

# Prácticas con SIMetNum

Material de apoyo  
para la impartición  
de Métodos numéricos

María del Carmen Gómez Fuentes  
Jorge Cervantes Ojeda  
Elsa Báez Juárez  
Alejandra García Franco

Obra ganadora Concurso 2014 para publicación de libros de texto y materiales de apoyo a la Docencia



María del Carmen Gómez Fuentes  
Jorge Cervantes Ojeda  
Elsa Báez Juárez  
Alejandra García Franco

# Prácticas con SIMetNum

Material de apoyo para la impartición  
de Métodos numéricos



Esta investigación fue dictaminada por pares académicos

Clasificación Dewey: 519.4 P73

Clasificación LC: QA297 P73

Prácticas con SIMetNum : material de apoyo para la impartición de métodos numéricos / María del Carmen Gómez Fuentes... [et al.] -- México : UAM, Unidad Cuajimalpa, c2015.

100 p. : il., gráficas, col. ; 24 cm. -- (Una década de la Unidad Cuajimalpa de la Universidad Autónoma Metropolitana)

ISBN de la Colección Una Década: 978-607-28-0452-4

ISBN de este libro: 978-607-28-0468-5

1. Análisis numérico – Procesamiento electrónico de datos – Libros de texto 2. Ecuaciones diferenciales – Soluciones numéricas – Libros de texto 3. Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Cuajimalpa – Planes de estudio 4. Planes de estudio universitario - México

I. María del Carmen Gómez Fuentes, coaut. II. Cervantes Ojeda, Jorge, coaut. III. Báez Juárez, Elsa, coaut. IV. García Franco, Alejandra, coaut.

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dr. Salvador Vega y León  
Rector General

M. en C. Q. Norberto Manjarrez Álvarez  
Secretario General

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro  
Rector de la Unidad Cuajimalpa

Dra. Caridad García Hernández  
Secretaria de la Unidad

D.R. © 2015 UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Cuajimalpa  
.Avenida Vasco de Quiroga 4871,

Col. Santa Fe Cuajimalpa. Delegación Cuajimalpa de Morelos,  
C.P. 05348, México D.F. ( Tel.: 5814 6500)

[www.cua.uam.mx](http://www.cua.uam.mx)

ISBN DE LA COLECCIÓN UNA DÉCADA: 978-607-28-0452-4

ISBN DE ESTE LIBRO: 978-607-28-0468-5

Diseño de portada: Ricardo López Gómez.  
Formación y edición: Juan Carlos Rosas Ramírez.

# CONTENIDO

Introducción	7
Relación del contenido con el programa de estudio de la UEA <i>Métodos numéricos</i>	9
Conocimientos, habilidades y actitudes a desarrollar	11
Objetivos	13
Objetivo general	13
Objetivos específicos	13
Capítulo 1. Introducción a SIMetNum	15
1.1 Objetivo	15
1.2. ¿Qué es SIMetNum?	15
1.3 Estructura de SIMetNum	16
1.4 Cómo introducir funciones	18
Capítulo 2. Métodos para resolver ecuaciones no lineales	21
2.1 Método de Newton Raphson	21
2.1.1 Breve descripción del método	21
2.1.2 Guía de uso del método de Newton Raphson	21
2.1.3 Ejemplo de operación del método de Newton Rahson	22
2.2 Método de bisección	23
2.2.1 Breve descripción del método	23
2.2.2 Guía de uso del método del método de bisección	23
2.2.3 Ejemplo de operación del método de bisección	24
2.3 Práctica con SIMetNum	24
2.3.1 Objetivo conceptual	24
2.3.2 Contenido de la práctica	25
Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)	
Práctica #1: Solución de ecuaciones no lineales	25
2.4 Cuestionario	28

Capítulo 3. Métodos para sistemas de ecuaciones lineales	31
3.1 Generalidades	31
3.2 Método de Jácobi	32
3.2.1 Breve descripción del método	32
3.2.2 Guía de uso del método de Jácobi	33
3.2.3 Ejemplo de operación del método de Jácobi	34
3.3 Método de Gauss-Seidel	34
3.3.1 Breve descripción del método	34
3.3.2 Guía de uso del método de Gauss-Seidel	35
3.3.3 Ejemplo de operación del método de Gauss-Seidel	35
3.4 Práctica con SIMetNum	36
3.4.1 Objetivo conceptual	36
3.4.2 Contenido de la práctica	37
Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)	
Práctica #2: Solución de sistemas de ecuaciones lineales	37
3.5 Cuestionario	40
Capítulo 4. Métodos de interpolación	43
4.1 ¿Qué es la interpolación?	43
4.2 Método de Newton	43
4.2.1 Breve descripción del método	43
4.2.2 Guía de uso del método de Newton	45
4.2.3 Ejemplo de operación del método de Newton	45
4.3 Método de Lagrange	46
4.3.1 Breve descripción del método	46
4.3.2 Guía de uso del método de Lagrange	47
4.3.3 Ejemplo de operación del método de Lagrange	47
4.4 Práctica con SIMetNum	49
4.4.1 Objetivo conceptual	49
4.4.2 Contenido de la práctica	49
Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)	
Práctica #3: Interpolación de Newton y Lagrange	49
4.5 Cuestionario	55
Capítulo 5. Métodos de integración numérica	57
5.1 La integración numérica	57
5.2 Método Trapezoidal	57
5.2.1 Breve descripción del método	57
5.2.2 Guía de uso del método de trapezoidal	58

5.2.3 Ejemplo de operación del método Trapezoidal	58
5.3 Método de Simpson 1/3	60
5.3.1 Breve descripción del método	60
5.3.2 Guía de uso del método de Simpson 1/3	60
5.3.3 Ejemplo de operación del método de Simpson 1/3	60
5.4 Método de Simpson 3/8	62
5.4.1 Breve descripción del método	62
5.4.2 Guía de uso del método de Simpson 3/8	62
5.4.3 Ejemplo de operación del método de Simpson 1/3	62
5.5. Práctica con SIMetNum	63
5.5.1 Objetivo conceptual	63
5.5.2 Contenido de la práctica	64
Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)	
Práctica #4: Integración Numérica	64
5.6 Cuestionario	67
Bibliografía	69
Glosario de términos	71
Apéndice. Solución a las prácticas y cuestionarios	73



# Introducción

En el área de las ciencias e ingeniería existen muchos problemas para los cuales no es posible encontrar una solución analítica pero que, mediante el uso de métodos numéricos, es posible obtener una solución aproximada.

Cuando se imparte un curso sobre métodos numéricos, es necesario realizar los cálculos paso por paso para que quede claro cómo funciona cada método y los estudiantes puedan ir más allá de utilizarlo sin comprenderlo. En muchos casos, para mostrar algunas propiedades importantes de los métodos, se deben utilizar ejemplos en los que la cantidad de operaciones es muy grande, por ello se requiere el uso de computadoras, con el fin de observar el proceso completo en detalle. Lo usual es utilizar paquetes de software comercial (Mathematica, Maple, Matlab, etc.) para ejecutar los métodos numéricos. Estos paquetes, sin embargo, no suelen mostrar algunos parámetros que ayudan a comparar el funcionamiento de los métodos como, por ejemplo, el número de iteraciones que hacen antes de llegar a una solución. Por otro lado, el uso de los paquetes de software requiere de una capacitación previa del usuario y de ciertos conocimientos de programación, que no suelen tener los alumnos de licenciatura.

Para tratar de superar estas dificultades, desarrollamos SIMetNum. SIMetNum<sup>1</sup> (Sistema Interactivo de Métodos Numéricos), un sistema de software didáctico elaborado en la UAM Cuajimalpa de acceso *gratuito* y que opera *en línea* sobre cualquier sistema operativo. Su propósito es que los usuarios (los alumnos) puedan ejecutar fácilmente diversos métodos numéricos y estudiar sus propiedades. Con SIMetNum se pueden obtener resultados casi inmediatos, ahorrando tiempo y esfuerzo y evitando, al mismo tiempo, mu-

1 SIMetNum. Con aval del Comité Editorial de la DCNI (UAM Cuajimalpa) el 8 de diciembre de 2011. Certificado de registro 03-2012-021312202400-01 del Instituto del Derecho de Autor.



chos errores. El objetivo primordial de SIMetNum no es la ejecución rápida de los métodos, sino mostrar claramente sus características.

La utilidad y pertinencia de SIMetNum ha sido demostrada con un estudio realizado con alumnos de la UNAM,<sup>2</sup> en el que se constató las ventajas que tiene el uso de este sistema para la comprensión de los métodos numéricos.

En este trabajo, cada capítulo abarca un grupo de métodos numéricos que sirven para resolver un determinado tipo de problemas. Los capítulos contienen una breve descripción de cada método, una guía de usuario que explica la manera de introducir los datos con SIMetNum y un ejemplo en el que se ilustra el modo en que opera SIMetNum. Mostramos tanto la introducción de datos como el despliegue de los resultados.

Cada capítulo contiene también una práctica especialmente diseñada para ilustrar con SIMetNum ciertas propiedades clave del grupo de métodos numéricos a tratar. Las prácticas pretenden reforzar conceptos teóricos, ilustrar lo que ocurre en casos especiales, mostrar características de los métodos y hacer comparaciones entre estos. Al final de cada capítulo, se incluye un cuestionario de evaluación. Los resultados de la práctica y el cuestionario de cada capítulo se anexan en el apéndice.

<sup>2</sup> Gómez-Fuentes M., Cervantes-Ojeda J., Báez-Juárez E., García Franco A., Ramos-Carranza R., Interactive software tool for teaching Numerical Methods in Engineering, *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 9(1), pp. 107-123.

## Relación del contenido con el programa de estudio de la UEA *Métodos numéricos*

Las prácticas de laboratorio son una de las maneras más efectivas de lograr la participación activa de los alumnos. Esta participación activa es una de las modalidades de conducción del proceso de enseñanza-aprendizaje de la UEA y es una de las características centrales del modelo educativo de la UAM Cuajimalpa.

El plan de estudios de la carrera de Matemáticas Aplicadas se encuentra en un proceso de actualización que inició en junio de 2012. Durante este proceso, se modificó el programa de la UEA *Métodos numéricos*. Aunque actualmente sigue en curso el proceso de aprobación a las modificaciones hechas, hemos basado nuestro material de apoyo en el nuevo programa de la UEA *Métodos numéricos I*, cuyo contenido sintético es el siguiente.

1. Introducción
  - 1.1. Los métodos numéricos y su importancia en la ciencia e ingeniería.
  - 1.2. Representación de números en una computadora y aritmética de punto flotante.
  - 1.3. Definición de error. Error absoluto, relativo y porcentual.
  - 1.4. Error por redondeo, propagación de errores y error numérico total.
  
2. Solución de ecuaciones no lineales
  - 2.1. Características de los métodos para aproximar raíces.
  - 2.2. Método de punto fijo.
  - 2.3. Método de Bisección.
  - 2.4. Método de Newton-Raphson.
  - 2.5. Método de la Secante.
  - 2.6. Falsa Posición.

- 2.7. Método de Bairstow.
- 2.8. Implementación computacional de los métodos a través de aplicaciones específicas.
  
- 3. Interpolación y aproximación de funciones
  - 3.1 Interpolación mediante polinomios de Lagrange.
  - 3.2 Interpolación por diferencias divididas.
  - 3.3 Polinomio interpolante de Newton.
  - 3.4 Aplicaciones a la ciencia e ingeniería.
  
- 4. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
  - 4.1. Clasificación y características de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
    - 4.1.1. Métodos directos: Doolittle, Crout y Cholesky.
    - 4.1.2. Métodos iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel.
    - 4.1.3. Aplicaciones
  - 4.2. Sistemas de ecuaciones no lineales.
    - 4.2.1. Método de Newton.
    - 4.2.2. Aplicaciones en problemas que den origen a sistemas de ecuaciones no lineales.

Si bien SIMetNum no tiene implementados todos los métodos del contenido sintético, abarca el 90% de los temas, que son: métodos de solución de ecuaciones no lineales (sección 2 del contenido sintético), interpolación de funciones (sección 3 del contenido sintético) y sistemas de ecuaciones lineales (sección 4.1 del contenido sintético). SIMetNum contiene además métodos para la integración numérica.

Las prácticas con SIMetNum fomentan la exploración de las diferentes posibilidades de los métodos para la mejor comprensión de los conceptos estudiados. Este es otro de los principios contenidos en las modalidades de conducción del proceso de enseñanza-aprendizaje del programa de la UEA.

## Conocimientos, habilidades y actitudes a desarrollar

SIMetNum considera la mayoría de los métodos numéricos que se encuentran en el programa y cuyo uso es más común en las áreas científicas y de ingeniería. Mediante el uso de SIMetNum, se pretende que el estudiante conozca los métodos numéricos y los aspectos más relevantes que deben considerarse al utilizarlos.

La enseñanza de ciertas características de los métodos numéricos, por ejemplo, el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una tolerancia dada o los aspectos de los que depende la convergencia de un método, no es una labor sencilla y consume mucho tiempo en el salón de clases. Las prácticas con SIMetNum son experiencias de aprendizaje diseñadas para mostrar todos estos aspectos de una manera didáctica, de tal forma que el alumno observe fácilmente, por ejemplo, qué tan sensible es el número de iteraciones a los cambios en alguno de los datos de entrada y pueda comparar distintos métodos para analizar su pertinencia en la resolución de cierto tipo de problemas.

SIMetNum pretende incidir en el desarrollo de las habilidades analíticas y de comprensión de los estudiantes, ya que permite reconocer cuáles son los parámetros relevantes para el funcionamiento de los distintos métodos. Los estudiantes pueden explorar con relativa facilidad cómo cambian los resultados al modificar los datos específicos de entrada, de acuerdo con el método numérico que se utilice. Dada la simplicidad de uso de SIMetNum (al compararlo con paquetes comerciales), los alumnos pueden concentrarse en la comprensión de los métodos numéricos y no tanto en el funcionamiento del sistema. Se pretende también que los estudiantes desarrollen el pensamiento crítico, al comparar cómo un mismo problema puede resolverse utilizando diferentes métodos y generar las habilidades metacognitivas

que le permitirán elegir, entre dos o más métodos, el más adecuado para la resolución de un tipo específico de problema.

Las prácticas que proponemos están orientadas a que los alumnos analicen ciertos comportamientos de un método a partir de datos específicos de entrada, así como de los resultados que SIMetNum produce. De esta manera, podrán darse cuenta, de una manera fácil y amena, de los casos especiales y de las particularidades de algunos métodos. Esto permite reforzar lo visto en clase con una actividad práctica, lo cual fomenta la muy importante actitud de contrastar el conocimiento teórico con problemas prácticos.

Las prácticas van acompañadas de un cuestionario, el cual se recomienda aplicar a los alumnos justo después de realizar la práctica para medir la adquisición de conocimientos durante esta.

# Objetivos

## OBJETIVO GENERAL

Comprender las propiedades clave de los métodos numéricos básicos para la solución de ecuaciones no-lineales y sistemas de ecuaciones lineales, así como para la interpolación e integración numérica de funciones en una variable.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Utilizar en forma eficiente y efectiva la herramienta de cálculo numérico SIMetNum.
2. Interpretar y evaluar la efectividad de cada método implementado en SIMetNum.



# Capítulo 1. Introducción a SIMetNum

## 1.1 OBJETIVO

Conocer en qué consiste el Sistema Interactivo de Métodos Numéricos SIMetNum y su estructura.

## 1.2. ¿QUÉ ES SIMETNUM?

Es una herramienta gratuita desarrollada para apoyar la enseñanza de los métodos numéricos. SIMetNum permite mostrar algunas características importantes de los métodos, entre las que se pueden mencionar:

- Cómo varían los resultados cuando se utilizan diferentes métodos para resolver un mismo problema.
- Qué sucede con los resultados cuando varía la aproximación inicial en métodos iterativos.
- Qué efecto tiene cuando se varía la tolerancia en un mismo problema.

