



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E
INGENIERÍA

EL POLINOMIO DICROMÁTICO DE UNA
DIGRÁFICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

PRESENTA:

RANGEL HERNÁNDEZ ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DIEGO ANTONIO GONZÁLEZ MORENO

CD. MX., 2020

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el polinomio dicromático de una digráfica. Para esto, comenzamos dando algunas definiciones básicas sobre gráficas y digráficas, así como algunos resultados clásicos sobre el polinomio cromático de una gráfica.

Uno de los resultados principales de este trabajo es la obtención de una fórmula recursiva para calcular el polinomio dicromático de una digráfica. También mostramos algunas propiedades que satisfacen los coeficientes del polinomio dicromático de una digráfica.

En el último capítulo se definen los conceptos de equivalencia dicromática y unicidad dicromática, asimismo se presentan algunas condiciones que debe cumplir una digráfica para ser dicromáticamente única. Además, demostramos que \vec{C}_n , con $n \geq 2$, $\vec{C}_5(1, 2)$ y QR_7 son dicromáticamente únicos.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | I |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Gráficas | 1 |
| 1.2. Digráficas | 3 |
| 2. El polinomio cromático | 7 |
| 2.1. Coloraciones propias en gráficas | 7 |
| 2.2. Calculando el polinomio cromático | 8 |
| 2.3. Propiedades del polinomio cromático | 12 |
| 2.4. Ejemplos | 14 |
| 2.5. Cromaticidad | 16 |
| 3. El polinomio dicromático | 19 |
| 3.1. Coloraciones acíclicas en digráficas | 19 |
| 3.2. Resultados conocidos | 20 |
| 3.3. Calculando el polinomio dicromático | 23 |
| 3.4. Propiedades del polinomio dicromático | 29 |
| 4. Dicromaticidad | 33 |
| 4.1. Equivalencia dicromática | 33 |
| 4.2. Unicidad dicromática | 35 |
| Conclusiones | 41 |
| Apéndice A | 43 |
| Apéndice B | 45 |
| Bibliografía | 51 |

Introducción

El teorema de los cuatro colores establece que todo mapa puede ser coloreado con a lo más cuatro colores de manera que regiones que compartan una frontera en común tengan distinto color.

Este teorema fue enunciado en forma de conjetura en 1852 por F. Guthrie y tuvo que pasar más de un siglo, en el cual hubo varios intentos por demostrar el teorema, hasta que K. Appel y W. Haken en 1976 demostraron el teorema con ayuda de una computadora.

En 1912, D. Birkhoff [3] en su propósito por probar el teorema de los cuatro colores, definió el polinomio cromático de un mapa M , denotado por $P(M; \lambda)$, como el número de λ -coloraciones propias distintas de M . En 1932, H. Whitney [13] generalizó el polinomio cromático a gráficas, al cual denotó por $P(G; \lambda)$. El teorema de los cuatro colores hubiera quedado demostrado si $P(G; 4) > 0$ para toda gráfica plana G . A pesar de que por medio del polinomio cromático no se pudo demostrar el teorema de los cuatro colores, este se volvió un objeto importante de estudio en la teoría algebraica de gráficas.

Whitney [13] probó la siguiente fórmula recursiva para el polinomio cromático de una gráfica G

$$P(G; \lambda) = P(G + \{uv\}; \lambda) + P(G/\{u, v\}; \lambda),$$

donde $u, v \in V(G)$ son vértices no adyacentes.

A. Harutyunyan [4] definió de manera similar el polinomio dicromático (o polinomio cromático) de una digráfica D , denotado por $P(D; \lambda)$, como el número de λ -coloraciones acíclicas distintas de D . El objetivo principal de este trabajo es proporcionar una fórmula recurrente para calcular el polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D , así como dar propiedades de $P(D; \lambda)$.

Este texto está dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se introducen definiciones básicas sobre gráficas y digráficas. En el segundo capítulo se presentan resultados básicos sobre el polinomio cromático $P(G; \lambda)$ de una gráfica G .

El tercer capítulo es el capítulo central de este trabajo, pues se presenta una fórmula recursiva para calcular el polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D , además de que se dan propiedades que satisface $P(D; \lambda)$.

En el cuarto capítulo se introducen los conceptos de equivalencia dicromática y unicidad dicromática, además en este capítulo demostramos que \vec{C}_n , con $n \geq 2$, $\vec{C}_5(1, 2)$ y QR_7 son dicromáticamente únicos.

Al final se dan las conclusiones generales de este trabajo, así como problemas abiertos sobre el polinomio dicromático. También proporcionamos dos apéndices en los cuales se presenta el cálculo de $P(\vec{C}_5(1, 2); \lambda)$ y el cálculo de los polinomios de la demostración del teorema 23.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones básicas sobre gráficas y digráficas que se utilizan en este texto. Sobre la marcha se introducen otras definiciones y notaciones según se van necesitando. Para las definiciones y conceptos no incluidos aquí, se puede revisar el libro [1].

1.1. Gráficas

Una *gráfica* G es un par ordenado (V, A) , donde V es un conjunto finito y no vacío de objetos llamados *vértices* y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V . A los elementos de A se les llama *aristas*. Dada una gráfica $G = (V, A)$, a los conjuntos V y A también se les suele denotar por $V(G)$ y $A(G)$, respectivamente. Las gráficas pueden representarse mediante diagramas, esto se hace dibujando a los vértices mediante círculos (o puntos) y a las aristas por medio de segmentos de recta que unen dichos círculos (puntos).

Dos vértices $u, v \in V(G)$ se dice que son *adyacentes* si $e = (u, v) \in A(G)$. También diremos que u y v son *extremos* de e y que la arista e incide en u y en v . Dada una arista $e = (u, v)$, por notación, en lugar de escribir (u, v) escribiremos uv . Una arista $e \in A(G)$ es un *lazo* si tiene ambos extremos en un mismo vértice. Se dice que G es *simple* si no tiene lazos y aristas múltiples. En este trabajo solo consideramos gráficas simples.

Dada una gráfica G , al número de vértices de G se le llama el *orden* de G y al número de aristas se le llama el *tamaño* de G . Dado un vértice $v \in V(G)$, el *grado* de v , denotado por $d(v)$, es el número de aristas que inciden en v . Un vértice $v \in V(G)$ se dice que es una hoja o vértice final de G si $d(v) = 1$.

Una gráfica de orden n es *completa* si todo vértice $v \in V(G)$ cumple que $d(v) = n - 1$. A una gráfica completa de orden n se le denota por K_n . A la gráfica sin aristas de orden n

se le denota por \overline{K}_n .

Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición de $V(G)$ en V_1 y V_2 tal que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y el otro extremo en V_2 .

Una *subgráfica* H de una gráfica G es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Una subgráfica H de G , con $S = V(H)$, es una *subgráfica inducida* por vértices, si $S \subseteq V(G)$ y $uv \in A(G)$ si y sólo si $uv \in A(H)$ con $\{u, v\} \subseteq S$, y se denota por $H = G\langle S \rangle$.

Decimos que dos gráficas G_1 y G_2 son *isomorfas*, si existe una función biyectiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $uv \in A(G_1)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in A(G_2)$. Si dos gráficas G_1 y G_2 son isomorfas lo denotaremos por $G_1 \cong G_2$.

Un *camino* $W = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es una sucesión finita de vértices tal que $v_i v_{i+1} \in A(G)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. La *longitud* de W se define como el número de aristas que están en W . Una *trayectoria* $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un camino que no repite vértices y se dice que es una trayectoria de v_1 a v_n o una (v_1, v_n) -trayectoria.

Se dice que $W = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un *camino cerrado* si $v_1 = v_n$. Un *ciclo* $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ con $n \geq 3$ es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último. Un ciclo de longitud n es llamado *n-ciclo* y se denota por C_n . Dado un ciclo $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$, una *cuerda* de C_n es una arista de la forma $v_i v_j$ donde $i \neq j$ y $v_i v_j \notin A(C_n)$.

Una gráfica G es *conexa* si para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una (u, v) -trayectoria. Si una gráfica G no es conexa se dice que es *inconexa*. Una *componente conexa* de G es una subgráfica de G maximal por contención con la propiedad de ser conexa.

Se dice que una gráfica conexa G es un *árbol* si no tiene ciclos. Un bosque es una gráfica que no tiene ciclos.

Sea $v \in V(G)$ un vértice, $G - \{v\}$ denotará a la gráfica obtenida al remover el vértice v de la gráfica G , es decir, la gráfica inducida por el conjunto de vértices $V(G) \setminus \{v\}$. Análogamente, dada una arista $uv \in A(G)$, $G - \{uv\}$ denotará a la gráfica obtenida al remover la arista uv de la gráfica G . Dados dos vértices $u, v \in V(G)$ no adyacentes, $G + \{uv\}$ denotará la gráfica obtenida al agregar la arista uv a la gráfica G .

Dado un par de vértices $u, v \in V(G)$, denotaremos por $G/\{u, v\}$ a la gráfica que se obtiene al contraer (o identificar) los vértices u y v , es decir, la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G/\{u, v\}) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ donde $w \notin V(G)$ y cuyo conjunto de aristas

es

$$A(G/\{u, v\}) = \{xy : xy \in A(G) \text{ y } x, y \in V(G) \setminus \{u, v\}\} \cup \{wx : ux \in A(G) \text{ o } vx \in A(G), x \in V(G) \setminus \{u, v\}\}.$$

En la figura 1.1 se presenta un ejemplo de contracción de un par de vértices de una gráfica G .

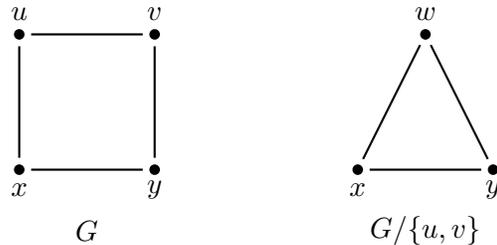


Figura 1.1: Contracción de los vértices u y v en G .

Sea G una gráfica conexa y $v \in V(G)$, se dice que v es un *vértice de corte* si $G - \{v\}$ es inconexa. Un *bloque* de una gráfica conexa G es una subgráfica conexa maximal de G con la propiedad de no tener vértices de corte. Un bloque de G es un *bloque final* si tiene únicamente un vértice de corte de G .

Una gráfica G es *plana* si se puede dibujar en el plano de tal manera que ningún par de aristas se crucen.

1.2. Digráficas

Una *gráfica dirigida* o *digráfica* D es una pareja ordenada (V, F) , donde V es un conjunto finito y no vacío de objetos llamados *vértices* y F es un conjunto de parejas ordenadas de elementos de V . A los elementos de F se les llama *flechas*. Dada una digráfica $D = (V, F)$, a los conjuntos V y F también se les denota por $V(D)$ y $F(D)$, respectivamente.

En el caso de las digráficas, al representarlas mediante diagramas, una flecha (u, v) se representa por medio de una flecha del vértice u hacia v . Si (u, v) es una flecha de D , por notación en lugar de escribir (u, v) escribiremos uv . Diremos que dos vértices u y v de D son *adyacentes* si $uv \in F(D)$ o $vu \in F(D)$. Una flecha $a \in F(D)$ es un *lazo* si $a = uu$ donde $u \in V(D)$. Se dice que D es *simple* si no tiene lazos ni flechas múltiples. En este trabajo solo consideramos digráficas simples.

Sea D una digráfica y $v \in V(D)$, la *exvecindad* de v es el conjunto $N^+(v) = \{u \in V(D) : vu \in F(D)\}$, a los elementos de $N^+(v)$ se les llama *exvecinos* de v . La cardinalidad

de $N^+(v)$ es el *exgrado* de v , que es denotado por $d^+(v)$. Análogamente la *invecindad* de v es el conjunto $N^-(v) = \{u \in V(D) : uv \in F(D)\}$, a los elementos de $N^-(v)$ se les llama *invecinos* de v . La cardinalidad de $N^-(v)$ es el *ingrado* de v , el cual es denotado por $d^-(v)$.

Una *subdigráfica* D' de una digráfica D es una digráfica tal que $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. Una subdigráfica D' de D , con $S = V(D')$, es una *subdigráfica inducida* por vértices si $S \subseteq V(D)$ y $uv \in F(D)$ si y sólo si $uv \in F(D')$ con $u, v \in S$, y se denota por $D\langle S \rangle$.

Dos digráficas D_1 y D_2 son *isomorfas*, si existe una función biyectiva $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ tal que $uv \in F(D_1)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in F(D_2)$. Si dos digráficas D_1 y D_2 son isomorfas lo denotaremos por $D_1 \cong D_2$.

Dada una digráfica D , un *camino dirigido* $W = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en D es una sucesión finita de vértices tal que $x_i x_{i+1} \in F(D)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. La *longitud* de W es el número de flechas de W .

Una *trayectoria dirigida* $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un camino dirigido que no repite vértices y se dice que es una trayectoria dirigida de x_1 hacia x_n o una (x_1, x_n) -trayectoria dirigida.

Se dice que $W = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un *camino cerrado dirigido* si $x_1 = x_n$. Un *ciclo dirigido* $C = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $n \geq 3$ es un camino cerrado dirigido que no repite vértices, salvo el primero y el último. Un ciclo dirigido de longitud n es llamado *n-ciclo dirigido* y se le denota por \vec{C}_n .

El *cuello* $g = g(D)$ de una digráfica D es la longitud del ciclo dirigido más corto en D . La *circunferencia* de una digráfica D es la longitud del ciclo dirigido más largo de D .

Cuando se trabaja únicamente con digráficas en los términos camino dirigido, trayectoria dirigida y ciclo dirigido se puede omitir la palabra "dirigido".

Una *digráfica acíclica* D es una digráfica que no tiene ciclos, además se dice que $X \subseteq V(D)$ es un *conjunto acíclico* si $D\langle X \rangle$ es acíclica. Diremos que una flecha $uv \in F(D)$ es *asimétrica* si $vu \notin F(D)$, de lo contrario diremos que es *simétrica*. Un par de vértices $u, v \in V(D)$ son *asimétricos* si $D\langle \{u, v\} \rangle$ no tiene flechas simétricas.

La *gráfica subyacente* $UG(D)$ de una digráfica D , es la gráfica obtenida al reemplazar cada flecha $uv \in F(D)$ o la pareja de flechas $\{uv, vu\} \subseteq F(D)$ por la arista uv . Una *orientación* de una gráfica G es la digráfica que se obtiene al reemplazar cada arista $uv \in V(G)$ por una y sólo una de las flechas uv o vu .

Un *torneo* es una orientación de la gráfica K_n . Denotaremos por \overleftarrow{D} a la digráfica que se obtiene de cambiar toda flecha $uv \in V(D)$ por la flecha vu .

