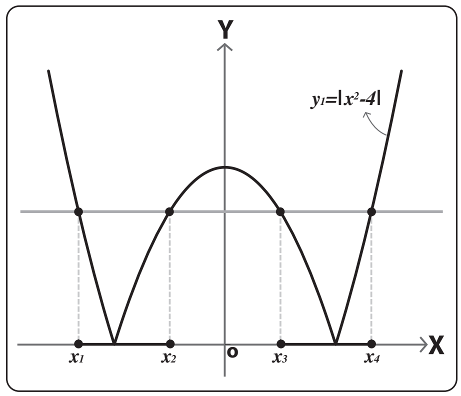


Así, decidimos que el conjunto solución es $x < 7/3$ junto con $x > 5$.

❑

Ejemplo 19.4 *Dada la desigualdad* $|x^2 - 4| \leq 3$, *determinar todas las soluciones posibles.*

La gráfica de $y_1 = |x^2 - 4|$ y de $y_2 = 3$, que forman la desigualdad, es



donde localizamos el conjunto, sobre el eje X, que correspondería al conjunto solución.

Para determinar los valores x_1, x_2, x_3 y x_4 tenemos que resolver las ecuaciones que surgen de los casos del valor absoluto.

- Si $x^2 - 4 \geq 0$ (que es lo mismo que $x \leq -2$ ó $x \geq 2$), entonces la ecuación que vamos a resolver es $x^2 - 4 = 3$, la que tiene por soluciones $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$. Estos valores no contradicen que $x \leq -2$ ó $x \geq 2$, por tanto $x_1 = -\sqrt{7}$ y $x_4 = \sqrt{7}$.

- Si $x^2 - 4 < 0$ (que es equivalente a que $-2 < x < 2$), entonces la ecuación que nos interesa resolver es $-x^2 + 4 = 3$, la cual tiene por soluciones 1 y -1. Ambos valores satisfacen $-2 < x < 2$ por lo que efectivamente, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$.

Observando la gráfica y ya teniendo los valores de $x_1, \ldots, x_4$, entonces decimos que todas las soluciones posibles satisfacen $-\sqrt{7} \leq x \leq -1$ y $1 \leq x \leq \sqrt{7}$.

❑

19.0.4. Ejercicios:

1. Resolver las siguientes desigualdades:

   a) $|-x| > 4$,
   b) $|b| \geq 0$,
   c) $|x-3| < 2$,
   d) $|2x-1| > 5$,
   e) $2\left|\frac{2x}{3}\right| \geq 4$,
   f) $|3-2x| < 3$,
   g) $\left|\frac{2x-9}{4}\right| < 1$,
   h) $|x^2+3x-1| < 3$,
   i) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$,
   j) $|4x-31 \leq 1$,
   k) $\left|\frac{2x-1}{x}\right| > 2$,
   l) $\left|\frac{3}{x}-2\right|$,
   m) $\left|\frac{4(x^2+1)}{2(x-1)}\right| \leq 2$,
   n) $\left|\frac{(1+x)(1-x)}{x}\right| \geq 0$.

2. ¿Cuál es el conjunto solución de las siguientes desigualdades?

   a) $6|3x-8| > 0$,
   b) $|x^2+4x-21| \leq 0$,
   c) $\frac{|4x+8|}{5x^2} < 0$,
   d) $\left|\frac{(x+1)(x+3)}{x+2}\right| > 0$
   e) $\left|\frac{(1+x)(1-x)}{x}\right| \geq 0$.

3. Dar el conjunto solución de

$$\frac{\big||x-1|+|x^2|\big|}{|x-1|} > 1\,.$$

4. Determinar si $x = 0$ es una solución para

$$\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1\,.$$