Otras ventajas que tiene el sistema SIMetNum, además de las ya mencionadas, es que resulta ser una herramienta de uso muy sencillo cuyos resultados ayudan a:

- los alumnos a corroborar los resultados de sus ejercicios,
- los profesores a elaborar y calificar tareas y exámenes.
- cualquier usuario que deba de resolver un problema específico o de aplicación (matemáticas, física, química, fisicoquímica, de ingeniería, etc.) y que requiera de alguno de los métodos implementados en SIMetNum.



Por otra parte, SIMetNum es un sistema diseñado modularmente, es decir que su diseño permite la adición de módulos para tratar otro tipo de problemas, cada uno de los cuales puede, a su vez, involucrar uno o más métodos.

Los métodos considerados dentro del sistema SIMetNum se agrupan, para mayor claridad, en las siguientes categorías: obtención de raíces, solución de sistemas de ecuaciones lineales, interpolación de funciones e integración de funciones. SIMetNum incluye una breve descripción de cada uno de los métodos, así como una guía electrónica que ayuda al usuario para que pueda ejecutarlos, explicando el significado y el formato de las entradas y salidas de cada método.

Cualquier usuario puede tener acceso a la última versión del sistema a través de la siguiente dirección electrónica: <http://libio.cua.uam.mx/~coordinacioncomp/SiMetNum/simv4.html>

El sistema cuenta con una parte teórica, que consiste en un conjunto de páginas HTML donde se expone una descripción básica de cada uno de los métodos, así como de una parte práctica donde el usuario introduce los datos necesarios y observa los resultados obtenidos una vez que ha seleccionado algún método. Es decir, el sistema no solo es una página web con ligas a otras páginas, sino que se ejecuta un trabajo en la computadora remota, con esto se obtienen las ventajas de un sistema didáctico que puede correr programas en una red de computadoras.

También hemos dado a SIMetNum un nombre en inglés: *Educational Active SYstem for Numerical Methods (EASyNuM)*, ya que se planea traducir todas las páginas a este idioma para que tenga una mayor cobertura.

El sistema está disponible en el servidor de la UAM Cuajimalpa y puede utilizarse desde cualquier computadora conectada a Internet que tenga instalada la máquina virtual de Java y Adobe Flash Player 10.

Con el fin de ejecutar correctamente los applets de SIMetNum, el usuario debe verificar que la seguridad de Java se encuentra en el nivel más bajo. Esto se hace normalmente en el menú del panel de control (programas / java / security).

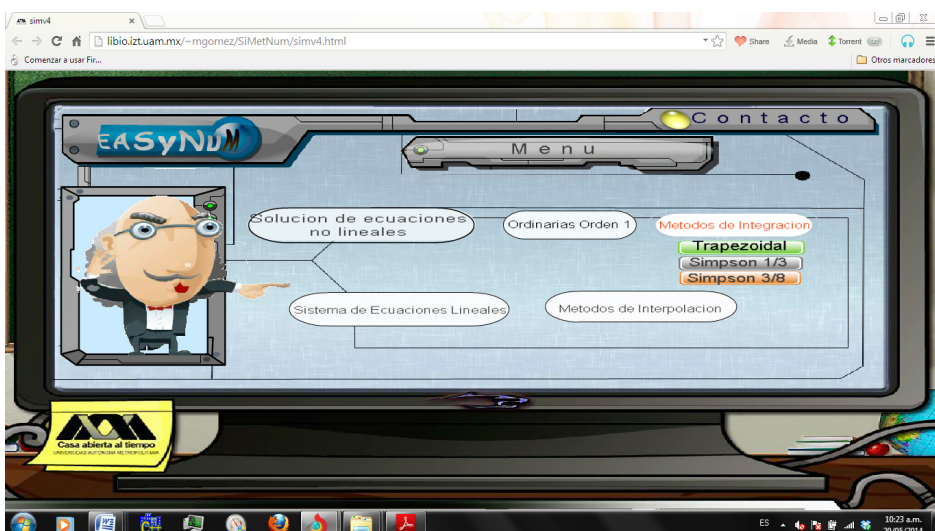
### 1.3 ESTRUCTURA DE SIMETNUM

El sistema permite a los usuarios estudiar y trabajar con los siguientes métodos, agrupados cómo se muestra a continuación:

- Grupo de métodos para la *solución de ecuaciones no lineales*:
  - Método de Newton Raphson.
  - Método de bisección.
- Grupo de métodos para la *solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales*:
  - Método de Jacobi.
  - Método de Gauss-Seidel.
- Grupo de métodos de *interpolación*:
  - Métodos de Newton.
  - Método de Lagrange.
- Grupo de métodos de *integración numérica*:
  - Método Trapezoidal.
  - Método de Simpson 1/3.
  - Método de Simpson 3/8.

En la figura 1 se muestra la página con los problemas que pueden resolverse con SIMetNum clasificados por grupos. Debajo de cada uno de ellos aparecen las ligas hacia los métodos. También aparece el grupo de métodos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden I. Como ya se mencionó, SIMetNum es un sistema modular y estamos trabajando sobre este nuevo módulo que actualmente se encuentra en desarrollo.

Figura 1. Métodos de SIMetNum agrupados por tipos de problema a resolver



## 1.4 CÓMO INTRODUCIR FUNCIONES

SIMetNum tiene un *parser* que permite al usuario introducir como dato cualquier tipo de función (algebraicas y trascendentes), lo que le da flexibilidad. Además, permite comparar métodos y explorar su comportamiento. Para utilizar este parser en los métodos que lo requieren, es necesario introducir las funciones, como se especifica a continuación:

1. Cuando se introduce una función de una sola variable, el nombre de la variable debe ser:  $x$ .
2. Cuando la función es de dos variables, los nombres de las variables deben ser:  $x$ ,  $y$ .
3. Las funciones trascendentes permitidas y su sintaxis se muestran en la tabla 1.1:

Tabla 1.1. Sintaxis de las funciones trascendentes en SIMetNum

Nombre de la función	Sintaxis
$e(\text{expresión})$	EXP( <i>expresión</i> )
Logaritmo base 10	LOG( <i>expresión</i> )
Logaritmo natural	LN( <i>expresión</i> )
seno	SIN( <i>expresión</i> )
coseno	COS( <i>expresión</i> )
tangente	TAN( <i>expresión</i> )
cotangente	COT( <i>expresión</i> )
secante	SEC( <i>expresión</i> )
cosecante	CSC( <i>expresión</i> )
ArcoSeno	ASIN( <i>expresión</i> )
ArcoCoseno	ACOS( <i>expresión</i> )
ArcoTangente	ATAN( <i>expresión</i> )
ArcoCotangente	ACOT( <i>expresión</i> )
ArcoSecante	ASEC( <i>expresión</i> )
ArcoCosecante	ACSC( <i>expresión</i> )
Raíz Cuadrada	SQRT( <i>expresión</i> )

4. Una expresión es cualquier *operación válida* incluyendo una función.
5. En la tabla 1.2 se ilustran las operaciones válidas.

Tabla 1.2. Operaciones válidas en SIMetNum

Operación	Operador que debe utilizarse
Sum	+
Resta	-
Multiplicación	*
División	/
Potencia	^ (alt-94)

6. Se permite el uso de paréntesis.
7. Se pueden usar los espacios libremente.
8. Se puede usar mayúsculas, minúsculas o una combinación de las dos.



## Capítulo 2. Métodos para resolver ecuaciones no lineales

### 2.1 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

#### 2.1.1 Breve descripción del método

Este método consiste en obtener una mejor aproximación de la raíz tomando un valor inicial  $x_0$  y utilizando la siguiente fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

La función  $f(x)$  debe ser diferenciable.

#### 2.1.2 Guía de uso del método de Newton Raphson

Las **entradas** que requiere SIMetNum son:

- La función  $f(x)$  que debe ser una función continua.
- La derivada de la función  $f'(x)$ .
- Un valor inicial  $x_0$ .
- Una tolerancia  $\epsilon$  que será la condición de paro. El método termina cuando se cumple con la condición:  $|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon$

Las **salidas** que se obtienen con SIMetNum son:

- Para los resultados parciales:

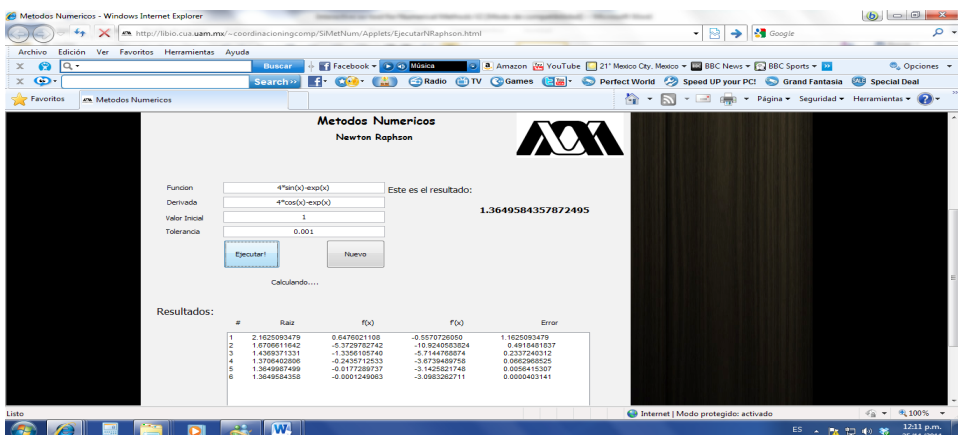
- Número de iteración.
- $f(x_i)$
- $f'(x_i)$
- $|x_{i+1} - x_i|$
- El resultado final es la raíz encontrada.

### 2.1.3 Ejemplo de operación del método de Newton Rahson

1. Si la función de la cual se va a obtener una raíz es:  $f(x) = 4\sin(x) - e^x$   
Se debe introducir de la siguiente manera:  $4*\sin(x) - \exp(x)$
2. Se debe introducir la derivada de la función, que es:  $f'(x) = 4\cos(x) - e^x$   
De la siguiente forma:  $4*\cos(x) - \exp(x)$
3. El valor inicial: 1
4. La tolerancia que se requiere para detener los cálculos es la diferencia entre el nuevo valor calculado y el valor anterior, es decir:  
Tolerancia =  $x_{i+1} - x_i$   
Por ejemplo, una tolerancia de 0.1 requiere de menos cálculos que una tolerancia de 0.0001, sin embargo, con 0.0001 se obtiene un mejor resultado. La tolerancia que se introducirá será: 0.001
5. La aproximación a la raíz encontrada es: 1.3649584357 en seis iteraciones.

En la figura 2.1 se muestra la pantalla de SIMetNum.

Figura 2.1. Resultados del método de Newton Rapshon con SIMetNum



## 2.2 MÉTODO DE BISECCIÓN

### 2.2.1 Breve descripción del método

Este método consiste en obtener una mejor aproximación de la raíz a partir de un intervalo inicial  $(x_{inf}, x_{sup})$ , en el cual hay un cambio de signo en la función, es decir:  $f(x_{inf}) * f(x_{sup}) < 0$

El primer paso es obtener el punto medio:

$$x_{media} = \frac{x_{inf} + x_{sup}}{2}$$

$x_{media}$  es una primera aproximación a la raíz, a la que llamaremos  $x_i$ , en seguida se toma un nuevo intervalo, pero ahora más pequeño, considerando que siga existiendo un cambio de signo en la función, es decir, si  $f(x_{inf}) * f(x_{media}) < 0$ , entonces el nuevo intervalo será  $(x_{inf}, x_{media})$  y, en caso contrario, el nuevo intervalo será  $(x_{media}, x_{sup})$ . Al repetir nuevamente el proceso, llamaremos  $x_{i+1}$  a la siguiente  $x_{media}$ . El método termina cuando se cumple con la condición de paro:  $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$ , es decir, la diferencia entre la raíz anterior y la nueva raíz obtenida es menor o igual a la tolerancia.

### 2.2.2 Guía de uso del método del método de bisección

Las **entradas** que requiere SIMetNum son:

- La función  $f(x)$  que debe ser una función continua.
- Un intervalo inicial  $(x_{inf}, x_{sup})$  en el que debe existir un cambio de signo de la función.
- Una tolerancia  $\varepsilon$  que será la condición de paro.

Las **salidas** que da SIMetNum son:

- Para los resultados parciales:
  - F Número de iteración.
- La  $x_{media}$  de cada iteración ( $x_{i+1}$ )



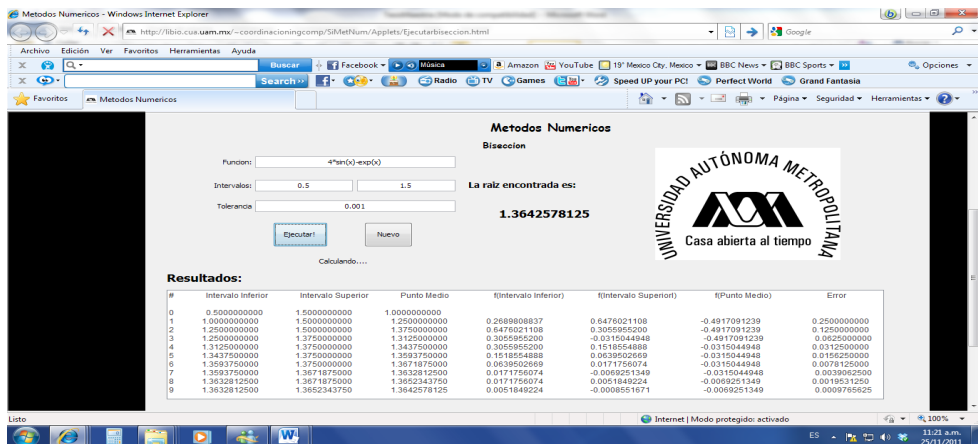
- $|x_{i+1} - x_i|$
- El resultado final es la raíz encontrada.

### 2.2.3 Ejemplo de operación del método de bisección

1. Si la función de la cual se va a obtener una raíz es:  $f(x) = 4\sin(x) - e^x$   
Se debe introducir de la siguiente manera:  $4*\sin(x) - \exp(x)$
2. Se debe introducir un intervalo en el cual la función cambie de signo, si se proporciona un intervalo incorrecto el sistema se detiene hasta que se introduzca un intervalo correcto.  
Se introducirá el siguiente intervalo:  $[0.5, 1.5]$
3. La tolerancia que se introducirá será:  $0.001$
4. La aproximación a la raíz encontrada será:  $1.3642578125$

En la figura 2.2 se muestra la pantalla de SIMetNum.

Figura 2.2. Resultados del método de bisección con SIMetNum



## 2.3 PRÁCTICA CON SIMETNUM

### 2.3.1 Objetivo conceptual

El alumno podrá constatar la rápida convergencia del método de Newton-Raphson para algunas funciones. Observará el comportamiento del

método de bisección. Visualizará cómo aumenta el número de iteraciones conforme la tolerancia requerida disminuye. Finalmente, podrá comparar el método de Newton-Raphson con el de Bisección.

### 2.3.2 Contenido de la práctica

#### Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

##### Práctica #1: Solución de ecuaciones no lineales

1. Aplicar el método de Bisección y de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para aproximar una raíz de

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$$

Anotar el número de iteraciones y la raíz encontrada:

Método	Intervalo inicial	Resultado	Num. de iteraciones
Bisección	[-1, 0]	_____	_____
Bisección	[-1.5, 1]	_____	_____
Bisección	[-10, 0]	_____	_____
Bisección	[-100, 100]	_____	_____
Bisección	[-1000, 1000]	_____	_____

Método	Valor inicial	Resultado	Num. de iteraciones
Newton-Raphson	-1	_____	_____
Newton-Raphson	-10	_____	_____
Newton-Raphson	-100	_____	_____
Newton-Raphson	-1000	_____	_____
Newton-Raphson	100	_____	_____
Newton-Raphson	1000000	_____	_____

- 1.1. La aproximación obtenida con bisección es exactamente igual a la aproximación obtenida con Newton-Raphson?
- 1.2. En los casos de Newton-Raphson el valor inicial creció hasta un millón de veces. ¿Cómo creció el número de iteraciones para llegar a la aproximación de la raíz?