Una digráfica D es *conexa* (o *débilmente conexa*) si su gráfica subyacente es conexa.

Una digráfica D es *fuerte* (o *fuertemente conexa*) si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ existe una (u, v) -trayectoria. Una *componente fuerte* de una digráfica D es una subdigráfica inducida maximal de D con la propiedad de ser fuerte. Un resultado conocido es que si una digráfica D es fuerte, entonces D tiene un ciclo.

Sean X, Y subconjuntos no vacíos de vértices de una digráfica D . Definimos el conjunto (X, Y) como

$$(X, Y) = \{(x, y) \in F(D) : x \in X, y \in Y\}.$$

Sea $v \in V(D)$ un vértice, $D - \{v\}$ denotará a la digráfica obtenida al remover el vértice v de la digráfica D , es decir, la digráfica inducida por el conjunto de vértices $V(D) \setminus \{v\}$. Análogamente, dada una flecha $uv \in A(D)$, $D - \{uv\}$ denotará a la digráfica obtenida al remover la flecha uv de la digráfica D . Dado un subconjunto $A \subseteq F(D)$, denotaremos por $D - A$ a la digráfica que se obtiene de remover todas las flechas en A de D .

Sean $u, v \in V(D)$ vértices asimétricos, denotaremos por $D + \{uv, vu\}$ a la digráfica que se obtiene al añadirle a la digráfica D las flechas uv y vu . Dado que solamente estamos trabajando con digráficas simples, cada vez que consideremos dos vértices u y v asimétricos de una digráfica D , si se da el caso en el que $uv \in F(D)$ (resp. $vu \in F(D)$), entonces al considerar la digráfica $D + \{uv, vu\}$ entenderemos que sólo agregaremos la flecha vu (resp. la flecha uv) a D .

Sea $X \subseteq V(D)$. Definimos la *contracción* de X en D , denotada por D/X , como la digráfica cuyo conjunto de vértices es $V(D/X) = (V(D) \setminus X) \cup \{x\}$, donde $x \notin V(D)$ y cuyo conjunto de flechas es

$$\begin{aligned} A(D/X) = A(D - X) \cup & \{(x, v) : v \in V(D) \setminus X, (X, \{v\}) \neq \emptyset\} \\ & \cup \{(v, x) : v \in V(D) \setminus X, (\{v\}, X) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de la contracción de un subconjunto de vértices de una digráfica D .

Una digráfica D es *plana* si $UG(D)$ es plana.

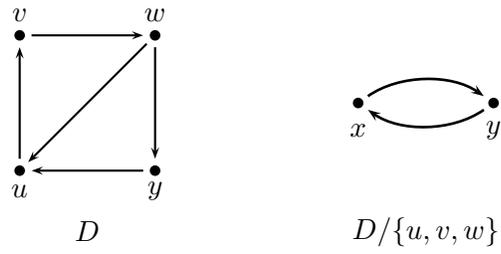


Figura 1.2: Contracción del conjunto de vértices $X = \{u, v, w\}$ en D .

Capítulo 2

El polinomio cromático

En este capítulo se presentan algunos resultados básicos y ampliamente conocidos sobre el polinomio cromático $P(G; \lambda)$ de una gráfica G . También se define la equivalencia y unicidad cromática de una gráfica y se presentan resultados sobre estos conceptos.

2.1. Coloraciones propias en gráficas

Dado que la definición del polinomio cromático de una gráfica está intrínsecamente relacionado con el concepto de λ -coloración de una gráfica, comenzamos dando algunos resultados sobre λ -coloraciones.

Definición 1. Sea λ un entero positivo. Una λ -coloración (o λ -coloración propia) de los vértices de una gráfica G es una función $\Gamma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ tal que si $u, v \in V(G)$ son adyacentes entonces $\Gamma(u) \neq \Gamma(v)$.

Dados λ colores, una λ -coloración de una gráfica G es equivalente a colorear los vértices de G de manera que vértices adyacentes no tengan el mismo color. En la figura 2.1 se muestran 6 distintas 3-coloraciones de un 4-ciclo con una cuerda.

Definición 2. Una gráfica que admite una λ -coloración se dice que es λ -coloreable. El número cromático de una gráfica G , denotado por $\chi(G)$, se define como

$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{Z}^+ : G \text{ es } \lambda\text{-coloreable}\}.$$

Sea H un 4-ciclo con una cuerda, dado que H tiene 2 triángulos entonces su número cromático es al menos 3. Dado que en la figura 2.1 mostramos seis distintas 3-coloraciones de H , podemos concluir que el número cromático de H es $\chi(H) = 3$.

A continuación se enlistan algunos resultados elementales sobre el número cromático.

- Una gráfica G de orden n tiene número cromático $\chi(G) = n$ si y sólo si $G \cong K_n$.

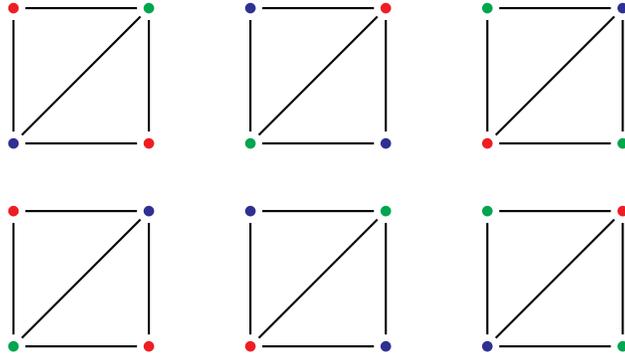


Figura 2.1: Ejemplos de 3-coloraciones.

- Una gráfica G de orden n tiene número cromático $\chi(G) = 1$ si y sólo si $G \cong \overline{K}_n$.
- Una gráfica G no vacía tiene número cromático $\chi(G) = 2$ si y sólo si G es bipartita.
- Para todo $n \geq 3$, se cumple que

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

El siguiente teorema es uno de los teoremas más importantes en la teoría de gráficas.

Teorema 1 (Teorema de los cuatro colores). Toda gráfica plana es 4-coloreable.

2.2. Calculando el polinomio cromático

Ya que hemos definido lo que es una λ -coloración de los vértices de una gráfica G , podemos definir el polinomio cromático de una gráfica G .

Definición 3. El polinomio cromático de una gráfica G , denotado por $P(G; \lambda)$, es el número de λ -coloraciones distintas de G .

Podemos definir el número cromático $\chi(G)$ de una gráfica G por medio su polinomio cromático de la siguiente manera

$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{Z}^+ : P(G; \lambda) > 0\}.$$

Existen gráficas para las que es sencillo calcular su polinomio cromático, por ejemplo, las gráficas completas y las gráficas sin aristas.

Proposición 1. El polinomio cromático de la gráfica completa de orden n es

$$P(K_n; \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1).$$

Demostración. Sea $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y observe que para toda λ -coloración de K_n ningún par de vértices pueden tener el mismo color. Ahora, escojamos un vértice, por ejemplo v_1 . A v_1 le podemos asignar cualquier color de los λ colores, al vértice v_2 le podemos asignar un color de los $\lambda - 1$ colores restantes, \dots , al vértice v_n le podemos asignar uno de los $\lambda - n + 1$ colores restantes. Por lo tanto, $P(K_n; \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)$. \square

Proposición 2. El polinomio cromático de la gráfica sin aristas de orden n es

$$P(\overline{K}_n; \lambda) = \lambda^n.$$

Demostración. Dados λ colores, a cualquier vértice de \overline{K}_n se le puede asignar cada uno de los λ colores sin restricción. Por lo tanto, $P(\overline{K}_n; \lambda) = \lambda^n$. \square

El polinomio cromático de una gráfica puede ser expresado en términos de los polinomios cromáticos de sus componentes conexas.

Teorema 2. Sea G una gráfica con $k \geq 2$ componentes conexas. Si G_1, G_2, \dots, G_k son las componentes conexas de G , entonces

$$P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(G_i; \lambda).$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Si $k = 2$, sean G_1 y G_2 las dos componentes conexas de G . Como G_1 y G_2 no tienen vértices en común, toda λ -coloración de G_1 se puede extender a una λ -coloración de G de $P(G_2; \lambda)$ maneras distintas. Por lo tanto $P(G; \lambda) = P(G_1; \lambda)P(G_2; \lambda)$.

Supongamos que para toda gráfica H con $k-1$ componentes conexas su polinomio cromático es

$$P(H; \lambda) = \prod_{i=1}^{k-1} P(H_i; \lambda),$$

donde H_1, H_2, \dots, H_{k-1} son las componentes conexas de H .

Sea G una gráfica con k componentes conexas y sean G_1, G_2, \dots, G_k las componentes conexas de G . Sea $G' = G \setminus V(G_k)$. Observe que G' es una gráfica con $k-1$ componentes conexas, tales componentes conexas son G_1, G_2, \dots, G_{k-1} . Aplicando la hipótesis de inducción a G' se tiene que

$$P(G'; \lambda) = \prod_{i=1}^{k-1} P(G_i; \lambda).$$

Note que toda λ -coloración de G' se puede extender a una λ -coloración de G de $P(G_k; \lambda)$ maneras distintas. Por lo tanto

$$P(G; \lambda) = P(G'; \lambda)P(G_k; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(G_i; \lambda).$$

□

El polinomio cromático de una gráfica también puede ser expresado en términos de los polinomios cromáticos de sus bloques.

Teorema 3. Sea G una gráfica conexa con $r \geq 2$ bloques. Si B_1, B_2, \dots, B_r son los bloques de G , entonces

$$P(G; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^r P(B_i; \lambda)}{\lambda^{r-1}}.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre r . Si $r = 2$, supongamos que B_1 y B_2 son los bloques de G y además $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$ es el vértice de corte. Ahora, el número de λ -coloraciones en las que el vértice v tiene el color j para todo $j \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$ es igual a $\frac{P(G; \lambda)}{\lambda}$, lo cual implica que toda λ -coloración de B_1 se puede extender a una λ -coloración de G de $\frac{P(B_2; \lambda)}{\lambda}$ maneras distintas y por lo tanto

$$P(G; \lambda) = \frac{P(B_1; \lambda)P(B_2; \lambda)}{\lambda}.$$

Supongamos que toda gráfica H con $r - 1$ bloques satisface que

$$P(H; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r-1} P(H_i; \lambda)}{\lambda^{r-2}},$$

donde H_1, H_2, \dots, H_{r-1} son los bloques de H .

Sea G una gráfica con r bloques y sean B_1, B_2, \dots, B_r los bloques de G . Además, supongamos que B_r es un bloque final de G . Sea $G' = G \setminus \langle \cup_{i=1}^{r-1} V(B_i) \rangle$, observe que G' tiene $r - 1$ bloques, tales bloques son B_1, B_2, \dots, B_{r-1} . Si aplicamos la hipótesis de inducción a G' obtenemos que

$$P(G'; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r-1} P(B_i; \lambda)}{\lambda^{r-2}}.$$

Dado que toda λ -coloración de G' se puede extender a una λ -coloración de G de $\frac{P(B_r; \lambda)}{\lambda}$ maneras distintas, podemos concluir que

$$P(G; \lambda) = P(G'; \lambda) \frac{P(B_r; \lambda)}{\lambda} = \frac{\prod_{i=1}^r P(B_i; \lambda)}{\lambda^{r-1}}.$$

□

El siguiente teorema proporciona un método para calcular el polinomio cromático de una gráfica, el cual consiste en añadir aristas y contraer vértices.

Teorema 4. [14] Sea G una gráfica. Si u y v son dos vértices no adyacentes de G , entonces

$$P(G; \lambda) = P(G + \{uv\}; \lambda) + P(G/\{u, v\}; \lambda).$$

Demostración. Sean u y v dos vértices no adyacentes de G y λ un entero positivo. Podemos identificar dos tipos de λ -coloraciones de G , las λ -coloraciones en las que u y v tienen distinto color y las λ -coloraciones en las que u y v tienen el mismo color. Observe que el número de λ -coloraciones en las que u y v tienen distinto color es igual a $P(G + \{uv\}; \lambda)$ y el número de λ -coloraciones en las que u y v tienen el mismo color es igual a $P(G/\{u, v\}; \lambda)$. Por lo tanto, $P(G; \lambda) = P(G + \{uv\}; \lambda) + P(G/\{u, v\}; \lambda)$. \square

El siguiente resultado es consecuencia del teorema 4 y es conocido como la *propiedad de eliminación-contracción*.

Corolario 1. Sea G una gráfica. Si u y v son dos vértices adyacentes de G , entonces

$$P(G; \lambda) = P(G - \{uv\}; \lambda) - P(G/\{u, v\}; \lambda).$$

Demostración. Sean u y v dos vértices adyacentes de G y λ un entero positivo. Aplicando el teorema 4 a $P(G - \{uv\}; \lambda)$ obtenemos que

$$P(G - \{uv\}; \lambda) = P((G - \{uv\}) + uv; \lambda) + P((G - \{uv\})/\{u, v\}; \lambda).$$

Note que $(G - \{uv\})/uv \cong G/\{u, v\}$. Aplicando este hecho a la igualdad anterior se tiene que

$$P(G - \{uv\}; \lambda) = P(G; \lambda) + P(G/\{u, v\}; \lambda).$$

Despejando $P(G; \lambda)$ de la igualdad anterior podemos concluir que

$$P(G; \lambda) = P(G - \{uv\}; \lambda) - P(G/\{u, v\}; \lambda).$$

\square

Mediante la fórmula del teorema 4 calculamos el polinomio cromático de H (ver figura 2.2), donde H es el 4-ciclo con una cuerda, el cual es $P(H; \lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$. Si evaluamos $\lambda = 3$ en $P(H; \lambda)$, obtenemos que $P(H; 3) = 6$. Las 6 distintas 3-coloraciones de H se presentan en la figura 2.1.

El siguiente corolario justifica el porqué para toda gráfica G , $P(G; \lambda)$ es llamado el polinomio cromático de G .

Corolario 2. El polinomio cromático $P(G; \lambda)$ de una gráfica G es un polinomio en λ .

