Análisis Económico
ISSN: 0185-3937
analeco@correo.azc.uam.mx
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
México

Martínez Palacios, Ma. Teresa V.; Sánchez Daza, Alfredo; Venegas-Martínez, Francisco
Valuación de opciones americanas: un enfoque de control óptimo estocástico en un horizonte finito con fecha final aleatoria
Análisis Económico, vol. XXVII, núm. 64, 2012, pp. 165-183
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Distrito Federal, México

Análisis Económico
Núm. 64, vol. XXVII
Primer cuatrimestre de 2012

Valuación de opciones americanas: un enfoque de control óptimo estocástico en un horizonte finito con fecha final aleatoria

(Recibido: junio/011–aprobado: noviembre/011)

*Ma. Teresa V. Martínez Palacios**
*Alfredo Sánchez Daza***
*Francisco Venegas-Martínez**

Resumen

Este trabajo caracteriza la prima de una opción americana de compra mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parciales provenientes de un problema de control óptimo estocástico que modela la toma de decisiones de consumo e inversión de un consumidor racional en un horizonte de planeación con fecha final estocástica. Para ello se supone que el activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano en un mundo neutral al riesgo. La valuación se lleva a cabo en términos de cuánto el consumidor estaría dispuesto a pagar por un contrato de opción de compra del tipo americana.

Palabras clave: consumidor racional, productos derivados, control óptimo estocástico.
Clasificación JEL: D11, G13, C61.

* Profesores de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional (terevioleta@hotmail.com, fvenegas1111@yahoo.com.mx).
** Director de la DCSH de la UAM-Azcapotzalco (sanchezdaza@yahoo.com).

Introducción

La necesidad de entender el comportamiento de los consumidores-inversionistas bajo situaciones de riesgo (de mercado) generadas por los movimientos azarosos de los precios de los activos en los mercados financieros, lleva a modelar el proceso de toma de decisiones de consumo e inversión de un agente racional con control óptimo estocástico en tiempo continuo[1] (programación dinámica estocástica en tiempo continuo). Uno de los temas importantes, en el marco de estos modelos, es la valuación de productos derivados en términos de cuánto un consumidor-inversionista estaría dispuesto a pagar por dichos derivados.

Las opciones americanas, a diferencia de las europeas, pueden ser ejercidas en cualquier momento entre el día en que se pactan y el día de vencimiento, ambos inclusive y se negocian en mercados organizado (bolsas de opciones) o mercados sobre mostrador. La mayor parte de las opciones que se negocian en estos mercados son justamente del tipo americanas. La investigación realizada en el tema de valuación de opciones americanas es muy amplia y diversa.[2]

Los modelos más conocidos en la literatura financiera para valuar opciones americanas con fórmulas aproximadas son los de Whaley (1981) y Barone-Adesi y Whaley (1987). El objetivo de esta investigación es proporcionar un modelo alternativo que permita caracterizar el precio de una opción americana de compra, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales proveniente de un modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo. Para tal efecto se desarrolla un modelo de un agente racional, el cual dispone de una riqueza inicial y enfrenta la decisión de cómo distribuir su riqueza entre consumo e inversión en un portafolio de activos, incluyendo una opción americana, en un horizonte de planeación finito de magnitud estocástica.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en el siguiente apartado se establece el modelo de control óptimo, estocástico para el problema de consumo e inversión óptimos cuando en la restricción presupuestal se incluye la tenencia de una opción americana con un subyacente conducido por el movimiento geométrico browniano, entre otros activos. En el transcurso del segundo apartado se desarrolla la técnica de programación dinámica (recursividad) que permite encontrar la solu-

[1] La aplicación de la teoría de control óptimo estocástico a problemas de toma de decisiones, valuación de productos derivados o ambas es muy amplia; véanse, por ejemplo: Hernández-Lerma (1994); Björk (2004); Venegas-Martínez (2007, 2009); Ángeles y Venegas-Martínez (2010); y Sierra (2007).

[2] Véanse, por ejemplo: Longstaff y Schwartz (2001); Broadie, Glasserman y Zachary (2000); Rogers (2002); Stentoft (2005); Villeneuve y Zanette (2002); Kou y Wang (2004); Ju (1998); Jin-Chuan y Jean-Guy (2001); Ikonen y Toivanen (2008); Huyên (1997); Fu *et al*. (2001); y Clément, Lamberton y Protter (2002).

ción del problema de control óptimo planteado. En la tercera sección se obtiene el premio al riesgo de mercado de una opción americana de compra. Después se da solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en el cuarto apartado. En el quito apartado se caracteriza analíticamente el premio al riesgo por el ejercicio anticipado de la opción americana de compra, así como el precio de una opción americana de compra por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Por último, se presentan las conclusiones, destacando las limitaciones del modelo propuesto e indicando aquellas extensiones que serán tomadas en cuenta en la agenda futura de investigación.