- a) El número de iteraciones creció también alrededor de un millón.  
 b) El número de iteraciones no aumentó demasiado.  
 c) El número de iteraciones fue el mismo.
2. Si se varía la tolerancia para la función anterior, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Bisección		Newton-Raphson	
	raíz obtenida	iteraciones	raíz obtenida	iteraciones
2.1. Con tolerancia de 0.01:	_____	___	_____	___
2.2. Con tolerancia de 0.00000001:	_____	___	_____	___

2.3. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron más las iteraciones al disminuir la tolerancia?

3. Aplicar el método de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para encontrar la raíz de

$$f(x) = x^3 + 0.5x^2 - 2.5x + 1 = 0$$

¿En cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Raíz	Iteraciones
3.1. Si el valor inicial es de 2:	_____	___
3.2. Si el valor inicial es de 1000:	_____	___
3.3. Si el valor inicial es de 1000000:	_____	___
3.4. Si el valor inicial es de -10:	_____	___
3.5. Si el valor inicial es de 0.1:	_____	___

- 3.6. ¿Por qué se obtuvieron diferentes aproximaciones en algunos de los casos?

4. Aplicar el método de Bisección y de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para encontrar la raíz de

$$f(x) = \text{Cos}(x) - x^2$$

Anotar el número de iteraciones y la raíz encontrada:

Método	Intervalo inicial	Resultado	Num. de iteraciones
<b>Bisección</b>	[-0.5, 1.5]	_____	_____

Método	Valor inicial	Resultado	Num. de iteraciones
<b>Newton-Raphson</b>	8	_____	_____

5. Si se varía la tolerancia para la función anterior, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Bisección	Newton-Raphson
	[-0.5,1.5]	valor inicial=8
raíz	iteraciones	raíz iteracio-
nes	obtenida	obtenida

5.1. Con tolerancia de 0.01: \_\_\_\_\_

5.2. Con tolerancia de 0.00000001: \_\_\_\_\_

5.3. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron mucho las iteraciones cuando se disminuyó la tolerancia?

6. Usando Bisección y tolerancia 0.0001, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Raíz	itera-
		ciones
6.1. Si a $\cos(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [-0.5, 1]:	_____	_____
6.2. Si a $\cos(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [0, 1]:	_____	_____
6.3. Si a $\cos(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [-1000, 1000]:	_____	_____

6.4. ¿La aproximación a la raíz es exactamente la misma en todos los casos anteriores?

7. Completa lo siguiente usando el método de Bisección para obtener una de las raíces de  $f(x) = \cos(x)$  con una tolerancia de 0.0001 .

Intervalo inicial	raíz	iteraciones
[0,10]	_____	_____
[0,100]	_____	_____
[0,1000]	_____	_____

7.1. ¿Por qué se obtienen aproximaciones a diferentes raíces?

## 2.4 CUESTIONARIO

Instrucciones: Después de haber realizado la práctica, contesta las siguientes preguntas.

1. Suponiendo que en un intervalo inicial dado solo se tiene una raíz,
  - 1.1. ¿qué sucede con el número de iteraciones  $n$  del método de bisección cuando el intervalo inicial se hace cien veces más grande?
    - a)  $n$  no aumenta
    - b)  $n$  aumenta un poco
    - c)  $n$  aumenta en 100
    - d) podría suceder cualquiera de las anteriores
  - 1.2. ¿Se obtiene exactamente la misma raíz con el método de bisección cuando el intervalo inicial varía y se deja fija la tolerancia?
2. Si en el método de bisección proporcionamos diferentes intervalos iniciales a una función con raíces múltiples, ¿esperas obtener aproximaciones hacia la misma raíz o hacia raíces diferentes?
3. Si tenemos una función con tres raíces conocidas, por ejemplo:

$$f(x) = x^3 + 0.5x^2 - 2.5x + 1 = 0$$

cuyas raíces son  $x_1 = -2$   $x_2 = 0.5$   $x_3 = 1$

y aplicamos el método de Newton-Raphson con un valor inicial cercano a la raíz de la extrema derecha:

$X_0 = 2$ , y se obtiene la raíz  $x=1$  en  $n$  iteraciones, ¿qué pasaría si ahora  $X_0$  vale 10000? (suponer la misma tolerancia en ambos casos).

- a) El número de iteraciones será mucho mayor a  $n$
- b) El número de iteraciones no aumenta demasiado
- c) El número de iteraciones será el mismo
- d) Puede pasar cualquiera de las anteriores

4. ¿Qué sucede con el número de iteraciones en los métodos de Bisección y Newton-Raphson cuando se requiere de mayor exactitud en la aproximación a una raíz, es decir, cuando se tiene una tolerancia más pequeña?
5. En general, y suponiendo que es posible aproximar las raíces de una función, sin mayor problema con cualquiera de los métodos de Bisección o de Newton-Raphson, ¿cuál de estos métodos será más rápido? ¿Por qué?
6. Si aplicamos el método de Bisección y el de Newton-Raphson a una misma función, con una tolerancia de 0.0001 en ambos casos y proporcionamos respectivamente un intervalo inicial  $[a_0, b_0]$  y un valor inicial  $X_0$ , de manera que se obtienen aproximaciones hacia la misma raíz, ¿la aproximación obtenida con bisección es exactamente igual a la aproximación obtenida con Newton-Raphson?



## Capítulo 3. Métodos para sistemas de ecuaciones lineales

### 3.1 GENERALIDADES

Muchos problemas relacionados con el campo de la ingeniería se pueden expresar en términos de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Cuando se resuelven numéricamente ecuaciones diferenciales pueden surgir sistemas lineales con 20 000 variables. Los equipos de cómputo disponibles en la actualidad podrían requerir incluso varios días para resolver estos sistemas por métodos directos (como eliminación o factorización).

Los métodos de *Jáco*bi y de *Gauss Seidel* son métodos iterativos con los que se resuelve el sistema lineal

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Comienzan con una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  a la solución  $\mathbf{x}$  y generan una sucesión de vectores  $\mathbf{x}^{(k)}$  que convergen a la solución  $\mathbf{x}$ .

Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$



O bien, en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Que, a su vez, se puede expresar como:  $Ax = b$ , donde  $A$  es la matriz de coeficientes,  $x$  es el vector de incógnitas y  $b$  el vector de términos independientes. La solución del sistema de ecuaciones es un conjunto de  $n$  valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones.

En la solución de estos problemas pueden presentarse tres casos:

1. *Solución única* → Sistema compatible determinado
2. *Más de una solución* → Sistema compatible e indeterminado (número infinito de soluciones)
3. *Sin solución* → Sistema incompatible

## 3.2 Método de Jácobi

### 3.2.1 Breve descripción del método

El *método de Jácobi* es un método iterativo con el cual se resuelve el sistema lineal:

$Ax = b$ . Comienza con una aproximación inicial  $x^{(0)}$  a la solución  $x$  y genera una sucesión de vectores  $x^{(k)}$  que convergen a la solución  $x$ .

Ilustrando el método de Jácobi con un sistema de ecuaciones de  $3 \times 3$ , si el vector:

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix}$$

es el vector aproximación a la solución  $x$  después de  $k$  iteraciones, entonces se tiene que para la siguiente aproximación:

$$x_i^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k) \end{pmatrix}$$

Para un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas se tiene la siguiente fórmula (usando una notación más compacta):

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^k)$$

Para  $1 \leq i \leq n$

### 3.2.2 Guía de uso del método de Jácobi

Las entradas que se requieren son:

- El número de variables del sistema:  $n$ .
- La matriz  $A$ .
- El vector  $b$ .
- El vector inicial  $x$ .
- Una tolerancia  $\varepsilon$  para determinar la condición de paro.

Las salidas que se requieren son:

- Para los resultados parciales:
  - Número de iteración.
  - El valor del vector  $x$  en cada iteración
- El resultado final es el vector solución  $x$  encontrado.
- En el caso en el que no haya convergencia, el sistema debe de hacer un máximo de 50 iteraciones e indicar que no hubo convergencia.

El criterio de paro elegido para el método de Jácobi es que la raíz cuadrada de la sumatoria de los cuadrados de las diferencias entre los elementos del vector de la nueva iteración  $\mathbf{x}^{k+1}$  y los de la iteración anterior  $\mathbf{x}^k$  sea inferior a la tolerancia  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{k+1} - x_i^k)^2}$$

### 3.2.3 Ejemplo de operación del método de Jácobi

1. La primera pantalla de ejecución del método pregunta por el número de variables del sistema.  
El botón "nuevo" sirve para borrar el número de variables:  $n$ .  
El botón "Capturar datos" sirve para que aparezca la segunda pantalla.  
Si el número de ecuaciones y variables es cuatro, entonces:
2. La segunda pantalla que se genera al dar click en "Capturar datos" despliega los campos de captura de una matriz "A" de  $n \times n$ , el vector "B" de tamaño  $n$ , y el vector "X" con el valor inicial, también de tamaño  $n$ . Es decir, el tamaño de "A", "b" y "x" depende del número de variables proporcionado en la primera pantalla. Se obtiene una buena visibilidad con sistemas hasta de  $8 \times 8$ .
3. La tolerancia que se requiere para detener los cálculos está dada por la siguiente fórmula:

$$\text{Tolerancia} = \sqrt{(x_1^{k+1} - x_1^k)^2 + (x_2^{k+1} - x_2^k)^2 + (x_3^{k+1} - x_3^k)^2 + \dots + (x_n^{k+1} - x_n^k)^2}$$

donde  $k$  es el número de la iteración y  $n$  es el número de variables del sistema.

4. Observar el ejemplo de ejecución del método de Gauss-Seidel.

## 3.3 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

### 3.3.1 Breve descripción del método

El *método de Gauss-Seidel* es también un método iterativo con el cual se resuelve el sistema lineal:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Comienza con una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  a la solución  $\mathbf{x}$  y genera una sucesión de vectores  $\mathbf{x}^{(k)}$  que convergen a la solución  $\mathbf{x}$ .

Ilustrando el método de Gauss-Seidel con un sistema de ecuaciones de  $3 \times 3$ , si el vector  $x^{(k)}$  es el vector aproximación a la solución  $x$  después de  $k$  iteraciones y es el mismo que el señalado en 3.2.1, entonces se tiene que para la siguiente aproximación:

$$x_i^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}) \end{pmatrix}$$

Para un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas se tiene la siguiente fórmula (usando una notación más compacta):

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k)$$

Para  $1 \leq i \leq n$

Las entradas, las salidas y la condición de paro para el método de Gauss-Seidel son exactamente las mismas que las señaladas para el método de Jácobi.

### 3.3.2 Guía de uso del método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel se opera exactamente de la misma manera que el de Jácobi. A continuación, presentamos un ejemplo.

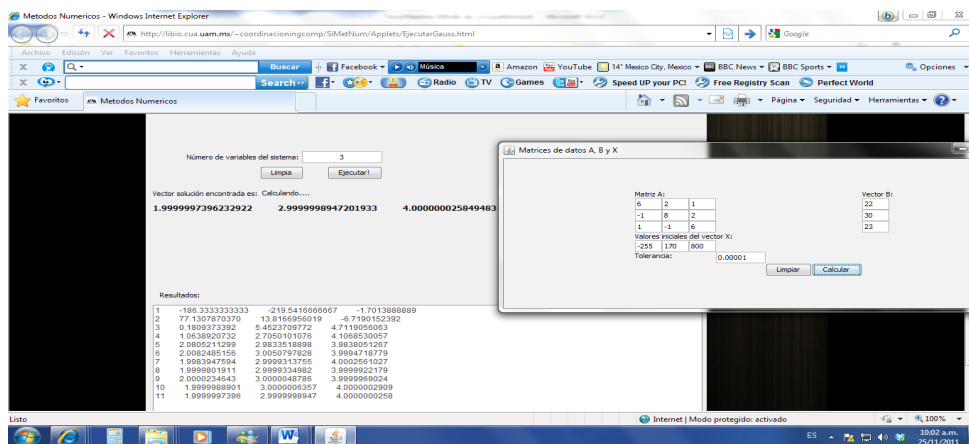
### 3.3.3 Ejemplo de operación del método de Gauss-Seidel

Como ejemplo, introduciremos al sistema el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \\ 23 \end{bmatrix}$$

con el vector solución inicial  $x(0) = [0, 0, 0]^T$  y una tolerancia de 0.00001. En la figura 3.1 se puede observar que SIMetNum da la solución aproximada (2.00000, 3.00000, 4.00000) en aproximadamente ocho iteraciones. Si reemplazamos el vector solución inicial por  $x(0) = [-255, 170, 800]^T$ , entonces podremos observar que solo se necesita 11 iteraciones para obtener la solución con la misma tolerancia. Con lo anterior podemos apreciar que, en algunos casos, el método de Gauss-Seidel converge rápidamente, incluso si el vector solución inicial está muy lejos de la solución exacta.

Figura 3.1. Resultados del método de Gauss Seidel con SIMetNum



## 3.4 PRÁCTICA CON SIMETNUM

### 3.4.1 Objetivo conceptual

El alumno podrá comparar el método de Jacobi con el de Gauss-Seidel, podrá observar la existencia y la no existencia de la convergencia en los métodos. Realizará experimentos con diferentes valores en el vector solución inicial para constatar que tan sensible es el método al cambio de la condición inicial. Finalmente visualizará como aumenta el número de iteraciones conforme la tolerancia requerida disminuye.

### 3.4.2 Contenido de la práctica

Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

Práctica #2: Solución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Aplicar el método de Jácobi y de Gauss-Seidel con una tolerancia de 0.0001 para aproximar un vector solución a los siguientes sistemas  $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$  con la misma matriz asociada  $\mathbf{A}$  pero distinto vector  $\vec{\mathbf{b}}$  de términos independientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Considerar en todos los incisos  $\vec{\mathbf{x}}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$  y  $\text{tol} = 0.0001$   
 Anotar el número de iteraciones y el vector solución encontrado.

a)  $\vec{\mathbf{b}} = (1, 1, 1, 1)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
--------	-----------------	---------------------

Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------	----------------------	--

Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------------	----------------------	--

b)  $\vec{\mathbf{b}} = (7, 1, 4, -5)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
--------	-----------------	---------------------

Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------	----------------------	--

Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------------	----------------------	--

c)  $\vec{\mathbf{b}} = (-4, 0, 3, -6)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
--------	-----------------	---------------------

Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------	----------------------	--

Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	
--------------	----------------------	--

- 1.1. ¿La aproximación obtenida con Jácobi es exactamente igual a la aproximación obtenida con Gauss-Seidel?
- 1.2. ¿Con cuál método se realizaron menos iteraciones?
2. Encontrar la aproximación a la solución del siguiente sistema usando diferentes valores para el vector inicial:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Considerar en todos los incisos una tolerancia de 0.00001

a)  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (1, -1, 0) = \mathbf{x}^s + \Delta \mathbf{x} = (0.55397, -0.7271, 0.27921)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

b)  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (10, -10, 0) = \mathbf{x}^s + 10 \Delta \mathbf{x} = (5.5397, -7.271, 0.27921)$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

c)  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (1000, -1000, 0) = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta \mathbf{x} = (553.97, -727.1, 0.27921)$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

- 2.1. El vector solución al sistema lineal de ecuaciones dado es  $\mathbf{x}^s = (-0.446, 0.2729, 0.2792)$ , con el *vector inicial* cerca de la solución  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + \Delta \mathbf{x}$  tuvimos que, con una tolerancia fija dada, el método de Jácobi llegó a un resultado en 13 iteraciones, y el de Gauss-Seidel llegó a un resultado en ocho iteraciones. Cuando el *vector inicial* fue  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta \mathbf{x}$  (1000 veces más lejos de la solución que el vector inicial anterior) ¿Cómo cambió el número de iteraciones de cada método?

- a) El número de iteraciones fue  $1000 * (13)$  y  $1000 * (8)$ , respectivamente.
- b) El número de iteraciones fue  $\ll 1000 * (13)$  y  $\ll 1000 * (8)$ , respectivamente.
- c) El número de iteraciones fue  $1000 * (13)$  para Jacobi y  $\ll 1000 * (8)$  para Gauss-Seidel.
- d) El número de iteraciones es  $\ll 1000 * (13)$  para Jácobi y  $1000 * (8)$  para Gauss-Seidel.