Demostración. Aplicando recursivamente la ecuación del teorema 4, el polinomio cromático de cualquier gráfica puede expresarse como suma de polinomios cromáticos de gráficas completas, los cuales por la proposición 1 sabemos que son polinomios. Por lo tanto el polinomio cromático de cualquier gráfica es un polinomio en λ . \square

donde $a_0 = 1$, $a_1 = -(m-1)$, $a_i \geq 0$ si i es par con $0 \leq i \leq n$ y $a_i \leq 0$ si i es impar con $1 \leq i \leq n$. Ahora, observe que $G/\{u, v\}$ tiene orden $n-1$ y tamaño m' , donde $m' \leq m-1$. Aplicando la hipótesis de inducción a $G/\{u, v\}$ se sigue que

$$P(G/\{u, v\}; \lambda) = b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2} + b_2\lambda^{n-3} + \dots + b_{n-2}\lambda + b_{n-1},$$

donde $b_0 = 1$, $b_1 = -m'$, $b_i \geq 0$ si i es par con $0 \leq i \leq n-1$ y $b_i \leq 0$ si i es impar con $1 \leq i \leq n-1$. Aplicando la fórmula del corolario 1 se tiene que

$$\begin{aligned} P(G; \lambda) &= P(G; \lambda) = P(G - \{uv\}; \lambda) - P(G/\{u, v\}; \lambda) \\ &= (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) - \\ &\quad (b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2} + b_2\lambda^{n-3} + \dots + b_{n-2}\lambda + b_{n-1}) \\ &= a_0\lambda^n + (a_1 - b_0)\lambda^{n-1} + (a_2 - b_1)\lambda^{n-2} + \dots \\ &\quad + (a_{n-1} - b_{n-2})\lambda + (a_n - b_{n-1}). \end{aligned}$$

Note que $a_0 = 1$, $a_1 - b_0 = -(m-1) - 1 = -m$, $a_i - b_{i-1} \geq 0$ si i es par con $2 \leq i \leq n$ y $a_i - b_{i-1} \leq 0$ si i es impar con $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $P(G; \lambda)$ satisface todas las propiedades. \square

El coeficiente del término lineal del polinomio cromático $P(G; \lambda)$ de una gráfica G nos proporciona información acerca de la conexidad de la gráfica.

Teorema 6. Si G es una gráfica, entonces el coeficiente del término lineal de $P(G; \lambda)$ es distinto de 0 si y sólo si G es conexa.

Demostración. Para demostrar la primera implicación procederemos por contradicción. Sea G una gráfica tal que el término lineal de $P(G; \lambda)$ es distinto de cero y supongamos que G es no conexa. Si G es no conexa, entonces tiene al menos dos componentes conexas y por el teorema 2, $P(G; \lambda)$ es el producto de sus componentes conexas. Por lo tanto λ^2 divide a $P(G; \lambda)$ y en consecuencia el término lineal es cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto si el coeficiente del término lineal es distinto de 0, entonces G es conexa.

Ahora, supongamos que G es una gráfica conexa. Si G es un árbol entonces $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$ (ver teo 7) y evidentemente el resultado es cierto. Ahora, supongamos que G no es un árbol, esto implica que G tiene al menos un ciclo y en consecuencia tiene por lo menos 3 aristas. Procederemos por inducción sobre el tamaño de G . Sea m el tamaño de G .

Si $m = 3$ entonces $G \cong K_3$ y por el teorema 1 sabemos que $P(K_3, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ y por lo tanto el resultado se cumple. Supongamos que el polinomio cromático $P(H; \lambda)$ de toda gráfica conexa H de tamaño a lo más $m-1$ satisface que su término lineal es distinto de cero. Sea G una gráfica conexa de orden n , tamaño m y sea uv una arista

de G que pertenece a un ciclo. Observe que $G - \{uv\}$ y $G/\{u, v\}$ son gráficas conexas con tamaño $m_1 = m - 1$ y $m_2 \leq m - 1$ respectivamente.

Aplicando la hipótesis de inducción a este hecho, obtenemos que el coeficiente del término lineal de $P(G - \{uv\}; \lambda)$ es distinto de cero y el coeficiente del término lineal de $P(G/\{u, v\}; \lambda)$ es distinto de cero. Por el teorema 5, el grado de $P(G - \{uv\}; \lambda)$ es n y el grado de $P(G/\{u, v\}; \lambda)$ es $n - 1$ y en consecuencia el signo del coeficiente del término lineal de $P(G - \{uv\}; \lambda)$ es distinto del signo del coeficiente del término lineal de $P(G/\{u, v\}; \lambda)$. Aplicando el teorema 1 a G , obtenemos que $P(G; \lambda) = P(G - \{uv\}; \lambda) - (G/\{u, v\}; \lambda)$. Por lo tanto, el coeficiente del término lineal de $P(G; \lambda)$ es distinto de cero. \square

Corolario 3. Si G es una gráfica con $k \geq 1$ componentes conexas, entonces el primer coeficiente distinto de 0 es el coeficiente de λ^k .

Demostración. Sean G_1, G_2, \dots, G_k las k componentes conexas de G . Por el teorema 2

$$P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(G_i; \lambda).$$

Además, por el teorema 6, el coeficiente del término lineal de $P(G_i; \lambda)$ es distinto de cero para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y en consecuencia λ^k divide a $P(G; \lambda)$, pero λ^{k+1} no lo divide. Por lo tanto, el primer coeficiente distinto de cero es el coeficiente de λ^k . \square

2.4. Ejemplos

En esta sección calculamos los polinomios cromáticos de algunas familias de gráficas. Comenzamos demostrando una proposición que es de gran ayuda para calcular el polinomio cromático de un árbol.

Proposición 3. Sea G una gráfica. Si $v \in V(G)$ es una hoja de G , entonces

$$P(G; \lambda) = (\lambda - 1)P(G - \{v\}; \lambda).$$

Demostración. Sea v una hoja de G . Dado que $P(G - \{v\}; \lambda)$ cuenta el número de λ -coloraciones distintas de $G - \{v\}$ y cualquier λ -coloración de $G - \{v\}$ la podemos extender a una λ -coloración de G de $\lambda - 1$ maneras distintas, podemos concluir que $P(G; \lambda) = (\lambda - 1)P(G - \{v\}; \lambda)$. \square

Teorema 7. Si T es un árbol de orden $n \geq 1$, entonces $P(T; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$, entonces $T = K_1$ y $P(K_1; \lambda) = \lambda$. Por lo tanto, el resultado es cierto para $n = 1$.

Supongamos que para todo árbol T' de orden $n - 1$ se cumple que $P(T'; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-2}$.

Ahora, sea T un árbol de orden n y sea v un vértice final de T , en consecuencia $T - \{v\}$ es un árbol de orden $n - 1$. Aplicando la proposición 3 y la hipótesis de inducción a $T - \{v\}$ obtenemos que

$$P(T; \lambda) = (\lambda - 1)P(T - \{v\}; \lambda) = (\lambda - 1)[\lambda(\lambda - 1)^{n-2}] = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

□

Corolario 4. Si F es un bosque de orden n con $k \geq 1$ componentes conexas, entonces

$$P(F; \lambda) = \lambda^k(\lambda - 1)^{n-k}.$$

Demostración. Sean F_1, F_2, \dots, F_k las componentes conexas de F y suponga que F_i tiene orden n_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por el teorema 7, toda componente conexa F_i satisface que $P(F_i; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n_i-1}$. Observe que

$$\sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - k.$$

Aplicando el teorema 2 a F obtenemos que

$$P(F; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(F_i; \lambda) = \lambda^k(\lambda - 1)^{n-k}.$$

□

Teorema 8. [15] El polinomio cromático del ciclo de orden n es

$$P(C_n; \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

Demostración. Inducción sobre n .

Si $n = 3$, entonces

$$\begin{aligned} P(C_3; \lambda) &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) \\ &= (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 1) \\ &= (\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^3 + (-1)^3(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Y por lo tanto, el resultado se satisface para $n = 3$.
Supongamos que todo ciclo de orden $n - 1$ satisface que

$$P(C_{n-1}; \lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1).$$

Sea uv una arista de C_n . Observe que $C_n/\{u, v\} \cong C_{n-1}$ y por hipótesis de inducción sabemos que $P(C_{n-1}; \lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1)$. Además, $C_n - \{uv\}$ es un árbol de orden n . Aplicando el teorema 7 a $C_n - \{uv\}$ se tiene que $P(C_n - \{uv\}; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$. Por lo tanto, si aplicamos el corolario 1 a C_n obtenemos que

$$\begin{aligned} P(C_n; \lambda) &= P(C_n - \{uv\}; \lambda) - P(C_n/\{u, v\}; \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - ((\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1)) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1). \end{aligned}$$

□

2.5. Cromaticidad

En la sección anterior demostramos que cualesquiera dos árboles del mismo orden tienen el mismo polinomio cromático (ver teorema 7), por lo que es natural hacernos la siguiente pregunta: ¿cuándo dos gráficas tienen el mismo polinomio cromático?. Las siguientes dos definiciones son motivadas por la pregunta anterior.

Definición 4. Dos gráficas G y H son *cromáticamente equivalentes* si $P(G; \lambda) = P(H; \lambda)$.

Definición 5. Una gráfica G es *cromáticamente única* si $P(G; \lambda) = P(H; \lambda)$ implica que $G \cong H$.

Por el teorema 5, si dos gráficas son cromáticamente equivalentes, entonces deben tener el mismo orden, el mismo tamaño y el mismo número cromático. El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 7.

Corolario 5. Cualesquiera dos bosques con el mismo orden y el mismo número de componentes conexas son cromáticamente equivalentes.

En el siguiente teorema mostramos que el ciclo C_n está completamente determinado por su polinomio cromático.

Teorema 9. El ciclo C_n es cromáticamente único.

Demostración. Sea G una gráfica de orden n con $P(G; \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$, probaremos que $G \cong C_n$. Primero observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(G; \lambda) &= (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \right) + (-1)^n(\lambda - 1) \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} \lambda^n + (-1)^1 \binom{n}{1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \lambda^1 \\
&\quad + (-1)^n \binom{n}{n} \lambda^0 + (-1)^n(\lambda - 1) \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} \lambda^n + (-1)^1 \binom{n}{1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \lambda^1 \\
&\quad + (-1)^n \left(\binom{n}{n} \lambda^0 + \lambda - 1 \right) \\
&= \lambda^n - n\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \lambda + (-1)^n \lambda \\
&= \lambda^n - n\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \left(\binom{n}{n-1} - 1 \right) \lambda.
\end{aligned}$$

Como el coeficiente lineal es distinto de cero, entonces por el teorema 6, G es conexas. Dado que el coeficiente de λ^{n-1} es n , se deduce que el tamaño de G es el igual al orden y en consecuencia G tiene exactamente un ciclo. Procederemos a demostrar que C_n es cromáticamente único por inducción sobre n .

Si $n = 3$, entonces evidentemente $G \cong C_3$. Supongamos que toda gráfica H de orden $n - 1$ con $P(H; \lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1)$ es un ciclo de orden $n - 1$.

Ahora, sea uv un arista del único ciclo de G . Observe que $G/\{u, v\}$ es una gráfica de orden $n - 1$ y que $G - \{uv\}$ es una árbol de orden n . Despejando $P(G/\{u, v\}; \lambda)$ de la fórmula del corolario 1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
P(G/\{u, v\}; \lambda) &= P(G - \{uv\}; \lambda) - P(G; \lambda) \\
&= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - [(\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)] \\
&= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^n - (-1)^n(\lambda - 1) \\
&= \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)(\lambda - 1)^{n-1} - (-1)^n(\lambda - 1) \\
&= (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda - \lambda + 1) - (-1)^n(\lambda - 1) \\
&= (\lambda - 1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $P(G/\{u, v\}; \lambda)$ se obtiene que $G/\{u, v\}$ es un ciclo de orden $n - 1$. Dado que uv era una arista del único ciclo de G , se deduce que $G \cong C_n$. \square

En general no se sabe bajo que condiciones dos gráficas son cromáticamente equivalentes o cuando una gráfica es cromáticamente única. En [15] se presentan algunos resultados sobre equivalencia y unicidad cromática.

Capítulo 3

El polinomio dicromático

En este capítulo presentamos una fórmula recursiva para calcular el polinomio dicromático de una digráfica. También mostramos algunas propiedades que satisfacen sus coeficientes.

3.1. Coloraciones acíclicas en digráficas

V. Neumann-Lara [7], extendió la noción de λ -coloración a digráficas.

Definición 6. Sea λ un entero positivo. Una λ -coloración acíclica de una digráfica D es una partición de los vértices de D en λ conjuntos acíclicos.

En este trabajo para toda digráfica D solamente consideramos λ -coloraciones acíclicas, por lo que por simplicidad llamaremos λ -coloración de D a una λ -coloración acíclica de D . Una λ -coloración de una digráfica D también puede ser vista como una función $\Gamma : V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ de tal manera que no induzca ciclos monocromáticos (ciclos cuyos vértices están coloreados con el mismo color). Llamaremos coloración a cualquier función $\Gamma : V(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$.

Dados λ colores, una λ -coloración de una digráfica D es equivalente a colorear los vértices de D con a lo más λ colores de manera que no se obtengan ciclos monocromáticos. En la figura 3.1 se presentan ejemplos de 2-coloraciones de \vec{C}_3 .

Definición 7. El número dicromático de una digráfica D , denotado por $dc(D)$, es el mínimo entero positivo λ para el cual existe una λ -coloración de D .

Observe que si D es una digráfica cuyas flechas son todas simétricas, entonces $dc(D) = \chi(D)$, pues toda flecha simétrica es un ciclo de longitud 2. A continuación presentamos algunos resultados básicos sobre el número dicromático.

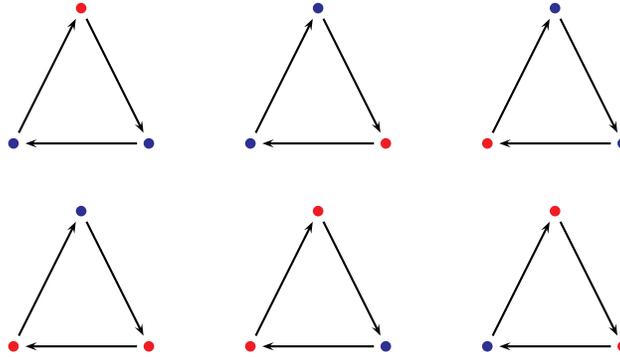


Figura 3.1: Ejemplos de 2-coloraciones.

- Una digráfica D de orden n tiene número dicromático $dc(D) = n$ si y sólo si D es la digráfica completa.
- Una digráfica D de orden n tiene número dicromático $dc(D) = 1$ si y sólo si D es acíclica.
- Para todo $n \geq 2$ se cumple que $dc(\vec{C}_n) = 2$.

En 1982 V. Neumann-Lara conjeturó lo siguiente.

Conjetura 1. Si D es una digráfica plana sin flechas simétricas, entonces $dc(D) \leq 2$.

3.2. Resultados conocidos

En [4], A. Harutyunyan definió el polinomio cromático de una digráfica. En este trabajo a tal polinomio lo llamamos el polinomio dicromático de una digráfica. En esta sección presentamos los resultados de Harutyunyan sobre el polinomio dicromático.

