Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 23 • núm. 3 • diciembre de 2011 • $100 m.n.

Comité editorial

Educación Matemática es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Educación Matemática aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (Mathematics Didactics Database), LATINDEX, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal) y el *Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica,* CONACYT. Las colaboraciones son recibidas en: **revedumat@yahoo.com.mx**

Contenido

DOCENCIA

Editora responsable: Patricia E. Balderas Cañas
Cuidado editorial: Patricia Balderas/Moisés Arroyo
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo:
04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499
Fecha de edición: diciembre de 2011

El tiro fue de 1 000 ejemplares.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Suscripción y ventas:

Informes:

Editorial

Por su trascendencia en varios temas, cada vez es de mayor importancia la visibilidad de las publicaciones académicas periódicas, tanto en la evaluación de la calidad de la labor académica para el ingreso y permanencia de los académicos en programas y proyectos financiados, como en la calificación de programas de posgrado con base en la calidad de las publicaciones de sus académicos, entre otros.

Desde su fundación y a través del tiempo, *Educación Matemática* ha procurado mantener la calidad de su contenido y, así, posicionarse en el área. En particular, la Revista obtuvo varios logros y su registro en los siguientes índices en sendas etapas. Primero, la obtención del ISNN 0187-82988 en el periodo de su fundación, 1990-1993. Más adelante, el cambio a ISNN 1665-5826 en el periodo de consolidación y cambio de editorial, 1994-2003. En tercer lugar, consiguió el ingreso al catálogo de revistas de CONACYT y el registro de la Revista en los índices ZDM, MathDi, Latindex, Redalyc, 2004-2007. Una cuarta etapa se define por la obtención del financiamiento de CONACYT y la renovación del registro en los índices Latindex y Redalyc, 2008-2009. Más recientemente, en el periodo de 2010 a la fecha, se logró la implementación de la plataforma *Santillana Digital OJS* (2011) para administrar el proceso de arbitraje a las contribuciones sometidas, con ello se ha logrado tener en proceso de revisión un mayor número de contribuciones, lo que indica también un aumento en la preferencia de los autores para publicar en *Educación Matemática*. En la actualidad, se ha renovado el registro en Redalyc y Latindex y se encuentra en proceso la incorporación de la Revista en los índices SciELO, Clase y Biblat.

Puesto que la incorporación de la Revista en los índices y el catálogo de CONACYT es un componente básico de su visibilidad en el medio, en 2011 se renovó la inclusión en Redalyc. De hecho, y con relación al editorial del número 3 del volumen 22, se informa ahora que el promedio mensual de consultas es mayor que 9 000 en cada uno de los años 2009, 2010 y lo que va de 2011; que el área de influencia en México se mide con el número de consultas (150 274). Por regiones, los datos son los siguientes: América Latina y el Caribe (120 608), Estados Unidos y Canadá (20 628), Europa (31 675), Asia (1 307), África (156) y Oceanía (17).

Otros indicadores de la visibilidad de la Revista los encontramos en los catálogos de las bibliotecas, en instituciones públicas como el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Pedagógica Nacional, entre otras. También son importantes las referencias a la Revista contenidas en artículos, un ejemplo puede consultarse en *Zentralblatt* (2011), así como las referencias a la Revista en tesis doctorales, programas de cursos, talleres, seminarios, diplomados, etcétera.

Además, la Revista se ha presentado en eventos académicos en educación matemática, actividades que también contribuyen a su visibilidad. Por ejemplo, ha estado presente en varios congresos del Consejo Mexicano de Investigación en Educación (COMIE), en algunos congresos del North American Chapter of the International Group of Psychology of Mathematics Education (PME-NA) y en otros eventos académicos nacionales como el Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas.

La labor de difusión y promoción de la Revista se ha realizado con el apoyo de Editorial Santillana, que la hace posible, y las instituciones a las que están afiliados los miembros del Comité Editorial, los autores, los árbitros, los colaboradores y los lectores. Esta red de instituciones es, en sí misma, otra muestra más de la presencia de la Revista.

La presión por aumentar la calidad de las publicaciones, que es cada vez más patente en todas las instituciones relacionadas con la educación, hace que hoy sea necesario buscar la inclusión de la Revista en aquellos índices que las instituciones encargadas de la evaluación en diferentes países consideran como indicadores de calidad y visibilidad. *Educación Matemática* tiene el compromiso con sus lectores y autores de lograr la incorporación de la revista en estos índices. Por ello, expresamos a nuestros lectores y autores el compromiso de impulsar la inclusión de la Revista en el mayor número posible de ellos.

El Comité Editorial

Referencias en línea

- *Santillana Digital OJS* (2011) http://www.santillanadigital.com.mx/ojs/index.php/em/indes.
- *Redalyc* (2011) http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/HomRevRed.jsp?iCveEntRev =405, 17 de junio.
- *Zentralblatt* (2011) http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/en/?q=an% 3A2000c.02225, 17 de junio.

Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales

Margherita Gonzato, Juan Díaz Godino y Teresa Neto

Resumen: En este trabajo se plantea el problema de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los profesores en formación sobre la visualización de objetos tridimensionales y se describe el proceso de construcción de un cuestionario para dicho propósito. A partir del análisis de las investigaciones sobre el tema, de los contenidos presentes en los libros de texto y de los objetivos descritos en los currículos, se motiva y describe la selección de cinco categorías de tareas sobre visualización de objetos tridimensionales. La estructura de cada ítem y los enunciados de las consignas reflejan algunos aspectos específicos de las diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático que se quieren evaluar. El análisis de un ítem del cuestionario y de las respuestas dadas por una alumna clarifica los tipos de conocimientos evaluados y la utilidad del cuestionario para orientar la formación de profesores en el tema de visualización espacial.

Palabras clave: conocimiento didáctico-matemático del profesor, geometría, visualización espacial, evaluación, profesores en formación.

Assessment of learning and mathematical knowledge on viewing three dimensional objects

Abstract: In this paper we consider the problem of assessing didactic and mathematic pre-service teachers' knowledge about visualization of three dimensional objects and we describe the development of a test for this purpose. From the analysis of researches on the subject, the contents found in textbooks and the objectives described in the curricular design, we describe the selection of five kinds of task. The structure of each item and the formulation of the instructions take into account some specific aspects of the different components of the didactics and mathematics teachers' knowledge that we want to measure. The analysis both of a test' item and a pre-service teacher's answers brings clarity to the different

Fecha de recepción: 17 de enero de 2011.

evaluated kinds of knowledge and show the usefulness of the test to guide the teachers' training in the field of spatial visualization.

Keywords: didactics and mathematics teachers' knowledge, geometry, spatial visualization, assessment, pre-service teachers.

INTRODUCCIÓN

La visualización espacial figura en las directrices curriculares como contenido por tratar en los distintos ciclos de educación primaria. Por ejemplo, en las orientaciones curriculares españolas (MEC, 2006), se señala que: "con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etcétera". En los "Principios y estándares" del *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM, 2000), entre los objetivos se indican el desarrollo del sentido espacial y el reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Esto justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Arrieta, 2003 y 2006; Battista, 2007; Bishop, 1983; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006) y, de manera particular, pone en evidencia la importancia del tema en la formación de profesores.

Entre las preguntas abiertas formuladas por Bishop (1980) se presentan las siguientes:

- ¿Los métodos de enseñanza experimental en esta área tienen en cuenta las capacidades espaciales del maestro?
- ¿Cuánta responsabilidad deben tener los profesores de matemáticas para el desarrollo y enseñanza de las habilidades espaciales?
- ¿Se trata, quizás, de un área como el lenguaje, que es responsabilidad de cada maestro?

Antes de intentar dar una respuesta a dichas preguntas, parece importante y necesario identificar y evaluar las "habilidades espaciales" de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza.

En el análisis de las investigaciones previas relacionadas con el tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evalúe adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. Los cuestionarios utilizados por la mayoría de los investigadores están elaborados con el propósito de analizar los procedimientos y las estrategias puestas en juego en la resolución de tareas por parte de niños y adolescentes. Las pocas investigaciones con profesores se centran en aspectos aislados del tema y en evaluar principalmente las capacidades de resolución de determinadas tareas (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Gaulin, 1985; Malara, 1998).

El principal objetivo de este trabajo es describir el proceso de construcción de un instrumento para evaluar algunos aspectos clave del conocimiento didáctico-matemático sobre un área de contenido específico, como es la visualización de objetos tridimensionales. Se inscribe, por tanto, en el paradigma de investigación educativa que se describe como *investigación de diseño* (Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2010). "Nuestra visión del diseño en la investigación educativa se basa, en parte, en las semejanzas y paralelismos entre la educación y la ingeniería como campos que simultáneamente buscan avanzar el conocimiento, resolver problemas humanos y desarrollar productos para su uso en la práctica" (Hjalmarson y Lesh, 2008, p. 526).

Sin embargo, como paso previo, es necesario clarificar y hacer operativa la noción de conocimiento didáctico-matemático, resultando de este modo una aportación teórica para el campo de investigación sobre formación de profesores (Wood, 2008).

Organizamos el artículo en cuatro secciones. En la primera sección describimos los contenidos principales seleccionados y su relevancia para evaluar aspectos de visualización de objetos tridimensionales. En la segunda sección señalamos los aspectos específicos de las componentes de los conocimientos didácticos que se quieren medir, relativos al modelo descrito por Godino (2009) y presentamos las preguntas que pretenden evaluarlos. A título de ejemplo, en la sección 3 vamos a presentar el análisis de un ítem del cuestionario. En la sección 4, describimos los resultados obtenidos al aplicar dicho ítem a una alumna de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, lo que nos permite identificar las dificultades y capacidades de la alumna en relación con los diferentes aspectos de los conocimientos didáctico-matemáticos descritos.

VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

Selección de tareas de visualización. Contenidos principales

Diferentes investigadores (Freudenthal, 1973; Guillén, 2010) subrayan la importancia de empezar la enseñanza de la geometría por el espacio, al considerar que es más intuitivo y concreto que el plano, siendo, además, la realidad en la cual los niños viven e interactúan.

En el campo de la geometría espacial, la habilidad de visualizar objetos tridimensionales desempeña un papel fundamental. Consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de "ver" los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (rotación, sección, desarrollos, ...).

Observamos que la interpretación y la comunicación de la información espacial *(descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales, términos verbales, vocabulario específico utilizado en geometría) de manera figural, verbal o mixta, son* habilidades importantes relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

A fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, hemos analizado las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. Los contenidos principales que surgen de dicho análisis se compararon con los contenidos presentes en las tareas presentadas en los libros de textos de educación primaria y en el currículo español.

Nos centramos en el análisis de las tareas incluidas en aquellas investigaciones relacionadas con este tema que incluyen una parte experimental o evaluativa, en la que se describen los cuestionarios o las tareas empleadas.

Destacamos cuatro grandes categorías principales de tareas (nombradas según la acción principal requerida para resolverlas) presentes en las investigaciones:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos (Battista y Clements, 1996; Gutiérrez, 1996a; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Malara, 1998; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

2. Rotar un objeto en el espacio (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Gorgorió, 1996 y 1998).
3. Plegar y desplegar desarrollos (Mesquita, 1992; Potari y Spiliotopoulou, 2001).
4. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (Battista y Clements, 1996; Lappan, Phillips y Winter, 1984).

En el análisis de tres colecciones de libros de texto,[1] destacamos que algunos aspectos evidenciados en las investigaciones están poco tratados y algunos únicamente presentados en actividades recreativas al final de la lección. De manera particular, observamos que la rotación de objetos tridimensionales está presente en una sola tarea. Por otra parte surge un nuevo tema relacionado que se incluye en cada colección de libros: la generación de cuerpos de revolución. Decidimos entonces incluir también este tema como contenido relacionado con la visualización de objetos tridimensionales.

Observamos que en el currículo español de matemáticas (MEC, 2006), el trabajo con objetos tridimensionales está presente en todos los ciclos de educación primaria. Relacionamos a continuación las tareas principales destacadas en las investigaciones con algunos de los objetivos descritos en el currículo español:

- coordinar e integrar vistas de objetos: "descripción de posiciones en relación con diferentes puntos de referencia", "describir y representar construcciones geométricas y relaciones espaciales";
- plegar y desplegar desarrollos: "construir cuerpos geométricos a partir de desarrollos";
- componer y descomponer en partes un objeto tridimensional: "formar cuerpos geométricos a partir de otros por composición y descomposición".

Observamos que no se mencionan explícitamente entre los objetivos la rotación de objetos en el espacio ni la generación de cuerpos de revolución. Por otra parte, en el apartado relativo a la "contribución del área al desarrollo de las competencias básicas", se afirma que "con el desarrollo de la visualización, los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y *manipular mentalmente figuras* en el plano y *en el espacio*", lo que incluye la capacidad de rotar figuras planas y tridimensionales en el espacio.

[1] Hemos revisado las colecciones de textos de primaria (de 1° a 6° curso) de las editoriales Santillana, SM y Anaya (ediciones de años entre 1999 y 2009).

En el cuestionario hemos elegido presentar únicamente tareas de papel y lápiz por dos motivos. Uno de carácter práctico, facilitar la aplicación del cuestionario a muestras relativamente grandes de estudiantes, y el otro de carácter didáctico, pues se considera que la capacidad de lectura y de elaboración de diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales representados en el plano es un aspecto importante de la visualización espacial, sobre todo en el contexto de la enseñanza.

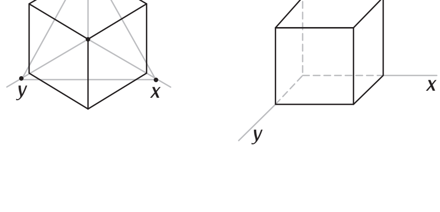
El cuestionario que hemos elaborado consta de 14 ítems de respuesta abierta; en los siguientes apartados describimos los contenidos seleccionados y algunos tipos de tareas incluidas. En el anexo se presenta un ejemplar de ítem para cada contenido descrito (excepto para el primer contenido que ya tiene un ejemplo en el apartado 3).

Coordinar e integrar vistas ortogonales de objetos

Para visualizar un objeto tridimensional a partir de una determinada representación y para elaborar diferentes representaciones planas de un objeto, con frecuencia se requiere que el sujeto coordine e integre las vistas del objeto.

Entre las representaciones planas, distinguimos dos grupos de proyecciones de objetos tridimensionales: las perspectivas axonométricas (por ejemplo, la perspectiva isométrica y caballera)[2] y con puntos de fuga, por una parte, y las vistas y el sistema diédrico por otra parte. Si las primeras nos dan una percepción global del objeto (aun deformando algunas de sus características físicas), las segundas necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su totalidad. Esta reorganización de la información depende de la representación del objeto que tenemos. En el caso de la representación de un objeto en el

[2] En la perspectiva isométrica, los rayos proyectantes son perpendiculares al plano de proyección y los ejes del plano proyectante guardan entre sí 120º; en la perspectiva caballera, los rayos proyectantes son oblicuos con respecto al plano de proyección y el objeto por representar se sitúa con una de sus caras paralelas al plano del cuadro (en la siguiente figura presentamos un cubo dibujado respectivamente en perspectiva isométrica y caballera):



sistema diédrico (y las vistas correspondientes), para reconstruir el objeto global, además de conocer el lenguaje gráfico y las propiedades del sistema de representación, se necesita coordinar e integrar las vistas.

Battista y Clements (1996, pp. 284-286) definen estos dos procedimientos (coordinación e integración de las vistas ortogonales) en la resolución de diferentes tipos de tareas. La coordinación de las vistas ortogonales requiere que dos o más vistas se consideren conjuntamente de modo que se observen las interrelaciones entre ellas y que se especifique exactamente cómo encajan entre sí. La integración de las vistas de un objeto tridimensional es la construcción de un modelo coherente del objeto que posee estas vistas. Se observa que la integración de las vistas requiere que las vistas sean coordinadas anteriormente.

Gutiérrez (1996a, p. 36), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades que, adaptadas al caso de objetos representados en el plano (sin el uso de material manipulativo), se pueden describir como sigue:

- Dibujar algunas vistas o proyecciones ortogonales en el sistema diédrico de un objeto (o de una composición de objetos) a partir del dibujo del objeto en perspectiva (caballera, isométrica o con puntos de fuga); o inversamente:
- Dibujar el objeto en perspectiva a partir de la representación del objeto en el sistema diédrico.
- Poner en relación (sin dibujar) una representación de un objeto en perspectiva con su representación mediante vistas o en el sistema diédrico.

Observamos que en estas actividades se elaboran técnicas para representar un objeto o un espacio y, al mismo tiempo, se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

Rotar un objeto tridimensional en el espacio

Este contenido se relaciona con la habilidad de rotar un objeto dado, en un plano o alrededor de un eje imaginario, para determinar si corresponde a un mismo objeto representado en el plano.

Observamos que rotar un objeto es equivalente a cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). Para evaluar este contenido y diferenciarlo del primero, decidimos trabajar únicamente con tareas donde el tipo de representación plana del objeto no cambia.

Gorgorió (1996), *estudiando las estrategias puestas en juego al resolver tareas de rotación de cuerpos tridimensionales por alumnos de escuela secundaria,* clasifica las tareas en dos categorías: tareas de "construcción", si la respuesta requiere la construcción del objeto o su dibujo, y tareas "de interpretación", que requieren que el estudiante reaccione ante una acción geométrica ya realizada. Con respecto a esta clasificación, decidimos trabajar la rotación del objeto únicamente con tareas "de interpretación", ya que el aspecto de "construcción" (en nuestro caso de dibujo) ya está incluido en otros contenidos.

Plegar y desplegar desarrollos

Con este contenido queremos evaluar la habilidad de plegar (mentalmente) un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado) o, viceversa, desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.

Para representar el desarrollo de un sólido, es necesario ejecutar (física o mentalmente) los siguientes procedimientos: representar o imaginar el sólido en tres dimensiones, cortar el sólido a lo largo de determinadas aristas y desplegar la superficie sobre un plano. Por otra parte, para componer un sólido a partir de su desarrollo plano, es necesario plegar el desarrollo y unir (pegar) los segmentos que corresponden a la misma arista del sólido.

Las acciones de plegar (y desplegar) un desarrollo se pueden definir como rotaciones de un número determinado de grados de parte del desarrollo alrededor de los segmentos (Mesquita, 1992).

Hay diferentes maneras para definir de modo operativo cómo plegar el desarrollo para formar el sólido, por ejemplo, identificando los segmentos del desarrollo que se unen para formar las aristas del sólido o identificando únicamente los vértices que se unen.

Otro procedimiento que se puede requerir al trabajar con desarrollos de un sólido es el reconocimiento de las relaciones entre los elementos del desarrollo plano y del poliedro. Por ejemplo, en el caso del cubo, se pueden reconocer los cuadrados del desarrollo que corresponden a caras paralelas en el cubo.

En los comentarios a su trabajo, Fischbein (1993) analiza el caso del desarrollo de un cubo como ejemplo de una práctica con estudiantes y distingue tres tareas principales:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico.
- Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano.
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

Observamos que, en el caso de desarrollos complicados, para reconstruir el sólido no se requiere únicamente ver las figuras, sino también modificar su posición, imaginar la transformación de las posiciones, imaginar el efecto de determinadas transformaciones sobre las figuras adyacentes.

Componer y descomponer en partes

El contenido "Componer y descomponer en partes" incluye los siguientes procedimientos principales:

- Dadas dos o más piezas, componerlas para formar un sólido o viceversa.
- Dado el sólido (o una de sus representaciones), descomponerlo en dos o más partes (Lappan, Phillips y Winter, 1984).
- Identificar las secciones de un sólido relacionadas con determinados cortes (Veloso, 1993).
- Dado un sólido, contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices,...) (en Battista y Clements, 1996, y Bishop, 1983, se encuentran tareas relativas al conteo de unidades de volumen).

Para limitar el contenido, hemos decidido eliminar las tareas relativas a las secciones de un sólido en relación con determinados cortes, aunque en algunas tareas de descomposición de cuerpos en más piezas este conocimiento está presente de manera implícita.

Generar sólidos de revolución

Además de las diferentes proyecciones y los desarrollos, otro modo para representar determinados cuerpos tridimensionales es dar una superficie plana y un eje situado en el mismo plano, alrededor del cual la superficie, girando por lo menos 360°, engendra el cuerpo. Los sólidos que se pueden generar (y representar) de esta manera se llaman cuerpos de revolución.

En relación con este contenido, queremos evaluar los siguientes aspectos:

- Poner en relación una determinada figura plana y un eje de rotación con el cuerpo de revolución que la figura engendra al girar 360° (o más) alrededor del eje de rotación.
- Engendrar diferentes cuerpos rotando una misma figura sobre ejes diferentes.

Hemos decidido no proponer sólo tareas donde el eje sea tangente a la figura, sino también incluir situaciones con cuerpos de revolución que se engendran haciendo girar una figura plana alrededor de un eje externo a ésta (por ejemplo un toro).

En la siguiente sección, describimos con más detalle los aspectos del conocimiento que queremos evaluar en cada subítem, teniendo en cuenta que se desea usarlo para evaluar algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009) de profesores en formación de educación primaria.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Diferentes investigadores en el campo de la formación y el pensamiento del profesor (Ball, 2000; Ball, Lubenski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Shilling, 2008; Shulman 1986, 1987) describen modelos sobre el conocimiento didáctico del profesor, en los cuales se articulan diferentes categorías del conocimiento. En Godino (2009) se presenta un análisis de dichas propuestas y se describe un modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), que tiene en cuenta diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Este modelo incluye una "guía" para la elaboración de enunciados de consignas sobre el conocimiento didáctico-matemático. Basándonos en dicho modelo, decidimos evaluar aspectos específicos del *conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)* y del *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza*.

El *conocimiento del contenido* se refiere a la faceta epistémica del conocimiento del profesor, el cual incluye los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio. Siguiendo a Hill, Ball y Shilling (2008), se diferencian tres componentes: el *conocimiento común del contenido,* que se refiere al conocimiento puesto en juego al resolver problemas matemáticos; el *conocimiento especializado del contenido,* que incluye la capacidad para representar con exactitud ideas matemáticas y proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes, y el *conocimiento ampliado del contenido,* que requiere poner en relación aspectos elementales del tema con ideas matemáticas más avanzadas.

El *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza* se refiere a la faceta interaccional-mediacional del conocimiento del profesor, el cual incluye los conocimientos relativos a la interacción entre el profesor y los estudiantes, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados y el conocimiento de los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Estos tipos de conocimientos se tienen en cuenta en la construcción de nuestro cuestionario de la manera que explicamos a continuación.

Cada ítem del cuestionario se divide en cuatros partes (subítems), según el aspecto del conocimiento que se quiere evaluar:

- el subítem *a)* pretende evaluar aspectos del *conocimiento común del contenido*;
- los subítems *b* y *b′* ponen en juego aspectos del *conocimiento especializado del contenido*;
- los subítems *c* y *c′* involucran un conocimiento más avanzado del contenido específico (*conocimiento ampliado del contenido)*;
- el subítem *d* pretende evaluar aspectos del *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.*

Describimos con más detalle cada uno de los subítems en relación con el conocimiento que se pretende evaluar.

Evaluación del conocimiento común del contenido

Para evaluar el conocimiento común del contenido, hemos elegido poner en cada ítem del cuestionario, en la parte *a,* una tarea seleccionada de libros de texto de primaria.

Se supone que un maestro de primaria debe poder resolver de manera óptima dichas tareas para tener una posible solución de referencia en el momento de corregir y discutir las tareas resueltas por los alumnos.

Además, la resolución de una tarea de nivel elemental es el punto de partida para analizar los conocimientos puestos en juego, las posibles dificultades que puede implicar, los diferentes procedimientos que se pueden utilizar en la resolución, etcétera.

Los libros de textos utilizados fueron las últimas ediciones disponibles de las colecciones Anaya, SM y Santillana, que están a disposición de los profesores en formación.

Evaluación del conocimiento especializado del contenido

Después de cada tarea de libros de texto, se pide una justificación de la resolución de la tarea (subítem *b*). Con dicha pregunta se quiere que el sujeto explique y argumente el proceso que lo ha llevado a la solución propuesta. Este conocimiento es importante en el momento de la corrección de la tarea de un alumno. Imaginamos que, en el contexto de clase, un alumno pregunte el porqué de una solución de una tarea propuesta por el profesor: el profesor tiene que saber explicar por qué su solución es correcta y motivar su respuesta indicando el proceso que lo ha llevado a la solución. Por otra parte, se supone también que los alumnos aprendan a argumentar sus respuestas, a explicar "cómo hicieron y por qué".

Observamos que, en las tareas de visualización espacial, a menudo este conocimiento no es fácil de expresar. La respuesta "es así, porque lo veo" puede a veces parecer la única justificación posible. Esta respuesta no es adecuada en el contexto de la enseñanza, por ejemplo, cuando un niño no "ve" lo que el profesor dice que "se ve". Entonces, es importante que un profesor pueda explicar con palabras, dibujos o gestos, una solución que "se ve" (y que pueda pretender lo mismo por parte de sus alumnos).

Para evaluar el "conocimiento especializado del contenido" se ha elaborado otra pregunta relacionada con la tarea *a* y su resolución: "¿Qué conocimientos se ponen en juego en la resolución de la tarea?" (pregunta b'). Con esta pregunta se quiere que el sujeto identifique los conocimientos matemáticos principales que ha utilizado en la resolución. Estos conocimientos pueden ser procedimentales, conceptuales, lingüísticos y argumentativos. Una respuesta exhaustiva comprendería también la descripción o la definición de dichos conocimientos. Esta identificación de conocimientos es importante a la hora de reconocer el origen de los posibles errores de los alumnos. ¿Por qué este alumno no supo resolver la tarea? ¿Cuál es el conocimiento que no supo utilizar? Son preguntas que un profesor puede contestar si conoce los elementos principales puestos en juego en la resolución y si conoce sus definiciones y sus reglas.

Otro aspecto de enseñanza que hace operativa dicha identificación de los conocimientos es la planificación de variaciones de las tareas, por ejemplo la simplificación o la generalización. Si se sabe cuáles son los conocimientos principales puestos en juego en la resolución, se pueden variar fácilmente uno a más aspectos de ellos para generar una nueva tarea relacionada de manera constructiva con la primera (el aspecto de la variación de la tarea está contemplado en la pregunta *d)*.

Conocimiento ampliado del contenido

El conocimiento ampliado del contenido incluye la identificación de posibles conexiones con otros temas más avanzados del currículo correspondiente. Es el conocimiento que permite poner en relación el conocimiento común del contenido con los conocimientos matemáticos más avanzados que el alumno encontrará en los años siguientes de su escolarización.

Esta definición se basa en la asunción de que hay una continuidad entre lo que el niño hace al acercarse a la matemática y lo que un matemático hace en su disciplina.

En los subítems c y c' se propone resolver una tarea relacionada con la tarea *a,* pero de un nivel más alto que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico. Estas tareas provienen de investigaciones y fueron en su mayoría propuestas a alumnos de escuela secundaria.

La evaluación del conocimiento que los futuros profesores manifiestan en la resolución de dichas tareas nos informa sobre aspectos operativos del conocimiento ampliado del contenido y sobre su capacidad de utilizar conocimientos más avanzados para resolver tareas relacionadas con el contenido específico.

Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Entre las consignas sugeridas en la "guía" para evaluar aspectos del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (Godino, 2009), se presenta, entre otras, la siguiente: "Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente".

Siguiendo estas sugerencias, en la pregunta *d* se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea descrita en el subítem *a* para que resulte más fácil o más difícil (dependiendo del ítem) de resolver por un niño de primaria. Se espera que el sujeto identifique diferentes tipos de cambios: en el lenguaje verbal, en las propiedades de los objetos representados, en el tipo de representación, en el procedimiento sugerido, en el material y en el entorno, etcétera.

Observamos que, aunque hemos propuesto este subítem para evaluar aspectos del contenido en relación con la enseñanza, en esta pregunta están también involucrados algunos conocimientos relacionados con el aprendizaje y el currículo: para describir una buena variación, el sujeto tiene que conocer las posibles dificultades y conflictos relacionados con la tarea, así como los contenidos tratados en el currículo en determinados niveles educativos.

ANÁLISIS DE UN ÍTEM

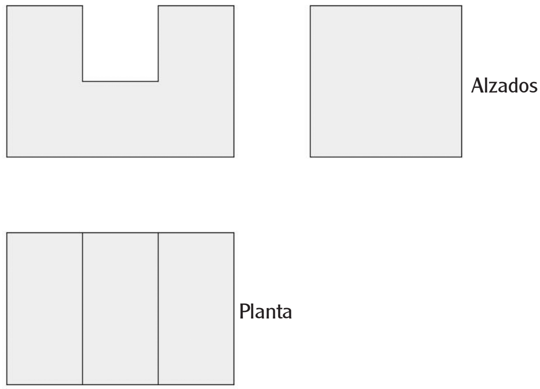
A título de ejemplo, vamos a presentar la solución de un ítem del cuestionario (ítem 3) que pretende evaluar aspectos del contenido 1, "Coordinar e integrar vistas de objetos", que involucra la acción de dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales. El subítem *a* de dicha tarea proviene de un libro de texto de 6° curso de primaria (Ferrero y cols., 1999, p. 173), aunque se tuvo que modificar una de las vistas para que existiera una solución posible. Los subítems *c* y *c'* proceden de una tarea presentada en Pittalis, Mousoulides y Christou (2009, p. 387).

Subítem a (conocimiento común del contenido)

Dibuja el objeto que tiene estas vistas (figura 1).

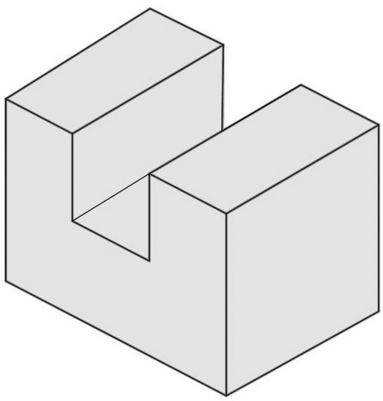
El alumno puede representar el objeto con diferentes sistemas de proyección, siempre que en la representación del objeto puedan ser visibles las diferentes caras

Figura 1 Alzados y planta del objeto



Solución ***a:***

Figura 2 Dibujo del objeto en perspectiva isométrica



y se pueda justificar la respuesta. Para resolver esta tarea, el alumno tiene que conocer un determinado lenguaje gráfico para interpretar las representaciones planas del objeto, que en este caso son proyecciones ortogonales llamadas vistas. El conocimiento de las propiedades de dichas representaciones y la coordinación e integración de las vistas permite construir el objeto tridimensional.

Subítems b y b′ (conocimiento especializado del contenido)

b) Justifica la respuesta (del subítem *a*).

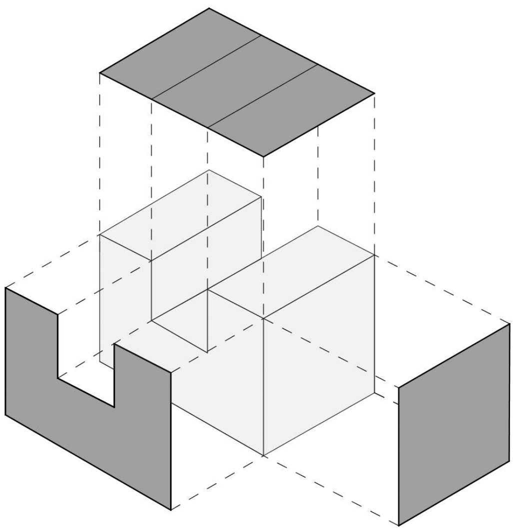
b′) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea *a*.

Solución ***b:***

En este caso, para justificar la respuesta, es necesario argumentar que el dibujo presentado como solución corresponde al objeto que tiene las vistas dibujadas.

Por ejemplo, se puede afirmar que el objeto dibujado en la respuesta tiene las vistas requeridas, tal como se muestra en la figura 3:

Figura 3 Proyecciones ortogonales del objeto



En una justificación más detallada, se puede describir el procedimiento que ha permitido llegar a la solución, por ejemplo, afirmando que el cuerpo correspondiente a las tres vistas representadas se construye (y dibuja) colocando las vistas en tres planos ortogonales de manera contigua (juntando las aristas correspondientes), o sea, coordinando e integrando las tres vistas en determinadas posiciones, según los nombres que indican las vistas.

Observamos que, para simplificar el procedimiento, se puede empezar por coordinar sólo dos de las tres vistas (por ejemplo los alzados) y a continuación ir modificando el objeto según la tercera vista.