3. Aplicando los dos métodos y usando diferentes valores para la tolerancia, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales, donde:

$$\text{con } \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = (0, 0, 0)^t \quad \text{Sol Exacta } \vec{\mathbf{x}} = (2/3, 1/2, -1/3)^t$$

a)  $\text{tol} = 0.001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

b)  $\text{tol} = 0.00001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

c)  $\text{tol} = 0.0000001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

3.1. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron más las iteraciones al disminuir la tolerancia?

3.2. ¿Cuál de los dos métodos es más rápido?



4. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Ninguno de los métodos funciona, ya que al menos uno de los elementos de la diagonal es cero. Reordenando la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

5. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Ninguno de los métodos funciona, ya que al menos uno de los elementos de la diagonal es cero. Reordenando la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{b}$ .

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

6. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$	
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$	

### 3.5 CUESTIONARIO

Suponiendo que los métodos de Jácobi y de Gauss-Seidel convergen hacia la solución de un problema:

1. ¿La aproximación al vector solución que se obtiene con el método de Jácobi es exactamente igual a la que se obtiene con el método de Gauss-Seidel?
2. ¿Cómo varía el número de iteraciones en el método de Jacobi y en el de Gauss-Seidel cuando se disminuye la tolerancia empleada?
  - a) Aumenta
  - b) Disminuye el número de iteraciones
  - c) Permanece constante
3. ¿Cuál de los dos métodos es más rápido?
4. Suponiendo que el vector solución a un sistema lineal de ecuaciones dado es  $\mathbf{x}^s$  y damos un *vector inicial* cerca de la solución  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + \Delta\mathbf{x}$  tenemos que, con una tolerancia fija dada, el método de Jácobi llega a un resultado en  $n_1$  iteraciones y el de Gauss-Seidel llega a un resultado en  $n_2$  iteraciones. Si ahora el *vector inicial* es  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta\mathbf{x}$  el cual está  $1000 \Delta\mathbf{x}$  más lejos de la solución que el vector inicial anterior, ¿cómo esperas que cambie el número de iteraciones de cada método?
  - a) El número de iteraciones es  $1000 n_1$  y  $1000 n_2$ , respectivamente
  - b) El número de iteraciones es  $\ll 1000 n_1$  y  $\ll 1000 n_2$ , respectivamente
  - c) El número de iteraciones es  $1000 n_1$  para Jacobi y  $\ll 1000 n_2$  para Gauss-Seidel
  - d) El número de iteraciones es  $\ll 1000 n_1$  para Jacobi y  $1000 n_2$  para Gauss-Seidel
5. Las siguientes representan la forma general del método de Jácobi y del método de Gauss-Seidel, donde puede observarse fácilmente que si alguno de los coeficientes  $a_{ii}$  que se encuentran en la diagonal de la matriz A asociada al sistema es cero, ninguno de los métodos funcionará:

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^k)$$

Jácobi

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k)$$

Gauss-Seidel

En tal caso, ¿qué se puede hacer para evitar, en lo posible, que alguno de los coeficientes de la diagonal sea cero y, con ello, aumentar la probabilidad de obtener convergencia en los resultados?

6. ¿Alguno de los dos métodos asegura la convergencia de cualquier sistema lineal de ecuaciones?

## Capítulo 4. Métodos de interpolación

### 4.1 ¿QUÉ ES LA INTERPOLACIÓN?

En algunas ocasiones, no se tiene una función continua, sino valores de la función  $y(x)$  específicos para una  $x$  dada. A estas funciones se les conoce como *funciones tabulares* y son de la siguiente forma:

$x$	$y(x)$
$x_0$	$y_0$
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$y_n$

La *interpolación* requiere el cálculo de los valores de una función  $y(x)$  para argumentos entre  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  en los cuales se conocen los valores  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ , en otras palabras, interpolar es recuperar los valores de una función en puntos intermedios dada una tabla de valores de esta función.

### 4.2 MÉTODO DE NEWTON

#### 4.2.1 Breve descripción del método

Para poder realizar una *interpolación de Newton* es necesario que los valores de las  $x$  dadas en la función tabular tengan un *espaciamiento constante*,

es decir, la diferencia entre una  $x_i$  y una  $x_{i+1}$  debe ser siempre la misma, al espaciamento se le denota con la letra  $h$ .

El primer paso para la interpolación de Newton es obtener la *tabla de diferencias*. A continuación se muestra un ejemplo del formato estándar de una tabla de diferencias finitas de una función tabular con cinco datos:

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_0$	$y_0$				
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$			
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

De esta tabla se puede observar que las  $k$ -ésimas diferencias de una función tabular están dadas por:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Por otra parte, una vez teniendo una  $x_{inicial}$  en la tabla y una  $x_{Ainterpolar}$ , podemos obtener la  $y_{interpolada}$  utilizando el *polinomio de Newton* que es el siguiente:

$$y_{interpolada} = y_0 + \binom{k}{1} (\Delta y_0) + \binom{k}{2} (\Delta^2 y_0) + \binom{k}{3} (\Delta^3 y_0) + \dots + \binom{k}{l} (\Delta^l y_0)$$

En este polinomio  $y_0$  se refiere a  $y(x_{inicial})$ , mientras que  $k$  está dada por la siguiente fórmula:

$$\binom{k}{l} \quad k = \frac{x_{Ainterpolar} - x_{inicial}}{h}$$

son las *combinaciones de  $k$  elementos combinados de  $l$  en  $l$* . Como en este caso,  $k$  es comúnmente un número fraccionario, entonces se usa la fórmula:

$$\binom{k}{l} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-l+1)}{l!}$$

Normalmente usando un polinomio de Newton de tercer grado, es decir, hasta las terceras diferencias, se obtiene una interpolación bastante aceptable, sin embargo, SIMetNum puede trabajar con un polinomio de Newton de grado 5.

#### 4.2.2 Guía de uso del método de Newton

Para ejecutar este método aparecen varias pantallas.

1. En la primera pantalla se pregunta por:
  - el número de datos de la función tabular, (hasta ocho datos),
  - el valor de la primera  $x$  de la tabla,
  - el espaciamento, el cual debe ser constante en toda la tabla.El botón "nuevo" es para borrar todos los campos de los datos.  
El botón "Capturar datos" es para que aparezca la segunda pantalla.
2. En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de  $x$  precalculados (estos datos no se pueden alterar). Es necesario introducir los valores de  $f(x)$  en la tabla.
3. El valor de  $x$  a interpolar, es decir, obtener su interpolada  $f(x)$ , debe de estar dentro del rango de la tabla, de lo contrario el sistema se detiene hasta que se introduzca una  $x$  a interpolar correcta.
4. La  $x$  inicial debe ser un valor con el cual se iniciará la aproximación de la función.
5. Para terminar se debe presionar "Interpolar". El programa termina mostrando la tabla de diferencias y el resultado en la parte inferior.

#### 4.2.3 Ejemplo de operación del método de Newton

1. En la primera pantalla se pregunta por:
  - el número de datos de la función tabular (hasta ocho datos).  
En este ejemplo consideraremos cinco datos en la tabla.
  - El valor de la primera  $x$  de la tabla.
  - Aquí proporcionamos el primer número  $x$  dentro de la tabla, en este ejemplo 0.5
  - El espaciamento (debe ser constante en toda la tabla). En este ejemplo es 0.5.El botón "nuevo" es para borrar todos los campos de los datos.  
El botón "Capturar datos" es para que aparezca la segunda pantalla.

- En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de  $x$  precalculados (estos datos no se pueden alterar). Es necesario introducir los valores de  $f(x)$  en la tabla.

En este ejemplo, introducimos:

$x$	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-0.638961	0	0.394446	0.638961	0.793349

- El valor de  $x$  a interpolar, es decir, obtener su interpolada  $f(x)$ , debe de estar dentro del rango de la tabla, de lo contrario el sistema se detiene hasta que se introduzca una  $x$  a interpolar correcta. En este caso la  $x$  a interpolar comienza con 0.5.
- La  $x$  inicial debe de ser un valor con el cual se iniciará la aproximación de una función.

En este caso el valor a aproximar es  $f(0.75)$  y daremos como  $x$  inicial 0.5.

- Para terminar, se debe presionar "Interpolar". En la figura 4.1 se observa la pantalla de SIMetNum con los resultados. El programa termina mostrando la tabla de diferencias y el resultado en la parte inferior.

Figura 4.1. Resultados de la interpolación de Newton con SIMetNum

**Numeric Methods**  
Newton

Number of data in the table:   
 First 'X' in the table:   
 Spacement:

Interpolating...

0.500000	-0.638961	0.638961	-0.244515
1.000000		0.394446	-0.149931
1.500000	0.394446	0.244515	
2.000000	0.638961		
2.500000	0.793349		

Results:  
F(0.75) is: -0.288916125

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Casa abierta al tiempo

Table Data: x, F(x)

X	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
F(x)	-0.638	0	0.3944	0.6389	0.7933

Value of X to interpolate:  
  
 Initial X:

## 4.3 MÉTODO DE LAGRANGE

### 4.3.1 Breve descripción del método

Para poder realizar una *interpolación de Newton* es necesario que los valores de las  $x$  dadas en la función tabular tengan un *espaciamiento cons-*

tante, mientras que una *interpolación de Lagrange* se puede llevar a cabo sin importar si el espaciamiento es constante o variable. La *interpolación de polinomios de Lagrange* es una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de la tabla de diferencias, el polinomio de Lagrange se expresa como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$\Pi$  es el símbolo de "multiplicatoria" y significa *el producto de*. Por ejemplo, el polinomio de Lagrange de primer grado es:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Mientras que el polinomio de Lagrange de segundo grado es:

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

en este caso,  $f_n(x)$  es la  $y_{interpolada}$  y la  $x$  es la  $x_{Ainterpol}$ . Mientras más datos se tengan en la tabla, se podrá usar un polinomio de mayor grado, lo que dará mejores resultados.

#### 4.3.2 Guía de uso del método de Lagrange

El modo de operación del método de Lagrange es prácticamente el mismo que el del método de Newton, con la diferencia de que, como el espaciamiento no es constante, se deben ingresar tanto las  $x$  como las  $f(x)$  de la función tabular.

#### 4.3.3 Ejemplo de operación del método de Lagrange



Para ejecutar este método aparecen dos pantallas.

1. En la primera pantalla se pregunta por el número de datos de la función tabular (hasta ocho máximo).

En este ejemplo ingresamos un 4 para generar la tabla:

Número de datos de la tabla:

2. En la segunda pantalla se despliega la tabla del tamaño indicado. Es necesario introducir tanto los valores de  $x$  como los de  $f(x)$  en la tabla.

En este ejemplo ingresaremos los siguientes datos:

X	-1	0	3	7
F(x)	2	0	4	7

La  $x$  que se desea interpolar debe estar dentro del rango de la tabla, de lo contrario el sistema se detiene hasta que se introduzca una  $x$  a interpolar correcta. En este caso calcularemos  $f(-0.5)$ .

4. Con el resultado como el de la figura 4.2 se puede apreciar que, mientras más datos tenga la tabla, el resultado es mejor, ya que se utiliza un polinomio de Lagrange de mayor grado.

Figura 4.2. Resultados del método de Lagrange con SIMetNum

Tabla de datos: x, F(x)

X	-1	0	3	7
F(x)	2	0	4	7

Valor de X para interpolar:  
-0.5

Número de datos de la tabla:

Interpolando...

Resultados:  
Usando 3 arado de polinomio que pasa por 4 puntos, tenemos que:  $F(-0.5) = 0.69140625$

Metodos Numericos  
Lagrange

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Casa abierta al tiempo

## 4.4 PRÁCTICA CON SIMETNUM

### 4.4.1 Objetivo conceptual

El alumno podrá comparar el método de interpolación de Newton con el de Lagrange. En el de Newton podrá apreciar la tabla de diferencias que se genera y comparar los resultados de la interpolación probando con diferentes valores de  $x_0$ . En el método de Lagrange el alumno podrá constatar que el grado del polinomio de interpolación que se genera depende del número de datos de la tabla.

### 4.4.2 Contenido de la práctica

#### Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

#### Práctica #3: Interpolación de Newton y Lagrange

1. Sea  $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ .

1.1. La función tabular que se genera a partir de esta  $f(x)$  para cinco datos partiendo de  $x = 0.5$  con un espaciamiento de 0.5 es la siguiente:

$x$	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	-0.638961	0	0.394 446	0.638961	0.793349

SIMetNum ejecuta el método de interpolación de Newton con diferencias divididas de tercer orden (estamos trabajando para que se pueda aumentar este orden). Para generar el polinomio de aproximación de Newton dentro de SIMetNum, se requiere introducir como datos: el número  $n$  de puntos a considerar, el valor del primer punto  $x$  conocido y el espaciamiento  $h$ , a partir de los cuales se generan los  $n+1$  puntos  $x_i$  igualmente espaciados, además deben proporcionarse los valores de la función en estos puntos, el valor de  $x$  donde se desea aproximar  $f(x)$  y el valor de  $x_{\text{inicial}}$  a considerar. Este último valor debe coincidir con alguno de los  $x_i$  de la tabla de datos conocidos e indica a partir de qué punto se generará el polinomio de Newton, es decir  $x_0 = x_{\text{inicial}}$ .

Usando interpolación de Newton, encontrar los valores de  $f(x)$ , dar una  $x_{\text{inicial}} = 0.5$  y llenar la siguiente tabla:

X	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Newt}}(x)$ (Sol. Newton)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Newt}}(x) $
0.75	-0.28373		
1.25	0.221296		

1.2. Con la función tabular dada en 1.1, encontrar el polinomio interpolante de Lagrange de grado 3 y llenar la siguiente tabla:

x	Grado del polinomio interpolante	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{\text{Lagrange}}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagrange}}(x) $
0.75	3	-0.28373		
1.25	3	0.221296		

1.3. ¿Qué resultados se aproximan más a la solución exacta? ¿Por qué?

2. A continuación tenemos una función tabular que corresponde a  $f(x) = e^x$  con puntos que tienen un espaciamento  $< 1$ :

X	-1	-0.5	0	0.5	1	1.25
f(x)	0.367879	0.60653	1	1.648721	2.718281	3.490342

2.1. Encontrar el polinomio interpolante de Lagrange de grados 3, 4 y 5 y llenar la siguiente tabla (aprovechar la tabla introducida en SIMetNum para calcular el resultado de  $f(-0.75)$  y de  $f(0.25)$  en una sola ocasión):

x	Grado del polinomio interpolante	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{\text{Lagrange}}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagrange}}(x) $
-0.75	3	0.472366		
-0.75	4	0.472366		
-0.75	5	0.472366		
0.25	3	1.284025		
0.25	4	1.284025		
0.25	5	1.284025		

2.1.1. ¿Se cumple que la interpolación de Lagrange mejora conforme aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange?

2.2. Dando una  $x_{inicial} = 0$  para la función tabular dada al inicio del inciso 2 (con 4 puntos a partir de  $x=0$ ), encontrar los valores de  $f(x)$  con el método de interpolación de Newton y llenar la siguiente tabla:

$x$	$f_{exact}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{Newt}(x)$ (Sol. Newton)	$ f_{exact}(x) - f_{Newt}(x) $
0.25	1.284025		
0.75	2.117000		

2.3. ¿Por qué no se pueden obtener los resultados de la tabla en 2.2?