Definición 8. El *polinomio dicromático* de una digráfica D , denotado por $P(D; \lambda)$, es el número de λ -coloraciones distintas de D .

Podemos definir el número dicromático $dc(D)$ de una digráfica D por medio su polinomio dicromático de la siguiente manera:

$$dc(D) = \text{mín}\{\lambda \in \mathbb{Z}^+ : P(D; \lambda) > 0\}.$$

Es sencillo calcular el polinomio dicromático de las digráficas acíclicas y los ciclos.

Proposición 4. [4] Si D es una digráfica acíclica de orden n , entonces $P(D; \lambda) = \lambda^n$.

Demostración. Observe que cualquier partición de los vértices de D es una λ -coloración. Por lo tanto, $P(D; \lambda) = \lambda^n$. \square

Teorema 10. [4] El polinomio dicromático del ciclo de orden n es $P(\vec{C}_n; \lambda) = \lambda^n - \lambda$.

Demostración. Note que las únicas coloraciones de los vértices de \vec{C}_n que no son λ -coloraciones son las que a todos los vértices les asignan el mismo color, además hay exactamente λ coloraciones de este tipo. Por lo tanto, $P(\vec{C}_n; \lambda) = \lambda^n - \lambda$. \square

El polinomio dicromático de una digráfica puede ser expresado en términos de los polinomios dicromáticos de sus componentes fuertes.

Teorema 11. [4] Sea D una digráfica con $k \geq 2$ componentes fuertes. Si D_1, D_2, \dots, D_k son las componentes fuertes de D , entonces

$$P(D; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(D_i; \lambda).$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre k .

Si $k = 2$, entonces sean D_1 y D_2 las componentes fuertes de D . Observe que $V(D_1) \cap V(D_2) = \emptyset$, de lo contrario D_1 y D_2 formarían parte de la misma componente fuerte. De la observación anterior se obtiene que toda λ -coloración de D_1 se puede extender a una λ -coloración de D de $P(D_2, \lambda)$ maneras distintas, por lo tanto

$$P(D; \lambda) = P(D_1, \lambda)P(D_2, \lambda).$$

Supongamos que toda digráfica H con $k - 1$ componentes fuertes cumple que

$$P(H; \lambda) = \prod_{i=1}^{k-1} P(H_i; \lambda),$$

donde H_1, H_2, \dots, H_{k-1} son las componentes fuertes de H . Sea D una digráfica con k componentes fuertes y sean D_1, D_2, \dots, D_k sus componentes fuertes. Ahora, sea $D' = D \langle \cup_{i=1}^{k-1} V(D_i) \rangle$. Observe que D' es una digráfica con $k - 1$ componentes fuertes y tales componentes son D_1, D_2, \dots, D_{k-1} . Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción a D' se tiene que

$$P(D'; \lambda) = \prod_{i=1}^{k-1} P(D_i; \lambda).$$

Dado que toda λ -coloración de D' se puede extender a una λ -coloración de D de $P(D_k; \lambda)$ maneras diferentes, obtenemos que

$$P(D; \lambda) = P(D'; \lambda)P(D_k; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(D_i; \lambda).$$

□

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula para calcular el polinomio dicromático de una digráfica D bajo ciertas condiciones sobre las flechas de los ciclos de D .

Teorema 12. [4] Sea D una digráfica. Si \vec{C} es un ciclo de D tal que ninguna flecha de \vec{C} pertenece a otro ciclo de D , entonces

$$P(D; \lambda) = P(D - F(\vec{C}); \lambda) - P(D/V(\vec{C}); \lambda).$$

Demostración. Como ninguna flecha de \vec{C} aparece en otro ciclo de D , toda λ -coloración de $D - F(\vec{C})$ es una λ -coloración de D con excepción de las λ -coloraciones en las que todos los vértices de \vec{C} tienen el mismo color. Observe que el número de λ -coloraciones de $D - F(\vec{C})$ en las que los vértices de \vec{C} tienen el mismo color es igual a $P(D/V(\vec{C}))$. Por lo tanto,

$$P(D; \lambda) = P(D - F(\vec{C}); \lambda) - P(D/V(\vec{C}); \lambda).$$

□

Si D es una digráfica que tiene algún vértice de ingrado y exgrado a lo más uno, entonces podemos decir lo siguiente.

Teorema 13. [4] Si v es un vértice de una digráfica D que satisface que $\min\{d^+(v), d^-(v)\} = 0$, entonces $P(D; \lambda) = \lambda P(D - \{v\}, \lambda)$.

Demostración. Observe que $D_1 = v$ es una componente fuerte de D . Aplicando el teorema 11 a este hecho, obtenemos que $P(D; \lambda) = \lambda P(D - \{v\}, \lambda)$. □

Teorema 14. [4] Sea D una digráfica y v un vértice de D que satisface que $d^+(v) = d^-(v) = 1$. Sea w el invecino de v y u el exvecino de v con $w \neq u$. Si D' es la digráfica definida como $V(D') = V(D) \setminus \{v\}$ y $F(D') = F(D - \{v\}) \cup \{wu\}$, entonces

$$P(D; \lambda) = P(D'; \lambda) + (\lambda - 1)P(D - \{v\}; \lambda).$$

Demostración. Observe que toda λ -coloración de $D - \{v\}$ que no genera uw -trayectorias monocromáticas es una λ -coloración de D' , además ninguna λ -coloración de D' puede generar uw -trayectorias monocromáticas en $D - \{v\}$. De esto se deduce lo siguiente:

i) El número de λ -coloraciones de $D - \{v\}$ que no generan uw -trayectorias monocromáticas es igual a $P(D'; \lambda)$. Además, toda λ -coloración de $D - \{v\}$ que no genera uw -trayectorias monocromáticas se puede extender a una λ -coloración de D de λ maneras distintas.

ii) El número de λ -coloraciones de $D - \{v\}$ que generan uw -trayectorias monocromáticas es $P(D - \{v\}; \lambda) - P(D'; \lambda)$. Además, toda λ -coloración de $D - \{v\}$ que genera uw -trayectorias monocromáticas se puede extender a una λ -coloración de D de $\lambda - 1$ maneras distintas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(D; \lambda) &= \lambda P(D'; \lambda) + (\lambda - 1)[P(D - \{v\}; \lambda) - P(D'; \lambda)] \\ &= \lambda P(D'; \lambda) + (\lambda - 1)P(D - \{v\}; \lambda) - \lambda P(D'; \lambda) + P(D'; \lambda) \\ &= P(D'; \lambda) + (\lambda - 1)P(D - \{v\}; \lambda). \end{aligned}$$

□

3.3. Calculando el polinomio dicromático

Antes de presentar una fórmula recursiva que nos permita calcular el polinomio dicromático de una digráfica D , probamos una proposición que es de gran utilidad para calcular polinomios dicromáticos de algunas digráficas. Todos los resultados que se presentan a partir de aquí son originales, a menos que se especifique lo contrario.

Proposición 5. Si F es una subdigráfica propia de una digráfica D de orden n que satisface que toda coloración Γ de los vértices de D es una λ -coloración de los vértices de F si y sólo si Γ es una λ -coloración de los vértices de D . Entonces

$$P(D; \lambda) = \lambda^{n-|V(F)|} P(F; \lambda).$$

Demostración. Sea D una digráfica de orden n . Sea F una subdigráfica propia de D que satisface que toda Γ coloración de los vértices de D es una λ -coloración de los vértices de F si y sólo si Γ es una λ -coloración de los vértices de D . Observe que toda λ -coloración de los vértices de F se puede extender a D de $\lambda^{n-|V(F)|}$ maneras diferentes, por lo tanto

$$P(D; \lambda) = \lambda^{n-|V(F)|} P(F; \lambda).$$

□

Se dice que una digráfica D es *unicíclica* si tiene exactamente un ciclo.

Corolario 6. Sea D una digráfica de orden n y cuello g . Si D es una digráfica unicíclica o D es un ciclo con una cuerda, entonces

$$P(D; \lambda) = \lambda^{n-g}(\lambda^g - \lambda).$$

Demostración. Sean \vec{C} el ciclo de longitud el cuello de D y Γ una coloración de los vértices de D . Observe que Γ es una λ -coloración de los vértices de \vec{C} si y sólo si Γ es una λ -coloración de los vértices de D . Por lo tanto, aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(D; \lambda) = \lambda^{n-|V(\vec{C})|} P(\vec{C}; \lambda) = \lambda^{n-g} (\lambda^g - \lambda).$$

□

Sea D una digráfica. Para cada par de vértices asimétricos $u, v \in V(D)$ definimos el conjunto T_{uv} como:

$$T_{uv} = \{T : T \text{ es una } (u, v)\text{-trayectoria de longitud al menos dos y } D \setminus V(T) \text{ es acíclica}\}.$$

Sea $\mathfrak{T}_{uv} = T_{uv} \cup T_{vu}$ y definamos \mathcal{H}_{uv} como:

$$\mathcal{H}_{uv} = \{H : H \in \mathcal{P}(\mathfrak{T}_{uv}) \setminus \{\emptyset\} \text{ y } D \setminus (\cup_{T \in H} V(T)) \text{ es acíclica}\}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{P}(U)$ denota el conjunto potencia del conjunto U . Observe que si $uv \in F(D)$, entonces $T_{vu} = \emptyset$.

Sean H_i, H_j dos elementos de \mathcal{H}_{uv} . Definamos una relación de equivalencia \sim en \mathcal{H}_{uv} de la siguiente manera:

$$H_i \sim H_j \text{ si y sólo si } \bigcup_{T \in H_i} V(T) = \bigcup_{T \in H_j} V(T). \quad (3.2)$$

Ahora, sea $\mathcal{R}_{uv} = \{R_1, R_2, \dots, R_\ell\}$ el conjunto de clases de equivalencia de \sim y para cada $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ definimos R_i^* como

$$R_i^* = \bigcup_{T \in R_i} V(T). \quad (3.3)$$

El siguiente teorema proporciona un método recursivo para calcular el polinomio dicromático de una digráfica.

Teorema 15. Si u y v son dos vértices asimétricos de una digráfica D , entonces

$$P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D \setminus \{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^{\ell} P(D/R_i^*; \lambda),$$

donde R_i^* es el conjunto de vértices definido en 3.3 para todo $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$.

Demostración. Sea D una digráfica y $u, v \in V(D)$ dos vértices asimétricos. Separamos las λ -coloraciones de D en las λ -coloraciones donde u y v tienen asignado distinto color y las λ -coloraciones donde u y v tienen asignado el mismo color. Por el principio de inclusión-exclusión el número de λ -coloraciones de D es igual al número de λ -coloraciones de D en las que u y v tienen asignado distinto color más el número de λ -coloraciones de D en las que u y v tienen asignado el mismo color. Note que el número de λ -coloraciones de D en las que u y v tienen asignado distinto color es el número de λ -coloraciones de $D + \{uv, vu\}$.

Para calcular el número de λ -coloraciones de D en las que u y v tienen asignado el mismo color consideremos $\mathcal{T}_{uv} = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$ y $\mathcal{H}_{uv} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$. Observe que para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, la trayectoria T_i se convierte en un ciclo C_i en la digráfica $D/\{u, v\}$. Por como están definidos \mathcal{T}_{uv} y \mathcal{H}_{uv} , para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ existen λ -coloraciones de D en las que todos los vértices de todas la trayectorias que pertenecen a H_j tienen el mismo color y tales λ -coloraciones no se le pueden asignar a la digráfica $D/\{u, v\}$. Entonces, el número de λ -coloraciones de $D/\{u, v\}$ es igual al número de λ -coloraciones de D en las que u y v tienen el mismo color pero no todos los vértices de todas la trayectorias que pertenecen a H_j tienen el mismo color.

Ahora, note que el número de λ -coloraciones de D en las que todos los vértices de todas la trayectorias que pertenecen a H_j es igual al número de λ -coloraciones de la digráfica $D/\cup_{T \in H_j} V(T)$. Para evitar contar la misma λ -coloración más de una vez consideremos la relación de equivalencia \sim en \mathcal{H}_{uv} (ver 3.2). Sea $\mathcal{R}_{uv} = \{R_1, R_2, \dots, R_\ell\}$ el conjunto de clases de equivalencia de \sim y para cada $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ sea

$$R_i^* = \bigcup_{T \in R_i} V(T).$$

Por lo que para cada $R_i \in \mathcal{R}_{uv}$ el número de λ -coloraciones de D en las que todos los vértices de todas la trayectorias que pertenecen a R_i tienen el mismo color es igual al número de λ -coloraciones de D/R_i^* . Por lo tanto, el número de λ -coloraciones distintas de D es

$$P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^{\ell} P(D/R_i^*; \lambda).$$

□

Al aplicar recursivamente el teorema 15 a las digráficas $D, D + \{uv, vu\}$ y D/R^* donde u, v son vértices asimétricos de D y R^* es el conjunto definido en 3.3, eventualmente obtendremos una colección de digráficas simétricas completas. Por lo tanto, el polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica se puede expresar como suma de digráficas simétricas completas y como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7. El polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D es un polinomio en λ .

Considere la digráfica D de la figura 3.2 y sea Γ una coloración de D . Observe que Γ es una λ -coloración de $D\langle\{u, v, y\}\rangle$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de D . Aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(D; \lambda) = \lambda^{5-3}P(\vec{C}_3; \lambda) = \lambda^2(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3.$$

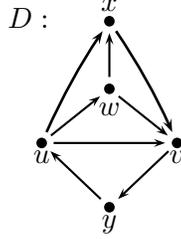


Figura 3.2: Digráfica D con $P(D; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3$.