Solución ***b′***

Los conocimientos que se ponen en juego en esta tarea son los conceptos de alzado, perfil y planta de un objeto tridimensional, el sistema diédrico, la proyección ortogonal, los planos ortogonales, el dibujo en perspectiva y sus propiedades, el procedimiento de coordinar las vistas de un objeto e integrarla para construir el objeto tridimensional y representarlo en el plano.

Observamos que, en esta tarea, las representaciones materiales de las vistas se presentan con proyecciones ortogonales. Tales representaciones funcionan como iconos de las vistas reales del objeto por parte de un hipotético observador, cuya dirección de mirada es perpendicular al plano visual de la observación.

En el enunciado de la tarea, se presenta una figura que ilustra las tres vistas (dos arriba y una abajo) de un objeto en el sistema diédrico. El lector tiene que interpretar que las vistas denominadas "ALZADOS" se refieren a dos proyecciones ortogonales laterales (alzado y perfil) y la vista de abajo, denominada "PLANTA", se refiere a la planta del objeto. El concepto de "vistas" refiere a las proyecciones ortogonales de un objeto sobre tres planos de proyección perpendiculares entre sí: el plano horizontal, el plano vertical y el plano de perfil. La proyección de un objeto en el espacio sobre el plano horizontal se denomina planta, la proyección sobre el plano vertical es el alzado y la proyección sobre el plano de perfil es el perfil. El término "ALZADOS", presente en la figura, refiere al alzado y al perfil del objeto (en el orden que se quiera).

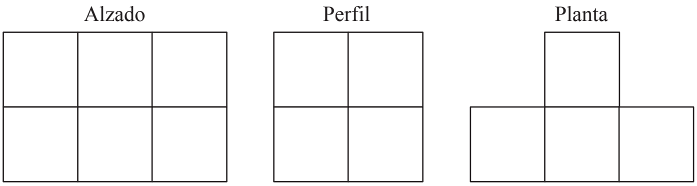
El reconocimiento de dichos objetos y procesos supone un conocimiento especializado del contenido que incluye nociones de dibujo técnico y de geometría descriptiva.

Subítems c y c′ (conocimiento ampliado del contenido)

Dibuja en perspectiva una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la siguiente figura (figura 4).

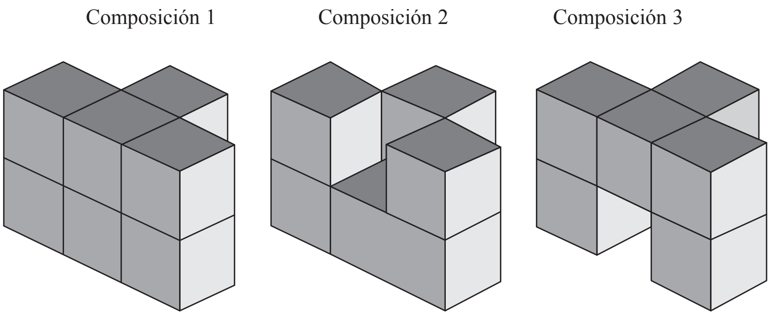
¿Puedes quitar o añadir un cubo a la composición sin cambiar las vistas? Justifica tu respuesta.

Figura 4 Proyecciones ortogonales del objeto



Solución ***c*** y ***c'*** (figura 5):

Figura 5 Posibles soluciones de composiciones de cubos



A la composición 1 le puedo quitar el cubo que está en la cara de frente, al centro, arriba, y las vistas serían las mismas. Obtendría la composición 2, ya que el espacio vacío dejado por el cubo suprimido no genera ninguna nueva línea en las vistas de frente, perfil y planta. Por la misma razón, podría quitar el cubo que está en la cara de frente, al centro, abajo, obteniendo la composición 3.

Observamos que no podría quitar ambos cubos al mismo tiempo, pues se producirían cambios en la planta. Ninguno de los otros cubos podría ser quitado sin alterar las vistas de la composición 1.

Por la misma razón, a las composiciones 2 y 3 les puedo añadir un cubo sobre o abajo, respectivamente, del cubo presentado en la cara de frente al centro y las vistas serían las mismas. Obtendría la composición 1.

La correcta resolución de la segunda parte de esta tarea supone un conocimiento ampliado del contenido específico que incluye la habilidad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto.

Una propiedad interesante que surge de la solución *c* es la no unicidad del objeto representado por las tres vistas, es decir, las tres vistas no definen de manera univoca el objeto. Observamos que si nos restringimos al caso de una construcción de exactamente 8 cubos, el objeto representado en el enunciado seria único.

Subítem d (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza)

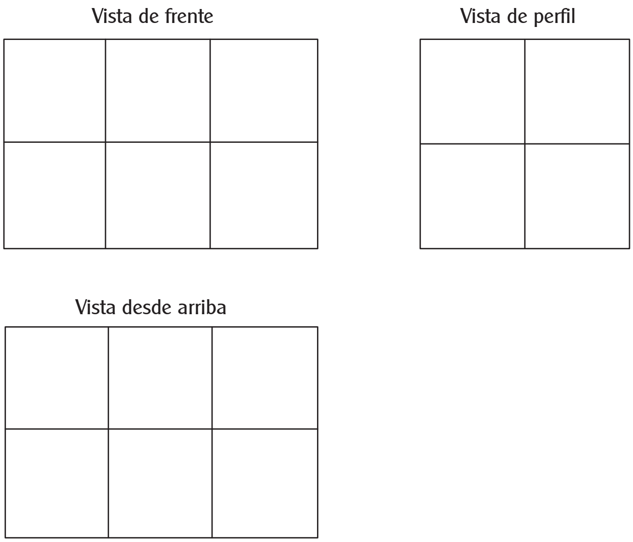
Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea *a* para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.

Solución ***d:***

Describimos un ejemplo de variación de la tarea y justificamos los cambios sugeridos por el enunciado.

"Ayudándote con los bloques multicubos, construye un objeto que tenga las siguientes vistas" (figura 6):

Figura 6 Vistas del objeto



Una variación, sugerida en el enunciado es la utilización de material manipulativo, lo que puede facilitar la resolución de la tarea, pues el procedimiento de coordinar e integrar las vistas es apoyado por la utilización de los bloques multicubos.

Otra variación que se propone es en el tipo de objeto representado por las vistas, un paralelepípedo rectangular construido con cubos apilados, que es un objeto sin huecos o entradas y conocido por los alumnos. (Observamos que el paralelepípedo rectangular no es la única solución posible a la tarea, pero es la más evidente).

Una última variación propuesta es en el lenguaje utilizado para definir las vistas: se utiliza un lenguaje común que se refiere directamente a las posiciones desde donde se observa el objeto, en lugar de la nomenclatura estándar del sistema diédrico (alzados y perfiles).

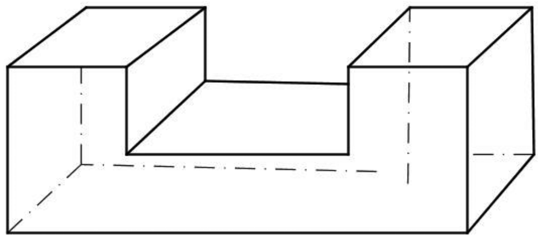
Un futuro profesor que propone una variación de dicha tarea a sus alumnos tiene que reflexionar sobre las posibles dificultades y conflictos relacionados con la tarea, por ejemplo, las dificultades relacionadas con el procedimiento de coordinar las vistas sin el empleo de material manipulativo (Battista y Clements, 1996; Gutiérrez, 1996a), y las dificultades relacionadas con la interpretación de una representación plana de un objeto tridimensional (Parzysz, 1988). Se supone que el sujeto tiene que argumentar de qué manera los cambios sugeridos disminuyen el grado de dificultad de la tarea.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A UN ÍTEM DE UN FUTURO PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El cuestionario piloto fue experimentado con seis estudiantes de primer curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. Los alumnos fueron seleccionados entre los mejores del curso, según sus puntuaciones en los exámenes precedentes.

A título de ejemplo, presentamos el análisis de las repuestas dadas por uno de esos estudiantes a las preguntas del ítem 3 (presentado en la sección anterior). El interés de este análisis es, por una parte, poner de relieve cómo las preguntas descritas acerca de los aspectos seleccionados del conocimiento didáctico-matemático pueden ayudar a los alumnos a explicitar determinados conocimientos; por otra parte, ayuda a los evaluadores a centrar la atención en el análisis de los aspectos específicos de cada conocimiento, identificando las dificultades y las capacidades que manifiestan los estudiantes en cada distinto subítem.

Figura 7 Respuesta de la alumna al subítem *a*)



Análisis de la respuesta al subítem a (conocimiento común del contenido)

La alumna seleccionada responde correctamente a la pregunta *a*, dibujando el objeto con las vistas presentadas en el enunciado en perspectiva caballera (figura 7).

Sólo se puede observar una imprecisión en lo que se refiere a las proporciones de las partes que componen el objeto, aunque la forma del objeto es aproximadamente correcta.

De manera global, consideramos que dicha alumna tiene un buen conocimiento común relativo a dicha tarea de coordinación e integración de las vistas.

Análisis de las respuestas a los subítems b y b′ (conocimiento especializado del contenido)

En lo que se refiere a la justificación, observamos que la alumna intentó explicar, aunque muy aproximadamente, el proceso de coordinación e integración de las vistas.

Indica:

> *Como sabemos la forma que tienen las diferentes vistas desde los laterales, arriba y frente, podemos construir el objeto tridimensional desde el ángulo que queramos. Las formas las he dibujado a partir de la perspectiva que obtengo de imaginarme dos ejes que me dan el ángulo para que el resto de las formas se adapten.* (Alumna)

Aunque en la justificación se nombran los diferentes puntos de vista, la alumna no los describe ni los relaciona con las vistas ortogonales representadas en el enunciado.

La expresión "para que el resto de las formas se adapten" parece involucrar el procedimiento de integración de las vistas en un único objeto, aunque el lenguaje utilizado y la formulación de las frases no son claros ni precisos.

En lo que refiere a los conocimientos puestos en juego en la resolución de la tarea *a* identificados por la alumna, observamos que son muy pobres. Aunque en la justificación presentada (ítem *b*) aparecen conocimientos interesantes, en la respuesta al ítem *b'* la alumna sólo menciona explícitamente los siguientes: *las vistas, perspectivas del objeto que ha sido representado*. Observamos que no identifica las tres diferentes vistas ortogonales ni las describe de manera precisa; tampoco describe el procedimiento de coordinación e integración de las vistas ni el uso de una determinada técnica para representar en el plano el objeto tridimensional.

El conocimiento especializado del contenido manifestado por la alumna en relación con dicha pregunta se considera pobre: le falta un conocimiento más específico para argumentar su respuesta, para describir con mejor detalle el procedimiento utilizado y los conocimientos involucrados en la resolución de la tarea.

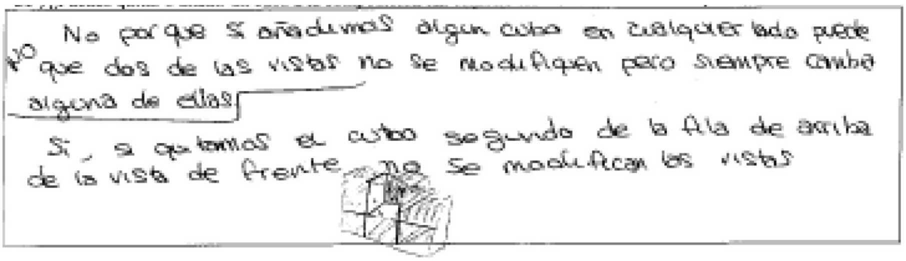
Análisis de la respuesta a los subítems c y c′ (conocimiento ampliado del contenido)

En lo que se refiere al subítem *c*, observamos que la alumna consiguió dibujar de manera bastante clara el objeto representado por las vistas, representándolo dos veces, una en perspectiva isométrica y, la otra, en caballera. También señaló con las palabras frente y perfil los dos lados correspondientes.

En lo que se refiere al ítem *c'*, considerado de mayor importancia por la evaluación del conocimiento ampliado, observamos que la alumna contestó de manera parcialmente correcta a la pregunta (indicando únicamente uno de los dos cubos que se pueden quitar):

"No, porque si añadimos algún cubo en cualquier lado puede que dos de las vistas no se modifiquen, pero siempre cambia una de ellas. Sí, si quitamos el cubo segundo de la fila de arriba de la vista de frente no se modifican las vistas". La alumna justificó con un dibujo su respuesta (figura 8).

Figura 8 Respuesta de la alumna al subítem *c′*



De modo general, podemos observar que la alumna tiene una buena capacidad para coordinar e integrar las vistas ortogonales de un objeto tridimensional, y consigue modificar el objeto manteniendo las mismas vistas. Este conocimiento más avanzado del contenido específico le será útil a la hora de planear tareas más difíciles o aceptar la existencia de diferentes soluciones correctas relativas a la construcción de un objeto a partir de sus tres vistas.

Análisis de la respuesta al subítem d (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza)

En lo que se refiere al ítem *d*, observamos que la variación de la tarea propuesta (para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria) fue adecuada, sugiriendo el uso de material manipulativo, aunque no está claro si la alumna sugiere que el procedimiento de construcción del objeto sea por parte del profesor o del alumno.

"Se puede intentar construir el objeto con bloques para que el niño visualice la figura o construirlo con papel (recortando y pegando las caras)".

En la segunda parte de la respuesta se menciona el uso de papel, pero sin explicar cómo dicho material puede facilitar la ejecución de la tarea.

De modo general, destacamos que la alumna tiene un discreto conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de dicho tópico, sugiere un recurso material adecuado, pero no justifica su relevancia, no describe con detalle su uso ni menciona otros cambios (por ejemplo en la forma del objeto, en el vocabulario utilizado en la consigna, etcétera).

Conclusiones del análisis

El análisis de las respuestas a un ítem del cuestionario por parte de una alumna muestra que los enunciados descritos han permitido a la alumna explicitar determinados aspectos de sus diferentes conocimientos. De manera general, podemos observar que, aunque la alumna consigue resolver correctamente las tareas *a* y *c* relacionadas con los conocimientos común y ampliado del contenido, tiene dificultades a la hora de justificar las respuestas e identificar los objetos y procesos puestos en juego en la resolución. Dichos aspectos se consideran importantes para un profesor, ya que permiten profundizar en el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza. Por otra parte, la alumna sugiere una adecuada variación de la tarea (aunque sin justificar su propuesta), lo que permite atribuirle un discreto conocimiento de este contenido en relación con la enseñanza.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo, hemos presentado el proceso de elaboración de un cuestionario para la evaluación de algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático que tienen los profesores en formación sobre visualización de objetos tridimensionales. A partir de la revisión bibliográfica y curricular sobre el tema, se han seleccionado cinco tipos de tareas relacionadas con diferentes aspectos de la visualización de objetos tridimensionales: la coordinación e integración de las vistas de objetos, la rotación de un objeto en el espacio, plegar y desplegar desarrollos, la composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional y la generación de sólidos de revolución.

La estructura de cada ítem y los enunciados de las consignas hacen operativo parte del modelo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009) y permiten a los futuros profesores explicitar algunos aspectos de los diferentes tipos de sus conocimientos: el conocimiento común, especializado y ampliado del contenido y el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Dichas consignas, aplicadas a temas diferentes, pueden generar otros cuestionarios para la evaluación de contenidos específicos. La construcción de instrumentos de evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza es un campo de creciente interés, como se pone de manifiesto en los trabajos de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008).

El análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos del grupo piloto nos ha permitido hacer una selección y cambios de las tareas y elaborar un segundo cuestionario que fue evaluado por un grupo de expertos. Las observaciones y sugerencias de los expertos nos han llevado a la versión final del cuestionario. Observamos que los cambios hechos a partir de los resultados obtenidos por el grupo piloto, así como los cambios sugeridos por los expertos consultados, no incluyen modificaciones a la estructura ni a los enunciados de las consignas descritas en este trabajo.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), España, y de la Beca FPU, AP2008-04560.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, M. (2003), "Capacidad espacial y educación matemática", *Educación Matemática*, vol. 3, núm. 15, pp. 57-76.

——— (2006), "La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida", *Educación Matemática*, vol. 1, núm. 18, pp. 99-132.

Ball, D. L. (2000), "Bridging practices: intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach", *Journal of Teacher Education*, núm. 51, pp. 241-247.

Ball, D. L., S. T. Lubienski y D. S. Mewborn (2001), "Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge", en V. Richardson (ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 4a. ed., Washington, American Educational Research Association, pp. 433-456.

Battista, M. T. (2007), "The Development of Geometric and Spatial Thinking", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, Information Age Publishing, pp. 843-908.

Battista, M. T. y D. H. Clements (1996), "Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 3, núm. 27, pp. 258-292.

Battista, M. T., G. H. Wheatley y G. Talsma (1982), "The importance of spatial

visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 5, núm. 13, pp. 332-340.
Ben-Chaim, D., G. Lappan y R. T. Houang (1988), " The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls'", *American Educational Research Journal,* vol. 1, núm. 25, pp. 51-71.
Bishop, A. (1980), "Spatial abilities and mathematics education: a review", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 11, pp. 257-269.
——— (1983), "Space and Geometry", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process,* Nueva York, Academic Press, pp. 175-203.
Ferrero, L., I. Gaztelu, P. Martín y L. Martínez (1999), *Matemáticas. 6° Primaria,* Madrid, Anaya.
Fischbein, E. (1993), "The theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 2, pp. 139-162.
Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task,* Dordrecht, D. Reidel.
Gaulin, C. (1985), "The Need for Emphasizing Various Graphical Representations of 3-Dimensional Shapes and Relations", en L. Streefland (ed.), *Proceedings of the 9th PME Conference,* vol. 2, pp. 53-71.
Godino, J. D. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* vol. 2/3, núm. 22, pp. 237-284.
——— (2009), "Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas", *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* núm. 20, pp. 13-31.
Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2007), "The onto-semiotic approach to research in mathematics education", *ZDM, The International Journal on Mathematics Education,* vol. 1/2, núm. 39, pp. 127-135.
Gorgorió, N. (1996), *"Choosing a Visual Strategy: The Influence of Gender on the Solution Process of Rotation Problems",* en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Valencia, Universidad de Valencia, *vol. 3, pp. 3-19.*
——— (1998), "Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 35, pp. 207-231.

Guillén, G. (2010), "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?", en M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV*, Lleida, SEIEM, pp. 21-68.
Gutiérrez, A. (1996), "Visualization in 3-Dimensional Geometry: in Search of a Framework", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Universidad de Valencia, vol. 1, pp. 3-19.
———— (1996a), "Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures", en A. R. Batturo (ed.), *New Directions in Geometry Education*, Brisbane, Centre for Math. and Sc. Education, QUT, pp. 33-42.
Hershkowitz, R., B. Parzysz y J. van Dormolen (1996), "Space and Shape", en A. J. Bishop y cols. (eds.), *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Kluwer, vol. 1, pp. 161-204.
Hill, H. C., D. L. Ball y S. G. Schilling (2008), "Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students", Journal for Research in Mathematics Education, núm. 39, pp. 372-400.
Hjalmarson, M. A. y R. Lesh (2008), "Design Research. Engineering, Systems, Products, and Processes for Innovation", en L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Nueva York, Routledge, pp. 520-534.
Lappan, G., E. D. Phillips y M. J. Winter (1984), "Spatial visualization", *Mathematics Teacher*, núm. 77, pp. 618-623.
Lesh, R. y B. Sriraman (2010), "Re-Conceptualizing Mathematics Education as a Design Science", en B. Sriraman y L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education. Seeing New Frontiers*, Heidelberg, Springer, pp. 123-146.
Malara, N. (1998), "On the Difficulties of Visualization and Representation of 3D Objects in Middle School Teachers", en A. Olivier y K. Newstead (eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, vol. 3, pp. 239-246.
Mesquita, A. L. (1992), "The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research", *Structural Topology*, núm. 18, pp. 19-30.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006), *Real Decreto 1513/2006 del 7 de diciembre*, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), *Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics*, edición electrónica: http://standards.nctm.org/

Parzysz, B. (1988), "'Knowing' vs. 'seeing', Problems of the plane representation of space geometry figures", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 19, pp. 79-92.

Pittalis, M., N. Mousoulides y C. Christou (2009), "Level of Sophistication in Representing 3D Shapes", en M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tesalónica, PME, vol. 4, pp. 385-392.

Potari, D. y V. Spiliotopoulou (2001), "Patterns in children's drawings and actions while constructing the nets of solids: the case of the conical surfaces", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 4, núm. 23, pp. 41-62.

Presmeg, N. C. (2006), "Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education,* Dordrecht, Sense Publishers, pp. 205-235.

Shulman, L. S. (1986), "Those who understand: knowledge growth in teaching", *Educational Researcher,* vol. 2, núm. 15, pp. 4-14.

Shulman, L. S. (1987), "Knowledge and teaching: foundations of the new reform", *Harvard Educational Review,* vol. 1, núm. 57, pp. 1-22.

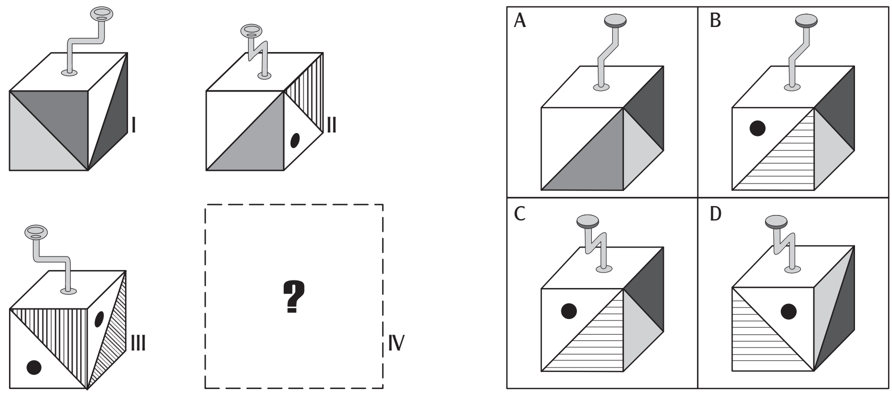
Veloso, E. (1993), "Tudo o que há num cubo", *Educação e Matemática,* núm. 26, pp. 23-26.

Wood, T. (ed.) (2008), *The international handbook of mathematics teacher education,* Rotterdam, Sense Publishers.

ANEXO: EJEMPLOS DE LOS TIPOS DE ÍTEMS INCLUIDOS EN EL CUESTIONARIO

Rotar un objeto en el espacio (ítem 5)

5*a)* ¿Cuál de las imágenes de la derecha continúa la serie?

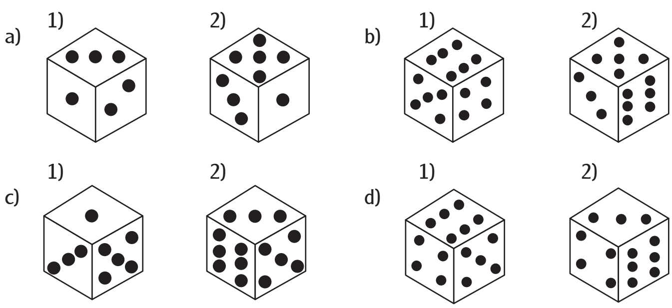


5*b)* Justifica la respuesta (del subítem *a*).

5*b′)* Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea 5*a)*.

5*c)* Los dados dibujados en la figura adjunta tienen las caras colocadas de diferentes maneras. Entre las siguientes parejas de dados hay una en la que, si se hace girar uno de los dos dados, (éste) se coloca en la misma posición que el otro.

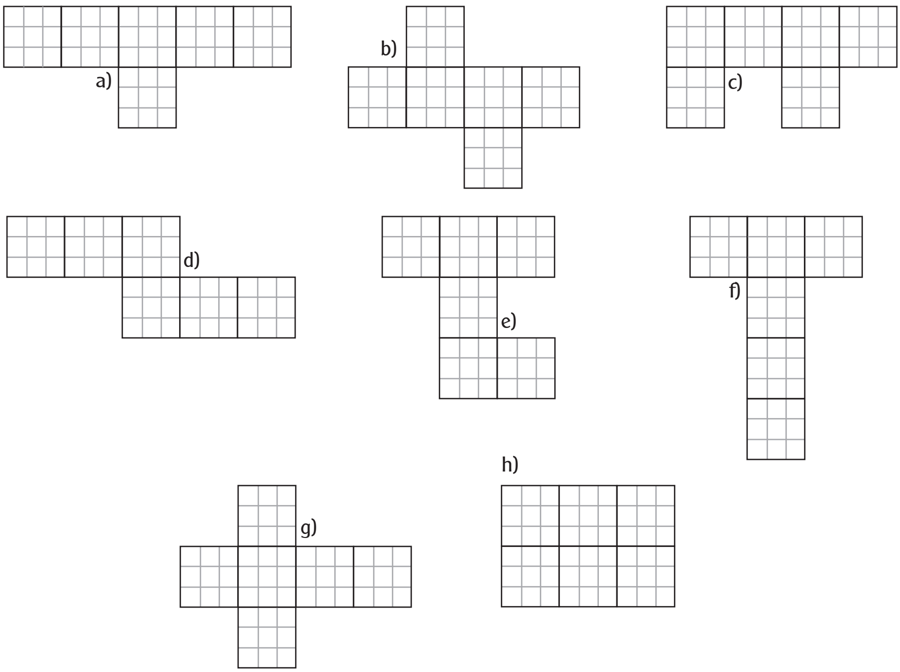
¿Cuál de las parejas, A, B, C o D, cumple esa condición? Justifica la respuesta trazando el eje (o los ejes) alrededor del cual uno de los dados debe girar para que muestre la misma perspectiva que el otro.



5*d)* Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **5*a*** para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.

Plegar y desplegar desarrollos (ítem 7)

7a*)* Escribe cuáles de estos desarrollos corresponden a un cubo.

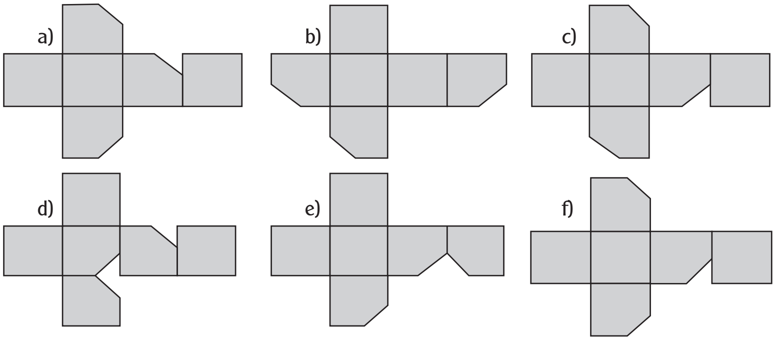


7*b)* Justifica la respuesta.

7*b′)* Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea **7*a***.

7*c)* Cortamos un vértice de un cubo.

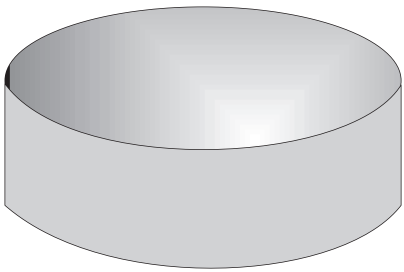
¿Cuáles de los desarrollos planos que se muestran en la siguiente figura corresponden al cuerpo resultante? Justifica.



7*d)* Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **7*a*** para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.

COMPONER Y DESCOMPONER EN PARTES UN OBJETO TRIDIMENSIONAL (ÍTEM 9)

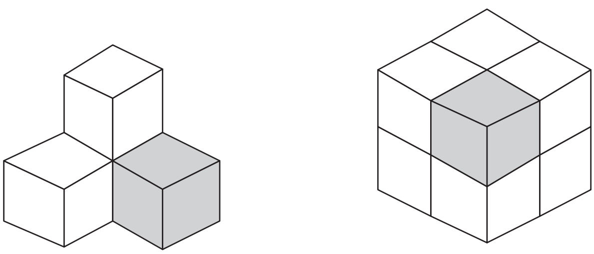
9*a)* ¿Cómo podemos partir esta figura en 8 partes iguales dando sólo 3 cortes?

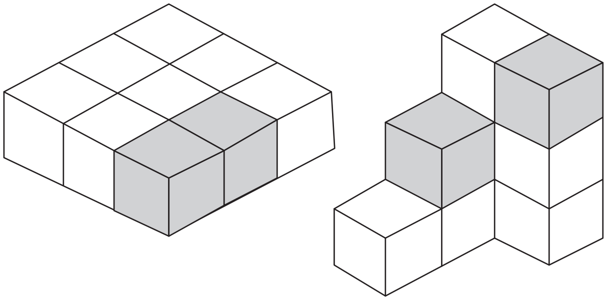


9*b)* Justifica la respuesta.

9*b′)* Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **9*a***.

9*c)* Quita el cubo o los cubos evidenciados y dibuja debajo el sólido que se queda.

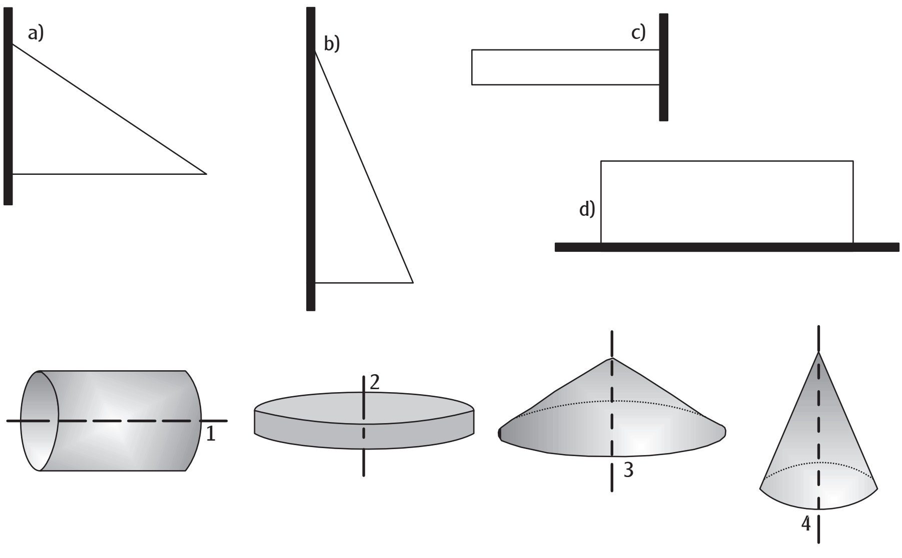




9b′) Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea ***9a*** para que resulte una variante de la tarea.

Generar sólidos de revolución (ítem 13)

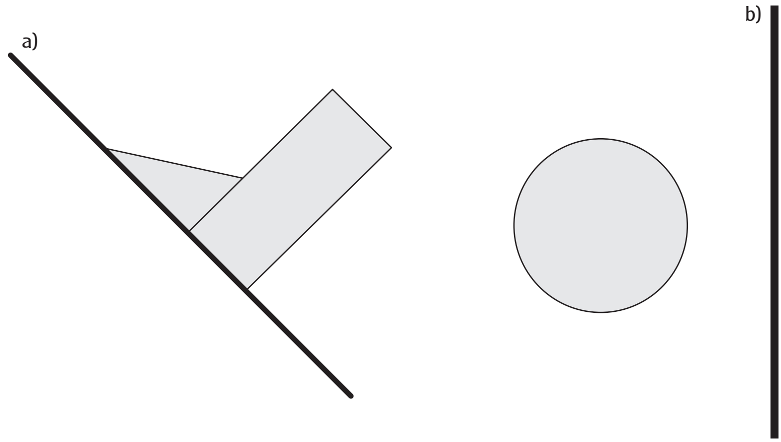
13a) Haz corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado.



13b) Justifica la respuesta

13*b′)* Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **13*a.***

13*c)* Dibuja, de manera aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras planas respecto de los ejes que se indican.



13*b′)* Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **13*a*** para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.