3. En el punto anterior se obtuvieron resultados de interpolación utilizando una función tabular que corresponde a  $f(x) = e^x$  con puntos que tienen un espaciamiento  $< 1$ , probemos ahora lo que sucede cuando aumenta este espaciamiento. Utilicemos la siguiente función tabular (aprovechar la tabla introducida en SIMetNum para calcular el resultado de  $f(-0.75)$  y de  $f(0.25)$  en una sola ocasión):

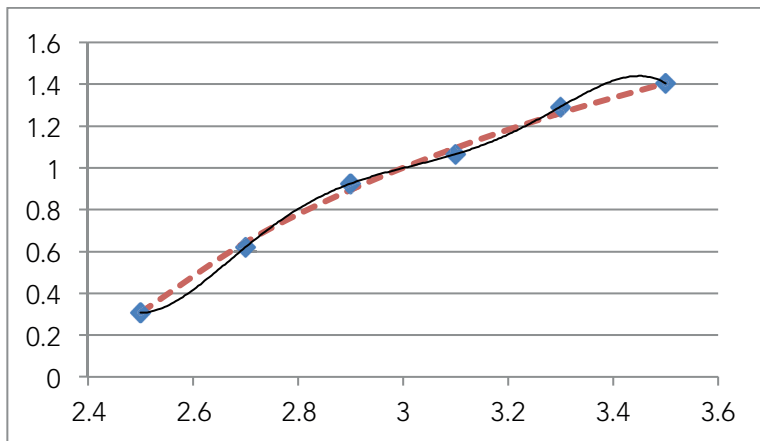
$X$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.367879	1	2.718281	7.389056	20.085536	54.59815	148.4131	403.4287	1096.6331

Completar la siguiente tabla:

$x$	Grado del polinomio interpolante	$f_{exact}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{Lagrange}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{exact}(x) - f_{Lagrange}(x) $
-0.75	3	0.472366		
-0.75	6	0.472366		
-0.75	8	0.472366		
0.25	3	1.284025		
0.25	6	1.284025		
0.25	8	1.284025		

- 3.1. ¿Se cumple que la interpolación de Lagrange mejora conforme aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange?
- 3.2. ¿Los puntos de la tabla están cerca de los puntos a interpolar?
4. Cuando se tiene una función tabular a partir de datos experimentales, es de esperar que algunos de los datos contengan ligeros errores. En estos casos, un polinomio interpolador de grado alto suele presentar oscilaciones, ya que tiende a modelar el comportamiento de los datos con todo y errores. En la siguiente gráfica, la línea punteada es  $f(x) = \ln(x-2) + 1$  y la línea continua corresponde a un polinomio de Lagrange de grado 5, este pasa por cada uno de los puntos, los cuales están ligeramente desviados de la curva  $f(x) = \ln(x-2) + 1$ , lo que ocasiona que el polinomio se aleje de la función a modelar.

Gráfica de  $f(x) = \ln(x-2) + 1$  y polinomio de Lagrange grado 5



Observemos este fenómeno con SIMetNum.

- 4.1. Sea la función  $f(x) = \ln(x-2) + 1$ . Los puntos  $f(x)$  se obtuvieron calculando  $\ln(x-2) + 1$ , por lo que son exactos.

X	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5
f(x)	0.306852	0.643325	0.894639	1.095310	1.262364	1.405465

Completar la siguiente tabla:

$x$	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
2.6	0.489174		
2.8	0.776856		
3	1		

En este caso, ¿los resultados de la interpolación son similares a los de la solución exacta?

4.2. Ahora supongamos que los datos son experimentales y tienen ligeros errores:

$X$	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5
$f(x)$	0.306852	0.620325	0.924639	1.065310	1.292364	1.405465

Completar la siguiente tabla:

$x$	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ Lagrange grado 5 Datos con error	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
2.6	0.489174		
2.8	0.776856		
3	1		

4.3. ¿Cómo son los resultados de la interpolación de Lagrange cuando se usaron datos con ligeros errores con respecto a los resultados que se obtienen con datos exactos?

5. De la teoría sabemos que la interpolación de Lagrange funciona bien con funciones polinomiales, también funciona correctamente para muchas otras funciones no polinomiales, por ejemplo, la función en 2 y 3. Sin embargo, hay que tener cuidado con las funciones que tienen comportamiento asintótico.

5.1. Sea la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  con los siguientes puntos:

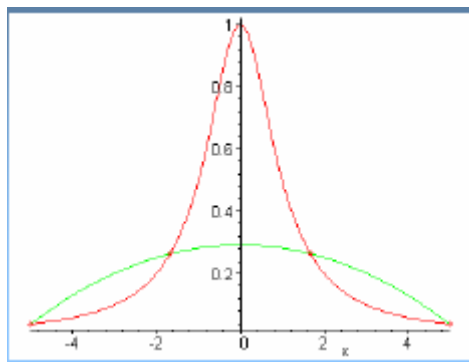
X	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2

Completar la siguiente tabla:

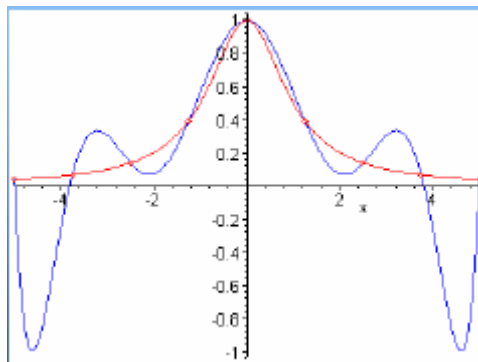
x	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
-2.75	0.1167		
-1.5	0.307692		
1.8	0.235849		

¿Los resultados de la interpolación son similares a los de la solución exacta?

La gráfica de  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  es la siguiente:



$f(x) = (1+x^2)^{-1}$ , la parábola corresponde a un polinomio de Lagrange de grado 2



Aquí se muestran  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  y el polinomio de Lagrange de grado 8

De las gráficas anteriores, se observa que cuando aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange, la interpolación no mejora en los extremos, sin embargo, sí mejora el modelado de la parte central de  $f(x)$ , donde no se presenta el comportamiento asintótico.

5.2. Sea la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  pero ahora con los siguientes puntos.

X	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
f(x)	0.307692	0.5	0.8	1	0.8	0.5

Completar la siguiente tabla:

$x$	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
-1.3	0.609756		
-0.25	0.941176		
0.75	0.640000		

Con los puntos de esta tabla, ¿los resultados de la interpolación mejoran?

¿Por qué crees que esto sucede?

#### 4.5 CUESTIONARIO

1. ¿Cómo debe ser el espaciamiento de la función tabular para poder comparar los resultados de la interpolación de Newton y los de la interpolación de Lagrange?
2. Si tenemos una función tabular con espaciamientos constantes y obtenemos resultados de interpolación con el método de Newton (con diferencias divididas de tercer orden) y también obtenemos resultados con Lagrange usando un polinomio de grado 3, ¿qué interpolación es más exacta: la de Newton o la de Lagrange?
3. ¿Por qué falla el polinomio interpolador de Lagrange cuando se parte de una función tabular obtenida con datos experimentales (estos contienen ligeros errores)?
4. En términos generales, si los puntos de la función tabular no contienen error y el espaciamiento no es muy grande (en general  $h < 1$ ), ¿qué sucede con los resultados de la interpolación de Lagrange cuando aumenta el grado del polinomio interpolante?
5. ¿Los polinomios de Lagrange pueden interpolar correctamente una función con asíntotas?





# Capítulo 5. Métodos de integración numérica

## 5.1 LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El problema de integrar funciones que están definidas en forma tabular o gráfica se puede resolver utilizando métodos gráficos, sin embargo, los métodos numéricos son mucho más precisos. La *integración numérica* consiste en encontrar una buena aproximación al área bajo la curva de una función tabular  $f(x)$  que ha sido determinada a partir de datos experimentales o de una expresión matemática.

Las *fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes* son los procedimientos más comunes de integración numérica, que se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados con una función aproximada que sea fácil de integrar, estas se dividen en dos reglas:

- La regla de integración Trapezoidal.
- La regla de Simpson.

Estas reglas están diseñadas para casos en que los datos a integrarse se encuentran *espaciados de manera uniforme*.

## 5.2 MÉTODO TRAPEZOIDAL

### 5.2.1 Breve descripción del método

SIMetNum ejecuta el método de *integración trapezoidal* usando la regla de la "*integración cerrada*", es decir, cuando los valores de la función en los

extremos de los límites de integración son conocidos. Con el método de integración trapezoidal se obtiene una aproximación del área bajo la curva de una función dividiéndola en  $n$  fajas de ancho  $\Delta x$  y aproximando el área de cada faja mediante un trapecio. Dada una función tabular con espaciamientos constantes, la fórmula de integración Trapezoidal es la siguiente:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i) + e_r$$

SIMetNum proporciona una aproximación, es decir, no se toma en cuenta el error  $e_r$ :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i)$$

### 5.2.2 Guía de uso del método de trapezoidal

Para ejecutar estos métodos aparecen dos pantallas.

1. En la primera pantalla se pregunta por:
  - el número de datos de la función tabular (hasta ocho datos),
  - el primer valor de la tabla,
  - el espaciamiento (debe de ser constante en toda la tabla),
  - el botón "Limpia", para borrar todos los campos de los datos,
  - el botón "Go!", para que aparezca la segunda pantalla.
2. En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de "x" precalculados (estos datos no se pueden alterar).
3. Para obtener el resultado de la integral, basta con oprimir el botón "Integrar".

### 5.2.3 Ejemplo de operación del método Trapezoidal

1. Realicemos un ejemplo en el que se introducirá una función tabular con cinco datos.

- El primer valor de la tabla será 0.
- El espaciamiento de 0.25.

Como se muestra a continuación:

Número de datos de la tabla:	<input type="text" value="5"/>
Primera 'X' en la tabla:	<input type="text" value="0"/>
Espaciamiento:	<input type="text" value="0.25"/>
<input type="button" value="Limpia"/> <input type="button" value="Go!"/>	

- En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de "x" precalculados (estos datos no se pueden alterar).
- Los datos de  $F(X)$  se muestran a continuación:

X	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
F(x)	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

- Para obtener el resultado de la integral, basta con oprimir el botón "Integrar".

La figura 5.1 muestra la pantalla de SIMetNum con el resultado de la integración.

Figura 5.1. Resultados del método trapezoidal con SIMetNum

The screenshot shows the SIMetNum software interface. At the top, there is a table with the following data:

X	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
F(x)	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

Below the table are buttons for "Limpiar" and "Integrar". The "Integrar" button is highlighted. Below the table, there are input fields for "Número de datos de la tabla:" (5), "Primera 'X' en la tabla:" (0), and "Espaciamiento:" (0.25). There are also "Limpia" and "Go!" buttons. Below these is the text "Integrando...".

At the bottom, there is a "Resultados:" section with the text: "Usando integración trapezoidal en la tabla con 5 datos, la integral es 0.6811125 unidades cuadradas."

On the right side of the interface, there is a logo for "UNIVERSIDAD AUTÓNOMA MET." with the text "Casa abierta al tiempo".

### 5.3 MÉTODO DE SIMPSON 1/3

Además de aplicar la regla trapezoidal con segmentación más fina, otra forma de obtener una estimación más exacta de una integral es con el uso de polinomios de orden superior para conectar los puntos (en lugar de utilizar líneas para conectarlos). Las *reglas de Simpson* son las fórmulas que resultan al tomar las integrales bajo los polinomios que conectan a los puntos.

#### 5.3.1 Breve descripción del método

El *método de Integración Simpson 1/3* para la "integración cerrada", es decir, para cuando los valores de la función en los extremos de los límites de integración son conocidos, consiste en tomar el área bajo una parábola que conecta 3 puntos. Dada una función tabular con espaciamentos constantes, la fórmula de integración de Simpson 1/3 es la siguiente:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k = \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4 \sum_{\text{índice - impar}}^{\text{ordenadas}} + 2 \sum_{\text{índice - par}}^{\text{ordenadas}}) + e_r$$

SIMetNum proporciona una aproximación, es decir, no toma en cuenta el error  $e_r$ :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4 \sum_{\text{índice - impar}}^{\text{ordenadas}} + 2 \sum_{\text{índice - par}}^{\text{ordenadas}})$$

La fórmula de integración de Simpson 1/3 solo es aplicable cuando el *número de datos de la tabla sea impar*.

#### 5.3.2 Guía de uso del método de Simpson 1/3

El modo de operación del método de Simpson 1/3 es exactamente el mismo que el del método de integración trapezoidal.

#### 5.3.3 Ejemplo de operación del método de Simpson 1/3

1. Realicemos un ejemplo en el que se introducirá una función tabular con siete datos.

- El primer valor de la tabla será -1.
- El espaciamiento de 1.

Como se muestra a continuación:

Número de datos de la tabla:	<input type="text" value="7"/>
Primer "X" en la tabla:	<input type="text" value="-1"/>
Espaciamiento:	<input type="text" value="1"/>
<input type="button" value="Limpia"/> <input type="button" value="Go!"/>	

2. En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de "x" precalculados (estos datos no se pueden alterar).
- Los datos de F(X) se muestran a continuación:

X	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
F(x)	8	10	10	20	36	58	64

3. Para obtener el resultado de la integral basta con oprimir el botón "Integrar".

La figura 5.2 muestra la pantalla de SIMetNum con el resultado de la integración.

Figura 5.2. Resultados del método Simpson 1/3 con SIMetNum

The screenshot displays the SIMetNum software interface. On the left, a table shows the input data for the Simpson 1/3 method:

X	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
F(x)	8	10	10	20	36	58	64

Below the table are buttons for "Limpiar" and "Integrar". The "Integrar" button is highlighted in blue. The main window title is "Metodos Numericos" and the subtitle is "Simpson 1/3". On the right side, there is a logo for "UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA" with the tagline "Casa abierta al tiempo". At the bottom, the results are displayed:

Integrando...

Resultados:

Usando Simpson 1/3 en la tabla con 7 datos, la integral es 172.0 unidades cuadradas.

## 5.4 MÉTODO DE SIMPSON 3/8

### 5.4.1 Breve descripción del método

El *método de Integración Simpson 3/8* para la "integración cerrada" consiste en tomar el área bajo una ecuación cúbica que conecta 4 puntos. Dada una función tabular con espaciamentos constantes, la fórmula de integración de Simpson 3/8 es la siguiente:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k = \frac{3h}{8} (y_0 + y_n + 2 \sum_{\text{multiplos de } 3}^{\text{ordenadas}} + 3 \sum_{\text{ordenadas}}^{\text{resto}}) + e_r$$

La fórmula de integración de Simpson 3/8 solo es aplicable cuando el "número total de datos de la tabla menos 1" sea múltiplo de 3.

SIMetNum proporciona una aproximación, es decir, no toma en cuenta el error  $e_r$ :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x_k) dx_k \approx \frac{3h}{8} (y_0 + y_n + 2 \sum_{\text{multiplos de } 3}^{\text{ordenadas}} + 3 \sum_{\text{ordenadas}}^{\text{resto}})$$

### 5.4.2 Guía de uso del método de Simpson 3/8

El modo de operación del método de Simpson 1/3 es exactamente el mismo que el del método de integración trapezoidal.

### 5.4.3 Ejemplo de operación del método de Simpson 1/3

1. Realicemos un ejemplo en el que se introducirá una función tabular con 7 datos

- El primer valor de la tabla será -4.
- El espaciamento de 0.5.

Como se muestra a continuación:

Número de datos de la tabla:	<input type="text" value="7"/>
First 'X' in the table:	<input type="text" value="-4"/>
Espaciamento:	<input type="text" value="0.5"/>
	<input type="button" value="Limpia"/> <input type="button" value="Go!"/>

2. En la segunda pantalla se despliega la tabla con los valores de “x” precalculados (estos datos no se pueden alterar).

- Los datos de  $F(x)$  se muestran a continuación:

X	-4.0	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0
F(x)	2.8	2.1	1.3	0.5	0.83	1.64	2.07

3. Para obtener el resultado de la integral basta con oprimir el botón “Integrar”.

La figura 5.3 se muestra la pantalla de SIMetNum con el resultado de la integración

Figura 5.3. Resultados del método Simpson 3/8 con SIMetNum

The screenshot shows the SIMetNum software interface. At the top left, there is a table with the following data:

X	-4.0	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0
F(x)	2.8	2.1	1.3	0.5	0.83	1.64	2.07

Below the table are buttons for "Limpiar" and "Integrar". The main window title is "Metodos Numericos" and the subtitle is "Simpson 3/8". On the right side, there is a logo for "UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA" with the tagline "Casa abierta al tiempo".