1. Modelo de control óptimo estocástico para el problema de consumo e inversión óptimos

Considere un agente que toma decisiones en un intervalo de tiempo fijo $\left[0, T\right]$. En el tiempo $t = 0$ el agente es dotado con una riqueza inicial A_0 y el problema que enfrenta es cómo distribuir su riqueza entre inversión y consumo, de tal forma que su riqueza permanezca positiva sobre un horizonte de tiempo finito y tal que maximice su utilidad total esperada y descontada por el consumo de un bien genérico. Suponga que la utilidad total del agente está dada por:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T F\left(t,c_t\right)\,dt + \Phi\left(A_T\right)\middle| I_0\right]$$

Donde:

F = función de utilidad (descontada) por el consumo;
Φ = función de legado o herencia (o función de retiro al tiempo T), la cual mide la utilidad de tener algún recurso al final del periodo; e
I_0 = información relevante al tiempo $t = 0$

Se permite que el agente invierta sus recursos en activos con y sin riesgo, así una parte de su riqueza la destina al ahorro en un banco, el cual le paga una tasa de interés pasiva constante $r > 0$, libre de riesgo de incumplimiento. Por lo que el saldo de la inversión en el tiempo t es $B_t = B_0 e^{rt}$, el cual puede ser expresado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$dB_t = rB_t\,dr_{\mathrm{t}} \qquad \text{con } B_0 \text{ dado}$$

Lo cual implica que el rendimiento del depósito en el banco está dado por:

$$dR_g \equiv \frac{dB_t}{B_t} = rdt \tag{1}$$

La otra parte de su riqueza la invierte en dos activos con riesgo, una acción cuya dinámica es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

De tal forma que el rendimiento está dado por:

$$dR_S \equiv \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

Donde:

W_t = proceso de Wiener, también llamado movimiento browniano, el cual está definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $\left(\Omega, I, \left(I_t^{W}\right)_{t\in[0,\,T]}, P\right)$.

El segundo activo es un contrato de opción americana de compra, sobre la acción, de precio $V_t\left(S_t, t\right)$. El rendimiento de la opción está dado por el cambio porcentual de la prima, es decir:

$$dR_V \equiv \frac{dV_t}{V_t} \tag{3}$$

Donde:

dV_t se obtiene mediante el lema de Itô de la siguiente manera:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\,\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\,\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\,\sigma S_t\, dW_t$$

Si se denotan:

$$\mu_V = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)$$

$$\sigma_V = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t\right)$$

se sigue que:

$$dV_t = V_t \mu_V dt + V_t \sigma_V dW_t \tag{4}$$

Las proporciones de riqueza que se destinarán a los activos riesgosos, la acción y la opción americana de compra, así como al activo sin riesgo en el portafolio de inversión, al tiempo t, las denotaremos mediante θ_{1t}, θ_{2t} y $1-\theta_{1r}-\theta_{2t}$, respectivamente. En lo que sigue c_t denota la tasa de consumo, a la que se le impone la condición $c_t \geq 0$, $\forall\ t \geq 0$. Adicionalmente, se supone que todas las estrategias de consumo e inversión son autofinanciables, asimismo que las negociaciones se llevan a cabo continuamente (los mercados nunca cierran), sin incurrir en costos por comisiones a agentes de casas de bolsa ni pagos de impuestos a autoridades fiscales. Se supone también que las ventas en corto (pedir acciones prestadas a agentes de bolsa) son permitidas e ilimitadas.