Utilizando la fórmula del teorema 15 vamos a calcular $P(D; \lambda)$ considerando dos pares de vértices asimétricos distintos. Primero tomemos el par $u, v \in V(D)$, calculando \mathfrak{T}_{uv} y \mathcal{H}_{uv} se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{uv} &= \{T_1 = (u, w, v), T_2 = (u, x, v), T_3 = (u, w, x, v)\} \\ &\quad \text{y} \\ \mathcal{H}_{uv} &= \{\{T_1\}, \{T_2\}, \{T_3\}, \{T_1, T_2\}, \{T_1, T_3\}, \{T_2, T_3\}, \{T_1, T_2, T_3\}\}. \end{aligned}$$

Observe que $\{T_3\} \sim \{T_1, T_2\} \sim \{T_1, T_3\} \sim \{T_2, T_3\} \sim \{T_1, T_2, T_3\}$. Tomemos el sistema de representantes $\mathcal{R}_{uv} = \{\{T_1\}, \{T_2\}, \{T_3\}\}$. Sean $R_1^* = \{u, w, v\}$, $R_2^* = \{u, x, v\}$ y $R_3^* = \{u, w, x, v\}$. Aplicando la fórmula del teorema 15 se sigue que

$$P(D; \lambda) = P(D + \{vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^3 P(D/R_i^*; \lambda).$$

En la figura 3.3 calculamos $P(D; \lambda)$. Primero, para calcular $P(D + \{vu\}; \lambda)$, considere Γ una coloración de $D + \{vu\}$. Observe que Γ es una λ -coloración de $D\langle\{u, v\}\rangle$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $D + \{vu\}$. Aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(D + \{vu\}; \lambda) = \lambda^{5-2}P(D\langle\{u, v\}\rangle; \lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - \lambda) = \lambda^4(\lambda - 1).$$

Análogamente, para calcular $P(D/\{u, v\}; \lambda)$, tome Γ una coloración de $P(D/\{u, v\})$. Note que Γ es una λ -coloración de la subdigráfica propia $D/\{u, v\} - \{wx\}$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $D/\{u, v\}$. Aplicando la proposición 5 se sigue que

$$P(D/\{u, v\}; \lambda) = \lambda^{4-4}P(D/\{u, v\} - \{wx\}) = P(D/\{u, v\} - \{wx\}).$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccccc}
D & D + \{vu\} & D/\{u, v\} & D/R_1^* & D/R_2^* & D/R_3^* \\
\begin{array}{c} x \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ w \quad u \quad v \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array} & = & \begin{array}{c} x \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ w \quad u \quad v \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array} & + & \begin{array}{c} x \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ w \quad u \quad v \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array} & + & \begin{array}{c} x \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ w \quad u \quad v \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array} & + & \begin{array}{c} w \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ y \end{array} & + & \begin{array}{c} \bullet \\ y \end{array} \\
& = & \lambda^4(\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1)^3 + \lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 - \lambda \\
& = & \lambda^5 - \lambda^3
\end{aligned}$$

Figura 3.3: $P(D; \lambda) = P(D + \{vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^3 P(D/R_i^*; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3$.

Además, $P(D/\{u, v\} - \{wx\}; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$, pues $D/\{u, v\} - \{wx\}$ es un árbol de orden 4.

Ahora considere los vértices $w, y \in V(D)$, calculando \mathfrak{T}_{wy} y \mathcal{H}_{wy} se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{wy} &= \{T_1 = (w, v, y), T_2 = (w, x, v, y), T_3 = (y, u, w)\} \\
\mathcal{H}_{wy} &= \{\{T_1\}, \{T_2\}, \{T_3\}, \{T_1, T_2\}\}.
\end{aligned}$$

Note que $\{T_2\} \sim \{T_1, T_2\}$. Sea $\mathcal{R}_{wy} = \{\{T_1\}, \{T_2\}, \{T_3\}\}$. Consideremos $R_1^* = \{w, v, y\}$, $R_2^* = \{w, x, v, y\}$ y $R_3^* = \{y, u, w\}$. Aplicando el teorema 15 se sigue que

$$P(D; \lambda) = P(D + \{wy, yw\}; \lambda) + P(D/\{w, y\}; \lambda) + \sum_{i=1}^3 P(D/R_i^*; \lambda).$$

En la figura 3.4 se calcula $P(D; \lambda)$. Primero calculemos $P(D + \{wy, yw\}; \lambda)$. Sea Γ una coloración de $D + \{wy, yw\}$. Observe que Γ es una λ -coloración de $D\langle\{u, w, v, y\}\rangle$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $D + \{wy, yw\}$. Aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(D + \{wy, yw\}; \lambda) = \lambda^{5-4} P(D\langle\{u, w, v, y\}\rangle; \lambda).$$

Note que toda λ -coloración de $D\langle\{u, v, y\}\rangle$ se puede extender de $\lambda - 1$ formas distintas a $D\langle\{u, w, v, y\}\rangle$ y en consecuencia

$$P(D\langle\{u, w, v, y\}\rangle; \lambda) = P(D\langle\{u, v, y\}\rangle; \lambda)(\lambda - 1) = (\lambda^3 - \lambda)(\lambda - 1).$$

Por lo tanto, $P(D + \{wy, yw\}; \lambda) = \lambda(\lambda^3 - \lambda)(\lambda - 1)$.

Ahora, calculemos $P(D/\{w, y\}; \lambda)$. Sea Γ una coloración de $D/\{w, y\}$. Observe que Γ es una λ -coloración de $D\langle\{u, v, a\}\rangle$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $D/\{w, y\}$. Por la proposición 5 se obtiene que

$$P(D/\{w, y\}; \lambda) = \lambda^{5-4}P(D\langle\{u, v, a\}\rangle; \lambda).$$

Si aplicamos la fórmula del teorema 15 a $D\langle\{u, v, a\}\rangle$ obtenemos que

$$\begin{aligned} P(D\langle\{u, v, a\}\rangle; \lambda) &= P(D\langle\{u, v, a\}\rangle + \{vu\}; \lambda) + P(D\langle\{u, v, a\}\rangle/\{u, v\}; \lambda) \\ &= P(K_3; \lambda) + P(K_2; \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(D/\{w, y\}; \lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$. Note que $D\langle\{u, v, a\}\rangle \cong D/R_1^*$. Ahora, para calcular $P(D/R_3^*; \lambda)$, observe que $D/R_3^* + \{vx\} \cong D/R_1^*$ y $D/R_3^*/\{xv\} \cong K_2$. Por el teorema 15 se sigue que

$$\begin{aligned} P(D/R_3^*; \lambda) &= P(D/R_3^* + \{vx\}; \lambda) + P(D/R_3^*/\{xv\}; \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda(\lambda - 1) \\ &= \lambda^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

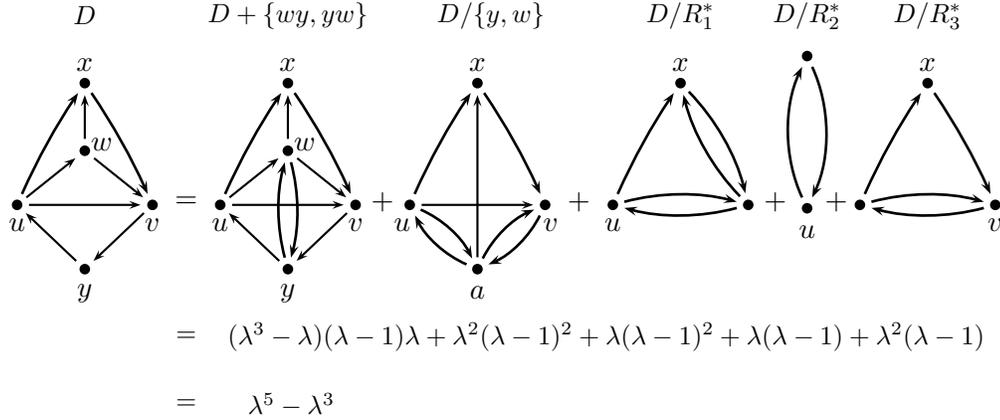


Figura 3.4: $P(D; \lambda) = P(D + \{wy\}; \lambda) + P(D/\{w, y\}; \lambda) + \sum_{i=1}^3 P(D/R_i^*; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3$.

En el siguiente corolario damos algunas condiciones para que la fórmula del teorema 15 coincida con la fórmula del teorema 4.

Corolario 8. Sea D una digráfica.

- (i) Si uv es una flecha asimétrica de D tal que $N^+(u) \setminus \{v\} \subset N^+(v)$ o $N^-(v) \setminus \{u\} \subset N^-(u)$, entonces $P(D; \lambda) = P(D + \{vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda)$.

- (ii) Si u y v son dos vértices no adyacentes de D tal que $N^+(u) = N^+(v)$ o $N^-(u) = N^-(v)$, entonces $P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda)$.

Demostración. Primero probaremos (i). Sea uv una flecha asimétrica de D y sea $T = (u = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k = v)$ una (u, v) -trayectoria de longitud al menos dos. Si $N^+(u) \setminus \{v\} \subset N^+(v)$ entonces $(u_2, \dots, u_k = v, u_2)$ es un ciclo de D , si $N^-(v) \setminus \{u\} \subset N^-(u)$ entonces $(u = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u = u_1)$ es un ciclo de D . De ambos casos se deduce que $D\langle V(T) \rangle$ no es acíclica, lo cual implica que $\tau_{uv} = \emptyset$. Por lo tanto, $P(D; \lambda) = P(D + \{vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda)$.

Ahora, para demostrar (ii), sean u y v dos vértices no adyacentes de D . Sea $T_1 = (u = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k = v)$ una (u, v) -trayectoria de longitud al menos dos y sea $T_2 = (v = v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = u)$ una (v, u) -trayectoria de longitud al menos dos. Si $N^+(u) = N^+(v)$ entonces $(u_2, \dots, u_{k-1}, u_k = v, u_2)$ es un ciclo de D y $(v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = u, v_2)$ también es un ciclo de D . Si $N^-(u) = N^-(v)$ entonces $(u = u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u = u_1)$ es un ciclo de D y $(v = v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v = v_1)$ es un ciclo de D . De lo anterior se sigue que $D\langle V(T_1) \rangle$ y $D\langle V(T_2) \rangle$ no son acíclicas y en consecuencia $\tau_{uv} = \emptyset$. Por lo tanto, $P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda)$. \square

3.4. Propiedades del polinomio dicromático

Los coeficientes del polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D cumplen algunas propiedades similares a los de los coeficientes del polinomio cromático $P(G; \lambda)$ de una gráfica G , en el siguiente teorema se presentan algunas de esas propiedades.

Teorema 16. Si D es una digráfica de orden n con q flechas simétricas, entonces el polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de D es un polinomio de grado n que satisface las siguientes propiedades

- (i) El coeficiente de λ^n es 1.
- (ii) El coeficiente de λ^{n-1} es $-q$.
- (iii) El término independiente es 0.

Demostración. Realizamos la prueba por inducción sobre el número de flechas asimétricas.

Sea p el número de flechas asimétricas de D . Si $p = 0$, entonces D es una digráfica simétrica y por el teorema 5, $P(D; \lambda)$ satisface todas las propiedades.

Supongamos que el polinomio dicromático $P(D'; \lambda)$ de toda digráfica D' de orden n' con a los más $p - 1$ flechas asimétricas y q' flechas simétricas es un polinomio de grado n' y que además satisface las propiedades (i), (ii) y (iii).

Sea D una digráfica de orden n con p flechas asimétricas, q flechas simétricas y sea uv una flecha asimétrica de D . Observemos lo siguiente:

Observación 1. La digráfica $D + \{vu\}$ es una digráfica de orden n que tiene $p - 1$ flechas asimétricas y $q + 1$ flechas simétricas. Aplicando la hipótesis de inducción a $D + \{vu\}$ tenemos que

$$P(D + \{vu\}; \lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

y además se satisface que $P(D + \{vu\}; \lambda)$ es un polinomio de grado n , $a_n = 1$, $a_0 = 0$ y $a_{n-1} = -(q + 1) = -q - 1$.

Observación 2. La digráfica $D/\{u, v\}$ es una digráfica de orden $n - 1$ que tiene a lo más $p - 1$ flechas asimétricas. Aplicando la hipótesis de inducción a $D/\{u, v\}$ obtenemos que

$$P(D/\{u, v\}; \lambda) = b_{n-1} \lambda^{n-1} + b_{n-2} \lambda^{n-2} + b_{n-3} \lambda^{n-3} + \dots + b_1 \lambda + b_0.$$

También se cumple que $P(D/\{u, v\}; \lambda)$ es un polinomio de grado $n - 1$, $b_{n-1} = 1$ y $b_0 = 0$.

Observación 3. Para todo R_i^* con $1 \leq i \leq l$ se cumple que D/R_i^* es una digráfica de orden a lo más $n - 2$ y tiene a lo más $p - 2$ flechas asimétricas. Si n_i es el orden de D/R_i^* , entonces por hipótesis de inducción se sigue que

$$P(D/R_i^*; \lambda) = d_{n_i} \lambda^{n_i} + d_{n_i-1} \lambda^{n_i-1} + d_{n_i-2} \lambda^{n_i-2} + d_{n_i-3} \lambda^{n_i-3} \dots + d_1 \lambda + d_0,$$

donde $P(D/R_i^*; \lambda)$ es un polinomio de grado a lo más $n - 2$ y $d_0 = 0$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^l P(D/R_i^*; \lambda)$$

es un polinomio de grado a lo más $n - 2$ cuyo término independiente es igual a cero, por lo tanto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^l P(D/R_i^*; \lambda) = d_s \lambda^s + d_{s-1} \lambda^{s-1} + d_{s-2} \lambda^{s-2} + \dots + d_1 \lambda + d_0,$$

con $1 \leq s \leq n - 2$ y $d_0 = 0$.

Utilizando el teorema 15 y las tres observaciones anteriores se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(D; \lambda) &= P(D + \{vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^l P(D/R_i^*; \lambda) \\
&= (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0) + \\
&\quad (b_{n-1} \lambda^{n-1} + b_{n-2} \lambda^{n-2} + b_{n-3} \lambda^{n-3} \dots + b_1 \lambda + b_0) + \\
&\quad d_s \lambda^s + d_{s-1} \lambda^{s-1} + d_{s-2} \lambda^{s-2} + \dots + d_1 \lambda + d_0 \\
&= a_n \lambda^n + (a_{n-1} \lambda^{n-1} + b_{n-1} \lambda^{n-1}) + (a_{n-2} \lambda^{n-2} + b_{n-2} \lambda^{n-2}) + \\
&\quad \dots + (a_1 \lambda + b_1 \lambda + d_1 \lambda) + (a_0 + b_0 + d_0) \\
&= a_n \lambda^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) \lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1 + d_1) \lambda + (a_0 + b_0 + d_0).
\end{aligned}$$

Además se cumple que $P(D; \lambda)$ es un polinomio de grado n , $a_n = 1$, $a_{n-1} + b_{n-1} = -(q+1) + 1 = -q$ y $a_0 + b_0 + d_0 = 0$. \square

Al igual que en gráficas, el coeficiente del término lineal del polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D nos proporciona información sobre la conexidad de D .

Teorema 17. Sea D una digráfica. Si el coeficiente de λ en $P(D; \lambda)$ es distinto de cero, entonces D es fuerte.