The interface also shows input fields for "Número de datos de la tabla:" (7), "First 'X' in the table:" (-4), and "Espaciamiento:" (0.5). There are "Limpiar" and "Go!" buttons. The status "Integrando..." is displayed. The results section shows: "Resultados: Usando Simpson 3/8 en la tabla con 7 datos, la integral es 4.4025 unidades cuadradas."

## 5.5. PRÁCTICA CON SIMETNUM

### 5.5.1 Objetivo conceptual

El alumno hará comparaciones ente el método de integración trapezoidal, el de Simpson 1/3 y el de Simpson 3/8. También constatará que los métodos Simpson 1/3 y Simpson 3/8 tienen restricciones respecto al número de datos de la función tabular de entrada.



## 5.5.2 Contenido de la práctica

## Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

## Práctica #4: Integración Numérica

1. La función  $f(x) = x \ln(x)$  es integrable y tenemos que:

$$\int_1^2 x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \left[ \ln(x) - \frac{1}{2} \right]_1^2 = 0.636294 u^2$$

Hacer la integración numérica de  $f(x) = x \ln(x)$  con SIMetNum y completar lo siguiente. Usar 7 puntos en la función tabular a integrar con una primera  $x = 1$  y un espaciamiento de 0.166666. Proporcionar directamente la función analítica para que SIMetNum obtenga los puntos tabulares a emplear de manera automática. El valor de la integral exacta es :  $I_{\text{exacta}} = 0.636294 u^2$ .

Método de integración	Integral aproximada: $I_{\text{aprox}}$	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal		
Simpson 1/3		
Simpson 3/8		

1.1. Probar el *método de Integración Trapezoidal* empleando diferentes valores para el ancho  $\Delta x$  de los  $n$  subintervalos a considerar. Completar lo siguiente:

Número de puntos	Espaciamiento	Integral aproximada: $I_{\text{aprox}}$	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
5	0.250		
9	0.125		
14	0.07692		
24	0.043478		

1.2. ¿Aproximadamente cuántos puntos de la función tabular requiere el método de integración trapezoidal para que la exactitud del resultado de

la integral sea comparable con la de los resultados obtenidos con los métodos de Simpson?

2. Suponiendo que se tiene la siguiente tabla:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	1.0	0.98	0.92	0.83	0.7

¿Cuál es el resultado de ?, usando:

- el método trapezoidal:
- el método de Simpson 1/3:
- el método de Simpson 3/8:

3. Si sabemos que la función tabular del punto anterior corresponde a la función  $\cos(x)$ , haz lo necesario para calcular la integral de 0 a 0.8 con los métodos de Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

3.1. Usando Simpson 1/3:

Número de puntos: \_

Espaciamiento:

El valor de la integral de 0 a 0.8 es:

3.2. Usando Simpson 3/8:

Número de puntos: \_

Espaciamiento:

El valor de la integral de 0 a 0.8 es:

4. Si tenemos  $\int_0^1 (2x + 5) dx = x^2 + 5x \Big|_0^1 = 6$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = 6 \text{ u}^2$ . Completar la siguiente tabla. Usar 7 puntos,  $x_{\text{inicial}} = 0$ , espaciamento = 0.16666666.

Método de integración	Resultado de la integral	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal		
Simpson 1/3		
Simpson 3/8		

4.1. Nótese que  $f(x)=2x+5$  es una función lineal. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-4}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

¿Qué sucede si utiliza sólo los valores correspondientes a los puntos 0 y 1 para calcular la integral con el método trapezoidal?

5. Si tenemos 
$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx = \left. \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right|_0^1 = -0.16666666$$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = -0.16666666 u^2$ .

Completar la siguiente tabla. Usar 7 puntos,  $x_{\text{inicial}} = 0$ , espaciamento = 0.16666666.

Método de integración	Resultado de la integral	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal		
Simpson 1/3		
Simpson 3/8		

5.1. Nótese que  $f(x)=x^2-3x+1$  es una función polinomial de grado 2. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-4}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

5.2. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 1/3?

¿Qué sucede si utiliza solo los valores correspondientes a los puntos 0,  $\frac{1}{2}$  y 1 para calcular la integral con el método de Simpson 1/3?

6. Usando los resultados obtenidos en el punto 3 (no hay que repetir los cálculos), completar la siguiente tabla. Nótese que  $f(x)=\cos(x)$  no es de tipo polinomial y que

$$\int_0^{0.8} \cos(x) dx = \left. \text{sen}(x) \right|_0^{0.8} = 0.71735609$$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = 0.71735609$ .

Método de integración	Resultado de la integral	$\ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}}\ $
Trapezoidal		
Simpson 1/3		
Simpson 3/8		

6.1. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-7}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

6.2. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 1/3?

6.2. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 3/8?

7. La función  $\cos(\cos(x))$  es una función no integrable en  $[0,1]$ . Sin embargo, se puede obtener su integral aproximada en el intervalo 0 a 1.

7.1. Completa los siguientes resultados con SIMetNum

Con Simpson 1/3, 7 puntos, una  $x_{\text{inicial}} = 0$  y un espaciamiento de 0.166666:

Con Simpson 1/3, 13 puntos, una  $x_{\text{inicial}} = 0$  y un espaciamiento de 0.083333:

Con Simpson 3/8, 7 puntos, una  $x_{\text{inicial}} = 0$  y un espaciamiento de 0.166666:

Con Simpson 3/8, 13 puntos, una  $x_{\text{inicial}} = 0$  y un espaciamiento de 0.083333:

7.2. El resultado de la integración numérica de la función  $f(x) = \cos(\cos(x))$  de 0 a 1 que proporciona MAPLE es: 0.6597810536, tomando este resultado como el esperado, ¿cuál de los cuatro resultados es el mejor?

## 5.6 CUESTIONARIO

- Una vez elegido el método de integración a emplear (trapezoidal, Simpson de 1/3 o 3/8) ¿qué se requiere hacer, con ese mismo método, para lograr resultados cada vez más exactos?
- Suponiendo que aplicamos los métodos de integración trapezoidal, el de Simpson de 1/3 y el de Simpson 3/8 a un problema específico, ¿cuál de los tres métodos requiere mayor cantidad de puntos en la tabla para obtener mayor exactitud en los resultados?
- Si tenemos un número de puntos cualquiera en la función tabular.

- 3.1. ¿Es posible emplear siempre el método de integración trapezoidal?
- 3.2. ¿Es posible emplear siempre Simpson 1/3?
- 3.3. ¿Es posible emplear siempre Simpson 3/8?
4. Para aproximar la integral definida de una función dada con  $n$  puntos, ¿cómo debe de ser  $n$  para poder aplicar Simpson 1/3 y Simpson 3/8?
5. ¿Los métodos anteriormente mencionados sirven para aproximar la integral de funciones no integrables?
6. Si deseamos aproximar la integral definida de una función  $f(x)$ , indicada en los siguientes incisos, ¿cuál método de integración consideras que sería suficiente utilizar para obtener una buena aproximación y con cuántos puntos? ¿Por qué?
  - a) Función lineal  $f(x)=ax + b$ :
  - b) Función de grado 2  $f(x)= ax^2+bx+c$ :
  - c) Función  $f(x)$  de tipo polinomial de grado mayor a 2 o cualquier otra:

## Bibliografía

- Antia H. M., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Birkhäuser Basel, 2002.
- Brian Bradie, *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*, Pearson Education, 2006.
- Burden L. Richard, Faires J. Douglas, *Análisis Numérico*, Thomson, 7a ed. 2009.
- Chapra Steven, Canale Raymond, *Métodos Numéricos para Ingenieros*, McGraw-Hill, 5a ed, 2007.
- Hildebrand F.B., *Introduction to Numerical Analysis*, Dover Publications Inc., 1987.
- Iriarte V. Balderrama, *Métodos Numéricos*, Trillas, 2007.
- Nieves, Antonio, Dominguez Federico C., *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*, Compañía Editorial Continental, quinta reimpresión, 2006.
- Shoichiro Nakamura, *Métodos Numéricos Aplicados con Software*, Pearson Education, 1998.



## Glosario de términos

*Algoritmo*: Procedimiento que indica la serie de pasos y decisiones que se ejecutan para la solución de un problema. Las características de un algoritmo son las siguientes:

- FINITO. Debe terminar en un número determinado de pasos.
- DEFINIDO. Las acciones deben definirse sin ambigüedad.
- ENTRADA. Puede tener una o varias entradas.
- SALIDA. Debe de tener una o más salidas.
- EFECTIVIDAD. Todas las operaciones deben de ser lo suficientemente básicas para que puedan hacerse exactamente en un determinado tiempo, no mayor al que utiliza una persona con lápiz y papel.

*Convergencia*: Sucede cuando las aproximaciones obtenidas se acercan cada vez más a la solución del problema. Se dice que hay "Convergencia" al utilizar un método numérico para resolver un problema en particular cuando, mientras más iteraciones se hacen, se obtiene una mejor aproximación al resultado.

*Iteración*: Secuencia de pasos que se repite varias veces, se parte de uno o varios valores iniciales, estos datos se procesan aplicando dicha secuencia de pasos y se obtienen uno o varios resultados parciales. Estos resultados parciales serán los valores iniciales que se utilicen al aplicar la siguiente iteración. Por lo general, se espera que una iteración mejore los valores obtenidos en la iteración anterior.



*Divergencia:* Se dice que hay “Divergencia” cuando, mientras más iteraciones se realicen, el resultado obtenido se aleja cada vez más del valor buscado (solución real del problema).

*Función analítica:* La función  $y = f(x)$  está definida explícitamente en términos matemáticos. Para efectos prácticos lo entenderemos como las operaciones que se realizan a todo valor  $x$  del dominio para obtener su correspondiente valor  $y$  de la imagen.

*Función tabular:* La función  $y = f(x)$  está en forma tabular cuando se indica en una tabla el valor de la imagen para algunos valores del dominio.

*Parser:* Analiza una cadena de caracteres alfanuméricos y reconoce unidades gramaticales, lo que permite que el usuario pueda introducir como dato una función.

*Tolerancia:* Es un pequeño valor  $\varepsilon$  específico, dado como dato de entrada, con el cual se compara el error entre una iteración y la anterior (definido como  $\varepsilon$ ), como criterio de paro de un método iterativo. Este se detendrá cuando se cumpla la condición  $\text{error} < \varepsilon$ .

## Apéndice. Solución a las prácticas y cuestionarios

Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

Práctica #1: Solución de ecuaciones no lineales

1. Aplicar el método de Bisección y de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para aproximar una raíz de

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$$

Anotar el número de iteraciones y la raíz encontrada:

Método	Intervalo inicial	Resultado	Num. de iteraciones
Bisección	[-1, 0]	-0.55670166	13
Bisección	[-1.5, 1]	-0.55662536	14
Bisección	[-10, 0]	-0.55671691	16
Bisección	[-100, 100]	-0.55662536	19
Bisección	[-1000, 1000]	-0.55662536	24

Método	Valor inicial	Resultado	Num. de iteraciones
Newton-Raphson	-1	-0.556393	5
Newton-Raphson	-10	-0.556393	11
Newton-Raphson	-100	-0.556393	16
Newton-Raphson	-1000	-0.556393	22
Newton-Raphson	100	-0.556393	19
Newton-Raphson	1000000	-0.556393	47

1.1. La aproximación obtenida con bisección es exactamente igual a la aproximación obtenida con Newton-Raphson?

**No, difieren en los dígitos menos significativos.**

1.2. En los casos de Newton-Raphson el valor inicial creció hasta un millón de veces. ¿Cómo creció el número de iteraciones para llegar a la aproximación de la raíz?

- El número de iteraciones creció también alrededor de un millón.
- El número de iteraciones no aumentó demasiado.**
- El número de iteraciones fue el mismo.

2. Si se varía la tolerancia para la función anterior, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Bisección		Newton-Raphson	
	raíz obtenida	iteraciones	raíz obtenida	iteraciones
2.1. Con tolerancia de 0.01:	-0.5546875	6	-0.556695	4
2.2. Con tolerancia de 0.00000001:	-0.55669309	26	-0.55669309	6

2.3. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron más las iteraciones al disminuir la tolerancia?

**Con el de bisección.**

3. Aplicar el método de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para encontrar la raíz de

$$f(x) = x^3 + 0.5x^2 - 2.5x + 1 = 0$$

¿En cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Raíz	Iteraciones
3.1. Si el valor inicial es de 2:	1	6
3.2. Si el valor inicial es de 1000:	1	22
3.3. Si el valor inicial es de 1000000:	1	39
3.4. Si el valor inicial es de -10:	-2	8
3.5. Si el valor inicial es de 0.1:	0.49999	5

3.6. ¿Por qué se obtuvieron diferentes aproximaciones en algunos de los casos?

Porque la función tiene tres raíces y el método converge a la más cercana al valor inicial dado.

4. Aplicar el método de Bisección y de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.0001 para encontrar la raíz de

$$f(x) = \text{Cos}(x) - x^2$$

Anotar el número de iteraciones y la raíz encontrada:

Método	Intervalo inicial	Resultado	Num. de iteraciones
<b>Bisección</b>	[-0.5, 1.5]	0.82415771	14

Método	Valor inicial	Resultado	Num. de iteraciones
<b>Newton-Raphson</b>	8	0.824132	7

5. Si se varía la tolerancia para la función anterior, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Bisección [-0.5,1.5] raíz obtenida	iteraciones	Newton-Raphson valor inicial=8 raíz obtenida	iteraciones
5.1. Con tolerancia de 0.01:	0.8203125	7	0.82413234	6
5.2. Con tolerancia de 0.00000001:	0.8241323158	27	0.82413231	8

5.3. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron mucho las iteraciones cuando se disminuyó la tolerancia?

Con bisección.

6. Usando Bisección y tolerancia 0.0001, ¿en cuántas iteraciones se encuentra la raíz?

	Raíz	iteraciones
6.1. Si a $\text{Cos}(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [-0.5, 1]:	0.82412719	13
6.2. Si a $\text{Cos}(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [0, 1]:	0.82415771	13
6.3. Si a $\text{Cos}(x) - x^2$ se le aplica un intervalo inicial de [-1000, 1000]:	-0.82415342	24

6.4. ¿La aproximación a la raíz es exactamente la misma en todos los casos anteriores?

**No, difiere en los dígitos menos significativos.**

7. Completa lo siguiente usando el método de Bisección para obtener una de las raíces de  $f(x) = \cos(x)$  con una tolerancia de 0.0001 .

Intervalo inicial	raíz	iteraciones
[0,10]	_____	___
[0,100]	_____	___
[0,1000]	_____	___

7.1. ¿Por qué se obtienen aproximaciones a diferentes raíces?

**Porque se trata de una función periódica que tiene raíces múltiples.**

Resultados del cuestionario de los métodos de Bisección y Newton-Raphson

### CUESTIONARIO

1. Suponiendo que en un intervalo inicial dado solo se tiene una raíz,
- 1.1. ¿qué sucede con el número de iteraciones  $n$  del método de bisección cuando el intervalo inicial se hace cien veces más grande?
- $n$  no aumenta
  - $n$  aumenta un poco**
  - $n$  aumenta en 100
  - podría suceder cualquiera de las anteriores
- 1.2. ¿Se obtiene exactamente la misma raíz con el método de bisección cuando el intervalo inicial varía y se deja fija la tolerancia?

**Se obtienen aproximaciones a la raíz muy parecidas, variando solo los dígitos menos significativos.**

2. Si en el método de bisección proporcionamos diferentes intervalos iniciales a una función con raíces múltiples, ¿esperas obtener aproximaciones hacia la misma raíz o hacia raíces diferentes?

### Raíces diferentes.

3. Si tenemos una función con tres raíces conocidas, por ejemplo:

$$f(x) = x^3 + 0.5x^2 - 2.5x + 1 = 0$$

cuyas raíces son  $x_1 = -2$   $x_2 = 0.5$   $x_3 = 1$

y aplicamos el método de Newton-Raphson con un valor inicial cercano a la raíz de la extrema derecha:

$X_0 = 2$ , y se obtiene la raíz  $x=1$  en  $n$  iteraciones, ¿qué pasaría si ahora  $X_0$  vale 10000? (suponer la misma tolerancia en ambos casos).