De esta manera, si A_t representa la riqueza del consumidor en el tiempo t, entonces la dinámica del proceso de riqueza está dada por:

$$dA_t = A_t \mu_A dt + A_t \sigma_A\, dW_t \tag{5}$$

Donde:

$$\mu_A = \theta_{1t}\,\mu + \theta_{2t}\,\mu_V + \left(1-\theta_{1t}-\theta_{2t}\right) r - \frac{c_t}{A_t}\ ;\ \text{y} \tag{6}$$

$$\sigma_A = \theta_{1t}\,\sigma + \theta_{2t}\,\sigma_V. \tag{7}$$

Dados los supuestos del problema, observe que la riqueza del individuo podría llegar a ser cero en algún momento e incluso negativa en $[0,\ T]$. De esta manera, T será vista como una variable aleatoria, la cual es llamada tiempo de paro. En consecuencia se restringe el dominio a $D = [0,T] \times \{A_t | A_t > 0\}$, y se define la función:

$$\tau = \text{mín}\left[\ \text{ínf}\left\{t > 0 \middle| A_t = 0\right\}, T\right]$$

La interpretación correspondiente es que cuando el proceso de riqueza toque la frontera del dominio, es decir sea cero, entonces la actividad (el proceso de toma de decisiones) se termina y ya no habrá herencia, de esta manera lo natural es suponer que Φ sea cero.

En resumen y estableciendo formalmente el problema de maximización de utilidad del consumidor como un problema de control óptimo estocástico, se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, c_t} \mathrm{E}\left[\int_0^{\tau} F\left(t, c_t\right) dt \middle| I_0\right] \\ &dA_t = A_t \mu_A dt + A_t \sigma_A dW_t \\ &A_0 = a_0 \\ &c_t \geq 0,\ \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Como antes, el integrando $F\left(t, c_t\right)$ se encuentra asociado con la satisfacción del agente por el consumo.

2. Programación dinámica: Hamilton-Jacobi-Bellman

Para dar solución al problema (8) y encontrar las proporciones óptimas en el portafolio de inversión y el consumo óptimo del agente, se define la función de valor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J\left(A_t, t\right) &= \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \leq c_s|_{[t,\tau]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{\tau} F\left(c_s, s\right) ds \middle| I_1\right] \\ &= \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \leq c_s|_{[t,\tau]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} F\left(c_s, s\right) ds + \int_{t+\mathrm{d}t}^{\tau} F\left(c_s, s\right) ds \middle| I_t\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Después de aplicar al primer sumando el teorema del valor medio del cálculo integral y recursividad al segundo, se obtiene:

$$J\left(A_t, t\right) = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \leq c_t|_{[t,\, t+dt]}} \mathrm{E}\left[F\left(c_t, t\right)dt + o\left(dt\right) + J\left(A_t + dA_t, t + dt\right) \middle| I_t\right]$$

Al emplear la expansión en serie de Taylor al segundo sumando:

$$J(A_t, t) = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \le c_s|_{[t,\, t+dt]}} \mathrm{E}\left[F(c_t, t)dt + o(dt) + J(A_t, t) + dJ(A_t, t) + o(dt)\middle| I_t\right]$$

consecuentemente:

$$0 = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \le c_s|_{[t,\, t+dt]}} \mathrm{E}\left[F(c_t, t)dt + o(dt) + dJ(A_t, t)\middle| I_t\right]$$

Al calcular $dJ(A_t, t)$ con el lema de Itô y simplificar (9), se obtiene:

$$0 = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, \theta \le c_t|_{[t,\, t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left[F(c_t, t)\, dt + o(dt) + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial A_t} A_t \sigma dW_t + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial A_t} A_t \mu_A dt\right]$$

A continuación se calcula el valor esperado de esta última ecuación, y dado que $dW_t \sim N(0, dt)$, se elimina el término con browniano resultando:

$$0 = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, 0 \le c_t|_{[t,\, t+\mathrm{d}t)}} \left\{F(c_t, t)dt + o(dt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t, t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \sigma_A^2 dt + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial t} \mathrm{d}t + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial A_t} A_t \mu_A dt\right\}$$

Ahora se divide esta expresión entre dt y se toma su límite cuando $dt \to 0$:

$$0 = \text{máx}_{\theta_{1t},\, \theta_{2t},\, \theta \le c_t} \left\{F(c_t, t) + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(A_t, t)}{\partial A_t} A_t \mu_A + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t, t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \sigma_A^2\right\}$$

A esta ecuación anexamos las condiciones de frontera correspondientes, para obtener la ecuación diferencial parcial (EDP) de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$0 = \text{máx}_{\theta_{1t}\,\theta_{2t},\,\theta \leq c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \left\{ F\left(c_t, t\right) + \frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} A_t\,\mu_A + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t^2 \sigma_A^2 \right\},$$

$$J\left(t, a\right) = 0$$

$$J\left(t, 0\right) = 0$$

Como puede apreciarse en las condiciones de frontera se incorpora el tiempo de paro.