DATOS DE LOS AUTORES

Margherita Gonzato
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
mgonzato@ugr.es
Juan Díaz Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
jgodino@ugr.es
Teresa Neto
Departamento de Educação, Universidad de Aveiro, Portugal.
teresaneto@ua.pt

Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea

Ana Isabel Roig, Salvador Llinares y M. C. Penalva

Resumen: El objetivo de esta investigación fue estudiar cómo aprenden estudiantes para profesores de educación secundaria a analizar la enseñanza de las matemáticas como un aspecto del desarrollo de su competencia docente. Para ello, analizamos la estructura argumentativa de una discusión en línea entre estudiantes para profesores de enseñanza secundaria cuando están identificando e interpretando aspectos de la comunicación matemática como un rasgo característico de la enseñanza de las matemáticas. Para realizar el análisis, usamos el esquema de un argumento de Toulmin y centramos nuestra atención en cómo los estudiantes para profesor establecían la relación entre las conclusiones y los datos y cómo usaban las garantías. Los resultados muestran tres características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor en un debate en línea que determinan oportunidades para el aprendizaje de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas: refinar garantías para apoyar una conclusión, discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida, y poner en duda las conclusiones.

Palabras clave: aprendizaje del profesor, competencia docente "mirar con sentido", comunicación matemática, interacción en línea.

Argumentative structure of students for mathematics teachers in an online environment

Abstract: The goal of this study was to analyze how pre-service mathematics secondary teachers learn to analyze the mathematics teaching as an aspect of teaching expertise. We analyze pre-service mathematics teachers' argumentative structure in online discussion when they are learning to notice relevant aspects of mathematical communication in mathematics teaching. We use Toulmin's argumentative scheme and specifically the relationships between claims, supports and how are used the warrants. The analysis identified three characteristics of

Fecha de recepción: 2 de febrero de 2011.

student mathematics teachers' argumentative structure in an online debate that define learning opportunities to professional noticing of mathematics teaching: refining warrants to support claim, discussing about how a conclusion can be admitted, and doubting of the claim.

Keywords: teacher's learning, teaching expertise, professional noticing, mathematical communication, online interaction.

"MIRAR CON SENTIDO" COMO COMPETENCIA DOCENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Una competencia docente importante para el profesor de matemáticas es "mirar con sentido" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no es profesor y se caracteriza por identificar e interpretar los aspectos relevantes en determinadas situaciones (Eraut, 1996). La idea es que, cuando alguien llega a formar parte de una disciplina profesional (como es el ser maestro o profesor de matemáticas), debería ser diestro en "mirar con sentido" un cierto conjunto de hechos en las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Sherin, 2001).

Mason (2002) señala que la competencia docente "mirar con sentido" (*the discipline of noticing*) permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Mason indica algunas características que pueden ayudar al desarrollo del proceso de mirar con sentido de una manera efectiva (*disciplined noticing*): i) desarrollar la sensibilidad aprendiendo a identificar lo que puede ser considerado relevante teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*); ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*); iii) reconocer posibles alternativas (*recognizing choices*), y iv) validar lo observado, intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

Por otra parte, Van Es y Sherin (2002) y Sherin (2001) caracterizan la competencia docente "mirar con sentido" considerando tres destrezas: *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y *realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje. Esta manera de plantear la relación entre las acciones cognitivas de identificar, registrar e interpretar hace más explícita la necesidad de considerar el papel que desempeñan el conocimiento de matemáticas y el de didáctica de las matemáticas en guiar la observación y la interpretación de los hechos identificados y descritos. Sherin y sus colegas introducen en esta manera de entender el desarrollo de la competencia "mirar con sentido" (es decir una mirada profesional del profesor de matemáticas) la necesidad de explicitar la relación entre las evidencias y las "ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje". Recientemente, la caracterización y análisis del desarrollo de esta competencia docente del profesor de matemáticas ha empezado a ser foco de atención en el ámbito de la educación matemática (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; Lin, 2005; Llinares, y Valls, 2009; Star y Strickland, 2008 y Sherin, 2001). Los resultados obtenidos indican que esta competencia docente genérica debe particularizarse considerando aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas, como por ejemplo, las características de la comunicación matemática en el aula.

CARACTERÍSTICAS DE LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA COMO CONTENIDO DEL APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR

Uno de los aspectos con potencial para explicar el aprendizaje matemático en las clases de matemáticas es el de las características de la comunicación matemática (Lampert, 2003; Sfard, 2001; Wertsch y Toma, 1995). Los estándares de la NCTM (2003) subrayan la necesidad de crear aulas en la que se exploren las ideas desde diferentes perspectivas, permitiendo a los alumnos compartir lo que piensan y hacer conexiones. Estos estándares destacan el papel que desempeña la comunicación matemática en organizar y consolidar el pensamiento matemático de los estudiantes entrelazando los procesos de reflexión y comunicación. Esto ha hecho surgir una línea de investigación en educación matemática centrada en identificar patrones de interacción y regularidades en el aula de matemáticas que pueden ayudar a caracterizar la discusión matemática (Cobb y Bauersfeld, 1995). Los patrones de interacción se consideran regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes (Voigt, 1995). Los patrones de interacción funcionan para minimizar el riesgo de colapso y desorganización en el proceso interactivo en el aula de matemáticas. Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución. Los patrones de interacción se ponen en juego en situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados. Algunas investigaciones han identificado dos grupos de patrones de interacción (Wood, 1998; Voigt, 1995).

El patrón de extracción (llamado algunas veces patrón de embudo o focalización) se genera cuando los estudiantes tienen dificultades con la tarea propuesta por el profesor. En este caso, las acciones del profesor se dirigen a ayudar a los estudiantes a reducir la ambigüedad de la tarea para poder terminarla. Para ello, el profesor detalla y especifica las condiciones de la tarea, estrechando los objetivos pretendidos. En este patrón de interacción, el profesor guía a sus estudiantes hacia una solución determinada. Creyendo que ayuda a los estudiantes, el profesor plantea pequeñas cuestiones y transforma en algoritmo el proceso de resolución. Esta fase corresponde a la idea socrática según la cual el profesor extrae fragmentos de conocimiento que están asociados con pequeños pasos en el razonamiento. Un segundo patrón de interacción lo constituye *el patrón de discusión* (*discussion pattern*) en el que los estudiantes han resuelto el problema propuesto durante el trabajo en pequeños grupos y, a continuación, el profesor pide que lo informe un estudiante. El estudiante presenta una solución al problema y lo explica. El profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante preguntas adicionales, observaciones, reformulaciones, o juicios, de manera que surge una explicación o solución conjunta y se toma como válida. El profesor pregunta a los estudiantes por otros modos de solución.

Estas ideas sobre la comunicación matemática generan una responsabilidad en el profesor en el sentido de tener que identificar, interpretar y gestionar los aspectos relevantes de la comunicación en el aula que son pertinentes para potenciar el aprendizaje de las matemáticas (Knott, 2009; Silver, y Smith, 1996). Así, comprender mejor la comunicación matemática y el papel potencial del profesor en la generación de contextos comunicativos adecuados forma parte de las competencias docentes por desarrollar en el proceso de llegar a ser profesor de matemáticas (Douek, 2005; Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008) y en las iniciativas de desarrollo profesional (Brantlinger, Sherin y Linsenmeier, 2011). Siguiendo estos estudios sobre la comunicación matemática en el aula, nosotros estamos interesados en explorar cómo pueden iniciar los estudiantes para profesor el desarrollo de la competencia docente de identificar e interpretar los patrones de interacción y analizar las condiciones del aula en las que se dan determinados tipos de interacción.

INTERACCIÓN Y DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR CON SENTIDO"

Las perspectivas socioculturales del aprendizaje subrayan la importancia de la interacción en los proceso de construcción de conocimiento (Wenger, 1998; Wells, 2002). Cuando esta perspectiva se aplica a los procesos de formación de futuros profesores de matemáticas, se genera la hipótesis de la relevancia de la interacción entre los estudiantes para profesor en el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas. En línea con esta hipótesis, las nuevas tecnologías están proporcionando a los formadores de profesores instrumentos para diseñar entornos de aprendizaje que pueden ayudar a potenciar los contextos interactivos durante la resolución de problemas profesionales por parte de los estudiantes para profesor (Llinares y Olivero, 2008; Prieto y Valls, 2010).

En un contexto *b-learning* una cuestión importante es cómo caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones asincrónicas (debates *online*) entre estudiantes para profesor (De Wever, Schellens, Valcke y Van Keer, 2006). En este tipo de contextos, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesor se relacionan con otras dimensiones que definen la calidad del discurso generado, como son la forma de participar y el contenido del discurso. Esta situación genera cuestiones específicas que intentan aportar una explicación de los procesos de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" (o ausencia de desarrollo) generados en dichos contextos. Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) señala que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional de esta hipótesis es que el contenido del discurso sea considerado un "artefacto del conocimiento" sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar. Esta hipótesis plantea cuestiones en investigación en Educación Matemática sobre qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado a la emergencia de situaciones de aprendizaje en las que se inicie el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera.

Los resultados de las investigaciones previas indican que la estructura de los entornos de aprendizaje parece influir en la manera en la que los estudiantes para profesor interaccionan entre ellos en un intento de ampliar y transformar su comprensión de la enseñanza de las matemáticas (Lin, 2005; Morris, 2006; Star y Strickland, 2008). En este sentido, las interacciones parecen potenciarse cuando asumen un foco de interés específico, lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación (Llinares y Valls, 2010; Prieto y Valls, 2010; Penalva, Rey y Llinares, 2011).

Este contexto genera cuestiones sobre la relación entre la interacción en entornos virtuales y la construcción de conocimiento necesario para enseñar matemáticas. La investigación presentada aquí intenta responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son las características de la estructura argumentativa generada por estudiantes para profesor de matemáticas en un debate en línea? y
- ¿Cómo determinan estas características de la estructura argumentativa oportunidades de aprendizaje y desarrollo de la competencia docente *mirar con sentido la enseñanza de las matemáticas*?

Las características de las estructuras argumentativas que surgen en las discusiones colectivas son relevantes para entender el proceso por el cual los estudiantes para profesor crean argumentos como focos alrededor de los cuales se organiza la negociación de significados relativos a la enseñanza de la matemática que es parte constitutiva de su aprendizaje como profesores.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en este estudio fueron 29 estudiantes que cursaban una asignatura de Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas. La asignatura adoptó una metodología *b-learning* que consiste en integrar actividades presenciales con actividades en línea. En este caso, 50% de las actividades fueron realizadas presencialmente y otro 50% fueron realizadas en línea. El diseño *b-learning* fue realizado siguiendo el modelo del aprendizaje sociocultural de Wells (2002) y ha sido evaluado y modificado durante un periodo de cinco años

(Llinares, 2009; Llinares, Valls y Roig, 2008). De manera específica, en este entorno virtual de aprendizaje los estudiantes tienen la posibilidad de ver video-clips de lecciones de matemáticas, leer documentos teóricos, participar en foros interactivos respondiendo a preguntas específicas y escribir informes síntesis en grupos, en respuesta a las cuestiones planteadas en el foro. En la participación en los foros (discusiones en línea) los estudiantes tenían que apoyar sus aportaciones y sus argumentos vinculando sus inferencias a evidencias empíricas procedentes de los video-clips y a la información proporcionada en los documentos teóricos. El objetivo de estas cuatro actividades era permitir que los estudiantes para profesor empezaran a desarrollar la competencia de identificar aspectos de la enseñanza de las matemáticas que son pertinentes para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes, interpretarlos desde alguna perspectiva teórica y usar estos registros para comunicarse con otros y poder validarlos al exponerlos al escrutinio de sus compañeros.

El informe presentado aquí se ha organizado alrededor del análisis de una de las actividades en línea centrada en el desarrollo de la capacidad de identificar y dotar de sentido a las características del discurso y la comunicación matemática en el aula (y en particular el patrón de discusión y patrón extractivo/focalización, Cobb y Bauersfeld, 1995). El entorno de aprendizaje integraba un video-clip en el que un profesor intentaba que sus alumnos pudieran generar una definición de figuras simétricas relacionando las propiedades de puntos simétricos, eje de simetría y mediatriz de un segmento. El video-clip es un contexto para discutir sobre cómo se apoya el aprendizaje de las matemáticas en la generación paulatina y progresiva de una comunicación matemáticamente más rica, ya que muestra la transición desde construir un discurso apoyado con la idea del espejo y su reflejo al uso de la idea de mediatriz de un segmento para manejar la idea de que dos puntos son simétricos si el eje forma la mediatriz del segmento que los une (Valls y Llinares, 2011). A los estudiantes para profesor se les proporcionaron documentos que describían el contexto de la lección desde la que provenía el video-clip y una serie de documentos teóricos sobre los patrones de interacción (Wood, 1998), y sobre característica de la comunicación matemática en el aula (estándares sobre la comunicación de la NCTM, 2003).

El debate se inicia con una intervención del formador en la que se señala el objetivo y cómo se deben organizar las participaciones para responder a la cuestión planteada.

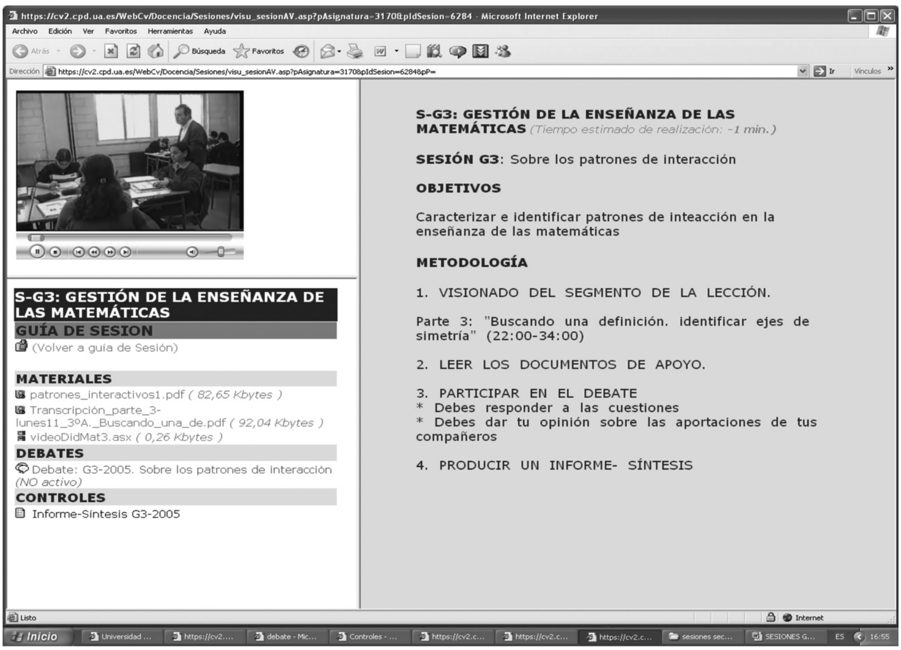
El objetivo de este debate es identificar y compartir los aspectos caracterís-

ticos de la interacción entre el profesor y los alumnos durante la enseñanza de las matemáticas.

¿Puedes identificar algún patrón de interacción entre el profesor y sus alumnos? Indica claramente en qué apoyas tu aportación.

Los estudiantes para profesor tenían que argumentar sus intervenciones de modo que, al considerar que una determinada interacción entre el profesor y sus alumnos reflejaba las características de algún patrón de interacción, debían justificar su interpretación usando las ideas teóricas proporcionadas sobre las características de los patrones de interacción. La figura 1 refleja la página inicial del entorno de aprendizaje.

Figura 1 Página inicial del entorno de aprendizaje



Análisis

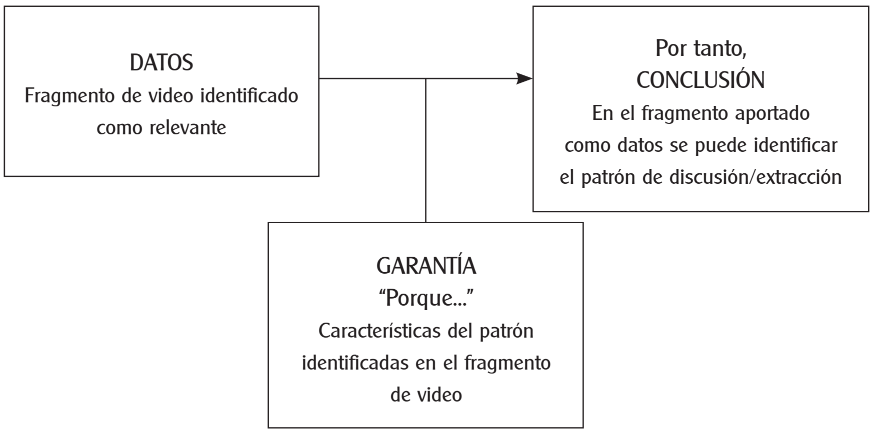
Los datos de esta investigación son las 93 contribuciones de los estudiantes para profesor en el tercer debate en línea sobre la comunicación matemática que estuvo activo durante dos semanas. Las contribuciones de los estudiantes se agruparon formando tres cadenas conversacionales consideradas como conjunto de participaciones relacionadas (Andriessen, Erkens, Van de Laank, Peters y Coirier, 2003) en las que se trataron tres focos comunes de atención.

- Foco 1: se discute sobre las características del "Patrón de discusión".
- Foco 2: se discute sobre las características del "Patrón de extracción" (y focalización).
- Foco 3: se contrastan las características de ambos patrones.

En un segundo nivel de análisis, consideramos en cada una de las cadenas conversacionales las aportaciones en las que se podían identificar las tres componentes del esquema de un argumento según Toulmin (2007): la *conclusión* alcanzada, los *datos* (fragmento de video identificado como relevante), y las *garantías* (características del patrón identificadas en el fragmento de video). Este esquema ha sido usado para explicar la relación entre la argumentación y el aprendizaje en el aula de matemáticas (Krummheuer, 1995; Weber, Maher, Powell, y Stohl Lee, 2008), pero no ha sido usado en la misma medida en el análisis del aprendizaje de los estudiantes para profesores de matemáticas y, en particular, en un contexto *b-learning*. Consideramos que el modelo de Toulmin puede ser una herramienta analítica útil para comprender cómo se da la estructura de una argumentación y se crean oportunidades de aprendizaje de los estudiantes para profesor durante las discusiones colectivas. En esta investigación, el significado de un argumento está vinculado a las interacciones en el debate en línea generadas por las participaciones que tienen que ver con las explicaciones dadas por los estudiantes para profesor ante el cuestionamiento de sus compañeros. Los argumentos presentados son, por tanto, producto de la realización de la tarea propuesta y de la interacción en línea que surge con posterioridad.

En este esquema, cuando alguien presenta una conclusión, intenta convencer a sus compañeros. Para apoyar esta conclusión, se deben presentar evidencias: los datos. A partir de entonces, los otros miembros del grupo pueden cuestionar por qué se debe deducir la conclusión a partir de los datos. Esta situación exige que el estudiante para profesor que ha presentado la conclusión genere una

Figura 2 Estructura de un argumento (Toulmin, 2007) como herramienta analítica en esta investigación



explicación para intentar apoyarla. Esta explicación se denomina *garantía* en el esquema de Toulmin (figura 2).

Es posible que el grupo pueda aceptar los datos presentados para apoyar la conclusión expuesta pero que no necesariamente esta conclusión derive de los datos presentados, es decir, que se cuestione la validez de las garantías presentadas. Cuando esto ocurre en una discusión, el estudiante para profesor que ha presentado la conclusión puede apoyar las garantías refinándolas mediante *cualificadores modales* que permiten expresar grados de confianza y enfrentarse a *refutaciones* que establecen las condiciones por las cuales no se puede aceptar la conclusión presentada. Estos elementos de la estructura de un argumento, propuestos por Toulmin, nos han permitido proporcionar una descripción de las argumentaciones generadas en el debate en línea que nos ha ayudado a identificar características de la estructura argumentativa que podemos considerar como oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor. De esta manera, el uso que nosotros hacemos del esquema de Toulmin se hace con el objetivo de identificar características de la discusión en línea que podíamos asumir que permitían a los estudiantes para profesor aprender a identificar aspectos relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, interpretarlos desde determinadas referencias teóricas e intentar validar con otros estas interpretaciones (Mason, 2002). Es decir, el uso del esquema de Toulmin nos ha permitido mostrar cómo los desafíos a los argumentos inicialmente presentados pueden conducir a los estudiantes para profesor a refinar las garantías presentadas y cómo las interacciones con otros pueden llegar a centrar el debate, determinando en qué condiciones son apropiadas estas garantías.

Así, en las aportaciones al debate en línea, los estudiantes para profesor presentaban argumentos del tipo "se presenta una conclusión relativa a unos datos que se indican y se justifica con ciertas garantías" y se seguían a partir de una serie de reacciones en las que se discutía sobre lo presentado. Cada una de estas secuencias de aportaciones la denominamos unidad argumentativa. Se produjeron un total de 17 unidades argumentativas en los tres tópicos específicos de discusión.

Cuadro 1 Focos de atención en las cadenas conversacionales

	UNIDADES ARGUMENTATIVAS		
INTERVENCIONES	Foco 1 Sobre el patrón de discusión	Foco 2 Sobre el patrón de extracción/focalización	Foco 3 Contrastando ambos patrones
57	5	6	1
13	1	3	0
14	0	0	1

En la sección de resultados, mostramos las características de las estructuras argumentativas de los estudiantes para profesor que son relevantes para el aprendizaje de las características de la comunicación matemática en este contexto en línea.

RESULTADOS

En esta sección, describimos las características de las unidades argumentativas que centraron la atención de los estudiantes y que permiten mostrar la relación entre la interacción, la negociación de los significados y el desarrollo de la competencia para mirar con sentido la enseñanza de las matemáticas. El análisis nos ha permitido identificar tres características de la estructura argumentativa que ayudan a explicar cómo los estudiantes para profesor identificaban determinadas interacciones en el aula, sucesos en el aula, y cómo las interpretaban, generando contextos de negociación de significados.

Refinando garantías para apoyar una conclusión

Una de las características de la interacción generada en el debate en línea tiene que ver con el proceso por el cual los estudiantes para profesor refinaban las garantías dadas para apoyar una conclusión. Este proceso de refinamiento podía ser realizado por el mismo estudiante para profesor que había propuesto la conclusión inicialmente, pero como respuesta a algún cuestionamiento previo, o podía ser realizado por algún compañero como apoyo a las garantías inicialmente propuestas para justificar la relación entre la conclusión y las evidencias dadas.

Por ejemplo, de las seis unidades argumentativas que se centraron en el patrón de discusión (foco 1), tres dieron lugar a una discusión sobre las conclusiones presentadas, convirtiéndose de esta manera en un contexto de aprendizaje. Un ejemplo de esta manera de proceder se da en el siguiente protocolo cuando la estudiante A12 identifica algunas características del patrón de discusión en un momento determinado de la secuencia de enseñanza observada en el video. Esta estudiante vincula la evidencia proporcionada (datos procedentes del video) con la conclusión y hace referencia a las diferentes características del patrón que ha identificado. Esta aportación inicial genera nuevas aportaciones que podemos considerar como ejemplo de cómo se *refinan las garantías para apoyar una conclusión*, mostrando un comportamiento característico de la estructura argumentativa generada.

CONCLUSIÓN
En el video se pueden identificar las características del Patrón de discusión

DATOS
Parte del fragmento 28:00 del video

Una opinión diferente (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I06 – A12)
No sé si estoy en lo cierto, pero creo que el profesor durante el diálogo con los estudiantes sí emplea el patrón de discusión. Les voy a poner un ejemplo:
Profesor: *Ahora, tú tienes aquí por ejemplo una especie de [hace un dibujo a la izquierda del eje] ¿Sales y nos dibujas su simétrico?*
[El alumno pasa a la pizarra]
Profesor: *A ver, ¿cuál sería la figura simétrica de ésa respecto al eje?*
[El alumno dibuja el simétrico]
Profesor: *¿Qué opinan? Salvo medidas y tal es correcto. Rubén, ¿has seguido algún criterio? Quiero decir, tú cuando haces el dibujo simétrico lo haces, a ver... ¿te sale o has intentado seguir algún método?*

GARANTÍAS
Relaciona algunas características del patrón de discusión con lo sucedido en el video

Se da el patrón de discusión, puesto que aunque los estudiantes no han resuelto el problema en pequeños grupos, sí que es cierto que el profesor propone la tarea y el alumno, una vez que ha pensado en su solución, pasa a la pizarra y la expone al resto de sus compañeros. Además, posteriormente el profesor efectúa algunas preguntas como: "¿Qué opinan?" o "¿has intentado seguir algún método?", para contribuir así a la explicación del estudiante y llegar así a su objetivo que, en este caso, sería el concepto de punto simétrico. Por otra parte, en este caso, la solución del ejercicio es el punto de partida (en el documento aparece este punto como una característica propia del patrón de discusión). Esto le servirá al profesor, para explicar el porqué dos figuras son simétricas con respecto a un eje a partir del concepto de punto simétrico. ¿Qué opinan?

Esta conclusión es admitida por algunos estudiantes que, para mostrar su apoyo, aportan nuevas garantías o refinan las ya dadas por A12.

Totalmente de acuerdo (CADENA 1–FOCO 1–UNIDAD 3 / I23–A21)

APOYA
Refina las garantías presentadas por A12

Estoy de acuerdo con A12 en que, en el ejemplo que ha propuesto, se identifica un patrón de discusión. Además, para los que tengan un poco de duda, no sé si les servirá añadir que el profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante las preguntas adicionales que ella ha comentado, que vienen a ser reformulaciones del ejercicio en otra figura. Aquí les aporto la parte del protocolo del video en la que se identifica esta característica propia del patrón de discusión:
Rubén: *He hecho como si pusiera un espejo en el centro e imaginándome la figura.*
Profesor: *Ah, en este caso no ha habido demasiado problema. Bien. ¿Qué pasaría ahora, Alberto, si cambiamos el eje y lo ponemos ya no horizontal o vertical, sino de esta forma* [dibuja un eje inclinado], *por ejemplo? Y nosotros tenemos, ahora te lo pongo más fácil, una simple L. A ver, ¿cuál sería en este caso la figura simétrica?*

A21 intenta refinar una de las características identificadas por A12, poniendo de manifiesto que las preguntas formuladas por el profesor a las que A12 hacía referencia sirven además para reformular la tarea propuesta. De esta manera, hace referencia a una característica del patrón de discusión que no había sido mencionada por A12.

En este tipo de interacciones, se muestra de qué manera hacer explícitas las garantías; como sucedió en la aportación inicial, generó la oportunidad para que otros estudiantes para profesor pudieran refinar las garantías discutiendo sobre las características que debían ser contempladas para asumir que la interacción entre el profesor y los estudiantes en el video era un ejemplo de un patrón de discusión. Éste es el comportamiento que nosotros asumimos que es evidencia de la constitución de una oportunidad para aprender de los estudiantes para profesor.

Discutiendo sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida

Otra característica de la interacción en el debate en línea que permitió que surgiera una oportunidad para mejorar la competencia docente de mirar con sentido las interacciones entre el profesor y sus alumnos durante la enseñanza de las matemáticas se da cuando los estudiantes para profesor discuten sobre cómo debe establecerse una conclusión para que sea admitida como válida. Un ejemplo de esta característica surgió cuando uno de los estudiantes para profesor fue relacionando cada parte del fragmento del video con distintas características del patrón de discusión. Así, el estudiante para profesor señala cómo el profesor, al presentar la tarea de la interacción entre el profesor y sus estudiantes, se centra en las contribuciones matemáticas de los estudiantes. Para ello, el estudiante para profesor subraya como una cuestión relevante que se debe tener en cuenta que el profesor contribuye a la explicación dada por el alumno cuando un alumno expone su solución al resto de la clase. La interacción siguiente es un ejemplo de esta manera de proceder durante la discusión en línea. En esta interacción, el estudiante para profesor subraya en su intervención que las interacciones entre el profesor y sus alumnos son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas, ya que el profesor parece valorar lo que los estudiantes dicen, por lo que los induce a compartir sus ideas con los otros. Al mismo tiempo, también señala que el trabajo en pequeños grupos, que aparece como característica del patrón en el documento teórico, no se cumple. Esto desencadena una serie de intervenciones en las que se cuestionan las garantías presentadas por A12.

DUDA
Duda de las garantías presentadas

Duda (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I07 – A26)
Pues me has dejado en duda. Bueno, yo creía que para que se diera un patrón tenía que cumplir todas las condiciones, entonces, al no haber primero una discusión por grupos entre los alumnos, pues he desechado que se pudiese dar el patrón que tú dices. Vale, si alguien me puede aclarar esto se lo agradecería.

A26 considera que es necesario poder reconocer todas las características del patrón de discusión para poder concluir que este patrón sí se da. Así, A26 cuestiona el argumento presentado por A12, argumentando con base en la suficiencia de las garantías presentadas. Este reto desencadena algunas reacciones en apoyo a la manera en que A12 establece la relación entre los datos y la conclusión.

APOYA
Apoya la manera en que A12 establece su conclusión

Mi opinión sobre este caso (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I08 – A23)
Yo pienso que el ejemplo de A12 está bien, puesto que, a mi parecer, las características para identificar los patrones son siempre orientativas (no han de cumplirse estrictamente al pie de la letra). Es evidente que hay una comunicación explicativa por parte de ambas partes, una aportación de ideas para intentar comprender mejor la situación y yo creo que ésa es la esencia de este patrón. El hecho de que la discusión sea colectiva es algo secundario, pero no por ello poco importante, puesto que, cuanto mayor sea el grupo de personas participantes en la explicación, más enriquecidas estarán las conclusiones de la discusión.

APOYA
Apoya la manera en que A12 establece su conclusión

Respuesta (CADENA 2 - FOCO 1 - UNIDAD 3 / I09 - A15)
Yo creo también que, aunque no se den todas las condiciones de un patrón u otro, lo que nos puede ayudar a diferenciar uno de otro es fijarnos en si la solución es lo que se persigue (patrón extractivo) o si es de lo que uno parte (patrón de discusión). Por tanto, yo también lo veo como A12, porque aunque el problema no haya sido pensado en pequeños grupos y comentado entre ellos con anterioridad, es cierto que ellos ya han trabajo este tema y son capaces de resolverlo ellos solos y de explicarlo al resto de la clase.

En ambos casos los estudiantes consideran que las garantías presentadas por A12 son legítimas. A23 considera que las características para identificar los patrones son orientativas y, por tanto, no es necesario que se cumplan todas. A15 va un poco más allá y apunta que existe una característica del patrón que es determinante para su identificación: el hecho de que la discusión se produzca a partir de la solución de una tarea. De esta manera, A15 se centra más en las características que según el documento teórico distinguen a ambos patrones (discusión y extracción) que en las características del propio patrón de discusión.

En otra unidad argumentativa en la que A12 responde a otro estudiante, también cuestiona las garantías presentadas con base en la suficiencia. A12, de la misma manera que en los casos anteriores, defiende su conclusión utilizando las dos garantías anteriores: que no es necesario que se cumplan todas las características de un patrón y que la característica determinante del patrón es que el punto de partida sea la solución a la tarea.

A ver qué opinas (para A08) (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 3 / I66 – A12)

APOYA
Apoya la manera en que ha establecido su conclusión

No estoy de acuerdo contigo. No tienen por qué cumplirse todas las propiedades de los patrones, sino que el ejemplo cumpla más o menos esas características. De hecho, creo (opinión personal) que es muy difícil encontrar un ejemplo que cumpla a la perfección todo. La principal característica que te marca que es un patrón de discusión (creo yo) es que, en este caso, la solución del ejercicio es el punto de partida. Posteriormente, la respuesta le servirá al profesor, para explicar el porqué dos figuras son simétricas con respecto a un eje a partir del concepto de punto simétrico.

Weeeeno (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 3 / I67 – A08)

DUDA
Plantea las limitaciones de las garantías presentadas por A12

Sé que es difícil encontrar algo que coincida a la perfección, pero el considerarse que se cumpla "más o menos" va en función de las interpretaciones... Tú dices que comienza con la solución al ejercicio y, por ello, es patrón de discusión. Yo creo que, para que éste sea el motivo que fundamente la argumentación, habría que estar seguro de que el alumno ha trabajado antes (que en este caso no lo sabemos, puede que sí, puede que no ¿y si sale a la torera y lo hace bien de pura casualidad? ¿sería efectiva la labor del profesor?) y por eso he comentado lo de la actitud del profesor, porque dado que no lo sabemos seguro (que aun así, yo lo daría por hecho) la actitud del profesor me pareció muy adecuada al patrón de discusión.

A08 admite que puede resultar difícil identificar todas las características de un patrón y por eso también considera que no es necesario que se den todas. Sin embargo, A08 pone de manifiesto que tener que elegir la característica fundamental del patrón es algo subjetivo y, para demostrarlo, contrapone la que él considera como característica fundamental del patrón de discusión a la que considera A12 (A12: la solución al problema es el punto de partida de una discusión; A08: que el alumno haya trabajado previamente la tarea).