Demostración. Sea D una digráfica tal que el coeficiente del término lineal de $P(D; \lambda)$ es distinto de cero y supongamos por contradicción que D no es fuerte. Sean D_1, D_2, \dots, D_k las componentes fuertes de D , donde $k \geq 2$. Por el teorema 11, $P(D; \lambda) = \prod_{i=1}^k P(D_i; \lambda)$. Observe que cada $P(D_i; \lambda)$ es divisible por λ , en consecuencia $P(D; \lambda)$ es divisible por λ^2 y esto implica que el término lineal de $P(D; \lambda)$ es igual a cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D es fuerte. \square

La figura 3.5 muestra que el recíproco del teorema 17 no es cierto, pues la digráfica D_1 es fuerte pero el coeficiente lineal de su polinomio dicromático es cero. Además, en general, el polinomio dicromático tampoco proporciona información sobre si la digráfica es fuerte o conexa, pues las tres digráficas de la figura 3.5 tienen el mismo polinomio y una es fuerte, la otra solamente es conexa y la otra no es conexa.

El polinomio dicromático $P(D; \lambda)$ de una digráfica D también puede ser expresado en términos de los polinomios dicromáticos de las digráficas inducidas por los vértices de los bloques de la gráfica $UG(D)$.

Teorema 18. Sea D una digráfica tal que $UG(D)$ es una gráfica conexa con $r \geq 2$ bloques. Si B_1, B_2, \dots, B_r son los bloques de $UG(D)$, entonces

$$P(D; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^r P(D_i; \lambda)}{\lambda^{r-1}},$$

donde $D_i = D\langle V(B_i) \rangle$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

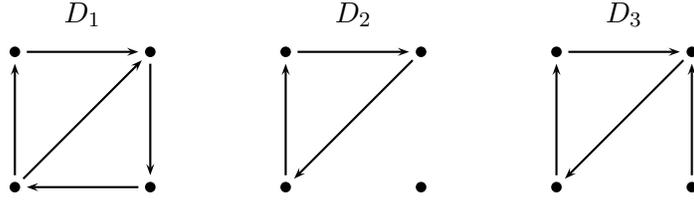


Figura 3.5: $P(D_1; \lambda) = P(D_2; \lambda) = P(D_3; \lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$.

Demostración. Realizamos la prueba por inducción sobre r .

Si $r = 2$, sean B_1 y B_2 los bloques de $UG(D)$. Sean $D_i = D\langle V(B_i) \rangle$ con $i \in \{1, 2\}$ y $v \in V(B_1) \cap V(B_2)$. El número de λ -coloraciones en las que el vértice v tiene el color j para todo $j \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$ es igual a $\frac{P(D_1; \lambda)}{\lambda}$. Por lo que toda λ -coloración de D_1 se puede extender de $\frac{P(D_2; \lambda)}{\lambda}$ maneras distintas a D y por lo tanto

$$P(D; \lambda) = \frac{P(D_1; \lambda)P(D_2; \lambda)}{\lambda}.$$

Supongamos que toda digráfica H cuya gráfica $UG(H)$ es conexa con $r - 1$ bloques satisface que

$$P(H; \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r-1} P(H_i; \lambda)}{\lambda^{r-2}},$$

donde $H_i = D\langle V(B_i) \rangle$ y B_i es un bloque de $UG(H)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$. Sea D una digráfica tal que $UG(D)$ es una gráfica conexa con r bloques y sean B_1, B_2, \dots, B_r los bloques de $UG(D)$. Supongamos que B_r es un bloque final de D y que $v \in V(B_r)$ es un vértice de corte de $UG(D)$. Sea $D' = D\langle \cup_{i=1}^{r-1} V(B_i) \rangle$. Observe que $UG(D')$ es una gráfica conexa con $r - 1$ bloques, los cuales son B_1, B_2, \dots, B_{r-1} . Aplicando la hipótesis de inducción a D' se tiene que

$$P(D', \lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r-1} P(D_i; \lambda)}{\lambda^{r-2}},$$

donde $D_i = D\langle V(B_i) \rangle$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$. Observe que toda λ -coloración de D' puede ser extendida a D de $\frac{P(D_r; \lambda)}{\lambda}$ maneras diferentes. Por lo tanto,

$$P(D; \lambda) = P(D'; \lambda) \frac{P(D_r; \lambda)}{\lambda} = \frac{\prod_{i=1}^r P(D_i; \lambda)}{\lambda^{r-1}}.$$

□

Capítulo 4

Dicromaticidad

Al igual que en gráficas, nos podemos preguntar si una digráfica D está completamente determinada por su polinomio dicromático. En esta sección extendemos los conceptos de equivalencia y unicidad cromática a digráficas.

4.1. Equivalencia dicromática

Definición 9. Dos digráficas D_1 y D_2 son *dicromáticamente equivalentes* si $P(D_1; \lambda) = P(D_2; \lambda)$.

Observe que si dos digráficas son dicromáticamente equivalentes entonces deben tener el mismo orden y el mismo número dicromático. Como consecuencia del teorema 18, si las digráficas inducidas por los bloques de $UG(D)$ de una digráfica D son las mismas digráficas inducidas por los bloques de $UG(D')$ de una digráfica D' , entonces D y D' son dicromáticamente equivalentes. El siguiente resultado es consecuencia de la proposición 4.

Corolario 9. Cualesquiera dos digráficas acíclicas del mismo orden son dicromáticamente equivalentes.

Antes de demostrar que las digráficas de circunferencia dos con el mismo orden y con el mismo número de flechas simétricas son dicromáticamente equivalentes, probaremos dos resultados previos que serán de gran utilidad.

Teorema 19. Sea D una digráfica. Si uv es una flecha de D que no pertenece a ningún ciclo, entonces $P(D; \lambda) = P(D - \{uv\}; \lambda)$.

Demostración. Sea uv una flecha de D que no pertenece a ningún ciclo. Basta con demostrar lo siguiente: Γ es una λ -coloración de D si y sólo si Γ es una λ -coloración de $D - \{uv\}$.

Como $D - \{uv\}$ es una subdigráfica propia de D , entonces toda λ -coloración de D es una λ -coloración de $D - \{uv\}$. Ahora, sea Γ una λ -coloración de $D - \{uv\}$ y supongamos

por contradicción que Γ no es una λ -coloración de D . Al aplicar Γ a los vértices de D se forma un ciclo monocromático \vec{C} en D , esto implica que uv es una flecha de \vec{C} , lo cual es una contradicción, pues por hipótesis uv no pertenece a ningún ciclo de D . Por lo tanto, Γ tiene que ser una λ -coloración de D y $P(D; \lambda) = P(D - \{uv\}, \lambda)$. \square

Corolario 10. Sea D una digráfica. Si S es el subconjunto de las flechas de D que no pertenecen a ningún ciclo de D , entonces $P(D, \lambda) = P(D - S; \lambda)$.

Teorema 20. Sea D una digráfica de orden n con q flechas simétricas. Si D es una digráfica de circunferencia dos, entonces $P(D; \lambda) = \lambda^{n-q}(\lambda - 1)^q$.

Demostración. Sea D una digráfica de circunferencia dos con q flechas simétricas, observe que si uv es una flecha asimétrica de D , entonces uv no pertenece a ningún ciclo de D . Sea S el conjunto de flechas asimétricas de D , por el corolario 10 se sigue que $P(D; \lambda) = P(D - S; \lambda)$. Considere $D' = D - S$, note que la digráfica D' es una digráfica que solamente tiene flechas simétricas y además es un bosque con n vértices y q flechas simétricas. Ahora, supongamos que D' tiene k componentes fuertes y sean D_1, D_2, \dots, D_k tales componentes fuertes. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ consideremos que D_i tiene n_i vértices y q_i flechas simétricas, de esto se sigue que

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k q_i = q.$$

Como cada componente conexa D_i es un árbol de orden n_i y tamaño q_i entonces $q_i = n_i - 1$, utilizando esta propiedad y las dos igualdades anteriores se tiene que

$$q = \sum_{i=1}^k q_i = \sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - k.$$

De las igualdades previas se obtiene que $q = n - k$ y $k = n - q$, además por el teorema 7 sabemos que $P(D', \lambda) = \lambda^k(\lambda - 1)^{n-k}$. Por lo tanto,

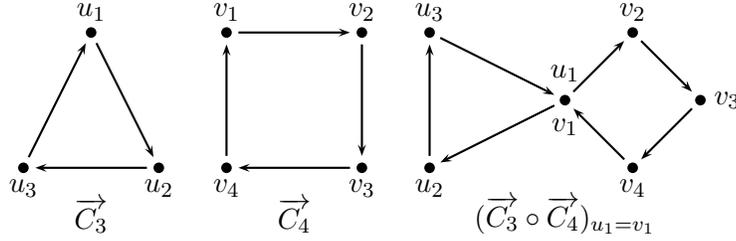
$$P(D; \lambda) = P(D'; \lambda) = \lambda^k(\lambda - 1)^{n-k} = \lambda^{n-q}(\lambda - 1)^q.$$

\square

Corolario 11. Cualesquiera dos digráficas de circunferencia dos con el mismo orden y el mismo número de flechas simétricas son dicromáticamente equivalentes.

Sean $\vec{C}_n = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ y $\vec{C}_m = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_1)$ dos ciclos, denotamos por $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$ a la digráfica que se obtiene de identificar el vértice u_i con el vértice v_j . En la figura 4.1 se muestra $(\vec{C}_3 \circ \vec{C}_4)_{u_1=v_1}$.

En el siguiente teorema considere las sumas módulo n o módulo m según sea el caso.

Figura 4.1: $(\vec{C}_3 \circ \vec{C}_4)_{u_1=v_1}$.

Teorema 21. Si $\vec{C}_n = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$ y $\vec{C}_m = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$ son dos ciclos, entonces las digráficas $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$, $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j} + \{u_{i-1}v_{j+1}\}$ y $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j} + \{v_{j-1}u_{i+1}\}$ son dicromáticamente equivalentes.

Demostración. Como $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$ es una subdigráfica propia de $D_1 = (\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j} + \{u_{i-1}, v_{j+1}\}$ y $D_2 = (\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j} + \{u_{i+1}, v_{j-1}\}$ entonces toda λ -coloración de D_1 y D_2 es una λ -coloración de $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$.

Sea Γ una λ -coloración de $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$. Ahora, observe que los únicos ciclos de D_1 son \vec{C}_n , \vec{C}_m y $F_1 = (u_{i-1}, v_{j+1}, \dots, v_{j-1}, v_j = u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i-1})$ y los únicos ciclos de D_2 son \vec{C}_n , \vec{C}_m y $F_2 = (v_{j-1}, u_{i+1}, \dots, u_{i-1}, u_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j-1})$. Dado que Γ es una λ -coloración de $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$ entonces \vec{C}_n y \vec{C}_m no son monocromáticos bajo Γ . Como $V(\vec{C}_n) \cup V(\vec{C}_m) \subseteq V(F_1)$ y $V(\vec{C}_n) \cup V(\vec{C}_m) \subseteq V(F_2)$, entonces F_1 y F_2 no son monocromáticos bajo Γ , lo cual implica que toda λ -coloración de $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$ es una λ -coloración de D_1 y D_2 . Por lo tanto, $(\vec{C}_n \circ \vec{C}_m)_{u_i=v_j}$, D_1 y D_2 tienen el mismo polinomio dicromático y en consecuencia son dicromáticamente equivalentes. \square

4.2. Unicidad dicromática

Definición 10. Una digráfica D es *dicromáticamente única* si $P(D; \lambda) = P(D'; \lambda)$ implica que $D \cong D'$.

Si una digráfica D es dicromáticamente única, entonces $UG(D)$ tiene a lo más dos bloques. Note que si D es dicromáticamente única, entonces $D \cong \overline{D}$.

Teorema 22. El ciclo \vec{C}_n es dicromáticamente único.

Demostración. Sea $n \geq 2$ y supongamos por contradicción que existe una digráfica $D \not\cong \vec{C}_n$ de orden n tal que $P(D; \lambda) = \lambda^n - \lambda$. Por el teorema 17, D tiene que ser fuerte y tiene

al menos un ciclo. Si $n = 2$, entonces $D \cong \vec{C}_2$, lo cual es una contradicción y por lo tanto podemos suponer que $n \geq 3$. Sea \vec{C}_k un ciclo de longitud el cuello de D . Si $k = n$ entonces $D \cong \vec{C}_n$ y otra vez obtenemos un contradicción. Si $k = 2$, entonces D tiene al menos una flecha simétrica y por el inciso (ii) del teorema 16, $P(D; \lambda) \neq \lambda^n - \lambda$.

Ahora, supongamos que $2 < k < n$. Observe que existen λ coloraciones que hacen que \vec{C}_k sea monocromático. Dado que $k < n$, toda coloración que hace que \vec{C}_k sea monocromático se puede extender a todo D de λ^{n-k} maneras distintas, lo cual implica que existen λ^{n-k+1} coloraciones de D que hacen que \vec{C}_k sea monocromático. En consecuencia para todo $\lambda \geq 2$ se cumple que

$$P(D; \lambda) \leq \lambda^n - \lambda^{n-k+1} < \lambda^n - \lambda,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $P(D; \lambda) = \lambda^n - \lambda$ entonces $D \cong \vec{C}_n$. \square

Por el teorema 9, el ciclo C_n es cromáticamente único para todo $n \geq 2$, pero aplicando la proposición 5 es fácil ver que para toda $n \geq 4$ y para cualquier par de vértices $v_i, v_j \in V(D)$ no adyacentes, las digráficas $C_n + \{v_i v_j\}$ y C_n tienen el mismo polinomio dicromático. Por lo tanto, C_n no es dicromáticamente único para todo $n \geq 4$. Y como consecuencia se tiene que el que una gráfica de sea cromáticamente única no implica que sea dicromáticamente única.

Sea $m \geq 2$, denotamos por \mathbb{Z}_m el grupo cíclico de los enteros módulo m . Sea J un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ con la propiedad de que si $j \in J$ entonces $-j \notin J$. Una digráfica circulante, denotada por $C_m(J)$, es definida como la digráfica cuyo conjunto de vértices es $V(C_m(J)) = \mathbb{Z}_m$ y cuyo conjunto de flechas es $A(C_m(J)) = \{(i, j) : j - i \in J\}$. Un hecho conocido es que $\vec{C}_5(1, 2)$ es el único torneo regular de orden cinco que tiene 5 triángulos (ver [6]). En el apéndice A calculamos el polinomio dicromático de $\vec{C}_5(1, 2)$ el cual es

$$P(\vec{C}_5(1, 2); \lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda.$$

Denotamos por $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$ a la digráfica que consta de 5 vértices, 6 flechas, un 4-ciclo y un 3-ciclo tal que que ambos ciclos solamente comparten una flecha.

Teorema 23. El torneo regular $\vec{C}_5(1, 2)$ es dicromáticamente único.

Demostración. Supongamos por contradicción que $D \not\cong \vec{C}_5(1, 2)$ es una digráfica con polinomio dicromático $P(D; \lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda$. Por los teoremas 16 y 17, D es una digráfica fuerte y asimétrica de orden 5. Sea $V(D) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Si D tiene cinco triángulos, entonces $D \cong \vec{C}_5(1, 2)$, y en consecuencia podemos suponer que D tiene a lo más cuatro triángulos. Consideremos los siguientes tres casos de acuerdo a las longitudes de los ciclos inducidos de D .