2.1 Condiciones de primer orden

Suponemos ahora que la función de utilidad es de la forma $F\left(c_t, t\right) = e^{-\rho t} V\left(c_t\right)$, donde $V\left(c_t\right)$ es un miembro de la familia de funciones de utilidad HARA (Merton, 1990 y Hakansson, 1970), en consecuencia:

$$F\left(c_1, t\right) = e^{-\rho t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma},\ 0 < \gamma < 1$$

Observe que $V\left(c_t\right)$ tiene la propiedad de que:

$$V'\left(0\right) = \left.\frac{c_t^\gamma}{c_t}\right|_{c_t = 0} = \infty$$

Ello forzará que el consumo sea positivo a lo largo del horizonte de planeación. Al suponer un máximo y hacer las sustituciones correspondientes en la EDP de HJB, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 = e^{-\rho t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} A_t \Bigg[\theta_{1t}\mu + \frac{\theta_{2t}}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\,\mu\, S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t\right) \\ + r - r\,\theta_{1t} - \frac{c_t}{A_t}\Bigg] + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t^2 \Bigg[\left(\theta_{1t}\,\sigma\right)^2 + 2\theta_{1t}\sigma\left(\frac{\theta_{2t}}{V_t}\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\ \sigma S_t\right) \\ + \left(\frac{\theta_{2t}}{V_t}\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\ \sigma S_t\right)^2\Bigg] \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora, se requiere es optimizar para c_t, θ_{1t} y θ_{2t} por lo cual se obtienen las condiciones de primer orden:

$$
\begin{aligned}
c_t^{\gamma-1} &= \frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} e^{\rho t} \\
\theta_{1t} &= -\frac{\dfrac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} A_t\left(\mu - r\right) + \dfrac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t\,\sigma^2 \dfrac{\theta_{2t}}{V_t} S_t \dfrac{\partial V_t}{\partial S_t}}{\dfrac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t\,\sigma^2} \\
\theta_{2t} &= -\frac{\dfrac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} A_t\left(\mu_V - r\right) + \dfrac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t^2 \dfrac{\theta_{1t}\sigma^2}{V_t} S_t \dfrac{\partial V_t}{\partial S_t}}{\dfrac{1}{V_t^2} \dfrac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} A_t^2 \left(\dfrac{\partial V_t}{\partial S_t}\right)^2 S_t^2 \sigma^2}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Para elegir la función $J\left(A_t, t\right)$ que satisfaga la EDP de HJB y toda vez que se trata de una ecuación diferencial parcial sin derivadas cruzadas (mixtas), su solución es un producto de funciones separables de tal forma que:

$$
J\left(A_t, t\right) = e^{\rho t} h\left(t\right) \frac{A^{\gamma}}{\gamma} \tag{13}
$$

Esta expresión, junto con $h\left(T\right) = 0$, se debe a las condiciones de frontera de la ecuación HJB. Dado este candidato para J, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial t} &= \frac{A_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\rho t}\left(h'(t) - \rho h(t)\right) \\
\frac{\partial J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t} &= \frac{A_t^{\gamma}}{\gamma} A_t^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t) \\
\frac{\partial^2 J\left(A_t, t\right)}{\partial A_t^2} &= \left(\gamma - 1\right) A_t^{\gamma-2} e^{-\rho t} h(t)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Si se sustituyen las derivadas de (14) en (12), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_t &= A_t h^{\frac{1}{\gamma-1}}(t)\\
\hat{\theta}_{1t} &= -\frac{\mu - r + (\gamma - 1)\,\theta_{2t}\sigma_V}{(\gamma-1)\sigma}\\
\hat{\theta}_{2t} &= -\frac{\mu_V - r + (\gamma - 1)\,\theta_{1t}\sigma_V}{(\gamma-1)\sigma_V}
\end{aligned} \tag{15}$$

Note que $\hat{c}$ es lineal en la riqueza. A diferencia del marco determinista donde el individuo puede prescribir, con toda seguridad, cuál será su trayectoria óptima de consumo, en el caso estocástico, desafortunadamente, la trayectoria de consumo ya no puede ser determinada porque el consumo se convierte en variable aleatoria, situación más acorde con la realidad. En conclusión, la consideración del riesgo conlleva a cambios cualitativos y cuantitativos importantes en las decisiones de consumo. Asimismo, observe que las proporciones óptimas $\hat{\theta}_{1t}$ y $\hat{\theta}_{2t}$ forman un sistema redundante de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{1t} + \frac{\hat{\theta}_{2t}\,\sigma_V}{\sigma} &= \lambda\\
\hat{\theta}_{2t} + \frac{\hat{\theta}_{1t}\,\sigma}{\sigma_V} &= \lambda_V
\end{aligned} \tag{16}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{(1-\gamma)\,\sigma^2} \;\text{ y }\; \lambda_V = \frac{\mu_V - r}{(1-\gamma)\,\sigma_V^2}. \tag{17}$$