Este ejemplo describe una manera de proceder característica de la interacción que tenía como objetivo determinar si las garantías proporcionadas eran suficientes para admitir la conclusión. Las discusión entre los estudiantes para profesor sobre si la interacción profesor-estudiante centrada en las contribuciones matemáticas de los estudiantes durante la resolución de la tarea es una condición suficiente para asumir que se estaba ante un patrón de discusión, hizo surgir la necesidad de considerar o no las evidencias que podían proceder de la resolución de la tarea en grupo realizada previamente por los estudiantes. Estos ejemplos ilustran cómo el desafiar las conclusiones conducía a los estudiantes para profesor a reconocer la adecuación parcial de las garantías presentadas.

Poniendo en duda la conclusión

En algunas ocasiones, los estudiantes pusieron en duda la conclusión presentada por algún compañero. En estos casos, no hay un reto a las garantías sino a la conclusión presentada, de modo que se considera que, a partir de los mismos datos, se puede extraer una conclusión diferente. Por ejemplo, uno de los estudiantes para profesor considera que es un ejemplo de patrón extractivo el fragmento en el video-clip donde el profesor está discutiendo con sus alumnos sobre el número de ejes de simetría en diferentes tipos de flores y cómo es posible determinarlos, ya que considera que las preguntas que hace el profesor están motivadas por las dificultades que identifica en sus alumnos y este estudiante para profesor asume que la acciones del profesor están dirigidas a ayudar a sus alumnos, reduciendo la ambigüedad de la tarea. Sin embargo esta interpretación es puesta en duda por un compañero.

CONCLUSIÓN
En el video se pueden identificar las características del *Patrón de extracción*

Ejemplo de focalización/extractivo (CADENA 1 – FOCO 2 – UNIDAD 9 / I34 – A21)

Profesor: *Sí. Por tanto, fijaos que tendríamos los cinco ejes porque las figuras podían ser distintas. Bien. ¿Nos describes, Esperanza, la segunda?*

DATOS
Parte del fragmento 26:00 del video

Esperanza: *Es que lo de, lo de, lo que tiene dentro la flor no es, no es simétrico.*
Profesor: *He de comentar que parece que todavía no han entendido que hay que dejar de lado las "impurezas en las simetrías de las figuras en la Naturaleza".*
Profesor: *Teníamos un círculo también. Ahí lo que apuntaba Adrián es más claro. Si antes, Adrián, los pétalos no eran iguales, ahora es evidente que son casi, casi cada uno, con perdón, de su padre y de su madre. Es decir, no parece haber ningún criterio, porque enfrente de un pétalo largo hay uno corto y luego, enfrente de uno largo hay otro largo. Pero, suponiendo que fueran iguales, en teoría ¿serviría lo mismo que dijo antes Juan o no?*

GARANTÍAS
Relaciona algunas características del patrón de extracción con lo sucedido en el video

El profesor vuelve a ayudar centrando la discusión, refiriéndose al comentario expuesto por Adrián en el ejemplo anterior y planteando la pequeña cuestión de que, si en esta segunda flor los pétalos no fueran tan desiguales, se podría aplicar el argumento proporcionado por Juan, que recordemos era: "cada pétalo corresponde a un eje de simetría". Esto también forma parte del patrón extractivo, pues el profesor, con esta cuestión, intenta que los alumnos, mediante el conocimiento de simetría en las flores que tenían del ejemplo anterior, razonen para ver qué sucede en este caso. También podría verse como una especie de patrón de focalización, pues en lugar de resolver él la cuestión, plantea esta pregunta con el objetivo de estrechar el foco de atención hacia el aspecto de las simetrías en las flores, que parecen no haber entendido. Pero esto era de esperar, pues el patrón de focalización [...]

DUDA
Plantea una conclusión alternativa a partir de los mismos datos

Duda (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 9 / I35 – A11)
¿Aquí no existiría también un patrón de discusión? Si lo vemos como que el profesor a partir de la explicación de Juan pregunta al resto.
Profesor: *¿Serviría lo mismo que dijo antes Juan o no?...*
¿Podría ser que los dos patrones se relacionasen?

APOYA
Apoya la propuesta de A11

Podría darse el caso (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 9 / I36 – A23)
Yo no veo en ese fragmento en concreto el patrón de discusión por ninguna parte, ya que la explicación de Juan creo que queda demasiado lejos, y justo lo que se expresa en el ejemplo que se ha propuesto, sacado del contexto de la clase, me parece que no representa el patrón de discusión. Ahora bien, si se entiende como tú dices que

> todo se basa a partir de la explicación de Juan (que puede ser, pero debería haberse indicado en la cita que se ha hecho al indicar el ejemplo), es posible ver un destello de patrón de discusión. Yo pienso que dentro de un patrón pueden darse otros, si este primero es muy extenso.

Las dudas sobre las conclusiones alcanzadas trasladan la atención de los estudiantes para profesor hacia el papel de las garantías. En el caso particular del protocolo usado como ejemplo, los estudiantes para profesor habían identificado como relevantes los mismos hechos en la secuencia de enseñanza, el que el profesor estaba planteando cuestiones adicionales sobre la tarea de identificar el número de ejes de simetría en diferentes tipos de flores al asumir que sus estudiantes tenían dificultades al resolverla. Sin embargo, la diferencia sobre la que surge la interacción entre los estudiantes para profesor fue al interpretar el papel del profesor. Mientras unos asumían que el profesor con sus preguntas podía estar vaciando la tarea de potencial matemático y, por tanto, lo que se estaba dando allí era un ejemplo de patrón extractivo, otros estudiantes para profesor interpretaban que, cuando el profesor intentaba poner en relación las diferentes respuestas de sus alumnos, estaba intentando centrarse en su potencial matemático.

Este tipo de interacción entre los estudiantes para profesor, más allá de lo que pudieran ser los objetivos del profesor en el video al plantear sus preguntas a sus alumnos (o reducir la ambigüedad de la tarea o subrayar lo matemáticamente válido de las respuestas de sus alumnos) indica que las situaciones en las que se ponían en duda las conclusiones propuestas obligaban a los estudiantes para profesor a explicitar y usar las referencias teóricas para refinar las garantías o para discutir sobre la relación entre los datos y la conclusión como una manera de establecer conexiones entre las características de los patrones de interacción según las descritas en los documentos teóricos y la secuencia de enseñanza grabada en el video-clip, convirtiéndose esta situación en una oportunidad de aprendizaje para ellos.

DISCUSIÓN

Aprender a identificar aspectos de la comunicación matemática en el aula que pueden ser relevantes para el aprendizaje de las matemáticas es un aspecto importante del aprendizaje de las competencias docentes para ser profesor de matemáticas (Lampert, 2003). En relación con el aprendizaje de características de la comunicación matemática y con el desarrollo de la capacidad de "observar con sentido" (el contenido del aprendizaje pretendido), los resultados señalan que los estudiantes fueron capaces de establecer conexiones entre las características del patrón de discusión y las del patrón extractivo/focalización (Cobb y Bauersfeld, 1995; Voigt, 1995; Wood, 1998) en diferentes momentos del extracto de la lección que ellos habían visto. La discusión sobre cómo debían ser consideradas las características de la interacción matemática en el aula y el foco sobre el contraste entre las características de los patrones de interacción señalan que, en cierta medida, los estudiantes estaban mejorando su destreza de "mirar con sentido" estos aspectos de la enseñanza de las matemáticas. Aun cuando no tenemos constancia de la consolidación de este aprendizaje, podemos asumir que el desarrollo de esta competencia, cuya construcción se ha iniciado en estos entornos, es todavía inestable, ya que las investigaciones sobre el aprendizaje del profesor señalan que la consolidación del conocimiento y el desarrollo de la competencia docente es un proceso a largo plazo (Sowder, 2007).

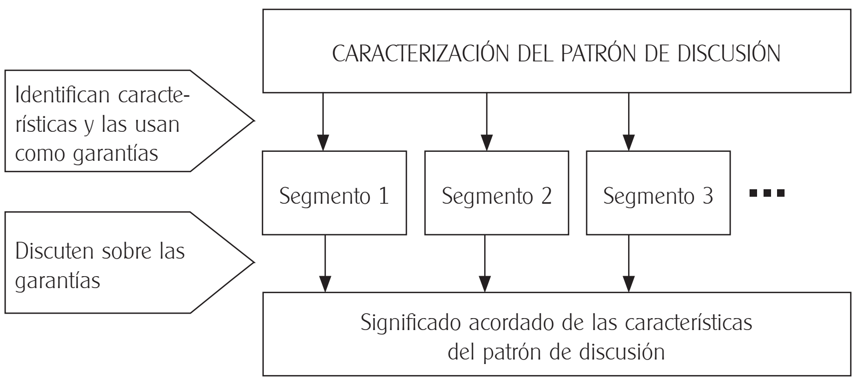
Por otra parte, en esta investigación hemos asumido una perspectiva sociocultural del aprendizaje de los estudiantes para profesor que subraya el papel de los contextos colaborativos en el desarrollo inicial de esta competencia cuando se analiza la enseñanza. Desde los resultados obtenidos, podemos considerar relevantes dos aspectos del aprendizaje de los estudiantes para profesor que hemos analizado. El primero se relaciona con la forma en la que se dio la interacción en este contexto en línea, es decir, con la estructura argumentativa generada como consecuencia de intentar resolver un problema profesional (interpretar hechos en la enseñanza de las matemáticas). El segundo se relaciona con la estructura del entorno de aprendizaje.

Cuando las garantías llegan a ser el objeto del debate

En relación con el primer punto, desde la perspectiva analítica adoptada hemos podido identificar las características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor cuando analizaban segmentos de enseñanza de las matemáticas. Este foco analítico nos ha permitido mostrar que aprender sobre las características de la comunicación matemática en una lección de matemáticas no es un proceso fácil. En este sentido, hemos identificado tres aspectos de las estructuras argumentativas generadas y que, en cierta medida, muestran la forma que adopta el proceso mediante el cual los estudiantes para profesor generan focos de atención y procesos de negociación de significados (Wenger, 1998), creando oportunidades para el aprendizaje. En primer lugar, el proceso mediante el cual los estudiantes se veían obligados a refinar las garantías propuestas para apoyar sus argumentos (lo que Toulmin denomina cualificadores modales de los argumentos). En segundo lugar, el proceso por el cual los estudiantes discutían sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida. Por último, cuando se ponía en duda la conclusión presentada por algún compañero. Estas tres características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor cuando estaban aprendiendo a identificar aspectos relevantes de la comunicación matemática indican cómo se articula la relación entre la construcción de los argumentos, la interacción en los debates en línea y el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" en relación con las características de los patrones de discusión en una clase de matemáticas como un aspecto característico de la enseñanza de las matemáticas.

De esta manera, el hecho de vincular un determinado segmento del video con el patrón de discusión o con el patrón de extracción, identificando sus diferentes características, hace que podamos asumir que los estudiantes van construyendo el significado del patrón a medida que la discusión avanza. La figura 3 describe cómo procedía la interacción entre los estudiantes para profesor y qué refleja la secuencia seguida en el caso del patrón de discusión y qué refleja la manera en que se generaban los procesos argumentativos en este debate en línea.

Figura 3 Relación entre la estructura de la argumentación y el inicio del desarrollo de la competencia "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas



Nosotros interpretamos que el proceso por el cual los estudiantes para profesor identificaban las características de los patrones de interacción (Wood, 1998) y la manera como se discutían las garantías o el papel que debían desempeñar las garantías en la relación entre los datos y la conclusión alcanzada es una oportunidad para la instrumentalización del conocimiento sobre la comunicación matemática que fundamenta la competencia docente "mirar con sentido". Este proceso de instrumentalización hay que entenderlo como la integración de las ideas teóricas procedentes de la didáctica de la matemática en los procesos de interpretación de los aspectos considerados relevantes en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, es lo que Sherin y sus colegas denominan realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje y que ha empezado a ser documento en otras investigaciones (Prieto y Valls, 2010).

Entornos de aprendizaje en la formación de profesores que fomentan el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido"

Diseñar entornos de aprendizaje que integren oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan realizar discusiones dirigidas por objetivos concretos y que apoyen el desarrollo de diferentes aspectos de las competencias docentes para enseñar matemáticas es una cuestión de investigación en estos momentos (Gómez Blancarte, 2010; Llinares y cols., 2008). Los resultados de nuestro estudio indican que es posible generar discusiones en la que los estudiantes para profesor pueden tener en cuenta las aportaciones de sus compañeros mediante una estructura de la argumentación caracterizada por refinar las garantías para poder aceptar una conclusión, discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida y ponerlas en duda.

Los resultados de algunas investigaciones previas (Llinares y Valls, 2009, 2010; Penalva y cols., 2011, y Torregrosa, Haro, Penalva y Llinares, 2010) ya habían señalado que determinados elementos del entorno de aprendizaje nos permitían tener condiciones adecuadas para que los estudiantes para profesor generaran discusiones productivas. Estos elementos son las cuestiones iniciales de la actividad propuesta y del debate y los documentos teóricos que desempeñan el papel de "andamios" cognitivos para guiar las aportaciones de los estudiantes para profesor (determinando qué mirar y cómo mirar). Estos elementos característicos del entorno de aprendizaje nos colocaban en condiciones de poder estudiar las estructuras de la argumentación que emergía. Para ello, en este entorno de aprendizaje, puesto en funcionamiento en esta investigación, el formador de profesores no realizaba valoraciones de las aportaciones de los estudiantes para profesor al debate y por consiguiente les trasladaba la responsabilidad para determinar si una conclusión debía ser o no aceptada. Esta norma explícita de funcionamiento en la discusión en línea parece que ayudó a que los estudiantes para profesor atendieran, evaluaran y cuestionaran las aportaciones de sus compañeros, posibilitando el que se dieran las oportunidades de refinar las garantías que se aportaban para aceptar una conclusión y cuestionar lo que se aportaba como una garantía. De esta manera, estos elementos del entorno de aprendizaje fueron una condición necesaria para que la discusión en línea discurriera como lo hizo, creándose de esta manera las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor.

Nosotros asumimos que crear oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor no es una tarea fácil, pero nuestra investigación ha aportado algunas características que inducen a pensar que es factible apoyar el aprendizaje y el inicio de algunas competencias docentes en los estudiantes para profesor con el diseño de entornos de aprendizaje que tengan en cuenta algunos de los elementos identificados en nuestra investigación. Sin embargo, queda todavía mucho camino que recorrer para tener aportaciones que nos permitan refinar nuestra conceptualización del aprendizaje de los estudiantes para profesor y del desarrollo de las competencias docentes necesarias para enseñar matemáticas, así como de información empírica que fortalezca la transferencia de conocimiento a los programas de formación. Por ello, la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor y sobre la relación entre el diseño de entornos de aprendizaje y las características del aprendizaje generado es una investigación potencialmente útil en estos momentos.

RECONOCIMIENTOS

1. Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto del Plan Nacional de Investigación I+D del Ministerio de Educación y Ciencia, Dirección General de Investigación, España, núm. EDU2008-04583/EDUC.
2. Una versión previa de este trabajo fue presentado en el XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), realizado en Lérida, España, en septiembre de 2010; así como en la Con-

ference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, en Belo Horizonte, Brasil, en julio de 2010.

3. Los análisis sobre los que se ha construido este informe de investigación fueron iniciados por el primer autor durante una estancia de investigación posdoctoral en la Universidad Pedagógica Nacional, en la Ciudad de México.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andriessen, L., G. Erkens, C. van de Laank, N. Peters y N. Coirier (2003), "Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing", en J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (eds.), *Arguing to learn: confronting cognition in computers-supporters collaborative learning environment,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 79-115.

Brantlinger, A., M. G. Sherin y K. A. Linsenmeier (2011), "Discussing discussion: a video club in the service of math teachers' National Board preparation", *Teachers and Teaching. Theory and Practice,* vol. 17, núm. 1, pp. 5-33.

Callejo, M. L., S. Llinares y J. Valls (2008), "Using video-case and online discussion to learn to "notice" mathematics teaching", en O. Figueras y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter,* Morelia, Michoacán, México, PME, vol. 2, pp. 233-240.

Cobb, P. y H. Bauersfeld (eds.) (1995), *The emergence of Mathematical meaning: interaction in classroom cultures,* Hillsdale, NJ, Erlbaum.

De Wever, B., T. Schellens, M. Valcke y H. van Keer (2006), "Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups: a review", *Computers and Education,* núm. 46, pp. 6-28.

Douek, N. (2005), "Communication in the Mathematics classroom. Argumentation and Development of Mathematical Knowledge", en A. Chronaki e I. M. Christiansen (eds.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication,* Greenwich, IA, pp. 145-172.

Eraut, M. (1996), *Developing Professional Knowledge and Competence,* Londres, The Falmer Press.

Gómez Blancarte, A. L. (2010), *Un estudio sobre el aprendizaje de profesores de secundaria en servicio: el caso de un proyecto de desarrollo profesional en estadística,* Tesis doctoral inédita, Departamento de Matemática Educativa,

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN-Cinvestav, México, D. F., México.
Jacobs, V. R., L. L. Lamb y R. A. Philipp (2010), "Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 41, núm. 2, pp. 169-202.
Knott, L. (ed.) (2009), *The role of Mathematics discourse in producing leaders of discourse*, Charlotte, NC, Information Age Publishing.
Krummheuer, G. (1995), "The Ethnography of Argumentation", en P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 229-270.
Lampert, M. (2003), "Communication and language", en J. Kilpatrick, W. Gary y D. Schifter (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp. 237-249.
Lin, P. J. (2005), "Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching", *International Journal of Science and Mathematics Education*, núm. 3, pp. 351-377.
Llinares, S. (2009), "Learning to 'notice' the mathematics teaching. Adopting a socio-cultural perspective on student teachers' learning", en A. Gomes (coord.), *EME2008 Elementary Mathematics Education*, Braga, Portugal, Barbosa y Xavier, pp. 31-44.
Llinares, S. y F. Olivero (2008), "Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers: technologies, interactions and new forms of discourse", en K. Krainer y T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Education, vol. 3. Participants in Mathematics Teacher Education*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 155-179.
Llinares, S. y J. Valls (2009), "The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies", *Instruction Science*, núm. 37, pp. 247-271.
——— (2010), "Prospective primary mathematics teachers' learning from online discussions in a virtual video-based environment", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 13, pp. 177-196.
Llinares, S., J. Valls y A. I. Roig (2008), "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 59-82.
Mason, J. (2002), *Researching your own practice. The discipline of noticing*, Londres, Routledge-Falmer.

Morris, A. (2006), "Assessing pre-service teachers' skills for analyzing teaching", *Journal of Mathematics Teacher Education,* núm. 9, pp. 471-505.
NCTM (2003), *Principios y estándares para la Educación Matemática,* Reston, VA, NCTM (traducción al castellano: SAEM-Thales, Sevilla).
Penalva, M. C., C. Rey y S. Llinares (2011), "Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto *b-learning* en didáctica de la matemática", *Revista Española de Pedagogía,* vol. LXIX, pp. 101-118.
Prieto, J. L. y J. Valls (2010), "El aprendizaje de estudiantes para maestro de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva. Negociación e instrumentalización", *Educación Matemática,* vol. 22, núm. 1, pp. 57-85.
Sfard, A. (2001), "There is more to discourse that meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 46, pp. 13-57.
Sherin, M. G. (2001), "Developing a professional vision of classroom events", en T. Wood, B. Scott Nelson y J. Warfield (eds.), *Beyond classical pedagogy: teaching elementary school mathematics,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 75-93.
Silver, E. A., y M-S. Smith (1996), *"Building discourse communities in mathematics classrooms: a worthwhile but challenging journey",* en P. C. Elliot y M. J. Kenney (eds.), *Communication in Mathematics. K-12 and Beyond,* Reston, VA, NCTM, pp. 20-28.
Sowder, J. (2007), "The Mathematical Education and Development of Teachers", en F. Lester Jr. (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Charlotte, NC y Reston, VA, IAP-NCTM, pp.157-224.
Star, J. R. y S. K. Strickland (2008), "Learning to observe: using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice", *Journal Mathematics Teacher Education,* vol. 11, núm. 2, pp. 107-125.
Stein, M. K., R. A. Engle, M. Smith y E. Hughes (2008), "Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell", *Mathematical Thinking and Learning,* núm. 10, pp. 313-340.
Torregrosa G., M. J. Haro, M. C. Penalva y S. Llinares (2010), "Concepciones del profesor sobre la prueba y *software* dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje", *Revista de Educación,* vol. 352, núm. mayo-agosto, pp. 379-404.
Toulmin, S. (2007), *Los usos de la argumentación,* Barcelona, Ediciones Península.

Valls, J. y S. Llinares (2011), "Aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", en J. M. Goñi (coord.), *Matemáticas. Didáctica y práctica docente,* Barcelona, Graó.

Van Es, E. y M. G. Sherin (2002), "Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions", *Journal of Technology and Teacher Education,* núm. 10, pp. 571-596.

Weber, K., C. Maher, A. Powell y H. Stohl Lee (2008), "Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 68, pp. 247-261.

Wells, G. (2002), *Dialogic inquiry. Towards a socio-cultural practice and theory of education,* 2a. ed., Cambridge, Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998), *Communities of practice. Learning, meaning, and identity,* Nueva York Cambridge University Press.

Wertsch, J. y Ch. Toma (1995), "Discourse and Learning in the Classroom. A Sociocultural Approach", en L. Steffe y J. Gale (eds.), *Constructivism in Education,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 159-174.

Wood, T. (1998), "Alternative patterns of communication in the mathematics classes: funnelling or focusing?", en Steinbring y cols. (eds.), *Language and communication in the Mathematics Classroom,* Reston, VA, NCTM, pp. 167-178.

DATOS DE LOS AUTORES

Ana Isabel Roig
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
aroigal@hotmail.com

Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
sllinares@ua.es

M. C. Penalva
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
carmina.penalva@ua.es

Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula

Javier Peralta

Resumen: En este artículo se analizan algunas conexiones entre matemáticas y música; concretamente, se trata de descubrir cuál es la estructura matemática subyacente en los sistemas de afinación pitagórico, de Zarlino y de Delezenne, en los que los valores de las notas pueden expresarse mediante números racionales. Se presenta una propuesta para el aula, basada en una metodología activa, para que los alumnos puedan obtener una modelización matemática de dichos sistemas. También se estudian algunas relaciones entre los modelos matemáticos hallados.

Palabras clave: sistemas de afinación, Pitágoras, Zarlino, Delezenne, razón, sucesión, término general, modelo matemático.

Mathematical models of the Pythagorean tuning system and some of their consequences: a proposal for the classroom

Abstract: In this article we analyze some connections between mathematics and music; specifically, we try to find out what is the underlying mathematical structure to the Pythagorean, Zarlino and Delezenne tuning systems, in which note values can be expressed by rational numbers. We introduce a proposal for the classroom, based on an active methodology, so that students can obtain a mathematical modeling of the above-mentioned systems. Also, some relations between this mathematics models are studied.

Keywords: tuning systems, Pythagoras, Zarlino, Delezenne, ratio, sequence, general term, mathematic model.

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad se ha admitido la existencia de una estrecha relación entre música y matemáticas. Es más, en la cultura helénica, la música era considerada

Fecha de recepción: 3 de mayo de 2010

como una disciplina matemática que se ocupaba de relaciones entre números, razones y proporciones.

Por otro lado, las dos –música y matemáticas– han formado parte del *quadrivium* pitagórico, que, junto con el *trivium*, constituyen las *artes liberales* ([véase, por ejemplo, (Peralta, 2008, pp. 93-94)]: las siete ramas del saber humanístico (en contraposición con el saber teológico), base de la enseñanza durante más de dos mil años. El *trivium* estaba integrado por la gramática, la retórica y la lógica o la dialéctica, mientras que el *quadrivium* lo componían la aritmética (estudio de "los números en reposo"), la geometría ("las magnitudes en reposo"), la música ("los números en movimiento") y la astronomía ("las magnitudes en movimiento").

En cualquier caso, la conexión entre música y matemáticas se ha mantenido a lo largo de los siglos, y ha sido puesta de manifiesto tanto en distintos tratados de música escritos por ilustres figuras de las matemáticas (Descartes, Mersenne, Euler, D'Alembert, ...), como a través de las obras de distintos maestros de la música, que no sólo han recurrido a las matemáticas para explicar algunos de sus aspectos (Bach, Mozart, Chopin, Rossini, ...), sino que, incluso, han empleado a las matemáticas para crear música (Bartók y la razón áurea, música estocástica de Xenakis, Fibonacciana de Halfter, etcétera).

En las siguientes páginas analizaremos algunos sistemas de afinación. Los principales son el pitagórico, los de justa entonación (el más importante de ellos es el de Zarlino, y luego posiblemente el de Delezenne) y los temperamentos cíclicos regulares (temperado y de Holder). Los instrumentos de tecla y arpa, los de cuerda con trastes en el mástil y los de soplo humano con mecanismos de agujeros, llaves, pistones..., se afinan en el sistema temperado; los de soplo humano, cuyos sonidos se producen sólo mediante la presión labial (clarín y cornetín de órdenes), en el de Zarlino; en los instrumentos de cuerda sin trastes en el mástil y en la voz humana, la afinación queda determinada libremente por el intérprete, aunque en la mayoría de los casos suele responder a los principios de Pitágoras y Holder (Zamacois, 1975, p. 156); mientras que el sistema de Delezenne no se utiliza actualmenteen la actualidad.

Estudiaremos, en concreto, aquellos sistemas en que los valores de las notas –como veremos– pueden expresarse con números racionales: el pitagórico y los de Zarlino y Delezenne (que en realidad son variaciones del primero), para encontrar sus estructuras matemáticas subyacentes, así como las relaciones entre ellas; trataremos, en fin, de modelizar matemáticamente dichos sistemas. A este respecto hemos de recordar que el quehacer matemático se ocupa muchas veces de los procesos de modelización, y su importancia es también innegable desde una perspectiva educativa, pues tales acciones pueden constituir una excelente herramienta para el aprendizaje significativo (Castro y Castro, 1997, p. 110).

En cuanto a su enfoque metodológico y didáctico, pensamos que el trabajo sería adecuado para su presentación en un primer curso universitario de una licenciatura en una facultad de ciencias o ingeniería, o acaso también en el último año de la enseñanza secundaria. Se darán para ello algunas sugerencias sobre cómo llevarlo a cabo en clase (sin embargo, como es obvio, serán los profesores correspondientes quienes habrán de decidir sobre su supuesta pertinencia y, en cualquier caso, acerca de cuál sería la presentación más adecuada). Se ofrecen, así, una serie de posibles cuestiones –generalmente problemas– que se podrían ir planteando a los alumnos, para que, paso a paso, vayan descubriendo cuál es la estructura matemática latente en los sistemas de afinación mencionados.

Nuestro proyecto de aula se fundamenta en dos premisas: enseñanza por descubrimiento, guiada, y trabajo de los estudiantes en grupos.

Respecto de la primera, digamos que trataremos de conseguir nuestro objetivo (modelización matemática de sistemas de afinación) mediante una participación activa de los alumnos; por tanto, no se expondrán por tanto los conocimientos de forma manera dogmática, sino que se procurará que sean descubiertos por aquéllos. Este tipo de enseñanza vincula factores cognitivos y afectivos (Orton, 1990, p. 109), lo que puede generar interés hacia la matemática, que así aparece más como un proceso en cuya construcción ellos intervienen, que en un producto acabado. El procedimiento, pues, participa de una metodología heurística, aunque ciertamente no de forma manera completa, ya que no se plantea una cuestión abierta en la que el alumno disfrute de una plena libertad de acción para su resolución, sino que su actividad será guiada por el profesor.

En cuanto a la segunda premisa, se propondrán gradualmente las preguntas (problemas) que aparecerán a lo largo del artículo (se indicarán señalarán en cursiva, precedidas de la letra P). Creemos que la mejor forma manera de llevarlo a cabo es distribuyendo a los alumnos en grupos, que irán desarrollando el trabajo bajo la guía del profesor (aunque, por supuesto, también cabría plantearlos individualmente), como consecuencia de la riqueza didáctica que conlleva este tipo de enseñanza. Así, la enseñanza en grupos propicia el trabajo creativo; permite experimentar estrategias de colaboración; prima comportamientos cooperativos frente a competitivos; fomenta el diálogo y el debate y el respeto por las opiniones ajenas, estimula la formulación de hipótesis, las demandas de explicación o justificación, la aparición y confrontación de diferentes puntos de vista –a veces conflictos, que pueden facilitar un aprendizaje real– y crea situaciones en las que se potencia la toma de decisiones; favorece en los demás el aprendizaje de los resultados obtenidos por algunos alumnos o grupos –debido a la cercanía intelectual entre ellos–, a la vez que repercute positivamente en sus autores, quienes que precisan afianzar sus descubrimientos y mejorar su expresión para hacerse entender con claridad; etc. Por otra parte, hay que tener en cuenta que el grupo no es el resumen de la suma de los individuos que lo componen, sino que tiene una dinámica propia: cabe ser concebido como un campo de fuerzas en interacción (Bouvier et aly cols., 1986, p.103), lo que puede suponer una ayuda para el descubrimiento (y para la socialización) del alumno, particularmente en un caso poco habitual como éste (al menos al principio), con la dificultad o extrañeza que acaso conlleve tratar nociones musicales con herramientas matemáticas nociones musicales, tan alejadas de aquel campo.

Respecto del tamaño de los grupos, pensamos que no debe ser muy numeroso, pues sería más difícil de gestionarse, y, además, algunos de sus miembros podrían ir acostumbrándose paulatinamente a que trabajaran los demás; y así mismo, tampoco parece oportuno, por razones obvias, que estuviera compuesto por dos personas. Así que creemos que el mejor número mejor (Herrán y Paredes, 2011) creemos que es de cuatro, pues permite, además, un trabajo por parejas; o quizás de tres, aunque en este último supuesto puede desembocar en una pareja y un aislado ([véase también (Caplow, 1974)].

Para concluir, a todo lo anterior, hemos de añadir otro aspecto, no tan crucial como los otros en este caso, pero que también se ha considerado: el poder de la utilización de representaciones gráficas, simbólicas o esquemáticas, en el aprendizaje de las matemáticas y en el proceso de descubrimiento. En este sentido, como se verá, se ha propiciado la construcción de esquemas como generadores de objetos mentales (Castro y Castro, 1997, p. 96) y asimismo, en esta ocasión, de elementos de comparación y de síntesis de los sistemas de afinación estudiados.

NOTAS MUSICALES

Si se acorta la longitud de una cuerda musical, vibrará con un número mayor de oscilaciones; en particular, si se reduce a la mitad, el sonido producido al pulsarla es muy similar al que emitía la cuerda entera: es la misma nota, pero se dice que está una octava más alta. Entre ambas notas existe entonces una escala completa, lo que significa que la frecuencia de la última nota es justamente el doble de la frecuencia de la primera; por tanto, las frecuencias de las notas son inversamente proporcionales a las longitudes de las cuerdas.

Particularizando con una guitarra, uno de los instrumentos musicales más conocidos por los alumnos, se puede hacer el siguiente experimento: se toca al aire, por ejemplo, la primera cuerda, y luego se pide a los alumnos que vayan pisando cada traste de esa primera cuerda hasta que escuchen un sonido de características similares al primero, aunque, claro está, sea más agudo. Si se tiene un buen oído, se observará notará que eso sucede al pisar el traste número 12: si la guitarra está bien afinada, ambos sonidos corresponden a la nota *Mi*, aunque el segundo sonido está una octava más alta que el primero (su frecuencia es el doble). Se pide entonces que midan la distancia del puente del mástil al puente de la caja, y luego, la distancia del traste número 12 al puente de la caja. ¿Qué se deduce?: que la primera longitud es el doble de la segunda (los constructores de guitarras deben colocar el traste 12 justamente en el punto medio del listón que une los dos puentes).

En general, si una cierta nota tiene una frecuencia f, la misma nota en la octava superior tiene frecuencia $2f$, luego entonces, la determinación de una octava musical viene dada por una partición del intervalo $[f, 2f)$; y, por duplicaciones o divisiones sucesivas entre 2, se obtienen las demás octavaciones de la escala. En las siguientes líneas se darán los pasos para trabajar únicamente en el intervalo $[1, 2)$.