Caso 1. Todo ciclo inducido de D es un triángulo.

Sea t el número de triángulos de D y sea λ un entero positivo. Para determinar $P(D; \lambda)$ usamos el principio de inclusión-exclusión, además solamente consideramos coloraciones con a lo más λ colores. Observe que toda coloración de \vec{C}_3 que lo hace monocromático se puede extender de λ^3 maneras distintas a todo D , lo cual implica que a los más existen $t\lambda^3$ coloraciones de D con al menos un triángulo monocromático.

Si D tiene por lo menos dos triángulos, sean F_1 y F_2 dos triángulos de D . Note que toda coloración que hace a F_1 monocromático se puede extender a todo D al menos de una manera de tal forma que F_1 sea el único triángulo monocromático de D o que F_1 y F_2 sean los únicos triángulos monocromáticos de D y en consecuencia al menos existen $\binom{t}{2}\lambda$ coloraciones con a lo más dos triángulos monocromáticos.

Ahora, note que si una digráfica asimétrica tiene al menos tres triángulos, entonces tiene por lo menos cinco vértices. Si una coloración de D tiene al menos tres triángulos monocromáticos, entonces D es monocromática, lo cual implica que existen exactamente λ coloraciones con al menos tres o cuatro triángulos monocromáticos. Por lo tanto, para todo $\lambda \geq 2$ podemos acotar $P(D; \lambda)$ de la siguiente manera:

$$P(D; \lambda) \geq \begin{cases} \lambda^5 - t\lambda^3 + \binom{t}{2}\lambda & \text{si } t \in \{1, 2, 4\}, \\ \lambda^5 - t\lambda^3 + \binom{t}{2}\lambda - \lambda & \text{si } t = 3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Resolviendo la desigualdad anterior para cada $t \in \{1, 2, 3, 4\}$ obtenemos las siguientes soluciones

| t | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|------------|------------|------------|----------------------|
| λ | $[1/4, 1]$ | $[2/3, 1]$ | $[1, 3/2]$ | no es un número real |

En cualquier caso $\lambda < 2$ o $\lambda \notin \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción, pues $dc(D) = 2$.

Caso 2. Todo ciclo inducido de D tiene longitud al menos cuatro.

a) Supongamos que D es hamiltoniana. Sin pérdida de generalidad asumamos que $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ es un ciclo hamiltoniano de D . Dado que D no tiene triángulos, D no puede tener cuerdas del tipo v_iv_{i-2} para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (considere las sumas modulo 5), pues de lo contrario D tendría triángulos de la forma $v_iv_{i-2}v_{i-1}v_i$. Tampoco D puede tener dos cuerdas del tipo v_iv_{i+2} y v_jv_{j+2} donde $j \equiv i \pm 2 \pmod{5}$ ya que de lo contrario tendría triángulos de la forma $v_iv_{i+2}v_jv_i$ or $v_iv_jv_{j+2}v_i$. Por lo tanto, el ciclo hamiltoniano solamente puede tener una cuerda del tipo v_iv_{i+2} o dos cuerdas del tipo v_iv_{i+2} y $v_{i+1}v_{i+3}$.

Observe que si D tuviera dos cuerdas del tipo v_iv_{i+2} y $v_{i+1}v_{i+3}$, entonces al agregar cualquier otra cuerda se formaría un triángulo. De la observación anterior se deduce que D no puede tener más de dos cuerdas. Por lo tanto hay tres posibles digráficas (salvo isomorfismos) cuyos ciclos inducidos tienen al menos longitud cuatro, tales digráficas son \vec{C}_5 , \vec{C}_5^*

y \vec{C}_5^{**} , donde \vec{C}_5^* es un 5-ciclo con una cuerda de la forma $v_i v_{i+2}$ y \vec{C}_5^{**} es un ciclo con dos cuerdas de la forma $v_i v_{i+2}$ y $v_{i+1} v_{i+3}$.

Por los teoremas 10 y 6, $P(\vec{C}_5; \lambda) = \lambda^5 - \lambda$ y $P(\vec{C}_5^*; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3$, además $P(\vec{C}_5^{**}; \lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2 + \lambda$ (ver inciso a) del apéndice B). Por lo tanto los polinomios dicromáticos de \vec{C}_5 , \vec{C}_5^* y \vec{C}_5^{**} son distintos de $P(\vec{C}_5(1, 2); \lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda$, lo cual es una contradicción.

b) Supongamos que D no es hamiltoniana. Sea $v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$ un ciclo inducido de longitud cuatro. Dado que D es fuerte, D tiene una flecha de la forma $v_i v_5$ con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_0 v_4 \in F(D)$. Observe que si $v_4 v_1, v_4 v_3 \in V(D)$ entonces $v_0 v_4 v_1 v_2 v_3 v_0$ es un ciclo de D y $v_4 v_3 v_0 v_4$ es hamiltoniana, contradiciendo que D no es hamiltoniana y que D no tiene triángulos, lo cual implica que $v_4 v_2 \in A(D)$. Análogamente, si $v_1 v_4, v_3 v_4 \in V(D)$, entonces $v_1 v_4 v_2 v_3 v_0 v_2$ es un ciclo de D y $v_3 v_4 v_2 v_3$ es un triángulo de D , obteniendo nuevamente una contradicción.

Por lo tanto D está únicamente determinada (salvo isomorfismos) por el ciclo $v_0 v_1 v_2 v_3 v_0$ y las flechas $v_0 v_4$ y $v_4 v_2$. Aplicando el teorema 15, $P(D; \lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2 + \lambda$ (ver inciso b) del apéndice B), lo cual es una contradicción.

Caso 3. La digráfica D tiene tanto 3-ciclos inducidos como 4-ciclos inducidos. Sin pérdida de generalidad suponga que $\vec{C}_3 = v_0 v_1 v_2 v_0$ es un 3-ciclo. Dado que D tiene tanto 3-ciclos inducidos como 4-ciclos inducidos, \vec{C}_3 solamente comparte una flecha con el 4-ciclo de D . Ahora, suponga que $\vec{C}_4 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$. Observe que \vec{C}_4 no puede tener cuerdas, lo cual implica que D solamente puede tener cuerdas de la forma $v_0 v_i$ o $v_i v_0$ con $i \in \{2, 3\}$. En este caso obtenemos que $|F(D)| \in \{6, 7, 8\}$, además $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$ es una subdigráfica de D .

Si $|F(D)| = 6$, entonces $D \cong \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$ con $P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda$ (ver inciso c) del apéndice B), lo cual es una contradicción. Por lo tanto $|F(D)| \in \{7, 8\}$. Consideremos los siguientes dos subcasos:

a) Suponga que $|F(D)| = 7$. Si $|F(D)| = 7$, entonces D es isomorfa a alguna de las siguientes digráficas: $C_3 \uparrow C_4 + \{v_0 v_i\}$ o $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_i v_0\}$, donde $i \in \{3, 4\}$. En el inciso c) del apéndice B demostramos que $P(D; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda$ y obtenemos nuevamente una contradicción.

b) Suponga que $|F(D)| = 8$. Si $|F(D)| = 8$, entonces D es isomorfa a alguna de las siguientes digráficas: $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0 v_3, v_0 v_4\}$, $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_3 v_0, v_4 v_0\}$ o $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0 v_i, v_j v_0\}$, con $\{i, j\} = \{3, 4\}$. En el inciso d) del apéndice B demostramos que $P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0 v_3, v_4 v_0\}; \lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$ y si $D \cong \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0 v_3, v_4 v_0\}$ entonces

$P(D; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda$ (ver inciso c) del apéndice B) y en ambos casos obtenemos una contradicción.

Por lo tanto $\vec{C}_5(1, 2)$ es dicromáticamente único. □

Sea p un número primo tal que $p \equiv 3 \pmod{4}$ y $n \in \mathbb{N}$. El torneo de Paley, denotado por QR_{p^n} , es el torneo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de elementos del campo de galois $GF(p^n)$ y $i \rightarrow j$ si y sólo si $j - i$ es un residuo cuadrático de $GF(p^n)$. En la figura 4.2 se muestra el torneo de paley QR_7 .

En 1994 V. Neumann-Lara demostró lo siguiente.

Teorema 24. [8] El torneo de Paley QR_{11} es el único torneo 4-dicromático de orden 11.

Como consecuencia inmediata se tiene lo siguiente.

Teorema 25. El torneo de Paley QR_{11} es dicromáticamente único.

Conclusiones

Uno de los objetivos principales de este trabajo fue proporcionar una fórmula recursiva para calcular el polinomio dicromático de una digráfica. En el teorema 15 del capítulo 3 se presentó la siguiente fórmula

$$P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda) + \sum_{i=1}^l P(D/R_i^*; \lambda),$$

donde $u, v \in V(D)$ es un par de vértices asimétricos y R_i^* es el conjunto de vértices definido en 3.3 para todo $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Además, se dieron propiedades que satisfacen los coeficientes del polinomio dicromático de una digráfica y probamos que si el coeficiente de λ es distinto de cero, entonces D es fuerte. Sin embargo, no es cierto que si D es fuerte, entonces el coeficiente del término lineal es distinto de cero. A continuación se enlistan algunos problemas abiertos sobre el polinomio dicromático de una digráfica.

Problema 1. Encontrar más propiedades de los coeficientes del polinomio dicromático de una digráfica.

Problema 2. Estudiar las raíces del polinomio dicromático de una digráfica D , así como deducir propiedades de la digráfica D a partir de la existencia de ciertas raíces de su polinomio dicromático.

En el capítulo 4 presentamos los conceptos equivalencia dicromática y unicidad dicromática en digráficas, los cuales son generalizaciones de los conceptos de equivalencia cromática y unicidad cromática en gráficas. Probamos que el ciclo \vec{C}_n es dicromáticamente único para todo $n \geq 2$. La curiosidad nos llevó a preguntarnos si existían otras digráficas diferentes del ciclo \vec{C}_n que fueran dicromáticamente únicas. La respuesta es afirmativa, pues demostramos que el torneo $\vec{C}_5(1, 2)$ y el torneo de Paley QR_{11} son dicromáticamente únicos. Además, se dieron algunas condiciones que debe cumplir una digráfica para ser dicromáticamente única.

V. Neumann-Lara [8] definió los torneos W , W_0 y W_1 y demostró el siguiente teorema.

Teorema 26. [8] Salvo isomorfismos, QR_7 , W , W_0 y W_1 son los únicos torneos 3-dicromáticos de orden 7.

Los torneos QR_7 , W y W_0 son los únicos tres torneos regulares de orden 7 (ver [5]). Observe que W_1 no es regular.

Conjetura 2. El torneo W_1 es dicromáticamente único.

Problema 3. ¿Los torneos QR_7 , W y W_0 son dicromáticamente únicos?

Problema 4. Caracterizar aquellas digráficas D tales que en cada paso de la fórmula recursiva del teorema 15 existe un par de vértices no simétricos u y v que satisfacen

$$P(D; \lambda) = P(D + \{uv, vu\}; \lambda) + P(D/\{u, v\}; \lambda). \quad (4.2)$$

Para el torneo regular $\vec{C}_5(1, 2)$ existe una sucesión de pasos tales que se obtiene la fórmula 4.2 (ver inciso a) del apéndice). Sin embargo, para el torneo de Paley QR_7 no existe una flecha para la que se obtenga la fórmula 4.2 (ver figura 4.2). Además, si el conjunto de flechas asimétricas de una digráfica D es la orientación de un bosque, entonces existe una secuencia de pasos para los que la fórmula del teorema 15 es de la forma de la ecuación 4.2.

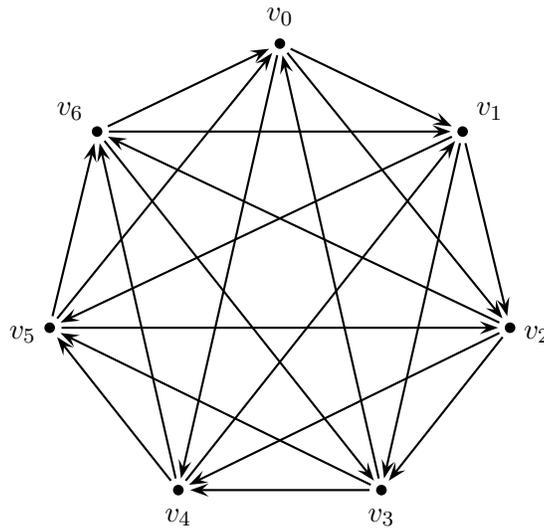


Figura 4.2: Torneo de Paley QR_7 .

Apéndice A

En este apéndice calculamos el polinomio dicromático de $\vec{C}_5(1, 2)$. Considere el dibujo de $\vec{C}_5(1, 2)$ de la figura 4.3.

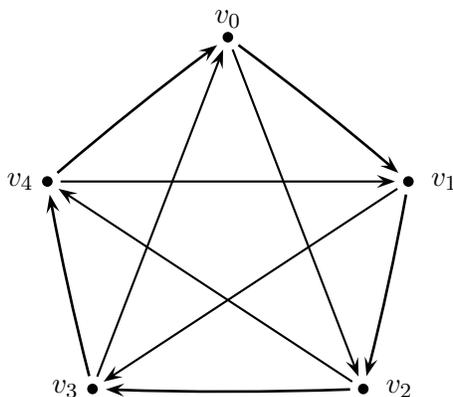


Figura 4.3: Torneo regular $\vec{C}_5(1, 2)$.