Al hacer $\zeta = \dfrac{\sigma_V}{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{1t} + \zeta\hat{\theta}_{2t} &= \lambda\\
\frac{\hat{\theta}_{1t}}{\zeta} + \hat{\theta}_{2t} &= \lambda_V
\end{aligned} \tag{18}$$

Lo cual implica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1t} \\ \hat{\theta}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_V \end{pmatrix}$$

Sin embargo, de (18) se tiene que det(A) = 0, por lo cual el sistema no tiene una única solución, y por ende tiene una infinidad de soluciones. Ello significa que los premios al riesgo de mercado para la acción y para opción son combinaciones lineales uno del otro, lo cual es lógico porque la opción hereda propiedades del proceso de precios del subyacente.

3. Premio al riesgo

A partir del sistema de ecuaciones (18) se tiene que $\lambda = \zeta\lambda_V$, es decir, los premios al riesgo del mercado del subyacente y de la opción coinciden. Luego:

$$\frac{\mu - r}{(1-\gamma)\,\sigma^2} = \frac{\sigma_V}{\sigma}\,\frac{\mu_V - r}{(1-\gamma)\,\sigma_V^2}$$

Lo cual conduce a:

$$(\mu - r)\,\frac{\sigma_V}{\sigma} = \mu_V - r$$

Después de hacer las sustituciones de μ_V y σ_V que se definen en (4), se obtiene:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\,\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\,rS_t - V_t r = 0 \tag{19}$$

Esta es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), con la cual se valuará la opción americana y a la que para tal efecto se deben de imponer las condiciones de frontera correspondientes a la opción americana de compra y al límite estocástico de tiempo de paro τ, esto es:

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_t}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2+\frac{\partial V_t}{\partial S_t}rS_t-V_t r=0\\ V\left(S_t,t\right)\geq \text{máx}\left(S_t-K,0\right)\\ t\leq\bar{\tau}\end{gathered}\tag{20}$$

Donde:

> K = precio de ejercicio de la opción americana en el tiempo de ejercicio $\bar{\tau}$ = mín $\{\tau, \hat{\tau}\}$, $\hat{\tau}$ = tiempo de paro tal cuando se alcanza el valor máx $\{S_t = K, 0\}$.

4. Solución de la ecuación de HJB

Para encontrar la función $h(t)$ definida en $J(A_t, t)$ que resuelve la ecuación HJB se observa que la regla óptima de consumo es lineal en la riqueza, y se supone una solución de esquina para las proporciones óptimas asignadas a la tenencia del activo riesgoso y a su opción americana, de tal forma que $\hat{\theta}_{1t}=0$ y $\hat{\theta}_{2t}=1$. La interpretación de esta solución de esquina es que si el agente mantiene la opción cuánto estaría él dispuesto a pagar por dicha opción. Si se sustituyen en la ecuación (11) los valores de la ecuación (15) $\hat{c}_t$, μ_V, σ_V, $\hat{\theta}_{1t}=0$ y $\hat{\theta}_{2t}=1$, y se evalúan en el dinero las derivadas parciales en μ_V y σ_V $(S_t=K)$ las cuales se denotan mediante:

$$\mu_V\Big|_{S_t=K}=\bar{\mu}_V$$

$$\sigma_V\Big|_{S_t=K}=\bar{\sigma}_V$$

De esta manera, se obtiene:

$$0 = A_t^{\gamma}\left\{h'(t)+h(t)\left((-\rho)+\gamma\bar{\mu}_V+\frac{\gamma}{2}(\gamma-1)\,\bar{\sigma}_V^2\right)+h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\left(1-\gamma\right)\right\}\tag{21}$$

Si se denotan mediante las siguientes constantes a los coeficientes en la ecuación anterior:

$$\begin{gathered}K_1=\left(-\rho\right)+\gamma\,\bar{\mu}_v+\frac{\gamma}{2}\left(\gamma-1\right)\bar{\sigma}_v^2\\ k_2=1-\gamma\end{gathered}\tag{22}$$

se tiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$0 = A_t^{\gamma}\left[h'(t) + k_1 h(t) + k_2 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right] \tag{23}$$