Si en el conjunto $F \subset \mathbb{R}^+$ de las frecuencias de todos los sonidos se define la siguiente relación binaria (de equivalencia):

$$f \sim f' \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} / f' = 2^n \cdot f$$

cada clase de equivalencia módulo $\sim$ es un subconjunto de la forma: $\{2^n \cdot f, n \in \mathbb{Z}/\}$. Por otra parte, si f' pertenece a una cierta clase $\{2^n \cdot f, n \in \mathbb{Z}\}$, como todo número, y f' en particular, está comprendido entre dos potencias sucesivas de 2: $2^n \leq f' < 2^{n+1}$, también será $1 \leq 2^{n-1} \cdot f' < 2$; esto es, existe siempre un representante único de la clase prefijada en el intervalo $[1, 2)$.

Trabajaremos entonces en el conjunto cociente $F' = F/\sim$; o sea, consideraremos que la frecuencia de las notas de la escala musical son números pertenecientes al intervalo $[1, 2)$. En el caso de que una determinada frecuencia no estuviera en ese intervalo, elegiríamos un representante en él mismo multiplicando o dividiendo por una potencia conveniente de 2.

En lo sucesivo, como es habitual, asignaremos a *Do* el valor 1.

Por otra parte, como es sabido, a partir de las notas musicales se forman las escalas, siendo la escala natural la siguiente: *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*. En Occidente, la distancia mínima que suele considerarse es la de un semitono (medio tono), que en la escala natural se da entre las notas *Mi* - *Fa* y *Si* - *Do'* (*Do'* es *Do* de la siguiente octava), mientras que la distancia entre otras dos notas cualesquiera consecutivas es de un tono.

Existen asimismo los denominados intervalos o distancias entre dos notas cualesquiera, que se nombran contando el número de ellas que median entre ambas, incluyendo a lasincluidas ellas mismas (entre dos notas consecutivas existe una segunda, entre cinco consecutivas una quinta, etc.). A cada intervalo se le asigna una fracción: el cociente entre los valores correspondientes a su extremo (nota más aguda) y su origen (nota más grave), y la fracción (siempre mayor que 1) significa la razón de vibraciones existente entre ambas notas. Cuando un intervalo es unión (suma) de dos, su fracción es el producto de las fracciones correspondientes a cada uno de ellos, mientras que la fracción de la diferencia (en sentido conjuntista) de dos intervalos es su cociente.

Por otra parte, en cada intervalo de un tono, entre dos notas inmediatas (esto es, entre *Do* - *Re, Re* - *Mi, Fa* - *Sol, Sol* - *La* y *La* - *Si*) hay una entonación intermedia que divide eal tono en dos semitonos, dando lugar a las alteraciones: *sostenido* (#) y *bemol* (Ь). El sostenido de una nota corresponde a un semitono más alto que la mismaella y el bemol a un semitono más bajo. Las notas de la escala natural (*Do, Re* ...) se llaman *diatónicas,* y las correspondientes a sus alteraciones (*Do#, Re*Ь ...) se denominan *cromáticas*.

LA GAMA PITAGÓRICA

Para los pitagóricos, el número era el principio de todas las cosas, y esa filosofía fue se extendió extendida también a la música, estableciéndose así los fundamentos de una teoría musical, base de todas las posteriores en Occidente, y en la que aún se asienta aún nuestro sistema musical actual. A partir de un experimento realizado mediante una cuerda vibrante de longitud L en un aparato,: el monocordio (González, 2001, p. 130), establecieron las relaciones existentes entre la armonía musical y los números. En concreto, llegaron a la conclusión de que, al pulsar la cuerda musical tensada, los únicos sonidos consonantes con él eran los que se producían cuando la cuerda tenía las longitudes $L/2$ (octava), $2L/3$ (quinta) o $3L/4$ (cuarta).

En González (2001, p. 130) y Guzmán (1986, pp. 31-34), por ejemplo, se sugiere cómo hallar los valores de las notas musicales a partir del experimento realizado por Pitágoras en el monocordio y, finalmente, en Sole, (1982, pp. 22-25), se calculan los valores de las notas de la escala diatónica haciendo intervenir a las medias aritmética y armónica. En Orantes (1983, pp. 90-91), se deducen como consecuencia del hecho de que los sonidos de la gama pitagórica se obtienen por encadenamiento de quintas (Zamacois, 1975, p. 1975) y en Peralta (2003, pp. 446-449) se calculan por ambos procedimientos.

Con ese último principio y la revisión de las nociones elementales sobre música que se vieron en la sección anterior (asignando a *Do* el valor 1, como ya se ha dicho), cabría plantear a los alumnos distribuidos en grupos, la siguiente cuestión:

- *P. Halla los valores de las notas de la escala diatónica.*
  La quinta de *Do* es *Sol*, luego por tanto, el valor de *Sol* es 3/2. Su quinta es *Re'*, por tanto a *Re'* le corresponde 9/4, y a *Re*, su reducción, el intervalo [1, 2), esto es, 9/8,. Eetcétera.

Los valores de las notas son, pues, los siguientes:

Do: 1 *Re*: 9/8 *Mi*: 81/64 *Fa*: 4/3 *Sol*: 3/2 *La*: 27/16 *Si*: 243/128

- *P. ¿Existe alguna relación entre los valores de una nota y su precedente?*
  El cociente es 9/8 = 1.125, salvo en los casos *Mi-Fa* y *Si-Do'* en los que es $\lambda = 256/243 = 2^8/3^5 = 1.0534979$, razón a la que Platón llamó *leima* o *remanente*. Los intervalos relativos al primer caso corresponden al tono y, en el segundo caso, al semitono, al que llamaremos *semitono diatónico*. Ahora bien, de la existencia de alteraciones en los intervalos de un tono, surge otro semitono. Es el *semitono cromático*, que corresponde a los intervalos determinados por una nota y su sostenido o el bemol de una nota y dicha nota, y que el cual se define como la diferencia entre el tono y el semitono diatónico. Tiene, por tanto, asignada la fracción:

$$(9/8) : (256/243) = 2187/2048 = 3^7/2^{11} = 1.,0678711$$

- *P. Calcula los valores de las notas cromáticas.*
  Se obtienen a partir de:

Figura 1

$$N \xrightarrow{\times\, 3^7/2^{11}} N\,\# \quad (N \neq Mi,\ Si) \qquad\qquad Nb \xleftarrow{::3^7/2^{11}} N \quad (\ N \neq Fa,\ Sol)$$

Valores de los sostenidos y bemoles en la gama pitagórica

Expresando los valores de todas las notas en sentido creciente y ordenándolas como potencias, se tiene finalmente:

Cuadro 1

Do	*Re*Ь	*Do#*	*Re*	*Mi*Ь	*Re#*	*Mi*	*Fa*	*Sol*Ь
1	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$2^5/3^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	$2^{10}/3^6$

Fa#	*Sol*	*La*Ь	*Sol#*	*La*	*Si*Ь	*La#*	*Si*
$3^6/2^9$	$3/2$	$2^7/3^4$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$2^4/3^2$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$

Valor de las notas en la gama pitagórica

- *P. ¿Qué intervalos existen? Haz un esquema para representarlos.*
  Para averiguar si se han sido puestos de manifiesto todos los intervalos, se halla la razón entre cada nota y su precedente., Resulta que todos los intervalos corresponden a la *leimma,* salvo *Re*Ь*-Do#, Mi*Ь*-Re#, Sol*Ь*-Fa#, La*Ь*-Sol#,* y *Si*Ь*-La#*. Su valor, $3^{12}/2^{11}$, es precisamente el siguiente cociente:

$$(2187/2048) : (256/243) = 531441/524288 = 3^{12}/2^{19} = 1.,0136432$$

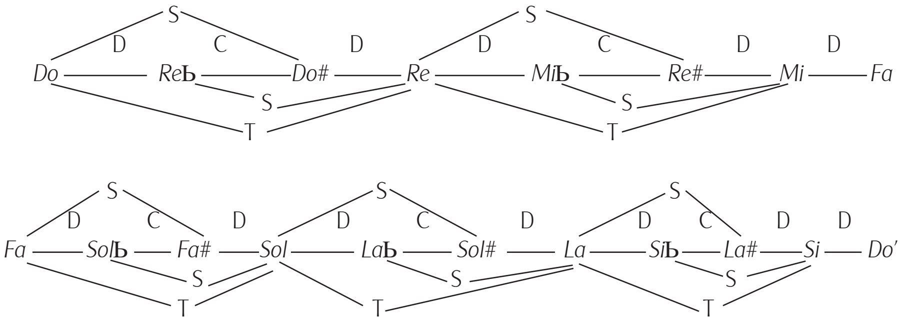
EAl intervalo correspondiente a esa razón se le denomina *coma pitagórica* y se obtiene, puespor tanto, como diferencia entre el semitono cromático y el semitono diatónico.

Existen, pues, los siguientes intervalos:

- Tono (T): $3^2/2^3$.
- Semitono cromático (S): $3^4/2^{11}$.
- Semitono diatónico (D): $= 2^8/3^5$
- Coma pitagórica (C): $3^{12}/2^{19}$

Esquemáticamente pueden representarse así:

Figura 2



Intervalos en la gama pitagórica

Volvamos al cuadro 1. A partir de ahora vamos a crear una "organización matemática" conveniente, y, para ello, planteamos lo siguiente:

- *P. Ordena las notas según las potencias (crecientes) de 3, y luego de 2. ¿Qué observas? Desígnalas como los términos (primeros) de una sucesión.*

La ordenación según las potencias de 3 (crecientes) y una posible notación se indican a continuación. Si se hace con respecto a las potencias de 2 (crecientes), la ordenación es justamente la contraria.

$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^7}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$
Sol♭	*Re*♭	*La*♭	*Mi*♭	*Si*♭	*Fa*	*Do*	*Sol*	*Re*	*La*	*Mi*	*Si*	*Fa#*	*Do#*	*Sol#*	*Re#*	*La#*
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}

- *P. Multiplica cada término de la sucesión por 3/2 y, si fuera necesario, reduce al intervalo [1, 2). ¿Qué observas?*

Si se multiplica cada término por 3/2 se tiene la cadena:

$$p_1 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_{16} \longrightarrow p_{17} \qquad (1)$$

en donde la flecha quiere indicarseñala que, para pasar de un término al siguiente, hay que multiplicar por 3/2. En lenguaje musical, significa lo que ya sabíamos: que la gama pitagórica se obtiene por encadenamiento de quintas.

Cabría hablar, por último, de elemento generador:

- *P. ¿Es posible expresar el valor de cada una de las notas como potencia de una determinada? ¿También de su inversa?*

El valor de cada nota puede hallarse multiplicando por 3/2 el valor de la nota anterior; pero 3/2 es también el valor de una nota (p_8). Se deduce que:

$$p_1 = p_8^{-6}, \quad p_2 = p_8^{-5}, \quad p_3 = p_8^{-4}, \quad p_7 = p_8^{0}, \quad p_8 = p_8^{1}, \quad ..., \quad p_{17} = p_8^{10}$$

Esto es:

$$p_n = p_8^{n-7} \qquad 1 \leq n \leq 17 \tag{2}$$

lo que permite decir que los valores de las diecisiete notas de la escala pitagórica están generados por p_8 (valor de *Sol*).

Teniendo en cuanta que p_8^{-1} es 2/3, cuyo representante en [1, 2) es 4/3 = p_6 (valor de *Fa*), asimismo podría escribirse el esquema (1,) cambiando el sentido de las flechas, y entendiendo que se pasa de un término al siguiente multiplicando por 4/3. De igual modo, se tiene:

$$p_n = p_6^{7-n} \qquad 1 \leq n \leq 17 \tag{2'}$$

y podría decirse también que la gama pitagórica está generada por p_6 (valor de *Fa*).

EL SISTEMA DE ZARLINO

Durante el siglo XVI hubo varios intentos por modificar la escala pitagórica, a la vista de lo complicados que resultaban los valores de algunas notas y proporciones (Estévez, 1990, p. 135). El más importante de los reformadores fue Gioseffo Zarlino (1517-1590), maestro de coro de San Marcos de Venecia, quien en 1558 publicó *Instituciones armónicas*, en donde propuso una base matemática alternativa para la escala diatónica que supuso un adelanto en el esquema de producción de consonancias pitagóricaso (Chica, 2001). Así como los griegos habían descrito las consonancias como una consecuencia lógica de las relaciones entre los cuatro primeros números naturales: 1/2, 2/3 y 3/4 (que describen la octava, la quinta y la cuarta, respectivamente), Zarlino añade la razón 4/5 para la tercera.

El sistema de Zarlino o de Aristógenes -Zarlino se llama también sistema natural, de justa entonación (por ser el más importante de los de este tipo) o de los físicos, y se aparta del encadenamiento de quintas pitagórico. Se fundamenta en la denominada *serie armónica* (Orantes, 1983, pp. 89-90; Zamacois, 1975, pp. 134-141), a la que se ajustan las entonaciones de sus notas; aunque para deducir sus valores puede ser suficiente con saber que está se basado en la existencia de acordes mayores formados cada uno de ellos por tres notas cuyos sonidos simultáneos son agradables al oído y cuyas frecuencias son proporcionales a los números 4, 5 y el número perfecto 6; de modo, que en cada acorde hay dos tonos entre la primera y la segunda nota, y tono y medio entre la segunda y la tercera.

- *P. Halla los valores de las notas diatónicas del sistema de Zarlino.*

En principio no se daría ninguna otra indicación, para tratar de que los grupos de alumnos desarrollaran convenientemente su imaginación y su potencial descubridor; pero transcurrido un rato, el profesor (guía) posiblemente debiera debería hacer una sugerencia si hubiera algún grupo bloqueado. Por ejemplo: *Escribe escribe las notas de la escala diatónica y considera los acordes de tres notas que verifiquen que entre la primera y segunda nota hay dos tonos, y entre la segunda y la tercera hay un tono y medio.*

Se puede representar en el siguiente esquema (Loy, 2006, p. 61). Los acordes son el de *Do* mayor (*Do, Mi, Sol*), el de *Fa* mayor *(Fa, La, Do')* y el de *Sol* mayor *(Sol, Si, Re')*:

Figura 3

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do'*	*Re'*
4	:	5	:	6	.			
			4	:	5	:	6	
				4	:	5	:	6

Proporcionalidades entre notas del sistema de Zarlino (I)

De acuerdo en con esas proporcionalidades, y partiendo de los valores conocidos de *Do* y *Do'*, llegarán a que *Mi*: 5/4, *Sol*: 3/2 , *Fa*: 4/3 , *La*: 5/3 , *Si*: 15/8, *Re'*: 9/4. Por tanto, los valores de las notas de la escala diatónica son:

Do: 1, *Re*: 9/8 , *Mi*:5/4 , *Fa*: 4/3 , *Sol*: 3/2 , *La*: 5/3 , *Si*: 15/8

- *P. ¿Existe alguna relación entre los valores de una nota y su precedente?*

El cociente es 9/8 entre *Do-Re* , *Fa-Sol* y *La-Si* ; 10/9 entre *Re-Mi* y *Sol-La* y 16/15 entre *Mi-Fa* y *Si-Do'*. Los intervalos relativos se llaman *tono grande, tono pequeño* y *semitono diatónico correspondiente a tono pequeño,* respectivamente. La diferencia entre el tono grande y el tono pequeño: (9/8): (10/9) = 81/80, se denomina *coma sintónica*.

- *P. Basándote en la razón existente entre los valores correspondientes a las notas que difieren en dos tonos, calcula los valores de La***ЬЬ***, Mi***ЬЬ***, Sol# y Do#*.

Se tiene:

Figura 4

*La***Ь**	*La*	*Si*	*Do*	*Re*	*Mi***Ь**	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*Sol#*	*La*	*Si*	*Do'*	*Do'#*
4	:		5										
					4	:		5					
						4	:		5				
											4	:	5

Proporcionalidades entre notas del sistema de Zarlino (II)

De donde se deduce que *La***Ь** : 8/5, *Mi***Ь**: 6/5, *Sol#* : 25/16, *Do#* : 25/24.

Para hallar el valor de las notas que faltan, podemos hacer el siguiente planteamiento:

- *P. ¿Observas alguna relación entre el valor de una nota de la escala diatónica y los de su sostenido y su bemol? Halla los valores de las notas restantes.*

Los valores de *Sol#* y *Do#* son los de *Sol* y *Do,* respectivamente, multiplicados por 25/24; los de *La***Ь** y *Mi***Ь**, son los de *La* y *Mi* respectivamente, divididos entre 25/24. Si *N* es una nota de la escala diatónica, cada uno de los intervalos *N-N#, N***Ь** *-N,* se denomina *semitono cromático*. Se tiene:

Figura 5

$N \xrightarrow{\times 25/24} N\#$ (*N* ≠ *Mi*, *Si*) $N\text{Ь} \xleftarrow{:25/24} N$ (*N* ≠ *Fa*, *Sol*)

Valores de los sostenidos y bemoles en el sistema de Zarlino

Se deduce que *Re#* : 75/64, *Fa#* : 25/18, *La#*: 125/72, *Sol*Ь : 36/25, *Si*Ь : 9/15, *Re*Ь : 27/25.

Procede, no obstante, hacer una aclaración. Para asignar los valores a *Re*Ь y *Fa#*, también se podría haber seguido el siguiente criterio: entre *Re*Ь y *Fa* y entre *Re* y *Fa#* hay dos tonos, luego por tanto, los valores x de *Re*Ь e *y* de *Fa#* tendrían que cumplir:

$$4/x = 5/(4/3) \qquad 4/(9/8) = 5/y$$

lo que conduce a: x = 16/15 , *y* = 45/32. Esta irregularidad en el sistema de Zarlino produce un error (aunque muy pequeño y prácticamente inapreciable para el oído): el cociente de los dos valores que cabría fijar para *Re*Ь (el real y el posible) y para *Fa#* (el posible y el real), es la coma sintónica:

$$(27/25) : (16/15) = (45/32) : (25/18) = 81/80$$

Los valores de todas las notas en este sistema vienen recogidas en el siguiente cuadro:

Cuadro 2

*Re*Ь	*Do#*	*Re*Ь	*Re*	*Re#*	*Mi*Ь	*Mi*	*Fa*	*Fa#*
1	$5^2/(2^3 \cdot 3)$	$3^3/5^2$	$3^2/2^3$	$3{\cdot}5^2/2^6$	$2{\cdot}3/5$	$5/2^2$	$2^2/3$	$5^2/(2 \cdot 3^2)$

*Sol*Ь	*Sol*	*Sol#*	*La*Ь	*La*	*La#*	*Si*Ь	*Si*
$2^2 \cdot 3^2/5^2$	$3/2$	$5^2/2^4$	$2^3/5$	$5/3$	$5^3/(2^3 \cdot 3^2)$	$3^2/5$	$3 \cdot 5/2^3$

Valor de las notas en el sistema de Zarlino

A partir de aquí se realizará un estudio similar al que se hizo con la gama pitagórica.

- *P. ¿Qué intervalos existen en el sistema de Zarlino? Haz un esquema para representarlos.*

Hallando el cociente entre una nota y su precedente se tienen los siguientes intervalos:

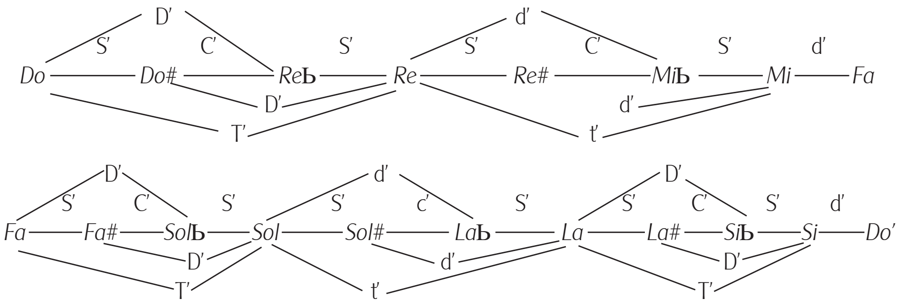
- Entre *Mi-Fa* y *Si-Do* está el semitono diatónico (24/15), como ya se sabía.
- Intervalos deducidos de los tonos pequeños (*Re- Mi, Sol- La*) sustituyendo uno de sus extremos por sus posibles alteraciones. La razón es 16/15: semitono diatónico pequeño.
- Intervalos deducidos de tonos grandes sustituyendo uno de sus extremos por posibles alteraciones. La razón es 27/25 y el intervalo se llama *semitono diatónico correspondiente a tono grande*.
- Quedan además cinco intervalos. Por una parte, *Mi*♭ - *Re#* y *La*♭ - *Sol#*, cuya razón es 128/125 y, por otra, *Re*♭ - *Do#*, *Sol*♭ - *Fa#* y *Si*♭ - *La#*, de razón 648/625. Los intervalos correspondientes se denominan *comas de Zarlino* (intervalos existentes entre el bemol de una nota y el sostenido de la anterior) correspondientes, respectivamente, a un tomo pequeño o a un tono grande (según lo sea el tono entre aquéllas).

En resumen, en este sistema existen los siguientes intervalos:

- Tono
  - grande (T') : $3^2/2^3$
  - pequeño (t') : $2 \cdot 5/3^2$
- Semitono cromático (S') : $5^2/(2^3 \cdot 3)$
- Semitono diatónico correspondiente a
  - tono grande (D') : $3^3/5^2$
  - tono pequeño (d') : $2^4/(3 \cdot 5)$
- Coma correspondiente a
  - tono grande (C') : $2^3 \cdot 3^4/5^4$
  - tono pequeño (c') : $2^7/5^3$

Esquemáticamente puede representarse así:

Figura 6



Intervalos en el sistema de Zarlino

- *P. Escribe las diecisiete notas del sistema de Zarlino como producto de potencias, de modo análogo a como se hizo con la gama pitagórica. ¿Se puede pasar de un valor al siguiente multiplicando por un mismo número?*

$\frac{2^2\cdot 3^2}{5^2}$	$\frac{3^2}{5^2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{2\cdot 3}{5}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{2^2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$	$\frac{5^2}{2\cdot 3^2}$	$\frac{5^2}{2^2\cdot 3}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{3\cdot 5^2}{2^6}$	$\frac{5^3}{2^3 3^2}$
Sol♭	*Re♭*	*La♭*	*Mi♭*	*Si♭*	*Fa*	*Do*	*Sol*	*Re*	*La*	*Mi*	*Si*	*Fa#*	*Do#*	*Sol#*	*Re#*	*La#*
z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}

Ahora los términos son productos de potencias de 2, 3 y 5 (no sólo de 2 y 3). Como no siempre es la misma potencia de 5, es evidente que no se puede pasar de un término al siguiente multiplicando por 3/2 (y reduciendo si fuera necesario al intervalo [1, 2), al menos en todos los casos. Se observa sin embargo que sí sucede para los términos consecutivos en los que no varía la potencia de 5. En los otros:

$$z_2 \to z_3 \qquad z_5 \to z_6 \qquad z_9 \to z_{10} \qquad z_{12} \to z_{13} \qquad z_{16} \to z_{17}$$

se pasa de uno al siguiente multiplicando por 40/27 o 20/27, que, reducidos al intervalo [1, 2) es $q = 40/27$, a lo que se denomina *quinta sintónica*. Obsérvese, por otra parte, que la quinta 3/2 (que para distinguirla suele llamarse *quinta natural*) y la quinta sintónica difieren en muy poco (menos de 0.02).

Se tiene por tanto:

$$z_1 \to z_2 \xrightarrow{q} z_3 \to z_4 \to z_5 \xrightarrow{q} z_6 \to z_7 \to z_8 \to z_9 \xrightarrow{q} z_{10} \to z_{11} \to z_{12} \xrightarrow{q} z_{13} \to z_{14} \to z_{15} \to z_{16} \xrightarrow{q} z_{17} \qquad (3)$$

en donde debe entenderse que para pasar de un término al siguiente se ha multiplicado por la quinta natural, 3/2, si no se ha escrito nada encima de la flecha, y por la quinta sintónica, $q = 40/27$, si aparece q sobre la flecha correspondiente.

Podría decirse entonces que el sistema de Zarlino se obtiene por el encadenamiento de las quintas natural y sintónica.

- *P. Expresa el valor de cada una de las notas como potencia de una misma nota y la coma sintónica.*

$$z_9 = z_8 \cdot 3/2 = z_8{}^2 \quad , \quad z_{10} = z_9 \cdot q = z_8{}^2 \cdot q \quad , \quad \text{etcétera.}$$

y en general:

$$\begin{cases} z_8{}^{n-5} \cdot q^{-2} & , \ 1 \leq n \leq 2 \\ z_8{}^{n-6} \cdot q^{-1} & , \ 3 \leq n \leq 5 \\ z_8{}^{n-7} \cdot q^{-0} & , \ 6 \leq n \leq 9 \\ z_8{}^{n-8} \cdot q & , \ 10 \leq n \leq 12 \\ z_8{}^{n-9} \cdot q^{2} & , \ 13 \leq n \leq 16 \\ z_8{}^{n-10} \cdot q^{3} & , \ n = 17 \end{cases} \qquad (4)$$

lo que permite decir que los valores de las notas de la escala de Zarlino están generados por $\{z_8 , q\}$.

Por último, como $z_8^{-1} = 2/3$, y su representante en $[1, 2)$ es $4/3 = z_6$, podría repetirse el esquema (3) cambiando el sentido de las flechas y q por q^{-1}, y entendiendo que se pasa de un término al siguiente multiplicando por 4/3, si no se ha escrito nada encima de la flecha, y por q^{-1} en caso contrario. Los valores del sistema de Zarlino están también generados, pues, por $\{z_6 , q^{-1}\}$, y su término general es el mismo que (4), pero sustituyendo en el segundo término z_8 por z_6 y cambiando de signo sus exponentes (no los de q).

MODIFICACIÓN POR DELEZENNE DEL SISTEMA DE ZARLINO

El físico Charles Delezenne (1776-1866) modificó la afinación de Zarlino para introducir un sistema más coherente (en el que no se diera la irregularidad existente ya indicada para las notas *Fa#* y *Re♭*), con independencia de que determinados sonidos fueran más o menos agradables al oído. En primer lugar, se asignaron los mismos valores que en aquél para las notas diatónicas, luego continúan existiendo dos tonos: el *grande* (intervalos *Do-Re, Fa-Sol* y *La-Si,* cuyo valor es 9/8) y el *pequeño* (*Re-Mi* y *Sol-La,* de valor 10/9); además de un semitono, llamado *diatónico,* relativo a los intervalos *Mi-Fa* y *Si-Do,* que vale 16/15. Sin embargo, así como en el de Zarlino sólo existe un semitono cromático, pero se distingue entre dos diatónicos, en el de Delezenne sólo hay un semitono diatónico, pero se establecen dos cromáticos (Zamacois, 1975, p. 152). Son los siguientes: el *semitono cromático relativo al tono grande* (diferencia entre el tono grande y el semitono diatónico) y el *semitono cromático correspondiente al tono pequeño* (diferencia entre el tono pequeño y el semitono diatónico); sus valores correspondientes son, respectivamente:

$$(9/8) : (16/15) = 135/128 = 3^2 \_ 5/2^7 \qquad (10/9) : (16/15) = 25/24 = 5^2/(2^3 \_ 3)$$

- *P. Calcula los valores de todas las notas en el sistema de Delezenne y escríbelos en una tabla. Halla los intervalos existentes y represéntalos en un esquema.*

Hay que calcular los valores de los sostenidos y bemoles.
Si *M* y *N,* su siguiente, son dos notas de la escala diatónica, entonces:

Figura 7

M-N tono grande: $M \xrightarrow{\times 135/128} M\#$ $\qquad N\flat \xrightarrow{:135/128} N$

M-N tono pequeño: $M \xrightarrow{\times 25/24} M\#$ $\qquad N\flat \xrightarrow{:25/24} N$

Valores de los sostenidos y bemoles en el sistema de Delezenne

Una vez hallados de este modo los valores de las notas cromáticas, se tiene:

Cuadro 3

Do	*Do#*	*ReЬ*	*Re*	*Re#*	*MiЬ*	*Mi*	*Fa*	*Fa#*
1	$3^3 \cdot 5/2^7$	$2^4/(3 \cdot 5)$	$3^2/2^3$	$3 \cdot 5^2/2^6$	$2 \cdot 3/5$	$5/2^2$	$2^2/3$	$3^2 \cdot 5/2^5$

SolЬ	*Sol*	*Sol#*	*LaЬ*	*La*	*La#*	*SiЬ*	*Si*
$2^6/(3^2 \cdot 5)$	$3/2$	$5^2/2^4$	$2^3/5$	$5/3$	$3^2 \cdot 5^2/2^7$	$2^4/3^2$	$3 \cdot 5/2^3$

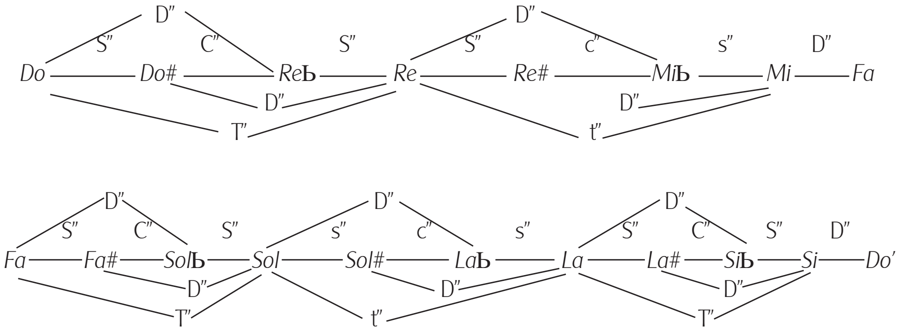
Valor de las notas en el sistema de Delezenne

Hallando los cocientes entre una nota y su precedente, resultan los siguientes intervalos:

- Tono
  - grande (T”) : $3^2/2^3$
  - pequeño (t”): $2 \cdot 5/3^2$
- Semitono diatónico (D”): $2^4/(3 \cdot 5)$
- Semitono cromático correspondiente a
  - tono grande (S”) : $3^3 \cdot 5/2^7$
  - tono pequeño (s”) : $5^2/(2^3 \cdot 3)$
- Coma correspondiente a
  - tono grande (C”) : $2^{11}/(3^4/5^2)$
  - tono pequeño (c”) : $2^7/5^3$

Esquemáticamente puede representarse así:

Figura 8



Intervalos en el sistema de Delezenne

- *P. Escribe los valores de las notas como producto de potencias y desígnalas como términos de una sucesión. ¿Qué observas?*

$\frac{2^6}{3^2\cdot 5}$	$\frac{2^4}{3\cdot 5}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{2\cdot 3}{5}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$	$\frac{3^2\cdot 5}{2^5}$	$\frac{3^3\cdot 5}{2^7}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{3\cdot 5^2}{2^6}$	$\frac{3^2\cdot 5^2}{2^7}$
Sol♭	*Re♭*	*La♭*	*Mi♭*	*Si♭*	*Fa*	*Do*	*Sol*	*Re*	*La*	*Mi*	*Si*	*Fa#*	*Do#*	*Sol#*	*Re#*	*La#*
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}

Se tiene entonces:

$$d_1 \to d_2 \xrightarrow{q} d_3 \to d_4 \to d_5 \xrightarrow{q} d_6 \to d_7 \to d_8 \to d_9 \xrightarrow{q} d_{10} \to d_{11} \to d_{12} \to d_{13} \to d_{14} \to d_{15} \to d_{16} \to d_{17} \qquad (5)$$

en donde se sobreentiende cuál es el significado de las flechas.
Se comprueba que:

$$d_n = \begin{cases} d_8^{\,n-6} \cdot q^{-1} & , \ 1 \le n \le 4 \\ d_8^{\,n-7} \cdot q^{0} & , \ 5 \le n \le 9 \\ d_8^{\,n-8} \cdot q & , \ 10 \le n \le 14 \\ d_8^{\,n-9} \cdot q^{2} & , \ 15 \le n \le 17 \end{cases} \qquad (6)$$

lo que permite decir que la escala de Delezenne está generada por $\{d_8 , q\}$ (o por $\{d_6 , q^{-1}\}$).

RELACIONES ENTRE LOS TRES SISTEMAS

Empecemos por las notas de los dos primeros:

- *P. Estudia la relación entre las notas de los sistemas pitagóricos y de Zarlino.*

Lo primero que se observa (cuadros 1 y 2) es que los valores de las notas del sistema de Zarlino (en los casos de no coincidencia) son más sencillos que sus correspondientes de la gama pitagórica, tal como se buscaba al crear el primero.