- a) El número de iteraciones será mucho mayor a  $n$
  - b) El número de iteraciones no aumenta demasiado**
  - c) El número de iteraciones será el mismo
  - d) Puede pasar cualquiera de las anteriores
4. ¿Qué sucede con el número de iteraciones en los métodos de Bisección y Newton-Raphson cuando se requiere de mayor exactitud en la aproximación a una raíz, es decir, cuando se tiene una tolerancia más pequeña?

### Aumenta el número de iteraciones.

5. En general, y suponiendo que es posible aproximar las raíces de una función, sin mayor problema con cualquiera de los métodos de Bisección o de Newton-Raphson, ¿cuál de estos métodos será más rápido? ¿Por qué?

**Newton-Raphson.** Si bien hay que considerar varias cuestiones, como la función, el intervalo o aproximación inicial, etc., en términos generales, cuando ambos métodos funcionan bien, el de Newton-Raphson requiere de muchas menos iteraciones.

6. Si aplicamos el método de Bisección y el de Newton-Raphson a una misma función, con una tolerancia de 0.0001 en ambos casos y proporcionamos respectivamente un intervalo inicial  $[a_0, b_0]$  y un valor inicial  $X_0$ , de manera que se obtienen aproximaciones hacia la misma raíz, ¿la aproximación obtenida con bisección es exactamente igual a la aproximación obtenida con Newton-Raphson?

No, difieren en sus dígitos menos significativos.

Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

Práctica #2: Solución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Aplicar el método de Jácobi y de Gauss-Seidel con una tolerancia de 0.0001 para aproximar un vector solución a los siguientes sistemas  $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$  con la misma matriz asociada  $\mathbf{A}$  pero distinto vector  $\vec{\mathbf{b}}$  de términos independientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Considerar en todos los incisos  $\vec{\mathbf{x}}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$  y  $\text{tol} = 0.0001$

Anotar el número de iteraciones y el vector solución encontrado.

a)  $\vec{\mathbf{b}} = (1, 1, 1, 1)^t$

Método Vector Solución

Num.  
de iteraciones

Jácobi  $\vec{\mathbf{x}} = (0.36362195, 0.45452213, 0.45452213, 0.36362195)$  11

Gauss Seidel  $\vec{\mathbf{x}} = (0.36362858, 0.45454036, 0.45453394, 0.36363584)$  7

b)  $\vec{\mathbf{b}} = (7, 1, 4, -5)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (1.99998080, 0.99999469, 0.99996894, -1.00000327)$	12
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (2.00000648, 1.00000424, 1.00000171, -0.99999957)$	7

c)  $\vec{\mathbf{b}} = (-4, 0, 3, -6)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (-1.04304003, -0.172238882, 0.35410285, -1.41147708)$	11
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (-1.04305944, -0.17224699, 0.35406771, -1.411488307)$	8

1.1. ¿La aproximación obtenida con Jácobi es exactamente igual a la aproximación obtenida con Gauss-Seidel?

1.2. ¿Con cuál método se realizaron menos iteraciones?

### Con el de Gauss-Seidel

2. Encontrar la aproximación a la solución del siguiente sistema usando diferentes valores para el vector inicial:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Considerar en todos los incisos una tolerancia de 0.00001

a)  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (1, -1, 0) = \mathbf{x}^s + \Delta\mathbf{x} = (0.55397, -0.7271, 0.27921)^t$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.44602995, 0.27297295, 0.27921553)$	13
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.44603123, 0.27297095, 0.27921517)$	8



$$b) \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (10, -10, 0) = \mathbf{x}^s + 10 \Delta \mathbf{x} = (5.5397, -7.271, 0.27921)$$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.44602995, 0.27296820, 0.27921364)$	15
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.44602958, 0.27297084, 0.27921470)$	9

$$c) \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + (1000, -1000, 0) = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta \mathbf{x} = (553.97, -727.1, 0.27921)$$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.4460301, 0.27296888, 0.27921413)$	20
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (-0.4460303, 0.27297081, 0.27921494)$	12

2.1. El vector solución al sistema lineal de ecuaciones dado es  $\mathbf{x}^s = (-0.446, 0.2729, 0.2792)$ , con el vector *inicial* cerca de la solución  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + \Delta \mathbf{x}$  tuvimos que, con una tolerancia fija dada, el método de Jácobi llegó a un resultado en 13 iteraciones, y el de Gauss-Seidel llegó a un resultado en ocho iteraciones. Cuando el vector *inicial* fue  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta \mathbf{x}$  (1000 veces más lejos de la solución que el vector inicial anterior) ¿Cómo cambió el número de iteraciones de cada método?

- El número de iteraciones fue  $1000 * (13)$  y  $1000 * (8)$ , respectivamente.
- El número de iteraciones fue  $\ll 1000 * (13)$  y  $\ll 1000 * (8)$ , respectivamente.**
- El número de iteraciones fue  $1000 * (13)$  para Jacobi y  $\ll 1000 * (8)$  para Gauss-Seidel.
- El número de iteraciones es  $\ll 1000 * (13)$  para Jácobi y  $1000 * (8)$  para Gauss-Seidel.

3. Aplicando los dos métodos y usando diferentes valores para la tolerancia, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales, donde:

$$\text{con } \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = (0, 0, 0)^t \quad \text{Sol Exacta } \vec{\mathbf{x}} = (2/3, 1/2, -1/3)^t$$

a)  $\text{tol} = 0.001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácbobi	$\vec{\mathbf{x}} = (0.66663456, 0.49944577, -0.33444157)$	13
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (0.6667716, 0.500317057, -0.33316275)$	6

b)  $\text{tol} = 0.00001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácbobi	$\vec{\mathbf{x}} = (0.66666518, 0.49999672, -0.33333967)$	23
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (0.66666845, 0.50000290, -0.33333042)$	10

c)  $\text{tol} = 0.0000001$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácbobi	$\vec{\mathbf{x}} = (0.66666664, 0.49999994, -0.33333344)$	31
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (0.66666667, 0.50000001, -0.33333331)$	15

3.1. ¿Con cuál de los dos métodos aumentaron más las iteraciones al disminuir la tolerancia?

3.2. ¿Cuál de los dos métodos es más rápido?

**El de Gauss-Seidel.**

4. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Ninguno de los métodos funciona, ya que al menos uno de los elementos de la diagonal es cero. Reordenando la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácbobi	$\vec{\mathbf{x}} = (3.999938, -2.999954, -1.0)$	16
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (3.999977, -2.999988, -1.0)$	9

5. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Ninguno de los métodos funciona, ya que al menos uno de los elementos de la diagonal es cero. Reordenando la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{b}$ .

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} = (0.999989, 2.000015, -1.000012, 1.000019)$	13
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} = (1.000008, 2.000001, -1.000002, 0.999999)$	6

6. Aplicando los dos métodos y usando una tolerancia de 0.0001, encontrar la aproximación a la solución del sistema de ecuaciones lineales:

Método	Vector Solución	Num. de iteraciones
Jácobi	$\vec{\mathbf{x}} =$ No se encuentra convergencia	(el sist. Llega a 50)
Gauss Seidel	$\vec{\mathbf{x}} =$ No se encuentra convergencia	(el sist. Llega a 100)

Respuesta: No hay convergencia, las magnitudes de las entradas del vector solución crecen sin medida.

Resultado del cuestionario de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

## CUESTIONARIO

Suponiendo que los métodos de Jácobi y de Gauss-Seidel convergen hacia la solución de un problema:

- ¿La aproximación al vector solución que se obtiene con el método de Jácobi es exactamente igual a la que se obtiene con el método de Gauss-Seidel?

Las aproximaciones son muy similares pero difieren en los dígitos menos significativos.

2. ¿Cómo varía el número de iteraciones en el método de Jacobi y en el de Gauss-Seidel cuando se disminuye la tolerancia empleada?
- Aumenta**
  - Disminuye el número de iteraciones
  - Permanece constante
3. ¿Cuál de los dos métodos es más rápido?

**El de Gauss-Seidel.**

4. Suponiendo que el vector solución a un sistema lineal de ecuaciones dado es  $\mathbf{x}^s$  y damos un *vector inicial* cerca de la solución  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + \Delta\mathbf{x}$  tenemos que, con una tolerancia fija dada, el método de Jácobi llega a un resultado en  $n_1$  iteraciones y el de Gauss-Seidel llega a un resultado en  $n_2$  iteraciones. Si ahora el *vector inicial* es  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^s + 1000 \Delta\mathbf{x}$  el cual está  $1000 \Delta\mathbf{x}$  más lejos de la solución que el vector inicial anterior, ¿cómo esperas que cambie el número de iteraciones de cada método?
- El número de iteraciones es  $1000 n_1$  y  $1000 n_2$ , respectivamente
  - El número de iteraciones es  $\ll 1000 n_1$  y  $\ll 1000 n_2$ , respectivamente**
  - El número de iteraciones es  $1000 n_1$  para Jacobi y  $\ll 1000 n_2$  para Gauss-Seidel
  - El número de iteraciones es  $\ll 1000 n_1$  para Jacobi y  $1000 n_2$  para Gauss-Seidel
5. Las siguientes representan la forma general del método de Jácobi y del método de Gauss-Seidel, donde puede observarse fácilmente que si alguno de los coeficientes  $a_{ii}$  que se encuentran en la diagonal de la matriz  $A$  asociada al sistema es cero, ninguno de los métodos funcionará:

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij} x_j^k)$$

Jácobi

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}(-b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k)$$

Gauss-Seidel

En tal caso, ¿qué se puede hacer para evitar, en lo posible, que alguno de los coeficientes de la diagonal sea cero y, con ello, aumentar la probabilidad de obtener convergencia en los resultados?

Reordenar el sistema original, para que la matriz asociada del sistema sea lo más parecido a una estrictamente diagonal dominante, es decir una matriz en la cual se satisface que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

6. ¿Alguno de los dos métodos asegura la convergencia de cualquier sistema lineal de ecuaciones?

No, ya que existe la posibilidad de que el sistema no tenga solución. En caso de que el sistema tenga solución pero la diagonal de su matriz asociada no sea estrictamente dominante, entonces ninguno de los dos métodos asegura la convergencia.

## Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

### Práctica #3: Interpolación de Newton y Lagrange

1. Sea  $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ .

1.1. La función tabular que se genera a partir de esta  $f(x)$  para cinco datos partiendo de  $x = 0.5$  con un espaciamiento de 0.5 es la siguiente:

x	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	-0.638961	0	0.394 446	0.638961	0.793349

SIMetNum ejecuta el método de interpolación de Newton con diferencias divididas de tercer orden (estamos trabajando para que se pueda aumentar este orden). Para generar el polinomio de aproximación de Newton dentro de SIMetNum, se requiere introducir como datos: el número  $n$  de puntos a considerar, el valor del primer punto  $x$  conocido y el espaciamiento  $h$ , a partir de los cuales se generan los  $n+1$  puntos  $x_i$  igualmente espaciados, además deben proporcionarse los valores de la función en estos puntos, el valor de  $x$  donde se desea aproximar  $f(x)$  y el valor de  $x_{\text{inicial}}$  a considerar. Este

último valor debe coincidir con alguno de los  $x_i$  de la tabla de datos conocidos e indica a partir de qué punto se generará el polinomio de Newton, es decir  $x_o = x_{inicial}$ .

Usando interpolación de Newton, encontrar los valores de  $f(x)$ , dar una  $x_{inicial} = 0.5$  y llenar la siguiente tabla:

X	$f_{exact}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{Newt}(x)$ (Sol. Newton)	$ f_{exact}(x) - f_{Newt}(x) $
0.75	-0.28373	-0.283004	0.00072954
1.25	0.221296	0.221875	0.00057980

1.2. Con la función tabular dada en 1.1, encontrar el polinomio interpolante de Lagrange de grado 3 y llenar la siguiente tabla:

x	Grado del polinomio interpolante	$f_{exact}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{Lagrange}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{exact}(x) - f_{Lagrange}(x) $
0.75	3	-0.28373	-0.283004	0.000726
1.25	3	0.221296	0.221875	0.000579

1.3. ¿Qué resultados se aproximan más a la solución exacta? ¿Por qué?

Los resultados son prácticamente los mismos con Newton que con Lagrange, ya que los métodos de Newton con diferencias divididas de tercer orden y el polinomio de Lagrange de grado 3 son equivalentes.

2. A continuación tenemos una función tabular que corresponde a  $f(x) = e^x$  con puntos que tienen un espaciado  $< 1$ :

X	-1	-0.5	0	0.5	1	1.25
f(x)	0.367879	0.60653	1	1.648721	2.718281	3.490342

2.1. Encontrar el polinomio interpolante de Lagrange de grados 3, 4 y 5 y llenar la siguiente tabla (aprovechar la tabla introducida en SIMetNum para calcular el resultado de  $f(-0.75)$  y de  $f(0.25)$  en una sola ocasión):

x	Grado del polinomio interpolante	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{\text{Lagrange}}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagrange}}(x) $
-0.75	3	0.472366	0.474129	0.001763
-0.75	4	0.472366	0.471583	0.000783
-0.75	5	0.472366	0.472684	0.000318
0.25	3	1.284025	1.286177	0.002152
0.25	4	1.284025	1.283631	0.000394
0.25	5	1.284025	1.284103	0.000078

2.1.1. ¿Se cumple que la interpolación de Lagrange mejora conforme aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange?

Sí.

2.2. Dando una  $x_{\text{inicial}} = 0$  para la función tabular dada al inicio del inciso 2 (con 4 puntos a partir de  $x=0$ ), encontrar los valores de  $f(x)$  con el método de interpolación de Newton y llenar la siguiente tabla:

x	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Newt}}(x)$ (Sol. Newton)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Newt}}(x) $
0.25	1.284025		
0.75	2.117000		

2.3. ¿Por qué no se pueden obtener los resultados de la tabla en 2.2?

Porque para la interpolación de Newton se requiere de una función tabular con espaciamientos constantes.

3. En el punto anterior se obtuvieron resultados de interpolación utilizando una función tabular que corresponde a  $f(x) = e^x$  con puntos que tienen un espaciamiento  $< 1$ , probemos ahora lo que sucede cuando aumenta este espaciamiento. Utilicemos la siguiente función tabular (aprovechar la tabla introducida en SIMetNum para calcular el resultado de  $f(-0.75)$  y de  $f(0.25)$  en una sola ocasión):

X	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0.367879	1	2.718281	7.389056	20.085536	54.59815	148.4131	403.4287	1096.6331

Completar la siguiente tabla:

x	Grado del polinomio interpolante	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$F_{\text{Lagrange}}(x)$ (Sol. Lagrange)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagrange}}(x) $
-0.75	3	0.472366	0.526146	0.053780
-0.75	6	0.472366	0.349574	0.122792
-0.75	8	0.472366	0.215332	0.257034
0.25	3	1.284025	1.254839	0.029186
0.25	6	1.284025	1.313462	0.029437
0.25	8	1.284025	1.328569	0.044544

3.1. ¿Se cumple que la interpolación de Lagrange mejora conforme aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange?

No.

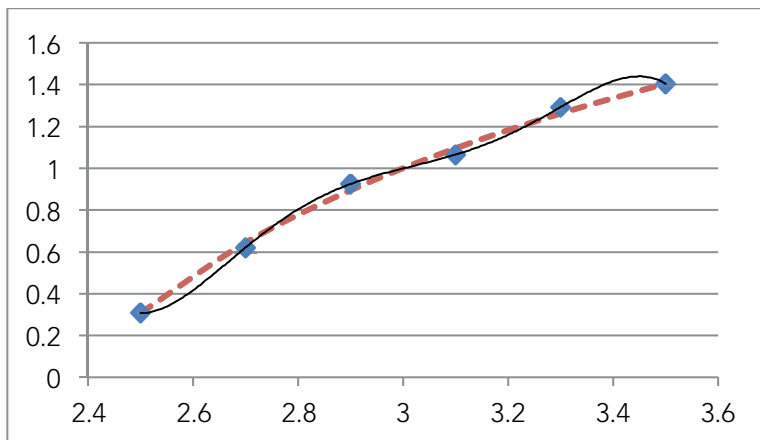
3.2. ¿Los puntos de la tabla están cerca de los puntos a interpolar?