Si esta ecuación se cumple para todas A_t y t, entonces $h(t)$ debe de resolver la ecuación:

$$h'(t) + k_1 h(t) = k_2 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t),\ h(T) = 0 \tag{24}$$

Esta expresión es una ecuación de Bernoulli con $p(t) = k_1$, $q(t) = -k_2$ y $n = \gamma/(\gamma-1)$. Para transformar la ecuación de Bernoulli en una ecuación diferencial lineal de una función (desconocida), se sustituye $z = h^{1-n}(t) = h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)$, de donde $h(t) = z^{1-\gamma}$ y $h'(t) = (1-\gamma)\, z^{1-\gamma}\, z'$, al sustituir en (22) y multiplicar ambos lados de la ecuación por $z^{\gamma}/(1-\gamma)$ se obtiene:

$$z' + \frac{k_1}{(1-\gamma)}\, z = -\frac{k_1}{(1-\gamma)} \text{ o bien } z' = -k_{11} z - 1 \tag{25}$$

Con:

$z(T) = 0.$

De esta manera:

$$z(t) = z(T)e^{k_{11}(T-t)} - e^{k_{11}(T-t)} \int_T^t e^{k_{11}(T-s)}\, ds,\ z(T) = 0 \tag{26}$$

Simplificando se llega a:

$$\begin{aligned} z(t) &= -e^{k_{11}(T-t)} \int_T^t e^{k_{11}(T-s)}\, ds \\ &= -e^{-tk_{11}} \int_T^t \frac{1}{k_{11}}\, e^{k_{11}s}\, ds \\ &= -\frac{e^{-tk_{11}}}{k_{11}} \left(e^{k_{11}t} - e^{k_{11}T}\right) \\ &= -\frac{1}{k_{11}} \left(1 - e^{k_{11}(T-t)}\right) \end{aligned}$$

Es decir:

$$z(t) = -\frac{1}{k_{11}}\left(1 - e^{k_{11}(T-t)}\right),\ z(T) = 0 \tag{27}$$

Por último, si se sustituye $z(t)$ en $h(t)$:

$$h(t) = z^{1-\gamma}(t) = -\frac{1}{k_{11}^{1-\gamma}}\left(1 - e^{k_{11}(T-t)}\right)^{1-\gamma},\ \ h(T) = 0 \tag{28}$$

5. Caracterización de la prima de una opción americana

Note que la prima de la opción americana es más cara que la de una opción europea ya que se puede ejercer en cada instante desde la emisión del contrato de opción y hasta el tiempo de su madurez, lo cual dota al tenedor del contrato del derecho de obtener ganancias mayores que cuando se trata de una opción europea. Esto, aunado a que el ejercicio anticipado proporcione mejores ganancias. Además para el tipo de problema que nos ocupa, el tiempo de madurez es estocástico, ello exige que el derivado pueda ser ejercido en cualquier momento del tiempo, lo cual es una característica de la opción americana.

En el problema de valuación de la opción americana no sólo se debe de determinar el valor de la opción en cada instante, también hay que especificar si se ejerce o no la opción para cada valor de S_t. Usualmente esto se lleva a cabo estableciendo un valor crítico de S^* para cada t. Sin pérdida de generalidad, se supone que dicho valor es único. Luego, si $S_t \geq S^*$ se está en la región de ejercicio y es óptimo ejercer la opción, y si $S_t < S^*$ no se halla en dicha región y lo óptimo es mantener la opción.

De esta manera, si la opción es ejercida cuando $S_t < S^*$, entonces el precio de la opción americana de compra $V = V(S_t, t)$, satisface la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} r S_t - V_t r = 0 \tag{29}$$

Dado que una opción americana es más cara que una europea, denotemos con $\varepsilon(S_t, t)$ al premio por el ejercicio anticipado de la opción, entonces:

$$V_t\left(S_t, t\right) = c_{B\text{–}S\text{–}M}\left(S_t, t\right) + \varepsilon\left(S_t, t\right) \tag{30}$$

$$\varepsilon\left(S_t, t\right) = V_t\left(S_t, t\right) - c_{B\text{–}S\text{–}M}\left(S_t, t\right) \tag{31}$$

Donde:

$c_{B\text{–}S\text{–}M}\left(S_t, t\right)$ = precio de una opción europea de compra que satisface la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden de Black-Scholes-Merton.