En la escala diatónica los valores de *Fa, Do, Sol* y *Re* son iguales, y entre las notas no coincidentes (*La, Mi, Si*), se tiene:

$$z_{10} = (80/81) \cdot p_{10} \qquad z_{11} = (80/81) \cdot p_{11} \qquad z_{12} = (80/81) \cdot p_{12}$$

El factor de proporcionalidad es el inverso de la coma sintónica *c*, y entre los bemoles y sostenidos se comprueba que:

$$z_1 = c^2 \cdot p_1 \quad z_2 = c^2 \cdot p_2 \quad z_3 = c \cdot p_3 \quad z_4 = c \cdot p_4 \quad z_5 = c \cdot p_5 \quad z_{13} = c^{-2} \cdot p_{13}$$

$$z_{14} = c^{-2} \cdot p_{14} \quad z_{15} = c^{-2} \cdot p_{15} \quad z_{16} = c^{-2} \cdot p_{16} \quad z_{17} = c^{-3} \cdot p_{17}$$

En resumen:

$$z_n = \begin{cases} c^2 \cdot p_n & , \ 1 \leq n \leq 2 \\ c \cdot p_n & , \ 3 \leq n \leq 5 \\ p_n & , \ 6 \leq n \leq 9 \\ c^{-1} \cdot p_n & , \ 10 \leq n \leq 12 \\ c^{-2} \cdot p_n & , \ 13 \leq n \leq 16 \\ c^{-3} \cdot p_n & , \ n = 17 \end{cases} \tag{7}$$

lo que pone de manifiesto el papel fundamental que desempeña la coma sintónica; podría decirse que adopta la función de "factor de conversión" para pasar de un sistema al otro.

- *P. Estudia las relaciones entre las notas del sistema de Zarlino y de Delezenne, entre las notas de los sistemas pitagórico y el de Delezenne y entre los intervalos de los tres sistemas.*

Para lo primero (cuadros 2 y 3) se observa que las notas en ambos sistemas tienen asignados valores sencillos (más aún los de Zarlino), no como la gama pitagórica. También se admite que once valores coinciden y que en los otros seis se pasa de uno a su correspondiente en el otro sistema multiplicando por c o c^{-1}. En resumen, se tiene:

$$d_n = \begin{cases} c^{-1} \cdot z_n & , \quad n = 1, 2, 5 \\ z_n & , \quad n = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16 \\ c \cdot z_n & , \quad n = 13, 14, 17 \end{cases} \tag{8}$$

De las relaciones (7) y (8) se obtiene, por último, la relación entre los valores de las notas de los sistemas pitagórico y de Delezenne:

$$d_n = \begin{cases} c \cdot p_n & , \quad 1 \leq 4 \\ p_n & , \quad 5 \leq 9 \\ c^{-1} \cdot p_n & , \quad 10 \leq 14 \\ c^{-2} \cdot p_n & , \quad 15 \leq 17 \end{cases} \tag{9}$$

En cuanto a los intervalos, recordemos que existían los siguientes:

• Pitagórico:	T	D	S	C
• Zarlino:	T' y t'	D' y d'	S'	C' y c'
• Delezenne:	T'' y t''	D''	S'' y s''	C'' y c''

Y se comprueba que son iguales los siguientes:

- T = T' = T'': tono pitagórico y tono grande de Zarlino y Delezenne
- t' = t'': tono pequeño de Zarlino y Delezenne
- d' = D'': semitonos diatónicos, de Zarlino correspondiente al tono pequeño, y de Delezenne
- S' = s'': semitonos cromáticos, de Zarlino, y correspondiente al tono pequeño de Delezenne
- c' = c'': comas de Zarlino y de Delezenne correspondientes al tono pequeño

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Cuando escuchamos música, nos sentimos inmersos en la belleza de los sonidos, pero no somos conscientes de que también se encuentra escondido otro mundo complejo de ondas y relaciones matemáticas. Afortunadamente, sin embargo, para poder disfrutar de la música no es necesario tener presente su entramado matemático, aunque probablemente, si se conociera, se podrían entender no pocos aspectos de la música.

El objetivo de este artículo ha sido, precisamente, indagar sobre esa estructura matemática latente en los sistemas de afinación pitagórico, de Zarlino y de Delezenne, aunque no sean, desde luego, los más empleados (el estudio se ha realizado desde un punto de vista teórico). No obstante, hay que decir que la fidelidad a uno u otro sistema en la práctica, ciertamente, es relativa, pues por fortuna el oído humano no es un instrumento de cómputo de vibraciones.

Como se ha visto, en los tres sistemas examinados las notas vienen dadas por números racionales: productos de potencias enteras, de 2 y 3 en el primero, y de 2, 3 y 5 en los otros dos, lo que implica, lógicamente, que las notas musicales se correspondan con armónicos de la serie natural (sus sonidos son muy parecidos). Y a todos ellos se les ha dotado de una organización matemática similar, que permite expresar sintéticamente sus propiedades comunes, y mediante la cual también es más sencillo compararlos.

Entre los tres existen analogías y diferencias, la mayoría de las cuales ya han sido puestas de manifiesto. Desde el punto de vista matemático, las mayores similitudes, además de la expresión racional de sus sonidos (lo que lo distingue de los otros dos, el temperado y el de Holder), es que sus notas se obtienen por encadenamiento de quintas (natural en el primer caso y natural y sintónica en los otros dos) y la proximidad entre los sistemas de Zarlino y Delezenne.

Pero también hay diferencias, claro está, aunque mediante la coma sintónica, que representa una especie de factor de conversión, se puede pasar de uno a los otros. En primer lugar, no sólo los valores de las notas de la gama pitagórica (en aquellos en los que no hay coincidencias) son notablemente más complicados en general que los correspondientes en los otros sistemas, sino que asimismo sucede –es sencillo comprobarlo– con los valores de los intervalos del primero y de los otros dos. Entre ellos, por otra parte, hay ciertas discrepancias: acaso la más importante sea que en el sistema pitagórico el semitono diatónico es menor que el cromático, en cambio, en los otros sucede al revés. Además, en el primero hay un semitono diatónico y uno cromático, mientras que en el segundo hay uno cromático y dos diatónicos y en el tercero uno diatónico y dos cromáticos; y asimismo varían las comas (la pitagórica en el primero, y la sintónica y otras dos, correspondientes a cada uno de los tonos, en el segundo y el tercero). Pero incluso en tales divergencias se encuentran algunas coincidencias: además, obviamente, del valor de *Do* (referencia), en los tres son iguales *Re* y *Sol* (lo que desde luego no sucede en los sistemas temperado y de Holder), y a ello hay que añadir la igualdad de varios intervalos de los distintos sistemas, como se ha estudiado en la sección anterior. En resumen, a nuestro juicio, son mayores las coincidencias que las diferencias; los tres obedecen a una estructura matemática similar e incluso sucede que los dos últimos proceden o son variaciones del sistema de Pitágoras, inicio de la ciencia musical.

En cuanto a la propuesta para el aula, nosotros ya hemos puesto en práctica una vez lo relativo a los sistemas pitagórico y de Zarlino, y creemos que la experiencia fue interesante, pues los alumnos "descubrieron" ciertos aspectos del entramado matemático de la música (con cierta sorpresa de alguno, especialmente, de quienes se habían confesado carentes de toda formación musical). Las principales conclusiones que obtuvimos fueron las siguientes: la constatación de la riqueza didáctica del trabajo en grupos, por descubrimiento (aunque guiado); la importancia que tuvieron las representaciones y esquemas en el proceso de descubrimiento y como labor de síntesis (de hecho, fue un grupo de alumnos quien propició en cierto modo su uso frecuente); la detección de las dificultades que suelen encontrar los estudiantes para organizar un problema matemáticamente con una notación adecuada, y lo beneficioso que puede ser para ellos (y el poco "costo" que conlleva) las indicaciones que en ese sentido haga el profesor; por último, la facilidad que tienen los alumnos para razonar por analogía: lo más difícil fue realizar la modelización matemática de la gama pitagórica, pero luego resultó más sencillo con el sistema de Zarlino, reproduciendo un proceso similar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bouvier, A. *et al.*, (1986), *Didactique des Mathématiques*, París, Cedic/Nathan.

Caplow, T. (1974), *Dos contra uno: teoría teoría de coaliciones en las tríadas*, Madrid, Alianza Universidad.

Castro, E. y E. Castro (1997), "Representaciones y modelización", en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, ICE/Horsori, pp. 95-124.

Chica, A. (2001), *Descartes. Geometría y método,* Madrid, Nivola.
Estévez, F. (1990), *Acústica musical,* Madrid, Ópera Tres.
González, P. M. (2001), *Pitágoras. El filósofo del número,* Madrid, Nivola.
Guzmán, M. de (1986), "Los pitagóricos", en *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII,* Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pp. 11-35.
Loy, G. (2006), *Musimathics, The Mathematical Foundations of Music,* vol. 1, Cambridge, The MIT Press.
Herrán, A. de la y J. Paredes (2011), *Técnicas de enseñanza para todos los niveles educativos,* Madrid, Síntesis (*preprint* facilitado por los autores).
Orantes, J. L. (1983), "Leyes físicas de la acústica musical", *Nueva Revista de Enseñanzas Medias,* núm. 2, pp. 87-93.
Orton, A. (1990), *Didáctica de las matemáticas,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia/Ed. Morata.
Peralta, J. (2003), "Matemáticas para no desafinar", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* (sección Educación), vol. 6, núm. 2, pp. 437-456.
——— (2008), "Las matemáticas y las artes liberales", en *Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría General Técnica, pp. 91-118.
Soler, J. (1982), *La música-I. De la época de la religión a la edad de la razón,* Barcelona, Montesinos.
Zamacois, J. (1975), *Teoría de la música,* Libro II, Barcelona, Labor.

DATOS DEL AUTOR

Javier Peralta
Departamento de Didácticas Específicas,
Facultad de Formación de Profesorado y Educación,
Universidad Autónoma de Madrid, España.
javier.peralta@uam.es

Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado

Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria

Cristina Ochoviet y Asuman Oktaç

Resumen: En este trabajo, presentamos algunos resultados de investigación en torno a la producción de ecuaciones con base en condiciones dadas y la comprensión del concepto de variable en un contexto de resolución de ecuaciones por parte de estudiantes uruguayos del nivel secundario. Los resultados muestran algunas de las dificultades que presentan para formular ejemplos de ecuaciones conociendo sus raíces, las estrategias que ponen en juego para determinar si ciertos números dados son o no raíces de una ecuación y el problema de comprender que una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener dos raíces diferentes, aspectos que ponen de manifiesto ciertas facetas del largo proceso de adquisición del concepto de variable.

Palabras clave: ecuación de segundo grado, raíz, variable, propiedad del producto nulo.

Some aspects of the development of algebraic thinking: the concept of variable root and second-degree polynomial equations

Abstract: We present research results in relation with equation producing given certain conditions, and understanding of the concept of variable in the context of equation solving, by secondary level Uruguayan students. Our results demonstrate some of the difficulties that students have with formulating examples of equations given their roots, the strategies that they use in order to determine if certain given numbers are roots of an equation, and the problem of understanding that a second degree equation with one unknown can have two different roots; aspects that illustrate some facets of the long process of the acquisition of the variable concept.

Keywords: second degree equation, root, variable, null product property.

Fecha de recepción: 9 de junio de 2009

INTRODUCCIÓN

Diversos trabajos de investigación informan las dificultades de los estudiantes con el concepto de variable (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Wagner, 1983; Arcavi, 1994; Kieran, 1984; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Ursini y Trigueros, 2006). Estos estudios proporcionan evidencia acerca de las diferentes maneras en que los estudiantes interpretan la variable en los distintos contextos y niveles educativos. En este trabajo nos ubicamos específicamente en torno a la producción de ecuaciones con base en condiciones dadas y la comprensión del concepto de variable en un contexto de resolución de ecuaciones por parte de estudiantes uruguayos del nivel secundario.

Los resultados que presentamos en este trabajo forman parte de una investigación más amplia que abarcó diversos aspectos del pensamiento algebraico en torno a la propiedad del producto nulo.[1] La investigación fue realizada en Uruguay con estudiantes del nivel secundario y del nivel terciario. Parte de los resultados obtenidos se informa en Ochoviet y Oktaç (2009), donde se discuten tres fenómenos relacionados con el uso de dicha propiedad:

1. Las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver ecuaciones de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$,[2] poniendo particularmente la atención en los estudiantes que, pese a conocer la propiedad del producto nulo, no reconocen en estas ecuaciones su aplicabilidad.
2. Un error que cometen los estudiantes cuando verifican las raíces de una ecuación de la forma antes descrita. Este error consiste en la sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos,[3] cuestión que irremediablemente conduce al estudiante al éxito, ya que obtiene una proposición de la forma $0 \cdot 0 = 0$, que es verdadera.
3) La generalización de la propiedad del producto nulo de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hubiesen recibido instrucción específica al respecto.

El análisis de la problemática abordada se realizó desde una perspectiva

[1] Si el producto de dos números reales es cero, entonces uno u otro número real es igual a cero.

[2] Trabajamos con ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada y con dos raíces reales y distintas.

[3] Por ejemplo, si el estudiante encontró las raíces 3 y 9 de la ecuación $(2x - 6)(18 - 2x) = 0$ por algún procedimiento, al momento de verificar, observamos que varios estudiantes realizaban la siguiente sustitución: $(2 \cdot 3 - 6)(18 - 2 \cdot 9) = 0$.

amplia, tomando elementos del *Modelo 3 UV* (Trigueros y Ursini, 2003), de la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) y de la noción de *compartimentalización* (Vinner, 1990).

Algunos de los resultados obtenidos en relación con el primer fenómeno indican que, cuando los estudiantes de $14 - 15$ años enfrentan una ecuación de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$, optan por aplicar la propiedad distributiva y obtienen una ecuación que no pueden resolver porque no conocen aún la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado. En algunos casos los estudiantes no reconocen en la ecuación el producto de dos números reales que es igual a cero y, por ello, no aplican la propiedad del producto nulo, y en otros, los estudiantes confían en que un proceso algorítmico (hacer "cuentas") los conducirá a la solución del problema. Los estudiantes de 17-18 años prefieren desarrollar la expresión polinómica y aplicar la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, que a esta edad sí está disponible. Estos estudiantes no reconocen en la aplicación de la propiedad del producto nulo un procedimiento más simple. Los estudiantes del nivel terciario, estudiantes de profesorado de matemática, optaron sin dificultad por la aplicación de la propiedad del producto nulo para resolver la ecuación propuesta.

Algunos de los resultados relativos al segundo fenómeno muestran que el proceso de verificación de una ecuación no es sencillo para los estudiantes de enseñanza secundaria. Muchos creen que, para verificar las raíces de una ecuación de segundo grado que está dada en forma factorizada, deben sustituir cada una de las raíces en uno de los factores, logrando así que ambos factores valgan cero. Si bien muchos estudiantes reconocen que alcanza con que un factor sea cero para que el producto valga cero, se sienten más seguros de que han hallado las raíces de la ecuación si obtienen una expresión de la forma $0 \cdot 0 = 0$.

En relación con el tercer fenómeno, los estudiantes de nivel terciario (mayores de 21 años con edades variadas) mostraron cierta tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo a estructuras algebraicas donde no es válida, como por ejemplo el ámbito de las matrices. Esto podría deberse a que la reiterada aplicación de la propiedad del producto nulo en el contexto de los números reales favorecería la formación de un prototipo basado en las características externas de orden sintáctico sin tener en cuenta la semántica de los objetos matemáticos involucrados. Este prototipo actuaría como un modelo mental en la toma de decisiones de los estudiantes en situaciones que involucran expresiones del tipo $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = 0$.

ESTE TRABAJO

En el presente trabajo, nuestra intención es ofrecer algunas interpretaciones sobre los resultados obtenidos en diferentes ejercicios en los que se propone reflexionar sobre el concepto de raíz de una ecuación de segundo grado[4] a estudiantes del nivel secundario, y que no han sido aún informados. Nos concentramos particularmente en preguntas que piden construir una ecuación a partir de sus raíces, averiguar si los valores dados son raíces de una ecuación (completa o incompleta) dada y decidir qué valores pueden sustituirse en los números tapados en una ecuación factorizada de segundo grado. Creemos que las estrategias usadas arrojan información valiosa sobre el pensamiento de los estudiantes con los que trabajamos. Los datos que presentamos son los que reflejan el trabajo de 14 alumnos de 17-18 años y 14 de 14-15 años; niveles que guardan entre sí una diferencia de tres años de escolaridad. Esto nos permitió observar diferencias, similitudes, preferencias en las estrategias empleadas y, fundamentalmente, apreciar la evolución del pensamiento de los estudiantes en ese periodo de forma general. Vale aclarar que el estudio no fue realizado observando a los mismos estudiantes luego de un periodo de tres años, sino a dos grupos de estudiantes que guardaban esa diferencia de años en los niveles que cursaban. Los cuadros que aparecen más adelante se realizaron mostrando el número de estudiantes en cada categoría. No se creyó necesario usar porcentajes, ya que los dos grupos de estudiantes tienen igual número de elementos.

Los estudiantes de 14-15 años habían estudiado las ecuaciones de primer grado y las ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada que podían resolver aplicando la propiedad del producto nulo. No habían estudiado la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado. También habían estudiado los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los estudiantes de 17-18 años habían estudiado las ecuaciones de primer grado y en forma completa las de segundo grado. Conocían la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado y estaban terminando, en el momento en que se les aplicó el cuestionario, un curso de análisis matemático, en el que abordaron el estudio de funciones reales, límites, continuidad y derivabilidad.

[4] Puede consultarse el cuestionario completo en el anexo.

METODOLOGÍA

El cuestionario que se presenta en el anexo fue aplicado a dos grupos de estudiantes con las características antes mencionadas. A fin de evitar que los estudiantes corrigieran lo que iban realizando, las preguntas se fueron entregando una por una: al devolver una pregunta contestada, se le entregaba al estudiante la siguiente. Las preguntas fueron contestadas por escrito de manera individual. Al finalizar esta instancia, se realizaron diez entrevistas que fueron audiograbadas con el propósito de profundizar en el pensamiento de los estudiantes.

En las preguntas del cuestionario se presentaron diversas situaciones. En algunos casos, el estudiante debía resolver una ecuación de segundo grado dada de manera factorizada. En otros casos, se le solicitaba producir una ecuación conociendo sus raíces. En otras, se le preguntaba si ciertos números reales dados eran raíces de una ecuación dada. En el caso en que se pedía resolver una ecuación de segundo grado presentada en forma factorizada, se utilizaron factores con diferente forma, como por ejemplo los del tipo $(x + c)$ o los del tipo $(ax + b)$ con a distinto de 1, para observar si una determinada estructura del binomio favorecía más que otra la aplicación de la propiedad del producto nulo.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Para explicar el hecho de que un estudiante que conoce la propiedad del producto nulo no la aplique a la resolución de ecuaciones, no sólo cuando es la herramienta más adecuada, sino también cuando es la única herramienta disponible, utilizamos el concepto de *compartimentalización* que presenta Vinner (1990).

> Por "compartimentalización", me refiero a situaciones en las que dos piezas de conocimiento (o información) que son conocidas por un individuo y que deberían ser conectadas en el pensamiento de la persona permanecen, no obstante, sin relacionarse (Vinner, 1990).

Desde el punto de vista psicológico, la *compartimentalización* está más cerca del concepto de olvido que cualquier otro fenómeno. Sin embargo –aclara Vinner (1990)–, no es lo mismo que el olvido. No es como olvidar un número de teléfono o una dirección. Se habla de *compartimentalización* cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado. Este autor habla de que la mente no actuó de manera eficiente, pues de haberlo hecho, todas las cuestiones relevantes que guardan relación con lo que la persona está pensando deberían haber sido evocadas en el mismo momento que la idea principal. Si la mente del individuo es eficiente, entonces todas las asociaciones relevantes a ese estímulo deberían hacerse. Cuando el cerebro no realiza la asociación esperada, podríamos estar ante el fenómeno de *compartimentalización*. Este fenómeno puede dar lugar a un comportamiento ineficiente. Es relevante señalar que una asociación que se ha hecho en la mente de una persona es algo que va más allá del control de ella misma. La persona enfrenta un estímulo. Si su mente es eficiente, entonces todas las asociaciones relevantes al estímulo deberían ser realizadas. Lamentablemente, se tiene muy poca información sobre cómo se almacenan los conocimientos en la mente, cómo se recuperan y cómo se logran las asociaciones necesarias frente a la resolución de un problema.

Para explicar el caso de los estudiantes que, teniendo conocimiento de estructuras con divisores de cero, manifiestan una fuerte tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo a estructuras donde no es válida, utilizamos la *Teoría de la intuición* presentada en Fischbein (1987).

Fischbein, en su trabajo, utiliza el término intuición como equivalente a *conocimiento intuitivo,* no es una fuente de conocimiento, no es un método para conocer, es un tipo de cognición. Por ejemplo, se admite *intuitivamente* que el camino más corto entre dos puntos es el segmento que los une, que todo número natural tiene un sucesor, que el todo es mayor que cada una de sus partes, que un cuerpo caerá si no se lo sostiene, etc. Fischbein afirma que en la matemática, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos o cogniciones, aquellos que son autoevidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. Los primeros se denominan intuitivos y los segundos, lógicos. Las cogniciones intuitivas se caracterizan por ser autoevidentes, en el sentido de que no requieren pruebas para convencer, ya sean formales o empíricas. Son estables en el tiempo; si son contradictorias con lo formal, es necesaria una retroalimentación permanente del conocimiento para que no sustituyan al conocimiento correcto. Son globales en el sentido de que no son producto de un análisis y no provienen de razonamientos analíticos.

Una de las principales características de las intuiciones es su resistencia a cambiar, su rechazo a admitir alternativas. Existen mecanismos que favorecen la perseverancia de las intuiciones. Uno de los principales es el de la experiencia. La experiencia implica un cierto grupo de restricciones y condiciones, pero también ofrece numerosas oportunidades de confirmar y reforzar las creencias correspondientes.

Debido a las características de los conocimientos intuitivos, la intuición puede considerarse como un obstáculo cuando la inmediatez de un resultado inhibe el proceso de análisis necesario para dar una respuesta adecuada. A veces, la teoría formal es incongruente con las intuiciones y se pueden presentar problemas en el momento de tener que resolver una determinada tarea. Si la intuición contradice los aspectos formales, será difícil llegar a una solución adecuada del problema. Entonces, la necesidad de armonizar la intuición y los aspectos formales surge como una necesidad básica en la enseñanza de la matemática. El objetivo principal se situaría en la superación de conflictos, construyendo una correcta relación entre intuición y actitud teórica, o sea, una complementariedad entre el conocimiento formal y el intuitivo.

La larga experiencia del alumno con la propiedad del producto nulo y su aplicación en el ámbito de la resolución de ecuaciones polinómicas en el conjunto de los números reales, unido a la escasa presencia de casos donde no es válida, permite a los estudiantes confirmar la validez de la propiedad una y otra vez, confiriéndole a ésta la característica de estabilidad, propia de un conocimiento intuitivo. Esto podría contribuir a que los estudiantes generasen un modelo de pensamiento basado en cierta información inicial (validez de la propiedad en cierto contexto) que se mantiene impermeable a evidencias que no son congruentes con la información que poseen (cuando se presentan contextos donde la propiedad no es válida). Fischbein y Schnarch (1997) señalan que, en la búsqueda de coherencia para nuestra organización cognitiva, los individuos suelen generar impresiones globales sobre la base de cierta información inicial y organizarlas en estructuras aparentemente coherentes que se mantienen impermeables a evidencias que no son congruentes con la información que poseen. De modo que, en el caso de los estudiantes que han recibido instrucción específica sobre estructuras con divisores de cero, se aprecia igualmente una fuerte tendencia a generalizar la propiedad del producto nulo.

La propiedad en la que nos hemos centrado y su validez en las estructuras algebraicas que se le presentan al alumno constituyen el contacto inicial del estudiante con un tipo de estructuras que pueden generar un modelo de pensamiento. Este modelo condiciona las respuestas del alumno y tengamos en cuenta, como ya mencionamos, que la inmediatez de un resultado (respuesta intuitiva) puede inhibir el proceso de análisis necesario para arribar a una respuesta correcta.

Trigueros y Ursini (2003) ofrecen un marco conceptual para comprender el desarrollo del lenguaje algebraico y su uso en diferentes situaciones mediante lo que han denominado *Modelo 3 UV*. Reconocen diferentes usos de la variable que están relacionados con diferentes concepciones del álgebra escolar, por ejemplo, aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras. Establecen que, en la enseñanza del álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos del concepto de variable: como una incógnita, como un número genérico y como variables en una relacional funcional. Según estas autoras, se podría argumentar que una incógnita no es la manifestación de una variable porque representa un valor determinado; sin embargo, ellas consideran que la primera percepción de un símbolo literal cuando se está trabajando en álgebra es, o debería ser, la de un símbolo que representa cualquier valor y que sólo en una segunda instancia puede definirse su papel en la expresión.

Las autoras identifican cuáles son las capacidades básicas necesarias para una comprensión del concepto de variable, capacidades que se pondrán en juego al enfrentar la resolución de problemas y ejercicios en contexto algebraico. Respecto de la variable como incógnita, consideran que hay ciertos aspectos básicos que caracterizan su comprensión. Por ejemplo, es necesario reconocer en una situación, problema o ecuación, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado usando como información la que se presenta en la ecuación o en el problema. Para ello, será necesario ser capaz de representar las entidades desconocidas de manera simbólica y plantear expresiones algebraicas para describir las relaciones entre los datos dados. Los datos podrían relacionarse mediante una única ecuación o a veces con varias. Cuando se enfrentan ecuaciones, dadas o construidas, es necesario ser capaz de realizar manipulaciones algebraicas para encontrar el o los valores de la incógnita o incógnitas que satisfacen la ecuación. Es también importante ser capaz de sustituir la incógnita por el o los valores obtenidos para verificar que se obtiene una proposición verdadera.

Para desarrollar la comprensión de la variable como un número genérico, un prerrequisito es la habilidad de reconocer patrones y encontrar o deducir reglas generales. Para realizar esto satisfactoriamente, es necesario distinguir los aspectos invariantes de los que son variables. Es necesario también ser capaz de introducir símbolos para representar proposiciones generales, reconocer un símbolo como representando un objeto indeterminado y manipular expresiones que involucran variables como números genéricos donde no se requiere asignarles ningún valor específico, como cuando se opera con polinomios.

Para entender las variables en una relación funcional, es necesario reconocer situaciones donde la correspondencia entre las variables y la variación están presentes. Estas situaciones pueden involucrar información dada en tablas, gráficas, expresiones analíticas o lenguaje verbal, es decir, que la diversidad de registros estará presente. En cada una de estas representaciones, es importante reconocer correspondencias entre variables y la manera como la variación de una de ellas incide en otra. El reconocimiento de una relación implica la capacidad de ver que cada variable puede tomar diversos valores posibles dependiendo del intervalo donde la relación está definida. La habilidad de determinar la correspondencia entre las variables se refleja en la capacidad de determinar el valor de una de las variables cuando las otras son conocidas, lo que sería el cálculo de imágenes o de preimágenes. En general, para calcular preimágenes, es necesario plantear ecuaciones, de modo que las diferentes concepciones de la variable aparecen entrelazadas en la resolución de problemas. La habilidad de trabajar con variación se puede observar en la capacidad para determinar intervalos o reconocer cuándo la función crece o decrece, es positiva o negativa, tiene un máximo o un mínimo, etc. También es necesario ser capaz de representar la información usando diferentes registros de representación y transitar entre ellos. Cuando se requiere una expresión analítica, es necesario introducir símbolos para nombrar las variables relacionadas y distinguir estas expresiones de ecuaciones.

Trigueros y Ursini observan que las prácticas docentes no hacen énfasis en la distinción entre cada uno de los usos y, por tanto, resulta difícil para los estudiantes diferenciarlos. Sostienen que la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes puedan integrarlos en una única entidad conceptual: la variable.

Este marco teórico describe los aspectos básicos involucrados en el entendimiento de la variable como un concepto polifacético. Apunta a las dificultades específicas que tienen los estudiantes con cada uno de los usos de la variable y que determinan su éxito o fracaso en el aprendizaje del álgebra escolar y en tópicos matemáticos más abstractos. Las autoras señalan que un buen entendimiento del concepto de variable implica poner en juego todos los aspectos señalados y la capacidad de relacionarlos con el correspondiente uso de la variable. Frente a un problema matemático, los estudiantes deben ser capaces de interpretar el uso de la variable que el problema demanda y poder transitar de manera flexible entre los diferentes usos de la variable, integrándolos en un único objeto matemático. El uso de símbolos para realizar cálculos, para plantear propiedades y para expresar relaciones ayudará a los estudiantes a comprender el uso de la variable en la resolución de problemas. Los tres usos de la variable y los aspectos que ponen en evidencia su entendimiento por parte de los estudiantes aportan una herramienta útil para analizar las estrategias de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas.

CONSTRUIR UNA ECUACIÓN A PARTIR DE SUS RAÍCES

Preguntas que piden al estudiante construir una fórmula, una situación, una ecuación o un problema a partir de cierta información dada requieren una comprensión conceptual y no pueden contestarse algorítmicamente, ya que se ponen en juego las propiedades de los objetos matemáticos involucrados. En el caso de ecuaciones, algunos conceptos involucrados se relacionan con el significado del signo de igualdad, los diferentes significados y usos de la variable, solución y métodos de resolución.

Varias investigaciones han mostrado que muchos estudiantes interpretan el signo de igualdad como una indicación para realizar una operación en lugar de un símbolo que muestra la equivalencia de dos expresiones (véase por ejemplo Kieran, 1981). Asimismo, se ha mostrado que esta interpretación influye en el desempeño de los estudiantes al resolver ecuaciones (Knuth y cols., 2006). Esta interpretación también se fortalece a través de los libros de texto, donde rara vez se incluyen operaciones en ambos lados de la igualdad (McNeil y cols., 2006).

Para Schoenfeld y Arcavi (1988), es difícil ver la incógnita como una variable, ya que, en general, para las personas, variable refiere a algo que varía o que toma múltiples valores. El término incógnita parece estar asociado a un valor específico que no se conoce, pero que puede determinarse, como es el caso de la incógnita x en la ecuación $3x + 2 = 5x - 4$. Los autores agregan que, en esta ecuación, x no es variable, porque toma un solo valor (que en este ejemplo es 3). En este sentido, como ya mencionamos anteriormente, Trigueros y Ursini (2003) plantean que, en un contexto algebraico, la primera interpretación de un símbolo literal debería ser el de un número general que representa cualquier valor y que, luego, en un segundo momento, se establecería su papel en la expresión como incógnita.

Según Linchevski y Herscovics (1996), en el contexto de las ecuaciones, las letras pueden ser entendidas como un contenedor que se sustituye por un número o como un número desconocido y esto posibilita verlas en un nivel más accesible que cuando se trabaja en el contexto de las expresiones algebraicas.

Para estos autores, sustituir la letra por un número en el contexto de las ecuaciones tiene más sentido para los estudiantes que la sustitución en una expresión algebraica, porque está relacionado con la búsqueda de un número apropiado a una situación.

En relación con la construcción de una ecuación a partir de sus raíces o soluciones, cuando Papaieronymou (2007) pidió a los estudiantes dar "una ecuación que tiene 2 como solución", obtuvo las siguientes respuestas:

$$1 + x = 2$$
$$1 + 1 = 2$$
$$12 - x = 2$$
$$10 \div x = 2$$

En las respuestas se puede observar que estos estudiantes identifican el concepto de solución con el valor que aparece en el lado derecho de la ecuación, en lugar de pensarlo como el valor de x que satisface la ecuación.

Ahora veamos cómo contestaron nuestros alumnos a las dos preguntas que pedían construir una ecuación a partir de una raíz o dos raíces dada(s).

10) Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?