Considere las siguientes digráficas

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \vec{C}_5(1, 2) + \{v_1v_0\} \text{ y } D'_0 = \vec{C}_5(1, 2)/\{v_0, v_1\}, \\
 D_1 &= D_0 + \{v_2v_1\} \text{ y } D'_1 = D_0/\{v_1, v_2\}, \\
 D_2 &= D_1 + \{v_3v_2\} \text{ y } D'_2 = D_1/\{v_2, v_3\}, \\
 D_3 &= D_2 + \{v_4v_3\} \text{ y } D'_3 = D_2/\{v_3, v_4\}, \\
 D_4 &= D_3 + \{v_0v_4\} \text{ y } D'_4 = D_3/\{v_4, v_0\}.
 \end{aligned}$$

Observe que para toda $(v_i v_{i+1})$ -trayectoria T (considere la sumas módulo 5), donde $0 \leq i \leq 4$, $D\langle V(T) \rangle$ no es acíclica. Además, note que las flechas $v_i v_{i+1}$ son las únicas flechas simétricas de D_4 . Aplicando el teorema 15 obtenemos que

$$P(\vec{C}_5(1, 2); \lambda) = P(D_4; \lambda) + \sum_{i=0}^4 P(D'_i; \lambda).$$

Ahora, considere las siguientes digráficas

$$\begin{aligned} B_0 &= D_4 + \{v_2v_0\} \text{ y } B'_0 = D_4/\{v_0, v_2\}, \\ B_1 &= B_0 + \{v_3v_1\} \text{ y } B'_1 = B_0/\{v_1, v_3\}, \\ B_2 &= B_1 + \{v_4v_2\} \text{ y } B'_2 = B_1/\{v_2, v_4\}, \\ B_3 &= B_2 + \{v_0v_3\} \text{ y } B'_3 = B_2/\{v_3, v_0\}, \\ B_4 &= B_3 + \{v_1v_4\} \text{ y } B'_4 = B_3/\{v_4, v_1\}. \end{aligned}$$

Observe que para toda $(v_i v_{i+2})$ -trayectoria T (considere la sumas módulo 5), donde $0 \leq i \leq 4$, $D\langle V(T) \rangle$ no es acíclica. Además, note que $B_4 \cong K_5$. Aplicando el teorema 15 obtenemos que

$$P(\vec{C}_5(1, 2); \lambda) = P(K_5; \lambda) + \sum_{i=0}^4 P(D'_i; \lambda) + \sum_{i=0}^4 P(B'_i; \lambda).$$

Los polinomios dicromáticos de K_5 , D'_i y B'_i para todo $0 \leq i \leq 4$ son

$$\begin{aligned} P(K_5; \lambda) &= \lambda^5 - 10\lambda^4 + 35\lambda^3 - 50\lambda^2 + 24\lambda. \\ P(D'_0; \lambda) &= \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda. \\ P(D'_1; \lambda) &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2. \\ P(D'_2; \lambda) &= \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2. \\ P(D'_3; \lambda) &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda. \\ P(D'_4; \lambda) &= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda. \\ P(B'_0; \lambda) &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda. \\ P(B'_1; \lambda) &= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda. \\ P(B'_2; \lambda) &= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda. \\ P(B'_3; \lambda) &= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda. \\ P(B'_4; \lambda) &= \lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula del teorema 15 el lector puede verificar los polinomios dicromáticos de K_5 , D'_i y B'_i para todo $1 \leq i \leq 4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\vec{C}_5(1, 2)) &= P(K_5; \lambda) + \sum_{i=0}^4 P(D'_i; \lambda) + \sum_{i=0}^4 P(B'_i; \lambda) \\ &= \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Apéndice B

En este apéndice calculamos los polinomios de la demostración del teorema 23.

a) Considere las figuras 4.4, 4.5 y la subdigráfica $D(\{v_3, v_4\})$ de $\vec{C}_5^{**} + \{v_4v_3\}$. Sea Γ una coloración de $\vec{C}_5^{**} + \{v_4v_3\}$. Observe que Γ es una λ -coloración de $D(\{v_3, v_4\})$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $\vec{C}_5^{**} + \{v_4v_3\}$. Aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(\vec{C}_5^{**} + \{v_4v_3\}; \lambda) = \lambda^{5-2}(\lambda^2 - \lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - \lambda).$$

Sea $D_1 = \vec{C}_5^{**}/\{v_3, v_4\}$. Note que toda λ -coloración de la subdigráfica $D(\{v_0, v_1, w\})$ de $D_1 + \{wv_2\}$ se puede extender a una λ -coloración de $D_1 + wv_2$ de $\lambda - 1$ maneras distintas y en consecuencia

$$P(D_1 + \{wv_2\}; \lambda) = (\lambda^3 - \lambda)(\lambda - 1).$$

En las figuras 4.4 y 4.5 calculamos el polinomio dicromático de \vec{C}_5^{**} y $\vec{C}_5^{**}/\{v_3, v_4\}$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
 P(\vec{C}_5^{**}; \lambda) &= P(\vec{C}_5^{**} + \{v_4v_3\}; \lambda) + P(\vec{C}_5^{**}/\{v_3, v_4\}; \lambda) \\
 &= \lambda^3(\lambda^2 - \lambda) + \lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda \\
 &= \lambda^5 - 2\lambda^2 + \lambda.
 \end{aligned}$$

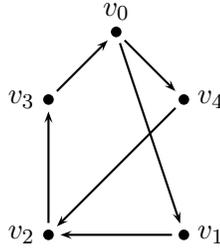
Figura 4.4: $P(\vec{C}_5^{**}; \lambda)$.

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c} D_1 \\ \begin{array}{ccc} & v_0 & \\ w & \swarrow \quad \searrow & v_1 \\ & \downarrow & \\ & v_2 & \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & v_0 & \\ w & \swarrow \quad \searrow & v_1 \\ & \downarrow & \\ & v_2 & \end{array} \\ + \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & v_0 & \\ x & \swarrow \quad \searrow & v_1 \\ & \downarrow & \end{array} \end{array} \\
P(D_1; \lambda) = P(D_1 + \{wv_2\}; \lambda) + P(D_1 / \{v_2, w\}; \lambda) \\
= (\lambda^3 - \lambda)(\lambda - 1) + \lambda(\lambda^2 - \lambda) \\
= \lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda.
\end{array}$$

Figura 4.5: $P(\vec{C}_5^{**} / \{v_3, v_4\}; \lambda)$.

b) Considere la digráfica D de la figura 4.6 y sea Γ una coloración de \vec{C}_5^{**} . Observe que Γ es una λ -coloración de D si y sólo si Γ es una λ -coloración de \vec{C}_5^{**} . Por lo tanto, aplicando la proposición 5 obtenemos que

$$P(D; \lambda) = \lambda^{5-5} P(\vec{C}_5^{**}, \lambda) = P(\vec{C}_5^{**}, \lambda).$$

Figura 4.6: Digráfica D del inciso b).

Sea \mathcal{C} el siguiente conjunto de digráficas

$$\begin{array}{c}
\{\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4, \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_i\}, \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_iv_0\}, \\
\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_3, v_0v_4\}, \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_3v_0, v_4v_0\}, \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_3v_0, v_0v_4\}\},
\end{array}$$

con $i \in \{3, 4\}$. Observe que toda digráfica que pertenece a \mathcal{C} es isomorfa a $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$ o tiene como subgráfica propia a $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$. En la figura 4.7 se presentan todas las digráficas que

pertenecen a \mathcal{C} y también se presenta la digráfica $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_3, v_4v_0\}$. Sea $D \in \mathcal{C}$ y sea Γ una coloración de D . Observe que Γ es una λ -coloración de $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de D . Aplicando la proposición 5, obtenemos que

$$P(D; \lambda) = \lambda^{5-5} P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4; \lambda) = P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4; \lambda).$$

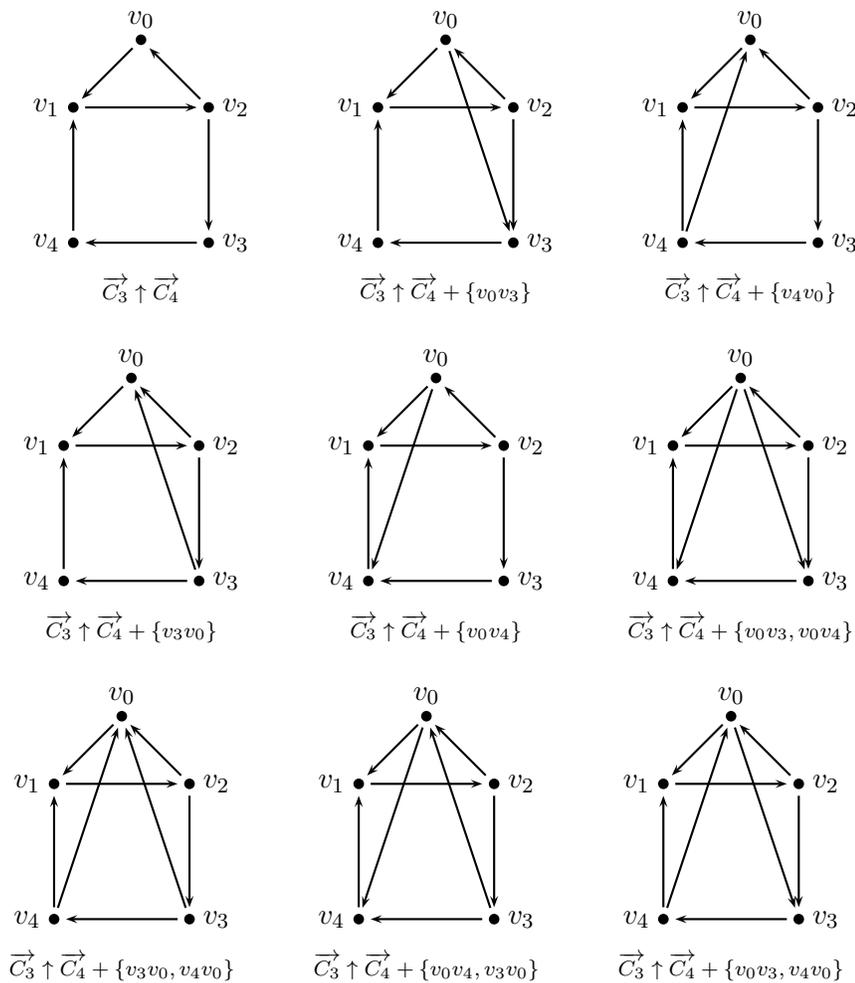


Figura 4.7: Digráficas en \mathcal{C} y $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_3, v_4v_0\}$.

c) En la figura 4.8 se calcula el polinomio dicromático de $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4$. Sea Γ una coloración de $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_2v_1\}$. Observe que Γ es una λ -coloración de la subdigráfica $D(\{v_1v_2\})$ de $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_2v_1\}$ si y sólo si Γ es una λ -coloración de $\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_2v_1\}$. Aplicando la

proposición 5, obtenemos que

$$P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_2v_1\}; \lambda) = \lambda^{5-2}(\lambda^2 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda^4.$$

$$\begin{aligned}
 P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4; \lambda) &= P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_2v_1\}; \lambda) + P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 / \{v_1, v_2\}; \lambda) \\
 &= \lambda^5 - \lambda^4 + \frac{(\lambda^2 - \lambda)(\lambda^3 - \lambda)}{\lambda} \\
 &= \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda.
 \end{aligned}$$

Figura 4.8: $P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4; \lambda)$.

d) En la figura 4.9 se calcula el polinomio dicromático de $D_1 = \vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_3, v_4v_0\}$. Definamos la subdigráfica propia D_2 de $D_1 + \{v_2v_1\}$ como $D_2 = D_1 - \{v_2v_0, v_0v_1, v_2v_3, v_4v_1\}$. Note que D_2 consta de dos componentes fuertes, a saber un 2-ciclo y un 3-ciclo. Aplicando el teorema 11 obtenemos que

$$P(D_2; \lambda) = (\lambda^3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2.$$

Ahora, sea Γ una coloración de D_1 , observe que Γ es una λ -coloración de D_2 si y sólo si Γ es una λ -coloración de D_1 . Aplicando la proposición 5 tenemos que

$$P(D_1 + \{v_2v_1\}; \lambda) = \lambda^{5-5}P(D_2; \lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2.$$

Ahora, sea $D_3 = D_1 / \{v_1, v_2\}$. Definamos la subdigráfica propia D_4 de $D_3 + \{v_4v_3\}$ como $D_4 = (V(D), F_4)$ donde $F_4 = \{v_0w, wv_0, v_3v_4, v_4v_3\}$. Note que D_4 solamente consta de dos componentes fuertes, a saber dos 2-ciclos. Aplicando el teorema 11 obtenemos que

$$P(D_4; \lambda) = (\lambda^2 - \lambda)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2.$$

Sea Γ una coloración de D_3 , observe que Γ es una λ -coloración de D_4 si y sólo si Γ es una λ -coloración de D_3 . Aplicando la proposición 5 tenemos que

$$P(D_3 + \{v_4v_3\}; \lambda) = \lambda^{4-4}P(D_4; \lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2.$$

En la figura 4.10 calculamos el polinomio dicromático de D_3 .

$$\begin{aligned}
 P(D_1; \lambda) &= P(D_1 + \{v_2v_1\}; \lambda) + P(D_1/\{v_1, v_2\}; \lambda) \\
 &= \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda \\
 &= \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda.
 \end{aligned}$$

Figura 4.9: $P(\vec{C}_3 \uparrow \vec{C}_4 + \{v_0v_3, v_4v_0\}; \lambda)$.

$$\begin{aligned}
 P(D_3; \lambda) &= P(D_3 + \{v_4v_3\}; \lambda) + P(D_3/\{v_3, v_4\}; \lambda) \\
 &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \\
 &= \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda.
 \end{aligned}$$

Figura 4.10: $P(D_1/\{v_1, v_2\}; \lambda)$.

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009.
- [2] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic Graph Theory*. Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, FL (2009).
- [3] G. D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. of Math.* (2) 14(1912/13), no. 1-4, 42–46.
- [4] A. Harutyunyan, *Brooks-Type results for colorings of digraphs*. Thesis (Ph. D.)-Simon Fraser University (Canada), 2012. ProQuest LLC.
- [5] B. McKay, (May 30, 2019) Combinatorial data.
<https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/>
- [6] J. W. Moon, *Topics on Tournaments*. Holt, Rinehart and Winston, New York-Montreal, Que.-London, 1968.
- [7] V. Neumann-Lara, The dichromatic number of a digraph, *J. Combin. Theory Ser. B* 33 (1982), no. 3, 265–270.
- [8] V. Neumann-Lara, The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order, *Discrete Math.* 135 (1994), no. 1-3, 233–243.
- [9] R. Read, An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory* 4 (1968) 52–71.
- [10] R. Read, W. Tutte, Chromatic polynomials, in: L.W. Beineke, R.M. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, vol. 3, Academic Press, London, 1988, 15–42.
- [11] E. Sopena, *Computing chromatic polynomial of oriented graphs*. Université de Bordeaux 1/CNRS. Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique [LaBRI], 1994.
- [12] W. T. Tutte, On dichromatic polynomials, *J. Combin. Theory* 2 (1967) 301–320.

- [13] H. Whitney, The coloring of graphs, *Ann. of Math. (2)* 33 (1932), no. 4, 688–718.
- [14] H. Whitney, A logical expansion in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 38 (1932), no. 8, 572–580.
- [15] Chao, C. Y. and Whitehead, E. G. Jr. “On Chromatic Equivalence of Graphs.” In *Theory and Applications of Graphs (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)* (Ed. Y. Alavi and D. R. Lick). Berlin: Springer-Verlag, pp. 121-131, 1978.