Toda vez que $V_t\left(S_t, t\right)$ también satisface una ecuación análoga a (29) (con sus correspondientes condiciones de frontera), se tiene:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} rS_t - \varepsilon r = 0 \tag{32}$$

Si se define el cambio de variable: $u = \bar{\tau} - t$ junto con los parámetros $M = 2r\sigma^{-2}$ y $G = 2r\sigma^{-2} - 1$, al multiplicar (29) por el parámetro M e incluir el cambio de variable, se puede expresar (32) como:

$$\begin{aligned} 0 &= M\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + 2r\sigma^{-2}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2}\sigma^{-2} S_t^2 + 2r\sigma^{-2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} rS_t - M\varepsilon r \\ &= -M\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} + r\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} S_t^2 + 2r^2\sigma^{-2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} S_t - M\varepsilon r. \end{aligned}$$

Dividiendo entre r y haciendo las sustituciones correspondientes:

$$0 = -\frac{M}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} S_t^2 + \left(G + 1\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} S_t - M\varepsilon \tag{33}$$

Si se supone una solución de la forma $\varepsilon\left(S_t, t\right) = g\left(u\right) f\left(S_t, g\left(u\right)\right)$, con $f\left(S_t, 0\right) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} &= g\frac{\partial f}{\partial S_t} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} &= g\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} &= f\frac{dg}{du} + \frac{\partial f}{\partial g} g\frac{dg}{du} \\ &= \frac{dg}{du}\left(f + \frac{\partial f}{\partial g} g\right) \end{aligned} \tag{34}$$

Al sustituir (31) en (29) y factorizar g, se sigue:

$$0 = -\frac{M}{r}\frac{dg}{du}\left(\frac{f}{g} + \frac{\partial f}{\partial g}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} S_t^2 + \left(G+1\right)\frac{\partial f}{\partial S_t} S_t - Mf$$
$$0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} S_t^2 + \left(G+1\right)\frac{\partial f}{\partial S_t} S_t - Mf\left(1 + \frac{1}{rg}\frac{dg}{du}\left(1 + \frac{g}{f}\frac{\partial f}{\partial g}\right)\right) \tag{35}$$

Si de manera similar a (28), se elige $g\left(u\right) = 1 - e^{-ru}$:

$$-Mf\left(1 + \frac{1}{rg}\frac{dg}{du}\; 1 + \frac{g}{f}\frac{\partial f}{\partial g}\right)\Bigg) = -Mf\left(1 + \frac{1 - g\left(u\right)}{g}\left(1 + \frac{g}{f}\frac{\partial f}{\partial g}\right)\right)$$

En consecuencia, (32) se transforma en:

$$0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} S_t^2 + \left(G+1\right)\frac{\partial f}{\partial S_t} S_t - \left(1 - g\right) M\frac{\partial f}{\partial g} - \frac{M}{g} f \tag{36}$$

Se tiene entonces que $V_t\left(S_t, t\right) = \varepsilon\left(S_t, t\right) + c_{B-S-M}\left(S_t, t\right)$, $S_t < S^*$, donde el primer sumando es $\varepsilon\left(S_t, t\right) = g\left(u\right) f\left(S_t, g\left(u\right)\right)$, con $g\left(u\right) = 1 - e^{-ru}$, y $f\left(S_t, g\left(u\right)\right)$ satisface (36) y el segundo es la solución tradicional del modelo de Blake-Scholes-Merton. De esta manera, si el activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano en un mundo neutral al riesgo, entonces el precio $V_t\left(S_t, t\right)$ queda completamente caracterizado por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales. Esta propuesta es una alternativa a los modelos más populares en la literatura financiera, para valuar opciones americanas con fórmulas aproximadas como son los de Whaley (1981) y Barone-Adesi y Whaley (1987).

Conclusiones

En esta investigación se caracterizó la prima de una opción americana mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, provenientes de un problema de control óptimo estocástico planteado para modelar el proceso de toma de decisiones de consumo e inversión de un consumidor-inversionista racional en un horizonte de planeación con fecha final estocástica. La valuación se llevó a cabo en términos de cuánto el consumidor-inversionista estaría dispuesto a pagar por un contrato de opción de compra del tipo americana.

La mayor parte de las opciones que se cotizan y negocian en los mercados de derivados, ya sea en bolsas o sobre mostrador, son del tipo americanas. En el marco de la teoría de control óptimo estocástico, en tiempo continuo, se ha caracterizado el precio de una opción americana de compra (en un mundo neutral riesgo) mediante una ecuación diferencial parcial, dada en (36), así como la función $g(u) = 1 - e^{-ru}$ y la fórmula tradicional de Black-Scholes-Merton. Es importante destacar que g se calcula en términos de parámetros conocidos, pero (36) requiere de métodos para calcular soluciones aproximadas de f. Por supuesto, la tarea de encontrar soluciones aproximadas de f requiere de un trabajo computacional laborioso (métodos de diferencias finitas) y esto ya se encuentra en la agenda de investigación futura.