Edad	*No contestan*	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene raíz 8*
14 – 15 años	1	11	2
17 – 18 años	0	12	2

Los alumnos de 17-18 años presentan ecuaciones de segundo grado con mayor frecuencia que los de 14-15 años, aunque parecería que en ambos niveles la ecuación que prefieren presentar los estudiantes es una de primer grado. En el siguiente cuadro, se puede observar además, que las ecuaciones presentadas por los alumnos más pequeños son menos "estructuradas" que las de los más grandes. Con esto queremos decir que los más pequeños se permiten presentar, por ejemplo, expresiones no igualadas a cero o ecuaciones ingeniosamente sencillas como $4 + 4 = x$, donde además la incógnita aparece en el segundo miembro. Este resultado contrasta con los resultados obtenidos en otras investigaciones, donde los estudiantes no aceptan la ocurrencia de la incógnita a la derecha del signo de igualdad debido a la interpretación del significado de este signo. Tampoco aparecen errores del tipo mencionado anteriormente, observado en Papaieronymou (2007). Creemos que el uso de la palabra *raíz* en lugar de *solución* para referir a la incógnita puede tener que ver con estos fenómenos.

	Correctas	*Incorrectas*
Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 14-15 años (correctas o incorrectas)	$x - 8 = 0$ $8 - x = 0$ $4 + 4 = x$ $16 - 8 = x$ $x + 2 = 10$ $-2 + 2x = 14$ $x + 8 = 16$ $2x + 3 = 19$ $(x - 8)x = 0$	$x + 50 + 14 = x$ $\sqrt{8} = 1{,}8x + 3{,}2$
Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 17-18 años (correctas o incorrectas)	$2x^2 - 16x = 0$ $x(x - 8) = 0$ $x - 8 = 0$ $2x - 16 = 0$ $16 - 2x = 0$ $4x - 32 = 0$	$x^2 = 8$ $128x^2 - 2 = 0$

En los alumnos de 14-15 años, la ecuación $x + 2 = 10$ tuvo 3 ocurrencias. En los alumnos de 17-18 años, la ecuación $x(x - 8) = 0$ tuvo 3 ocurrencias, la ecuación $x - 8 = 0$ tuvo 4 y la ecuación $2x - 16 = 0$ tuvo 2.

La mayoría de los estudiantes no explican cómo lo hacen, pero entre los que dan argumentos tenemos:

Trabajo presentado por el estudiante	*Argumento*
$2 \cdot (8) = 16$ $2x - 16$ $2x - 16 = 0$	"Multiplico la raíz 8 por algún número" "le resto el resultado del paso anterior"
$x - 8 = 0$	"En vez del 8 pongo la *x* y le resto 8 para igualarlo con 0"
$x + 2 = 10$ $x = 10 - 2$ $x = 8$	"Pensé en dos números que al restarse me diera 8"
$8 - x = 0$	"Busco el número opuesto a 8"
$16 - 8 = x$	"Busqué un par de números que restándolos o sumándolos o haciendo una operación me diera 8"

Vemos que la estrategia general consiste en pensar operaciones con números reales cuyo resultado sea el número deseado. Es decir, que la fuente de la cual los estudiantes obtienen significado para elaborar la ecuación parece ser la estructura numérica de referencia (Kieran, 2006). La incógnita es interpretada como un número que estará determinado por las condiciones impuestas a la operación planteada; además, los estudiantes son capaces de introducir un símbolo para designar la incógnita y usarlo para plantear la ecuación de acuerdo con lo que pide el problema.

LA VARIABLE EN EL CONTEXTO DE RESOLVER UNA ECUACIÓN

Vayamos ahora a otra de las preguntas:

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces 4 y 3. ¿Cómo lo haces?

Con la ocurrencia de la incógnita más de una vez en la ecuación, el manejo del concepto de variable se vuelve más importante. Según Radford y Puig (2007), una de las dificultades encontradas en el aprendizaje del álgebra tiene que ver con "la comprensión de la manera distintiva con que signos simples (por ejemplo "x", "n") y signos compuestos (por ejemplo, "2 + 5" o "x + 17") reemplazan a los objetos que representan".

Vaiyavutjamai y cols. (2005) informan que, en el contexto de ecuaciones factorizadas de segundo grado, "muchos estudiantes no se dieron cuenta de que, si una variable apareció dos veces en una ecuación, entonces tuvo que tener el mismo valor en los distintos `lugares´ donde apareció". Cuando Vaiyavutjamai y Clements (2006) pidieron resolver ecuaciones del tipo $(x - 3)(x - 5) = 0$, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente diciendo que 3 y 5 son soluciones. Sin embargo cuando se les pidió verificar estas soluciones, los estudiantes reemplazaron la primera x por 3 y la segunda por 5 de la siguiente manera: $(3 - 3)(5 - 5) = 0$. Durante la entrevista, estos estudiantes dijeron que las dos x representaban diferentes variables y, por consiguiente, creían que podían tomar diferentes valores. Los autores piensan que una posible explicación puede estar relacionada con la interpretación que hacen los estudiantes de lo que generalmente dice el maestro: las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones diferentes.

Este mismo fenómeno se observó también en el contexto de ecuaciones de primer grado. Filloy y Rojano (1984) observaron que algunos estudiantes, cuando resolvían ecuaciones de primer grado tal como $x + 5 = x + x$, pensaron que la x que aparece en el miembro izquierdo de la ecuación puede ser cualquier número, pero la segunda x en el miembro derecho tiene que ser 5. En un estudio para ilustrar esta concepción errónea, Fujii (2003) utilizó expresiones tales como $x + x + x + x = x$ y $x + x + x = 12$. En el primer caso se preguntó a los estudiantes si la expresión era correcta y, en el segundo caso, tuvieron que elegir posibles respuestas correctas entre tres elecciones dadas. Cuando entrevistaron a aquellos estudiantes que pensaron que la ecuación $x + x + x + x = x$ puede ser correcta preguntando si "x no tiene que ser el mismo número", un estudiante respondió: "No tiene que ser la misma cosa. Es una variable" (Fujii, 2003). Al mismo estudiante que eligió (2, 5, 5) y (10, 1, 1) como soluciones aceptables para la ecuación $x + x + x = 12$ se le preguntó si $x + x + x$ se puede reemplazar por $3x$ y él contestó:

> Se puede, pero también puede ser incorrecto. Depende de a qué es igual la x, porque x puede ser igual a 10, la primera x, y luego la segunda x puede ser igual a 2 (Fujii, 2003).

Según Fujii (2003, refiriendo a Van Engen, 1961a, b), esta concepción errónea se debe a que algunos estudiantes consideran solamente el aspecto *no específico* del concepto de variable, y el aspecto *definitivo*, el cual está en tensión con el otro, no está presente.

Veamos nuestros resultados sobre el problema 11:

Edad	*No contestan o no concluyen*	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene por raíces 4 y 3*
14-15 años	**5**	**3**	**6**
17-18 años	**1**	**12**	**1**

Los estudiantes del nivel $17 - 18$ años presentaron en su inmensa mayoría la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ y muy pocos explican lo que hacen. Los estudiantes de $14 - 15$ años emprenden diversas y sorprendentes estrategias que no siempre los conducen a un resultado exitoso. Sin embargo, poseen argumentos que dan sentido al trabajo que realizan. A continuación veremos un cuadro con algunas de las ecuaciones presentadas, la edad de los estudiantes y su argumento.

Edad	*Trabajo presentado por el estudiante (correcto)*	*Trabajo presentado por el estudiante (incorrecto)*	*Argumento*
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Busco ecuaciones por las cuales al sustituir *x* por 4 y por 3 me dé 0"
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Los opuestos son las raíces"
17-18 años	$(x-4)(x-3)=0$		"Escribo un producto que tenga 2 soluciones y que a cada factor si le sustituyo por la raíz me dé por lo menos un factor 0"
14-15 años	$(x-4)(\ x-3)=0$		"Realizo una ecuación donde esté la *x* y el opuesto a 4 y 3"
14-15 años	$2x \cdot 1 = 2x$ $2x \cdot 1 = 2x$ $2 \cdot 4 \cdot 1 = 2 \cdot 4$ $2 \cdot 3 \cdot 1 = 2 \cdot 3$ $8 = 8 \qquad 6 = 6$		Sin argumento en lenguaje verbal
14-15 años		$(x-4)(y-3)=0$	"Busco los números opuestos a 4 y 3"
14-15 años		$(x+3)=(y+1)+1$	Sin argumento
14-15 años		$2x+3x=18$	"Pensé en una suma entre 2 números multiplicados uno por 4 y otro por un 3"
14-15 años		$3+2x=9$ $4+2x=12$ $2x=9-3$ $2x=12-4$ $2x=6$ $2x=8$ $x=6/2$ $x=8/2$ $x=3 \qquad x=4$	Sin argumento en lenguaje verbal
14-15 años		$x+1+x4+2=19$ $\mathbf{4}+1+\mathbf{3}\cdot 4+2=19$ $5+12+2=19$ $19=19$	Sin argumento en lenguaje verbal

En la tabla se ha distinguido *Sin argumento en lenguaje verbal* de *Sin argumento* para diferenciar el caso del estudiante que presenta una explicación en lenguaje simbólico y el que no presenta más que la ecuación.

En las ecuaciones presentadas por los estudiantes de 14-15 años, se observa el uso de ecuaciones con dos incógnitas, las ecuaciones con una sola incógnita a la que asignan valores diferentes en términos distintos y el uso de dos ecuaciones diferentes, donde cada una de ellas satisface una de las condiciones pedidas. También observamos en este nivel el uso de la verificación como elemento de control sobre la tarea realizada.

Los estudiantes que presentaron una ecuación lineal con dos incógnitas perdieron de vista que las soluciones a dichas ecuaciones son infinitos pares ordenados de números reales de la forma (x, y) y no números reales. Aunque esto último debemos precisarlo desde el punto de vista formal, creemos valioso destacar que, cuando el alumno verifica el par (3, 4), sustituye en la x el real 3 y en la y el real 4, cuestión que seguramente lo lleva a pensar en los reales 4 y 3 como raíces de la ecuación.

La estudiante que presenta la ecuación $2x \cdot 1 = 2x$ considera una ecuación cuyo conjunto solución es R y por tanto admite las raíces 4 y 3. Como la pregunta no especifica diciendo "únicamente raíces 4 y 3", se consideró correcta la respuesta dada.

Concentrémonos ahora en el caso de Luz, estudiante de 15 años, que es la que presenta el siguiente planteo:

$$\begin{aligned} x + 1 + x4 + 2 &= 19 \\ \mathbf{4} + 1 + \mathbf{3} \cdot 4 + 2 &= 19 \\ 5 + 12 + 2 &= 19 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$$

Ella da su solución al problema, avalando la posibilidad de que la x tome distintos valores en distintos términos. Esta misma estudiante comete, más tarde, el error que estábamos observando, cuando resuelve la pregunta 15:

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

Luz escribe y contesta así:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 6 - 12)(5 \cdot 2 - 10) &= 0 \\ (12 - 12)(10 - 10) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0 \\
0 &= 0 \\
&\text{Sí}
\end{aligned}
$$

En todo su trabajo, avala la posibilidad de que la incógnita tome distintos valores en una misma expresión. Lo podemos observar también en la pregunta 16:

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

La estudiante realiza el siguiente planteo, pero no da una respuesta verbal al problema:

$$
\begin{aligned}
(2 \cdot \mathbf{5} - 10)\ (3 \cdot \mathbf{4} - 8) &= 0 \\
(10 - 10)\ (12 - 8) &= 0 \\
0 \cdot 4 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Del análisis de las preguntas 15 y 16, podríamos interpretar que esta estudiante piensa que, para que un producto sea cero, los dos factores deben ser cero y, por ello, tiene dudas y no da una respuesta a la pregunta 16. Sin embargo, contesta correctamente a las preguntas 14 y 18 de acuerdo con el nivel que cursa.

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

Luz plantea y contesta así:

$$
\begin{aligned}
(3 \cdot 7 - 21)\ (7 - 3) &= 0 \\
(21 - 21)\ (4) &= 0 \\
0 \cdot 4 &= 0
\end{aligned}
$$

18) i) Se sabe que $b \cdot d = 0$, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información? ii) ¿qué representan para ti b y d?

Luz responde: *"Son números y me parece que aunque sea uno tiene valor 0 y el otro puede tener otro número cualquiera. Si no, puede ser que tengan los dos valores 0."*

La alumna reconoce números en los símbolos y puede determinarlos con base en la restricción que presenta la pregunta.

Para Luz es muy natural asignarle valores distintos a la x en una misma expresión. Y lo hace tanto en las expresiones factorizadas como en las desarrolladas. Veamos la solución que ofrece esta estudiante a la pregunta 17:

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

$$\begin{gathered} \mathbf{3}^2 - 7 \cdot \mathbf{4} + 12 = 0 \\ 9 - 28 + 12 = 0 \\ +21 - 28 = -7 \\ -7 \neq 0 \end{gathered}$$

El error que comete Luz en la doble asignación de valores a la incógnita parecería situarse en que, al existir dos raíces, entonces deben estar las dos presentes en el proceso de verificación. Esto se puede interpretar como un error lógico, es decir, el problema estaría situado en cómo conciliar "4 **y** 3 son las raíces" con la lógica de una expresión algebraica en donde $x = 4$ **o** $x = 3$. Luz debe dar un salto en la comprensión de la lógica necesaria para el trabajo algebraico. Quizás la lógica de las situaciones cotidianas entra en contradicción con la lógica que requiere el trabajo formal en álgebra. Luz sabe que, cuando se pone su camisa blanca y su falda gris para ir al liceo, las dos prendas se encuentran sobre su cuerpo: "Me puse la camisa blanca y la falda gris". Sin embargo las expresiones algebraicas no soportan este mismo manejo cotidiano del "**y**" que Luz sí podría hacer con sus prendas y su cuerpo. La expresión algebraica requiere "una prenda por vez". Y para hacer las verificaciones de las dos raíces, es necesario usar "el cuerpo" dos veces.

En el pensamiento de esta estudiante, 4 y 3 son las raíces, no implica, al menos naturalmente, que $\mathbf{3}^2 - 7 \cdot \mathbf{3} + 12 = 0$ y $\mathbf{4}^2 - 7 \cdot \mathbf{4} + 12 = 0$. Quizás esto deba constituirse en un objetivo específico de la enseñanza.

Veamos ahora la ecuación que presenta Ernesto (14 años) como respuesta a la consigna: *Escribe una ecuación que tenga por raíces* 4 y 3. *¿Cómo lo haces?*, donde también avala que la x pueda tomar dos valores distintos en la misma expresión:

$$2x + 3x = 18$$

Si seguimos el pensamiento de Ernesto, vemos que efectivamente $2 \cdot \mathbf{3} + 3 \cdot \mathbf{4} = 18$.

Bardini y cols. (2005) dicen que “Una variable no es un número en el sentido aritmético. Un número, por ejemplo el número 3, no varía. Una variable es un objeto algebraico”. Estos autores también advierten sobre la diferencia entre una variable y una incógnita: “Aunque ambos son números no conocidos y, desde un punto de vista simbólico, las mismas operaciones sintácticas se pueden llevar a cabo sobre ellos, su significado es diferente. En ecuaciones algebraicas usadas en álgebra introductoria, como ‘$x + 12 = 2x + 3$’, la incógnita existe sólo como la designación de un número cuya identidad se revelará al final. La revelación de la identidad de la incógnita es, de hecho, el propósito de resolver una ecuación”. Según Trigueros y Ursini (2003) esta diferencia reside entre la variable como “un número general” o “en una relación funcional” y la variable como “una incógnita específica”.

Sin embargo, algunos de estos estudiantes que dan diferentes valores a la misma x en una misma ecuación parecen estar concibiendo la x como una *incógnita* y en una *relación funcional* pero consigo misma, a la vez. Esto es, la ven como una incógnita, ya que están buscando u ofreciendo valores que cuando la reemplacen satisfarían la ecuación y también la perciben en un tipo de relación funcional, porque sus “diferentes valores” en la misma ecuación dependen de otras ocurrencias en ésta para satisfacer la ecuación. Esto se ve claramente en la respuesta de Ernesto mostrada antes. Sin embargo, cuando la ecuación se encuentra factorizada, creemos que la lógica desempeña también un papel importante, como explicamos anteriormente en el caso de Luz.

Wagner (1983) aporta un interesante punto de vista para la problemática que estamos comunicando. Este autor sostiene que las letras son fáciles de usar pero difíciles de comprender. Señala que una de las dificultades radica en que las letras son similares a las palabras pero diferentes. Letras y palabras pueden tener diferente significado en distintos contextos, pero esto no sucede en un mismo contexto. Si queremos sustituir x en $3(x + 2) + 5 = 17 - 2x$, debemos asignarle a x el mismo valor en cada ocurrencia, mientras que, en una misma oración, una misma palabra puede tener significados distintos. Inclusive, en un contexto matemático, una misma expresión puede referir a cuestiones diferentes. Wagner ejemplifica con la oración “La suma de un número par y un número impar es siempre un número impar”, sabemos que, a excepción del caso en que el número par es cero, el primer “número impar” es diferente del segundo “número impar”. La reflexión de Wagner es fácil de visualizar si cambiamos el sistema de representación por el que habitualmente se utiliza con los estudiantes –antes de introducir letras– en situaciones donde se pide completar los términos que faltan. Vemos un ejemplo:

$$25 + 32 + \boxed{} + \boxed{} = 80$$

Esta actividad está extraída de un libro de texto[1] uruguayo para estudiantes del primer año de enseñanza media (12-13 años) correspondiente a la unidad "Número natural". Si se esperara que los estudiantes colocaran el mismo número en ambos cuadros, no podrían utilizarse números naturales. Por tanto podría inferirse que los autores del texto no esperan que en ambos cuadros se coloque el mismo número. Algunas veces el uso de estos cuadros constituye un paso previo a la introducción de las letras, pero obsérvese que su funcionamiento es distinto. Esta observación aporta elementos para la reflexión didáctica en torno a las actividades que se proponen en el aula a los estudiantes y que constituyen pasos previos a la introducción de las letras. Si el diseño de las actividades no es adecuado, podríamos estar obstaculizando la adquisición del pensamiento algebraico en lugar de facilitar su desarrollo.

Wagner sugiere que, en la enseñanza, se debe ayudar a los estudiantes a reconocer que una letra es similar a una palabra en el sentido de que puede tener distintos significados en distintos contextos, pero una letra es diferente de una palabra porque debe referir a lo mismo en un mismo contexto.

AVERIGUAR O ENCONTRAR LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la pregunta 12:

Tenemos una ecuación $(2x - 4)(.......) = 0$, en la que no conocemos el segundo factor.

a) ¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
b) ¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

Respuestas a la parte *a*:

[1] M. Borbonet, B. Burgos, A. Martínez y N. Ravaioli (2000), *Matemática 1,* Montevideo, Fin de Siglo, p. 35.

Edad	*No contestan la parte* a	*Responden que SÍ a la parte* a	*Responden la parte* a *de la pregunta, refiriéndose al segundo factor*
14 – 15 años	6	7	1
17 – 18 años	0	13	1

Respuestas a la parte *b*:

Edad	*No contestan la parte* b	*Dicen que dependerá del segundo factor*	*Contestan que NO, porque 3 no es raíz del factor conocido*	*Otras respuestas*
14 – 15 años	6	5	1	2
17 – 18 años	2	8	2	2

Los estudiantes que se refieren al segundo factor para decidir si 2 es raíz argumentan que:

"Al no saber el segundo factor no puedo saber las raíces de la ecuación" (14 años)
"Si anula el segundo término, sí" (17 años)

Creemos que los estudiantes que recurren al segundo factor para responder la parte *a*, están pensando en que ambos factores deben ser cero para que el producto lo sea. Esta respuesta podría tener relación con la creencia que detectamos a través de la pregunta 13 que presentamos a continuación:

Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$\left(\square - 6\right)\left(\square - 19\right) = 0$$

Edad	*No contestan*	*Dan la solución correcta*	*Contestan que en los papelitos están 6 y 19*	*Otras respuestas*
14-15 años	3	1	3	7
17-18 años	2	1	7	4

Fueron consideradas respuestas correctas las de Talís (17 años) y Gerardo (14 años) que se presentan a continuación. Aunque la visión de estos dos estudiantes no es exactamente la misma, creemos que ambos realizan una discusión interesante de la pregunta. El resto de los estudiantes dieron respuestas parciales al problema, como por ejemplo, "en los papelitos puede ir el 6 y otro número cualquiera".

Presentamos a continuación la argumentación de Talís:

$$(p_1 - 6)\ (p_2 - 19) = 0$$

El p_1 puede ser 6 y cuando éste es 6 el p_2 puede ser cualquier otro número ya que la multiplicación da 0. Y cuando el p_2 es 19 el p_1 puede ser cualquier otro número por lo mismo.

De alguna manera, esta estudiante sobreentiende que los papelitos tapan dos incógnitas y así nos lo hace saber mediante los símbolos que introduce para su explicación.

Veamos ahora la solución que ofrece Gerardo. Él distingue las dos posibilidades, que los papelitos estén tapando una misma incógnita o dos:

> "Pueden ser si son los mismos o 6 o 19, si no son los mismos, el primero tiene que ser 6 o el segundo 19, el otro no importa".

Resulta interesante observar el manejo explícito que hace Gerardo del "o" cuando nos dice 6 o 19. Quizás por ello no cometió ningún error en las múltiples verificaciones que debió realizar al resolver su tarea. Este estudiante mostró un excelente manejo del concepto de variable, ya que es capaz de distinguir las soluciones a la ecuación en dos casos: una incógnita y dos incógnitas. Sin embargo, no introduce simbología para formular la explicación como sí lo hizo Talís.

Observamos en la tabla de arriba que, con el aumento de edad, parecería afianzarse la creencia de que detrás de los papelitos están los números 6 y 19. Sin embargo, dada la muestra de estudiantes con los que trabajamos (14 de 17-18 años y 14 de 14-15 años) no podemos sacar conclusiones más generales.

Presentaremos a continuación los resultados obtenidos en la pregunta 14:

¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

			Para contestar usan el procedimiento de verificación	
Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven o intentan resolver la ecuación*	Sustituyen 7 solamente en el primer factor	Sustituyen 7 en los dos factores
14-15 años	5	2	2	5
17-18 años	0	7	4	3

Se deseaba observar si los estudiantes consideraban suficiente que se anulara un factor para que el producto fuera cero, pues esto podía tener relación con el error de la doble asignación que estábamos analizando.

En el cuadro puede observarse que, en el nivel 17-18 años, siete estudiantes eligen resolver la ecuación y otros tantos emprenden la verificación. Sin embargo, en el nivel de los de 14-15 años, donde las herramientas que permiten resolver una ecuación como la que se propone no están del todo disponibles, ya sea porque todavía no conocen la fórmula de resolución o porque todavía no manejan con soltura la aplicación de la propiedad de un producto nulo, hace que la estrategia preferida sea la de verificación.

Creemos que la resolución de la ecuación es una herramienta más costosa en el nivel de la operatoria requerida que el procedimiento de verificación. Más aún para los estudiantes del nivel 17-18 años que aplicaron la fórmula de resolución, para lo cual fue necesario desarrollar la expresión polinómica dada. Quizás estos estudiantes han incorporado herramientas eficaces para la resolución de ecuaciones, pero no valoran críticamente su utilización, como en la situación problemática que se les presentó. Esto es congruente con lo reportado por Kieran (1985, referido en Kieran y Filloy, 1989), quien señala que, tan pronto como los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones, tienden a abandonar el uso de la verificación.

Cuatro de los seis estudiantes que para contestar utilizan el procedimiento de verificación sustituyendo 7 solamente en el primer factor, hacen mención –de distintas maneras– a que basta con que un factor sea cero para que el producto dé cero. Estos estudiantes combinan entonces el procedimiento de verificación con el conocimiento de la propiedad del producto nulo.

Veamos ahora la pregunta 15:

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

			Para contestar usan el procedimiento de verificación	
Edad	No contestan	Para contestar resuelven la ecuación	En forma correcta	Sustituyen x por 6 en el primer factor y x por 2 en el segundo
14-15 años	5	1	7	1
17-18 años	0	8	5	1

En este caso los dos números reales dados son raíces de la ecuación. Observando qué estrategia utilizaron los alumnos para dar respuesta a la pregunta (resolución de la ecuación o procedimiento de verificación) y comparando las estrategias preferidas por los estudiantes de los dos niveles para abordar el problema, los resultados nos merecen idénticos comentarios que los realizados en la pregunta anterior.

Presentaremos a continuación comentarios sobre la pregunta 16:

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

Edad	No contestan	Para contestar resuelven la ecuación	Para contestar usan el procedimiento de verificación	Contestan sin hacer planteo
14-15 años	6	1	7	0
17-18 años	0	8	4	2

En este caso, se agrega el problema de que 4 no es raíz de la ecuación dada. Observamos las estrategias puestas en juego para responder y exploramos nuevamente si para el alumno es suficiente con que un factor se anule para que el producto valga cero.

Si bien hay seis alumnos del nivel 14-15 años que no contestan la pregunta, 100% de los estudiantes que intentaron resolver el ejercicio dieron una respuesta acertada; idéntico porcentaje se obtuvo en el nivel 17-18 años. En cuanto a las estrategias preferidas por los estudiantes para resolver el problema, mantenemos las observaciones que hicimos en la pregunta 14, que se refieren a una marcada preferencia por la verificación en el nivel 14-15 años y no así en el nivel 17-18 años, donde la resolución de la ecuación que se propone es una estrategia muy usada por los estudiantes para dar respuesta a la pregunta que se formula.

Nos centraremos ahora en la pregunta 17:

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

Edad	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación o intentan hacerlo*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*
14-15 años	5	1	8
17-18 años	0	9	5

Nuevamente una marcada preferencia por resolver la ecuación propuesta de parte de los estudiantes del nivel 17-18 años. De los nueve estudiantes de 14-15 años que intentan resolver la situación, dos estudiantes no pudieron llegar a la respuesta correcta. Un caso es el de Luz, que realiza la doble asignación y que ya comentamos anteriormente, y el otro es el de Diego que intenta despejar la incógnita, ignorando el término en x^2 y trabajando con la ecuación lineal $-7x + 12 = 0$. Nosotras interpretamos este fenómeno como un tipo del mecanismo que se conoce como *hacer caso omiso de lo desconocido* (Kieran, 1984). Kieran menciona, por ejemplo, que un estudiante resuelve la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$ como si fuera $4 + x - 2 + 5 = 11$. Otro estudiante, en lugar de la ecuación $2x - 6 = 4$, resuelve la ecuación $2x = 6$. La ecuación $16x - 215 = 265$ es transformada en la ecuación $x - 215 = 265$ por un estudiante. En todas estas situaciones, los estudiantes cambian la ecuación dada cuyo método de resolución desconocen por una conocida, evitando así dificultades en el proceso de solución.

Por otro lado, Lima (2008) informa otras estrategias usadas por los estudiantes para convertir ecuaciones cuadráticas en ecuaciones lineales antes de resolverlas. Algunos estudiantes reemplazaron m^2 por m, otros aplicaron el exponente al coeficiente del término de segundo grado (por ejemplo convirtiendo $3m^2$ en $9m$). También se observó que m^2 se reemplazó por $m \cdot m$ y este último se tomó como si fuera igual a $2m$.

COMENTARIOS FINALES

Uno de los objetivos del curso que estaban finalizando los estudiantes de 14-15 años es que el alumno aprenda a resolver en R ecuaciones que están dadas en forma factorizada como las de la forma $(ax + b)(cx + d) = 0$. Esta ecuación entraña, sin lugar a dudas, serias dificultades para quienes se inician en su estudio. Entre estas dificultades podemos comentar que muchos estudiantes no reconocen en ella una ecuación de segundo grado, sino dos ecuaciones de primer grado; no comprenden que este tipo de ecuaciones tienen una incógnita, pero pueden admitir dos raíces, y presentan dificultades en la comprensión del concepto de variable.

La asignación de distintos valores a la incógnita de manera simultánea fue un recurso usado por los estudiantes más pequeños en el momento de tener que construir una ecuación con dos raíces dadas. Este procedimiento, junto con el de concebir una ecuación con dos incógnitas, resultó para ellos más natural o espontáneo que concebir una ecuación de segundo grado que tuviera las dos raíces dadas. Quizás el hecho de concebir una ecuación de segundo grado con *una* incógnita y la consiguiente posibilidad de que existan *dos* raíces sea mucho más complejo para los estudiantes de lo que los docentes creemos. Esto sería congruente con lo informado por Trigueros y Ursini (2003), quienes señalan que la gran mayoría de los estudiantes con los que trabajaron consideraban que la incógnita involucrada en una ecuación de segundo grado podía tomar solamente un valor. Estos resultados pueden aportar información a los docentes acerca del pensamiento algebraico de estudiantes de enseñanza secundaria. Si bien se trata de información obtenida a partir del trabajo de veintiocho estudiantes, los patrones que observamos muestran que algunos de ellos podrían aparecer en nuestras aulas. Esperamos que la información brindada permita reflexionar acerca de las dificultades que pueden enfrentar nuestros estudiantes en el estudio del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994), "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 3, pp. 24-35.

Bardini, C., L. Radford y C. Sabena (2005), "Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics", en H. L. Chick y J. L. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, vol. 2, pp. 129-136.

Booth, L. (1984), *Algebra: Children's Strategies and Errors,* Windsor, NFER-Nelson.

Filloy, E. y T. Rojano (1984), "From an arithmetical to an algebraic thought: a clinical study with 12-13 years old", *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 51-56.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach,* Dortretch, D. Reidel.

Fischbein, E. y D. Schnarch (1997), "The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 28, núm. 1, pp. 96-105.

Fujii, T. (2003), "Probing Students' Understanding of Variables Through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable so Difficult for Students to Understand?", *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, pp. 49-65.

Kieran, C. (1981), "Concepts associated with the equality symbol", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 317-326.

——— (1984), "Cognitive mechanisms underlying the equation-solving errors of algebra novices", en Southwell y cols. (eds.), *Proceedings of PME VIII,* Sydney, Australia, pp. 70-77.

——— (2006), "Research on the Learning and Teaching of Algebra", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* Rotterdam, Sense Publishers, pp. 11-49.

Kieran, C. y E. Filloy (1989), "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 7, núm. 3, pp. 229-240.

Knuth, E. J., A. C. Stephens, N. M. McNeil y M. W. Alibali (2006), "Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 37, núm. 4, pp. 297-312.

Küchmann, D. (1981), "Algebra", en K. M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16,* Londres, John Murray, pp. 102-119.

Lima, R. N. (2008), "Procedural embodiment and quadratic equations", artículo presentado en ICMI 11, Monterrey, México.

Linchevski, L. y N. Herscovics (1996), "Crossing the Cognitive Gap between

Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm. 1, pp. 39-65.

McNeil, N. M., L. Grandau, E. J. Knuth, M. W. Alibali, A. C. Stephens, S. Y. Hattikudur y D. E. Krill (2006), "Middle school students' understanding of the equal sign: the books they read can't help", *Cognition and Instruction*, vol. 24, núm. 3, pp. 367-385.

Ochoviet, C. y A. Oktaç (2009), "If A · B = 0 then A = 0 or B = 0?", *The Montana Mathematics Enthusiast*, vol. 6, núm. 1 y 2, pp.113-136.

Papaieronymou, I. (2007), "Student difficulties in understanding the difference between the algebraic expressions and the concept of linear equation", *Proceedings of* CERME *5*, Working group 6, pp. 934-943.

Radford, L. y L. Puig (2007), "Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 66, pp. 145-164.

Schoenfeld, A. y A. Arcavi (1988), "On the meaning of variable", *Mathematics Teacher*, vol. 81, núm. 6, pp. 420-427.

Trigueros, M., S. Ursini y D. Lozano (2000), "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", *Educación Matemática*, vol. 12, núm. 2, pp. 27-48.

Trigueros, M. y S. Ursini (2003), "First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable", en Annie Selden, Ed Dubinsky, Guershon Harel y Fernando Hitt (eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 12. Research in Collegiate Mathematics Education V,* American Mathematical Society in cooperation with Mathematical Association of America, vol. V, pp. 1-29.

Ursini, S. y M. Trigueros, (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 3, pp. 5-38.

Vaiyavutjamai, P. y M. A. Clements (2006), "Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations", *Mathematics Education Research Journal*, vol. 18, núm. 1, pp. 47-77.

Vaiyavutjamai, P., N. F. Ellerton y M. A. Clements (2005), "Students' attempts to solve two quadratic equations: a study in three nations", en P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (eds.), *Building connections: Research, theory and practice* (Proceedings of MERGA 28, vol. 2, pp. 735-742). Melbourne, Australia, MERGA Program Committee.

Van Engen, H. (1961a), "A Note on 'Variable'", *The Mathematics Teacher*, marzo, pp. 172-173.

Van Engen, H. (1961b), "On 'Variable'_a rebuttal", *The Mathematics Teacher,* marzo, pp. 175-177.