No.

4. Cuando se tiene una función tabular a partir de datos experimentales, es de esperar que algunos de los datos contengan ligeros errores. En estos casos, un polinomio interpolador de grado alto suele presentar oscilaciones, ya que tiende a modelar el comportamiento de los datos con todo y errores. En la siguiente gráfica, la línea punteada es  $f(x) = \ln(x-2) + 1$  y la línea continua corresponde a un polinomio de Lagrange de grado 5, este pasa por cada uno de los puntos, los cuales están ligeramente desviados de la curva  $f(x) = \ln(x-2) + 1$ , lo que ocasiona que el polinomio se aleje de la función a modelar.



Gráfica de  $f(x) = \ln(x-2) + 1$  y polinomio de Lagrange grado 5



Observemos este fenómeno con SIMetNum.

4.1. Sea la función  $f(x) = \ln(x-2) + 1$ . Los puntos  $f(x)$  se obtuvieron calculando  $\ln(x-2) + 1$ , por lo que son exactos.

X	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5
f(x)	0.306852	0.643325	0.894639	1.095310	1.262364	1.405465

Completar la siguiente tabla:

x	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
2.6	0.489174	0.488850	0.000324
2.8	0.776856	0.776940	0.000084
3	1	0.999949	0.000051

En este caso, ¿los resultados de la interpolación son similares a los de la solución exacta?

Sí.

4.2. Ahora supongamos que los datos son experimentales y tienen ligeros errores:

X	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5
f(x)	0.306852	0.620325	0.924639	1.065310	1.292364	1.405465

Completar la siguiente tabla:

x	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ Lagrange grado 5 Datos con error	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
2.6	0.489174	0.415901	0.073273
2.8	0.776856	0.802780	0.025924
3	1	0.999265	0.000735

4.3. ¿Cómo son los resultados de la interpolación de Lagrange cuando se usaron datos con ligeros errores con respecto a los resultados que se obtienen con datos exactos?

Los resultados obtenidos a partir de una tabla con datos exactos son mucho mejores que los obtenidos a partir de una tabla con datos que tienen ligeros errores.

5. De la teoría sabemos que la interpolación de Lagrange funciona bien con funciones polinomiales, también funciona correctamente para muchas otras funciones no polinomiales, por ejemplo, la función en 2 y 3. Sin embargo, hay que tener cuidado con las funciones que tienen comportamiento asintótico.

5.1. Sea la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  con los siguientes puntos:

X	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2

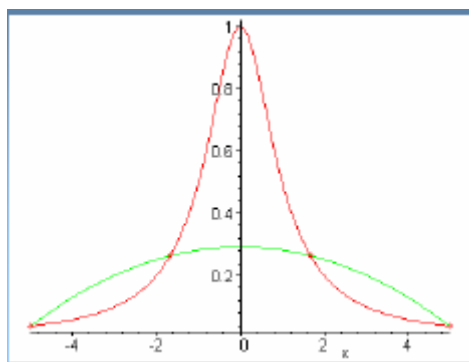
Completar la siguiente tabla:

$x$	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
-2.75	0.1167	0.252880	0.136180
-1.5	0.307692	0.254687	0.053005
1.8	0.235849	0.013830	0.222019

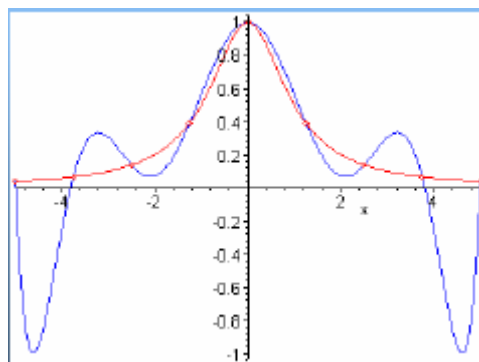
¿Los resultados de la interpolación son similares a los de la solución exacta?

No.

La gráfica de  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  es la siguiente:



$f(x) = (1+x^2)^{-1}$ , la parábola corresponde a un polinomio de Lagrange de grado 2



Aquí se muestran  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  y el polinomio de Lagrange de grado 8

De las gráficas anteriores, se observa que cuando aumenta el grado del polinomio interpolante de Lagrange, la interpolación no mejora en los extremos, sin embargo, sí mejora el modelado de la parte central de  $f(x)$ , donde no se presenta el comportamiento asintótico.

5.2. Sea la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  pero ahora con los siguientes puntos.

$X$	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$	0.307692	0.5	0.8	1	0.8	0.5

Completar la siguiente tabla:

$x$	$f_{\text{exact}}(x)$ (Sol. Exacta)	$f_{\text{Lagr}}(x)$ (Lagrange grado 5)	$ f_{\text{exact}}(x) - f_{\text{Lagr}}(x) $
-1.3	0.609756	0.608576	0.001180
-0.25	0.941176	0.937199	0.003977
0.75	0.640000	0.601380	0.038620

Con los puntos de esta tabla, ¿los resultados de la interpolación mejoran?

Sí.

¿Por qué crees que esto sucede?

Porque en los extremos de la función hay un comportamiento asintótico que los polinomios de Lagrange no pueden modelar, sin embargo, si se trabaja en la parte central de la función se pueden lograr mejores interpolaciones.

Resultados del cuestionario y la práctica  
para los métodos de Interpolación de Newton y de Lagrange

### CUESTIONARIO

1. ¿Cómo debe de ser el espaciamiento de la función tabular para poder comparar los resultados de la interpolación de Newton y los de la interpolación de Lagrange?

Para poder hacer una comparación entre estos dos métodos, se requiere que los puntos considerados de la función tabular tengan un espaciamiento constante en ambos casos.

2. Si tenemos una función tabular con espaciamientos constantes y obtenemos resultados de interpolación con el método de Newton (con diferencias divididas de tercer orden) y también obtenemos resultados con

Lagrange usando un polinomio de grado 3, ¿qué interpolación es más exacta, la de Newton o la de Lagrange?

Los resultados son prácticamente los mismos, puesto que estas dos formas de interpolación son equivalentes.

- ¿Por qué falla el polinomio interpolador de Lagrange cuando se parte de una función tabular obtenida con datos experimentales (estos contienen ligeros errores)?

En estos casos, un polinomio interpolador de grado alto suele presentar oscilaciones, ya que tiende a modelar el comportamiento de los datos con todo y errores. El polinomio interpolador pasa por cada uno de los puntos experimentales, los cuales están ligeramente desviados de la curva que representa la función real, lo que ocasiona que este se aleje de la función real a modelar.

- En términos generales, si los puntos de la función tabular no contienen error y el espaciamiento no es muy grande (en general  $h < 1$ ), ¿qué sucede con los resultados de la interpolación de Lagrange cuando aumenta el grado del polinomio interpolante?

La exactitud de los resultados aumenta con el grado del polinomio interpolante de Lagrange.

- ¿Los polinomios de Lagrange pueden interpolar correctamente una función con asíntotas?

Los polinomios de Lagrange no pueden modelar el comportamiento asintótico, sin embargo, sí pueden modelar adecuadamente la parte de la función que no tenga este comportamiento.

Sistema Interactivo de Métodos Numéricos (SIMetNum)

Práctica #4: Integración Numérica

- La función  $f(x) = x \ln(x)$  es integrable y tenemos que:

$$\int_1^2 x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \left[ \ln(x) - \frac{1}{2} \right]_1^2 = 0.636294u^2$$

Hacer la integración numérica de  $f(x) = x \ln(x)$  con SIMetNum y completar lo siguiente. Usar 7 puntos en la función tabular a integrar con una primera  $x = 1$  y un espaciamento de 0.166666. Proporcionar directamente la función analítica para que SIMetNum obtenga los puntos tabulares a emplear de manera automática. El valor de la integral exacta es :  $I_{\text{exacta}} = 0.636294 u^2$ .

Método de integración	Integral aproximada: $I_{\text{aprox}}$	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal	0.637897 $u^2$	0.001603
Simpson 1/3	0.636291 $u^2$	0.000003
Simpson 3/8	0.636300 $u^2$	0.000006

1.1. Probar el *método de Integración Trapezoidal* empleando diferentes valores para el ancho  $\Delta x$  de los  $n$  subintervalos a considerar. Completar lo siguiente:

Número de puntos	Espaciamento	Integral aproximada: $I_{\text{aprox}}$	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
5	0.250	0.639900	0.003606
9	0.125	0.637196	0.000902
14	0.07692	0.636580	0.000286
24	0.043478	0.636395	0.000101

1.2. ¿Aproximadamente cuántos puntos de la función tabular requiere el método de integración trapezoidal para que la exactitud del resultado de la integral sea comparable con la de los resultados obtenidos con los métodos de Simpson?

El número de puntos debe de ser mayor que 24, ya que con 24 puntos aún no se alcanza la exactitud que lograron los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 con únicamente 7 puntos.

2. Suponiendo que se tiene la siguiente tabla:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	1.0	0.98	0.92	0.83	0.7

¿Cuál es el resultado de ?, usando:

- el método trapezoidal: **0.714973**
- el método de Simpson 1/3: **0.717361**
- el método de Simpson 3/8: **no se puede porque  $5-1 = 4$  no es múltiplo de 3.**

3. Si sabemos que la función tabular del punto anterior corresponde a la función  $\cos(x)$ , haz lo necesario para calcular la integral de 0 a 0.8 con los métodos de Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

3.1. Usando Simpson 1/3:

Número de puntos: **5**

Espaciamento: **0.2**

El valor de la integral de 0 a 0.8 es: **0.717361**

3.2. Usando Simpson 3/8:

Número de puntos: **7**

Espaciamento: **0.13333**

El valor de la integral de 0 a 0.8 es: **0.717356**

4. Si tenemos  $\int_0^1 (2x + 5) dx = x^2 + 5x \Big|_0^1 = 6$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = 6 u^2$ . Completar la siguiente tabla. Usar 7 puntos,  $x_{\text{inicial}} = 0$ , espaciamento = 0.16666666.

Método de integración	Resultado de la integral	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal	5.999997	0.000003
Simpson 1/3	5.999997	0.000003
Simpson 3/8	5.999990	0.000001

4.1. Nótese que  $f(x)=2x+5$  es una función lineal. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-4}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

¿Qué sucede si utiliza sólo los valores correspondientes a los puntos 0 y 1 para calcular la integral con el método trapezoidal?

5. Si tenemos  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \Big|_0^1 = -0.1666666$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = -0.1666666 u^2$ .

Completar la siguiente tabla. Usar 7 puntos,  $x_{\text{inicial}} = 0$ , espaciamento = 0.16666666.

Método de integración	Resultado de la integral	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal	-0.162036	0.004630
Simpson 1/3	-0.1666661	0.000000
Simpson 3/8	-0.1666660	0.000000

5.1. Nótese que  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  es una función polinomial de grado 2. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-4}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

No.

5.2. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 1/3?

Sí.

¿Qué sucede si utiliza solo los valores correspondientes a los puntos 0,  $\frac{1}{2}$  y 1 para calcular la integral con el método de Simpson 1/3?

6. Usando los resultados obtenidos en el punto 3 (no hay que repetir los cálculos), completar la siguiente tabla. Nótese que  $f(x) = \cos(x)$  no es de tipo polinomial y que

$$\int_0^{0.8} \cos(x) dx = \text{sen}(x) \Big|_0^{0.8} = 0.71735609$$

Es decir,  $I_{\text{exacta}} = 0.71735609$ .

Método de integración	Resultado de la integral	$ I_{\text{exacta}} - I_{\text{aprox}} $
Trapezoidal	0.714973	0.002383
Simpson 1/3	0.717361	$5 * 10^{-6}$
Simpson 3/8	0.717356	$9 * 10^{-8}$



6.1. Si deseamos obtener un error menor o igual a  $10^{-7}$  con estos datos, ¿es suficiente el resultado obtenido con el método trapezoidal?

No.

6.2. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 1/3?

No.

6.3. ¿Es suficiente el resultado obtenido con Simpson 3/8?

Sí.

7. La función  $\cos(\cos(x))$  es una función no integrable en  $[0,1]$ . Sin embargo, se puede obtener su integral aproximada en el intervalo 0 a 1.

7.1. Completa los siguientes resultados con SIMetNum

Con Simpson 1/3, 7 puntos, una  $x_{\text{inicial}}=0$  y un espaciamiento de 0.166666:  
**0.559582  $u^2$**

Con Simpson 1/3, 13 puntos, una  $x_{\text{inicial}}=0$  y un espaciamiento de 0.083333:  
**0.659744  $u^2$**

Con Simpson 3/8, 7 puntos, una  $x_{\text{inicial}}=0$  y un espaciamiento de 0.166666:  
**0.559570  $u^2$**

Con Simpson 3/8, 13 puntos, una  $x_{\text{inicial}}=0$  y un espaciamiento de 0.083333:  
**0.6597748  $u^2$**

7.2. El resultado de la integración numérica de la función  $f(x)=\cos(\cos(x))$  de 0 a 1 que proporciona MAPLE es: 0.6597810536, tomando este resultado como el esperado, ¿cuál de los cuatro resultados es el mejor?

El de Simpson 3/8 con 13 puntos, con un error absoluto de 0.000062.

Resultados del cuestionario y la práctica de los métodos de Integración Numérica Trapezoidal, Simpson 1/3 y Simpson 3/8

## CUESTIONARIO

1. Una vez elegido el método de integración a emplear (trapezoidal, Simpson de  $1/3$  o  $3/8$ ), ¿qué se requiere hacer, con ese mismo método, para lograr resultados cada vez más exactos?

Aumentar el número de puntos de la función tabular considerada.

2. Suponiendo que aplicamos los métodos de integración trapezoidal, el de Simpson de  $1/3$  y el de Simpson  $3/8$  a un problema específico, ¿cuál de los tres métodos requiere mayor cantidad de puntos en la tabla para obtener mayor exactitud en los resultados?

El de integración trapezoidal.

3. Si tenemos un número de puntos cualquiera en la función tabular.
  - 3.1. ¿Es posible emplear siempre el método de integración trapezoidal?

Sí, el método trapezoidal no pone restricciones sobre el número de puntos a considerar.

- 3.2. ¿Es posible emplear siempre Simpson  $1/3$ ?

No, el número de puntos de la función tabular debe ser impar y al menos tres para poder utilizar Simpson  $1/3$ .

- 3.3. ¿Es posible emplear siempre Simpson  $3/8$ ?

No, el número de puntos de la función tabular menos 1 debe de ser un múltiplo de 3 para poder aplicar Simpson  $3/8$ .

4. Para aproximar la integral definida de una función dada con  $n$  puntos, ¿cómo debe de ser  $n$  para poder aplicar Simpson  $1/3$  y Simpson  $3/8$ ?

$n$  debe ser impar tal que, además,  $n-1$  sea múltiplo de 3: 7, 13, 19, ...

5. ¿Los métodos anteriormente mencionados sirven para aproximar la integral de funciones no integrables?

Sí.

6. Si deseamos aproximar la integral definida de una función  $f(x)$ , indicada en los siguientes incisos, ¿cuál método de integración consideras que sería suficiente utilizar para obtener una buena aproximación y con cuántos puntos? ¿Por qué?
- a) Función lineal  $f(x)=ax + b$ :  
**Trapezoidal**
- b) Función de grado 2  $f(x)= ax^2+bx+c$ :  
**Simpson 1/3**
- c) Función  $f(x)$  de tipo polinomial de grado mayor a 2 o cualquier otra:  
**Simpson 3/8**



*Prácticas con SIMetNum. Material de apoyo para la impartición de Métodos numéricos* se terminó de imprimir en julio de 2015 de forma digital en los talleres de Imprenta 1200+ Andorra 29. Colonia Del Carmen Zacahuitzco, México D.F.  
Tel. (52)55218493.

El tiraje consta de 100 ejemplares de 17x24 cm, 100 páginas cada uno, a cuatro tintas, encuadernación pegado cubierta flexible. En su composición se utilizaron las familias Avenir y Symbol. Se empleó papel reciclado de 90g para páginas interiores.