Referencias bibliográficas

Ángeles, G. y F. Venegas-Martínez (2010). "Valuación de opciones sobre índices bursátiles y determinación de la estructura de plazos de la tasa de interés de un modelo de equilibrio general", *Investigación Económica*, vol. 69, núm. 271, pp. 43-80.

Barone-Adesi, G. & R. E. Whaley (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, vol. 42, No. 2, pp. 301-320.

Black, F. & M. Scholes (1973). "The Pricing of Option and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd, Oxford University Press.

————; J. Myhrman & M. Persson (1987). "Optimal consumption with stochastic prices in continuous time", *Journal of Applied Probability*, vol. 24, no. 1, pp. 35-47.

Broadie M.; P. Glasserman & H. Zachary (2000). "Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications", in *Pricing American Options by Simulation Using a Stochastic Mesh with Optimized Weights*, Kluwer Academic Publishers, pp. 32-50.

Clément E.; D. Lamberton & P. Protter (2002). "An Analysis of a Least Squares Regression Method for American Option Pricing", *Finance and Stochastics*, vol. 6, No. 4, pp. 449-471.

Fu, M. C.; S. B. Laprise; D. B. Madan; Y. Su & R. Wu (2001). "Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches", *Journal of Computational Finance*, vol. 4, No. 3, pp. 39-88.

Hakansson, N. (1970). "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions", *Econometrica*, vol. 38, No. 5, pp. 587-607.

Hernández-Lerma, O. (1994). "Lectures on Continuous-Time Markov Control Processes" *Aportaciones Matemáticas 3*, Sociedad Matemática Mexicana.

Haugh, M. B. & L. Kogan (2004). "Pricing American Options: A Duality Approach", *Operations Research*, vol. 52, No. 2, pp. 258-270.

Huyên P. (1997). "Optimal stopping, free boundary, and American option in a jump-diffusion model", *Mathematics and Statistics: Applied Mathematics & Optimization*, vol. 35, No. 2, pp. 145-164.

Ikonen S. & J. Toivanen (2008). "Efficient Numerical Methods for Pricing American Options under Stochastic Volatility", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 24, No. 1, pp. 104-126.

Jin-Chuan D. & S. Jean-Guy (2001). "American option pricing under GARCH by a Markov chain approximation", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, No. 11, pp. 1689-1718.

Ju, N. (1998). "Pricing by American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function", *The Review of Financial Studies*, vol. 11, No. 3, pp. 627-646.

Kou, S. G. & H. Wang (2004). "Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model", *Management Science*, vol. 50, No. 9, pp. 1178-1192.

Longstaff, F. A. & E. S. Schwartz (2001). "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach", *The Review of Financial Studies*, vol. 14, No. 1, pp. 113-147.

Merton, R. (1990). *Continuous-Time Finance*, Cambridge, Massachusetts: Basil Blackwell.

——— (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics*, vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Rogers, L. C. G. (2002). "Monte Carlo Valuation of American Options", *Mathematical Finance*, vol. 12, No. 3, pp. 271-286.

Sierra, G. (2007). "Procesos Hurst y movimientos brownianos fraccionales en mercados fractales", *Revista de Administración Finanzas y Economía*, vol. 1, núm. 1, pp. 1-21.

Stentoft, L. (2005). "Pricing American Options when the Underlying Asset follows GARCH processes", *Journal of Empirical Finance*, vol. 12, No. 4, pp. 576-611.

Venegas-Martínez, F. (2009). "Un modelo estocástico de equilibrio general para valuar derivados y bonos", *EconoQuantum*, vol. 6, No. 1, pp. 111-120.

——— (2007). "Real Options on Consumption in a Small Open Monetary Economy: A Stochastic Optimal Control Approach", *Morfismos*, vol. 11. No. 1, pp. 37-52.

Villeneuve S. & A. Zanette (2002). "Parabolic ADI Methods for Pricing American Options on Two Stocks", *Mathematics and Statistics: Mathematics of Operations Research*, vol. 27, No. 1, pp. 121-149.

Whaley, R. E. (1981). "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, vol. 9, No. 2, pp. 207-211.