Vinner, S. (1990), "Inconsistencies: their Causes and Function in Learning Mathematics", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 12, núm. 3 y 4, pp. 85-98.

Wagner, S. (1983), "What are these things called variables?", *Mathematics Teacher,* núm. 76, pp. 474-479.

DATOS DE LAS AUTORAS

Cristina Ochoviet
Instituto de Profesores Artigas-CFE, Uruguay.
cristinaochoviet@gmail.com
Asuman Oktaç
Cinvestav-IPN, México.
oktac@cinvestav.mx

ANEXO

1) *i)* Resuelve la ecuación $(2x - 6)(18 - 2x) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

2) *i)* Resuelve la ecuación $(x + 6)(2x - 8) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

3) *i)* Resuelve la ecuación $(3x - 6)(x - 7) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

4) *i)* Resuelve la ecuación $(x - 5)(x + 4) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

5) *i)* Resuelve la ecuación $(x - 9)(x - 6) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

6) *i)* Resuelve la ecuación $x(2x - 10) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________ ¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

7) *i)* Resuelve la ecuación $x(x - 8) = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

8) *i)* Resuelve la ecuación $x^2 = 6 \cdot x$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

9) *i)* Resuelve la ecuación $5 \cdot x = 0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ______________¿Cuáles son? ______________
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

10) Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces 4 y 3. ¿Cómo lo haces?

12) Tenemos una ecuación $(2x - 4)(........) = 0$, en la que no conocemos el segundo factor.
   a) ¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
   b) ¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

13) Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$\left(\boxed{} - 6\right)\left(\boxed{} - 19\right) = 0$$

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación $(3x - 21)(x - 3) = 0$? Explica tu respuesta.

15) ¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación $(2x - 12)(5x - 10) = 0$? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

16) ¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación $(2x - 10)(3x - 8) = 0$?

17) ¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$?
Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

18) *i)* Se sabe que $b \cdot d = 0$, ¿qué puedes deducir sobre b y *d* a partir de esta información?
   ii) ¿Qué representan para ti *b* y *d*?

Geometrización de una porción del espacio real

Alberto Camacho Ríos, Bertha Ivonne Sánchez Luján,
Ricardo Blanco Vega y Jesús Humberto Cuevas Acosta

A la memoria de Juan Mena Hernández

Resumen: El artículo tiene por objetivo describir el conocimiento matemático que surgió de la geometrización de una porción de terreno o espacio real levantada a finales del siglo XVIII con un grafómetro y cordel. El levantamiento topográfico se considera como una práctica de referencia en el marco de la aproximación teórica conocida como socioepistemología, mientras que la geometrización es la práctica social asociada. Los resultados establecen la matematización y transposición del espacio real en un microespacio y ponen en evidencia los conocimientos matemáticos de la actividad. Al final se plantean casos particulares que subrayan la utilidad de los instrumentos y técnicas de medición de la topografía en la resolución de problemas escolares de la geometría euclidiana y de trigonometría.

Palabras clave: práctica de referencia, geometrización, grafómetro, espacio real.

Géométrisation d'une portion de l'espace réel

Résumé: L'exposé est destiné à décrire les connaissances mathématiques qui sont apparues de la géométrisation d'une portion de terrain ou espace réel, soulevée à la fin du XVIIIe siècle avec un graphomètre et une corde. L'soulèvement est considéré comme une pratique de référence dans l'approche théorique connue sous le nom de socioépistémologie en tant que la pratique sociale associée est la géométrisation. Les résultats montrent la mathématisation et la transposition de l'espace réel dans un micro-espace et mettant en évidence les connaissances mathématiques de l'activité. Finalement, se posent des cas individuels qui mettent en évidence l'utilité des outils et des techniques de mesure de la topographie dans la résolution des problèmes à l'école de la géométrie euclidienne et la trigonométrie.

Mots clef: pratique de référence, géométrisation, graphomètre, espace réel.

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2010.

...muchos autores informan que los egipcios fueron los inventores de la geometría, que nació de la medida de los campos, necesaria debido a las crecidas del Nilo que borraban el límite entre las propiedades. Por lo demás, no es de asombrar que haya sido una exigencia práctica la determinante de la invención de esa ciencia...

Tomado de Los comentarios al libro I de los Elementos de Euclides de Proclo

INTRODUCCIÓN

La *geometría natural* –como la han llamado Houdement y Kusniak (2006)– tiene por fuente de validación la realidad, aquello que es sensible. Ésta comprende tres facultades esenciales del ser humano: intuición, experiencia y deducción, que se ejercen fundamentalmente sobre objetos materiales con la ayuda y manipulación de instrumentos (Houdement y Kusniak, 2006, p. 12). De esto último se desprende que la geometría euclidiana no es natural. En este marco, se puede considerar que la topografía es una especie de *geometría natural* –también conocida en su origen como *geometría práctica*– que ha sido poco investigada como objeto de estudio, dejándola al margen de las matemáticas y de las tradiciones propiamente técnicas.

La particularidad de la topografía es que asocia los pensamientos geométrico y trigonométrico a una técnica que le sirve de objeto para *geometrizar* la realidad inmediata mediante diferentes prácticas, como son levantamientos topográficos, nivelaciones, observaciones astronómicas, etc. La geometrización es un tipo de matematización elemental que se acciona durante los levantamientos con el propósito de controlar las mediciones angular y lineal de superficies de terrenos, así como posteriormente durante el diseño de la planta topográfica correspondiente.[1]

En lo que sigue, se hará referencia a la extensión de los terrenos con la frase *espacio real,* debido a su carácter fundamental de poseer las tres dimensiones espaciales y contar con una medida superficial que las delimita, así como con la finalidad de distinguirla del que se conoce como espacio matemático o espacio

[1] Una versión de este artículo se presentó como ponencia con el título "Geometrización del espacio real" en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM XIII, sección Historia y Epistemología, llevada a cabo en junio de 2011 en Recife, Brasil.

euclidiano. En este sentido, se puede decir que la geometrización transforma el espacio real de los terrenos en microespacios de geometría natural que se les aproximan, siendo estos últimos modelos a escala de los primeros.

Desde el punto de vista de la asociación de conocimientos matemáticos con diferentes técnicas, la topografía puede verse como definidora de "prácticas de referencia" de las que se han desprendido nuevos conocimientos matemáticos. En sí mismo, el conocimiento matemático se admite como una unidad o síntesis de la acumulación de conocimientos generados por diferentes prácticas de referencia, los cuales tienen por límite el saber o conocimiento matemático teórico (De Gortari, 1988, pp. 388-391).

Si bien las prácticas de referencia generan nuevos conocimientos –que se podrían denominar como *conocimientos de referencia*–, entre estos últimos y las primeras se colocan las *prácticas sociales*. Éstas son actividades que orientan la interacción del conocimiento al centro de las prácticas de referencia, dando sentido a los procesos de matematización del espacio real, "en el cual intervienen una buena cantidad de nociones y procedimientos matemáticos" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 90).

En general, las prácticas sociales se describen en forma de argumentaciones de la matemática, las cuales posteriormente devienen al salón de clase. Así, por ejemplo, y en un contexto restringido de la noción de espacio, la geometrización del espacio matemático fue una práctica de referencia que desarrollaron geómetras y analistas como Newton, Leibniz y Euler, entre otros. La actividad consistía en eliminar una o más de sus *determinaciones*. Por "determinaciones" se referían a la medida finita de las longitudes del espacio matemático, es decir, el largo, el ancho y la profundidad, de manera que, al eliminar una de ellas, la parte correspondiente se *perdiera* en el infinito. En la siguiente etapa, se establecía una reformulación o síntesis de conocimientos en la que se contrastaba el infinito con el cero, de lo cual se desprendía una primera proposición sintética. En el caso de Newton, la proposición que resultó de esa práctica se definió como: "Todo [espacio] que es capaz de aumentar y disminuir es descrito con movimiento continuo" (Camacho, 2005).

Puede observarse que la actividad normativa que rige esta última actividad es una práctica social inducida por argumentos variacionales que llevan a la construcción del concepto de límite infinito, de la cual se desprende una primera proposición o discurso matemático. Este discurso es la parte inicial que orientó la construcción de los *Principia* newtonianos y posteriormente sería ordenado en forma de discurso matemático escolar por Bails (1789, pp. 313-314) y otros autores de obras elementales, acomodándolo de la siguiente manera: "La extensión infinita es un espacio geométrico que tiene por límite el infinito".

En resumen, desde el punto de vista pedagógico, lo que interesa, como un objetivo colateral del escrito, es establecer una relación entre los argumentos de la geometría elemental que se mueven en la práctica topográfica y el espacio físico en que se ubica esta disciplina. Puestos en situación, tales argumentos están muy próximos a la percepción que tienen los estudiantes del propio espacio. No obstante, la amplitud del estudio socioepistemológico del conocimiento que aquí se presenta no permitió el diseño de situaciones de aprendizaje donde los argumentos matemáticos que surgen de la topografía pudieran ser colocados en situación escolar, a lo más, se mencionan en las conclusiones algunos casos particulares respecto al uso de instrumentos y métodos de medición y observación que se han experimentado en el salón de clase. Sin embargo, el objetivo central del estudio se comenta en el siguiente rubro.

MARCO TEÓRICO

La socioepistemología

El presente escrito está subordinado a la aproximación teórica conocida como socioepistemología, la cual es articulada por las siguientes acciones:

1. "El foco del análisis es puesto [...] en la práctica social y en la manera como hace su aparición en forma de discurso matemático la función normativa de esta última [para, enseguida]
2. presentarse como una forma de discurso matemático escolar" (Cantoral y cols., 2006, p. 90).

Significados asociados

Las imágenes de los conocimientos rescatados del estudio de las prácticas sociales –antes mencionadas– son reconocidas en la socioepistemología como *significados* asociados del propio conocimiento que, en su acontecer histórico, mantienen una representación cercana con el discurso matemático escolar actual. En cuanto a su devenir, los significados adoptan diferentes imágenes cuyo límite es su representación escolar en el presente. El rescate de significados ha permitido experimentar en el salón de clase diseños de situaciones de aprendizaje en las que se hacen interactuar dichos significados con su representación escolar vigente en el afán de mejorar su enseñanza (Camacho y Sánchez, 2010, p. 34; Camacho, 2011a, pp. 164-170). Esta última etapa es conocida en el diseño de la situación como *resignificación* del conocimiento y ocurre a partir del trabajo de los estudiantes con los diferentes significados –incluso los determinados en los análisis cognitivo y didáctico– ordenados en la situación. La resignificación es un mecanismo que une las argumentaciones del conocimiento matemático escolar en juego con las instrucciones a las que se sujeta la situación, toda vez que dinamiza esta última.

La precisión, eje central en los levantamientos topográficos

Hay que destacar que, para el caso de la topografía, las practicas de referencia y las prácticas sociales están sujetas a los instrumentos de uso. Así, en los levantamientos topográficos que se plantean, se hace alusión al *grafómetro* y al cordel. Por la incertidumbre causada por la poca precisión que los instrumentos aportaban, así como por las limitaciones de las técnicas de observación, tales prácticas provocaban pequeños errores que falseaban la geometrización final del terreno o terrenos. Ante ese problema, geómetras que vivieron entre los siglos XVII al XIX, como Euler, Mayer, Gauss, Bessel, Díaz Covarrubias, etc., juzgaron necesario asumir dichos errores con tolerancias que previamente se podían especificar y cuyo establecimiento estaba en función, como ya se mencionó, tanto de los instrumentos como de los tipos de levantamientos que había que desarrollar.

Vista así, la tolerancia especificada constituyó la diferencia entre los conocimientos matemáticos que se construyeron a partir de las prácticas de topografía y los conocimientos matemáticos ideales contenidos, en un primer momento, en los *Elementos* de Euclides. En épocas de mayor contribución a la construcción del conocimiento matemático, la tolerancia fue de la mano con el conocimiento *aproximado,* ampliamente discutido por Bachelard (1928) y, además, como consecuencia, asociado a los desarrollos en serie de MacLaurin en el contexto de las funciones analíticas.

A partir de lo anterior y como una cuestión metodológica que se asume en el estudio, se parte de que los cambios tecnológicos sufridos por los instrumentos llevaron a cambiar a su vez las técnicas y las prácticas de observación y medición, dando lugar a transformaciones de las prácticas sociales asociadas a las prácticas de referencia, lo cual tuvo como consecuencia la determinación de nuevos conocimientos matemáticos.

Ante esto último, se plantea para el estudio el siguiente objetivo:

Describir las particularidades de algunos significados del conocimiento matemático que surgieron de operaciones topográficas mediante ciertos problemas específicos desarrollados a lo largo de la historia y cuya representación actual se sitúa en la matemática y en la probabilidad.

En sí se considera el siguiente caso:

La transición que sufrió la dioptra hasta parecerse el grafómetro, así como las técnicas y conocimientos que derivaron de ello. Esta etapa, que inicia en el siglo III a. C., pasa por el siglo XVI y concluye a finales del siglo XIX, se caracteriza por una aproximación restringida en las mediciones angulares y lineales. Esta parte comprende la simulación del levantamiento topográfico de un polígono cerrado medido a finales del siglo XVIII con un grafómetro para los ángulos y un cordel para las longitudes. El levantamiento se caracteriza por una aproximación restringida en la parte lineal de la medición. Para la situación que se analiza, interesa establecer el microespacio correspondiente y hacer ver las diferencias entre este último y el espacio real del terreno. Lo anterior se considera a partir de tomar la geometrización como eje central de trabajo.

Puesto que los instrumentos utilizados en el levantamiento que se presenta son por demás limitados e imprecisos, el resultado que arroja la geometrización es un modelo matemático de compensación lineal elemental que se desprende de la práctica social. El ejercicio ha sido elegido deliberadamente y con él se intenta mostrar cómo de lo contingente de los elementos que integran la práctica topográfica surge un conocimiento –la imagen de un significado asociado a cierto concepto– todavía expedito, que sufrirá en su evolución transformaciones importantes antes de ser vehiculado al salón de clase.

ESTADO DEL ARTE

Desde la perspectiva del uso de la geometría natural, Kusniak (2005) y Houdement y Kusniak (2006, p. 6) han dotado a sus estudiantes de "espacios de trabajo geométrico personal", que destacan dos campos de actividades fundamentales, "el primero relaciona la experiencia, vinculando el mundo sensible con herramientas de medición", mientras que el segundo "devuelve al nivel de abstracción las figuras geométricas, relacionándolas con sus propiedades matemáticas". En la misma dirección, Matheron y Noirfalise (2007) experimentaron con estudiantes "microespacios de trabajo geométrico", simulando en las instrucciones el propio trabajo desarrollado por ingenieros a mediados del siglo XX (esta actividad se comenta de nuevo en las conclusiones).

Por su lado, Montiel (2008) hizo una revisión de las funciones trigonométricas desde su definición a través de la matematización de la astronomía expuesta en el *Almagesto* de Ptolomeo. La autora sugiere la *anticipación* como práctica social vinculada a la matematización, de modo que el modelo matemático que se puede construir con ello es de naturaleza geométrica elemental. En una segunda etapa, la investigadora ha experimentado con estudiantes el uso de instrumentos de medición angular semejantes a los clisímetros usados por los topógrafos[2] –construidos *ex profeso* con un transportador de plástico y una mirilla por demás simple–, con los cuales llevó a sus estudiantes a medir ángulos de elevación de edificios y construcciones, para luego regresar la práctica al salón de clase. Cantoral y cols. (2006, p. 90) han considerado el teorema del binomio de Newton (TBN) como el objeto matemático que llevó a ingenieros del siglo XVIII a "*predecir* el comportamiento de lo que fluye [...] calor, movimiento, flujos eléctricos". En este caso, las prácticas de referencia asociadas son actividades de ingeniería cuya práctica social normativa es la predicción relacionada con una buena cantidad de argumentos matemáticos de naturaleza variacional.

Finalmente, en Camacho y Sánchez (2010) se coloca la noción de *variabilidad* como resultado de investigación. Este último significado surgió de sistemas de prácticas de referencia vinculadas con actividades de ingeniería que se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas y fue fundamental en el diseño experimental –del todo geométrico– de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de función.

GEOMETRÍA PRÁCTICA

En la actualidad, se podría interrogar a un topógrafo sobre qué es lo que determina la precisión en los levantamientos topográficos. Él puede suponer, de entre las respuestas que podría dar, el orden de importancia que tienen los levanta-

[2] El clisímetro es un nivel de mano de amplia utilidad en los levantamientos topográficos, al cual se le adaptó un círculo vertical para la medición de ángulos de elevación o depresión.

mientos. Dependiendo de su importancia, éstos se clasifican en: de *primer orden, segundo orden* y *tercer orden*. Por lo general, los de tercer orden involucran teodolitos cuya aproximación angular no rebasa el minuto y se acompañan de estadales para la determinación de las distancias; mientras que los de primer orden suelen elaborarse con teodolitos de aproximación angular de hasta centésimos de segundo, asociando a la parte lineal cintas métricas o distanciómetros electrónicos.

En la misma dirección, se puede exigir al topógrafo que eche mano de las precauciones necesarias en la toma de datos para asegurar la justeza de la medición. No obstante, los errores *accidentales* y *sistemáticos* –por ejemplo, dar una tensión superior a la que soporta la cinta métrica, lo cual provoca un error en la medición lineal– que se relacionan con los instrumentos aparecen inevitablemente en los cierres angular y lineal de los polígonos levantados.

La dioptra y su evolución

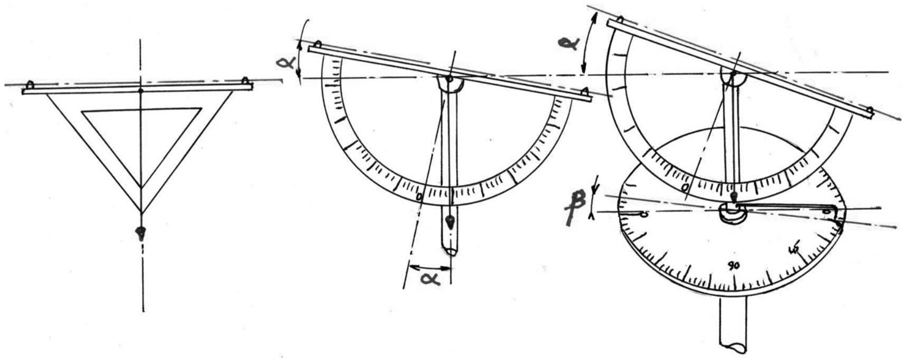
Durante el primer tercio del siglo XVI, en la *geometría práctica,* como se conocía a la topografía desde la época de los antiguos griegos, uno de los instrumentos de observación de mayor uso fue el grafómetro. Este instrumento es el antecedente inmediato del teodolito común[3] y también se puede decir que es una consecuencia de la evolución tecnológica de la dioptra, ampliamente utilizada por los griegos y romanos en los levantamientos topográficos. La figura 1 muestra tres procesos de evolución que tuvo ese instrumento hasta asemejarse al grafómetro diseñado por el francés Danfrie (1597) (véase la figura 3).

La dioptra que aparece en la imagen A de la figura 1 era un instrumento sencillo constituido por un triángulo isósceles cuya base servía de *alidada*. Por lo general, la alidada es una regla fija o móvil que tiene en cada extremo una pínula en la cual se han practicados pequeños agujeros que sirven para dirigir visuales. La punta del triángulo –unión de los lados iguales– se colocaba en su base y servía para sujetar el hilo de la plomada. Luego que la base del instrumento se centraba sobre algún vértice del terreno, la observación a través de la alidada resultaba al posicionarla horizontalmente.

No obstante, el modelo del triángulo isósceles se intercambiaba más comúnmente por otro cuadrangular, como el que se muestra en la figura 2. De igual

[3] Cuando se menciona al teodolito común, se hace referencia a los de aproximación angular de un minuto de grado sexagesimal.

Figura 1 Las imágenes muestran el proceso de evolución que sufrió la dioptra hasta asemejarse al grafómetro diseñado en 1597 por P. Danfrie, el cual aparece en la figura 3. (Obtenido el 28 de julio de 2010 de: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/Dioptra-principe.jpg)



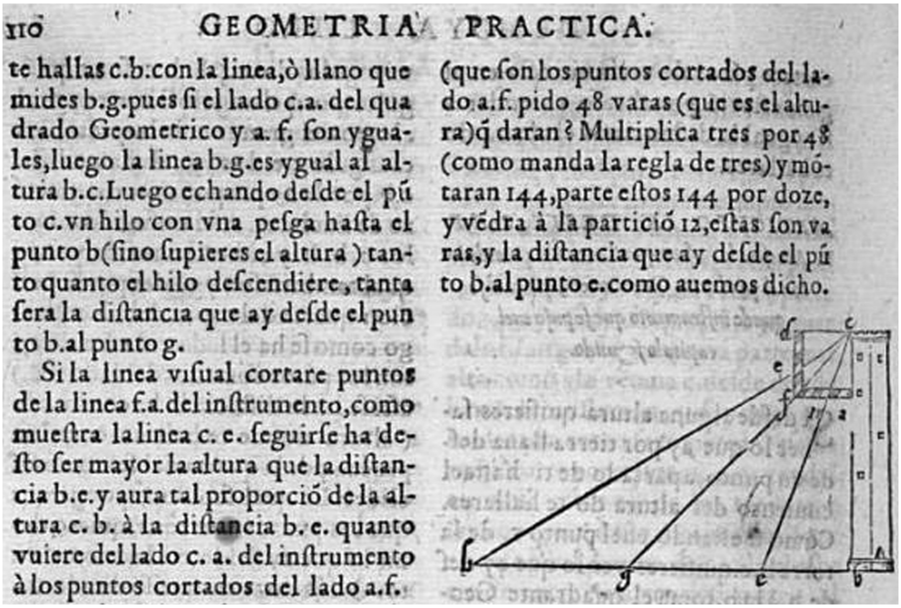
modo, la base opuesta a la graduación servía de alidada, ya que el movimiento angular se iniciaba en alguno de los vértices no graduados del cuadrado.

La primera evolución, dada por Herón de Alejandría, unos 130 años a. C., consistió en reemplazar el triángulo y el cuadrado por un semicírculo graduado en forma de transportador cuya base servía de alidada (véase la imagen B de la figura 1). El sistema se colocaba sobre una rodilla de madera que servía para nivelarlo al centrar la plomada sobre algún vértice del terreno. Posteriormente, la rotación de la alidada permitía la elección angular deseada, la cual estaba en función del origen o índice del transportador.

Una segunda evolución se muestra en la imagen C de la figura 1. Ésta consistió en incorporar un segundo disco graduado, perpendicular al primero, sobre un eje vertical, con el cual se determinaban los ángulos de elevación.

Con estos instrumentos se realizaban levantamientos y nivelaciones semejantes a los que se efectúan en la actualidad con los teodolitos comunes. Incluso, hay evidencia de la utilidad de la dioptra en el proyecto de construcción de acueductos, trazado de caminos y amplios túneles romanos durante el siglo VI a. C.; sin embargo, su invención se atribuye a los griegos hacia el siglo III a. C. Por su lado, la figura 2 deja ver el uso práctico que se hacía de la dioptra en su modalidad de escuadra graduada sujeta a un marco cuadrado para la medición de ángulos de depresión y otras operaciones; esto último durante el siglo XVI

Figura 2 En la ilustración se aprecia el uso que se hacía de la dioptra para la medición de ángulos de depresión durante el siglo XVI. La ilustración aparece en la *Geometría práctica* de Pérez de Moya, escrita hacia 1523


110 GEOMETRIA PRACTICA.

te hallas c.b.con la linea,ò llano que mides b.g.pues ſi el lado c.a. del quadrado Geometrico y a. f. ſon yguales,luego la linea b.g.es ygual al altura b.c.Luego echando deſde el pũto c.vn hilo con vna peſga haſta el punto b(ſino ſupieres el altura) tanto quanto el hilo deſcendiere , tanta ſera la diſtancia que ay deſde el punto b.al punto g.

Si la linea viſual cortare puntos de la linea f.a.del inſtrumento,como mueſtra la linea c. e. ſeguirſe ha deſto ſer mayor la altura que la diſtancia b.e.y aura tal proporció de la altura c. b. à la diſtancia b. e. quanto vuiere del lado c. a. del inſtrumento à los puntos cortados del lado a.f. (que ſon los puntos cortados del lado a.f. pido 48 varas (que es el altura) q̃ daran ? Multiplica tres por 48 (como manda la regla de tres) y mótaran 144,parte eſtos 144 por doze, y vẽdra à la partició 12,eſtas ſon varas,y la diſtancia que ay deſde el pũto b.al punto e.como auemos dicho.

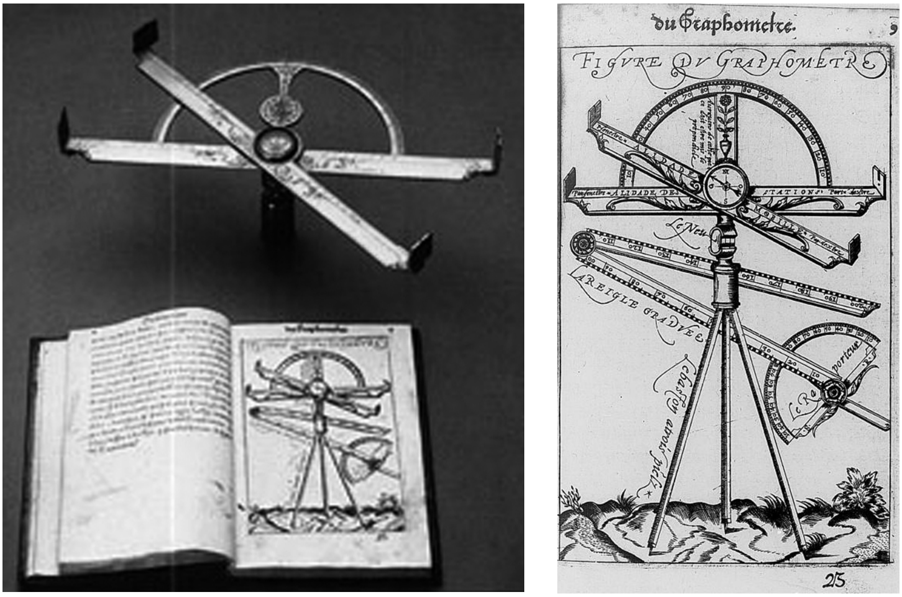
(Pérez de Moya, 1523). Obsérvese cómo la graduación de la escuadra tiende a parecerse a la forma de un semicírculo graduado.[4]

El grafómetro

Desde su invención en 1597, el grafómetro se distinguía por su sencillez, portabilidad y resistencia. Como tal, constaba en la parte superior de un semicírculo graduado que servía para medir ángulos verticales (véase la figura 3). Las observaciones se realizaban a través de unas pínulas colocadas al final de dos alidadas cuyos extremos contaban con vernieres para apreciar las fracciones de

[4] En esta dirección, Apóstol (2004) encontró un error de alineación de 0.1 grado al usar la dioptra en el trazo del túnel de Samos, construido por los romanos durante el siglo VI a. C en el interior del monte Kastro.

Figura 3 Grafómetro diseñado por el francés Philippe Danfrie. Las ilustraciones muestran la manera de emplearlo. Véase la referencia Danfrie (1597). Obtenido el 27 de julio de 2010 de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100149p/f13



la graduación angular.[5] Para medir los ángulos horizontales, se usaba el semicírculo inferior, el cual estaba atravesado a la mitad por una regleta, la cual se sujetaba mediante un tornillo a otra en la parte donde terminaba la primera. Este aditamento se llamaba *recipiángulo* y permitía medir los ángulos de entrada o salida que formaban las dos rectas del terreno comprendidas por el vértice donde se estacionaba el instrumento que, en este caso, eran alineadas por las regletas. Semejante a la dioptra, todo el sistema se apoyaba sobre una rodilla para fijarlo a un tripié (Danfrie, 1597).

El grafómetro fue ampliamente utilizado en las operaciones de alineación, medición de terrenos y, sobre todo, en la delimitación de los campos de cultivo para el pago de impuestos catastrales, trazado de edificios públicos y catedrales,

[5] Humboldt consigna el uso del grafómetro en la medición de una base inclinada *AB,* utilizada para determinar la altura en toesas sobre el nivel del mar de la cima denominada *Tolima,* ubicada en los Andes. Citado en: *Viaje de Humboldt por Colombia y el Orinoco,* para el año de 1806. Obtenido el 28 de noviembre de 2010 de: http://www.lablaa.org/blaavirtual/exhibiciones/humboldt/ibague3.htm.

así como observaciones astronómicas, tanto por los agrimensores como por los geómetras –europeos y americanos– desde mediados del siglo XVII y hasta finales del siglo XIX.

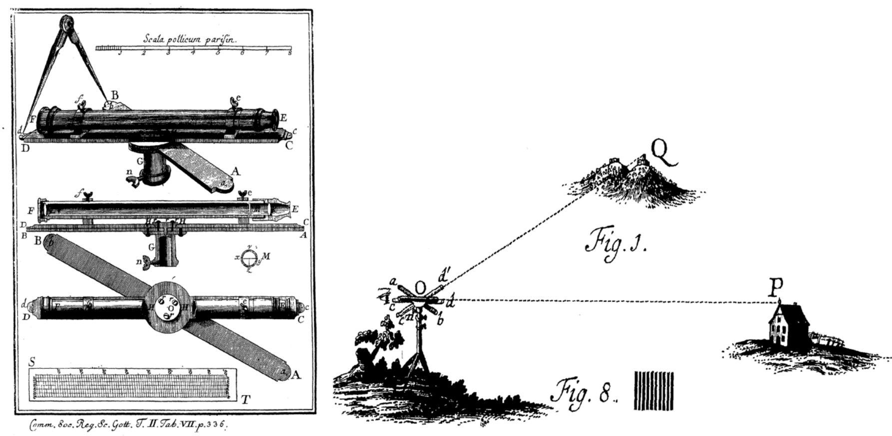
En su origen, los grafómetros se limitaban a una aproximación angular que dependía del tamaño del diámetro y la graduación del semicírculo, la cual podía ser del orden de 10′ de grado sexagesimal (aunque era común que el semicírculo se graduara en los sistemas sexagesimal y centesimal).[6] En sí misma, la medición angular era complicada, porque inicialmente estos instrumentos no contaban con un aditamento óptico para precisar la lectura, por lo que se llegaba a cometer errores de hasta 30′ en las alineaciones. Otra de las limitaciones provenía de su *nivelación* horizontal, ya que carecían de niveles y accesorios para ese fin. Por consiguiente, las distancias que se medían –con cordeles–,[7] contenían errores de observación que hacían que la geometrización final del terreno no correspondiera con el espacio real levantado.

Sin embargo, el grafómetro fue mejorándose con incorporaciones tecnológicas hasta su etapa final, que corresponde al último tercio del siglo XIX, y dejó de utilizarse debido a la amplia difusión de los teodolitos comunes. Así, para mediados del siglo XVIII, la casa inglesa Canivet construía los mejores grafómetros de un pie de diámetro en los círculos horizontal y vertical, cuya alidada, por lo general, era dividida por el método de Werner, es decir en subdivisiones sexagesimales y centesimales, con las cuales se podían medir los ángulos con aproximación de 1’. En esta etapa, los grafómetros se hallaban armados con anteojos de 28 pulgadas con lentes de buen alcance para las observaciones de hasta más de 15 kilómetros, e incluían tornillos niveladores para el eje horizontal de tales instrumentos. En sí, en esa época era tal su semejanza con los teodolitos comunes que ya no podían distinguirse de éstos.

[6] Si la graduación del semicírculo era centesimal, el instrumento se conocía como goniómetro.

[7] Por lo general, los cordeles que se usaban para los levantamientos topográficos, sobre todo a lo largo del siglo XVIII, eran de cáñamo y medían unos tres cuartos de centímetro de diámetro. Estos cordeles se torcían, enceraban y aceitaban para que resistieran la tensión. El cordel, de hasta 50 varas (cada vara equivalía a 0.836 m), se marcaba utilizando una *vara patrón*. Finalmente, estos segmentos se subdividían en *palmos*, cada palmo se subdividía en doce dedos y cada dedo en doce *granos*.

Figura 4 A la izquierda, grafómetro alemán con anteojo, la abertura del compás servía para determinar el valor angular al observar su valor sobre la escala que ahí aparece. A la derecha se puede ver el método utilizado en la medición de un ángulo horizontal. Fue utilizado para los levantamientos topográficos alrededor del año 1750



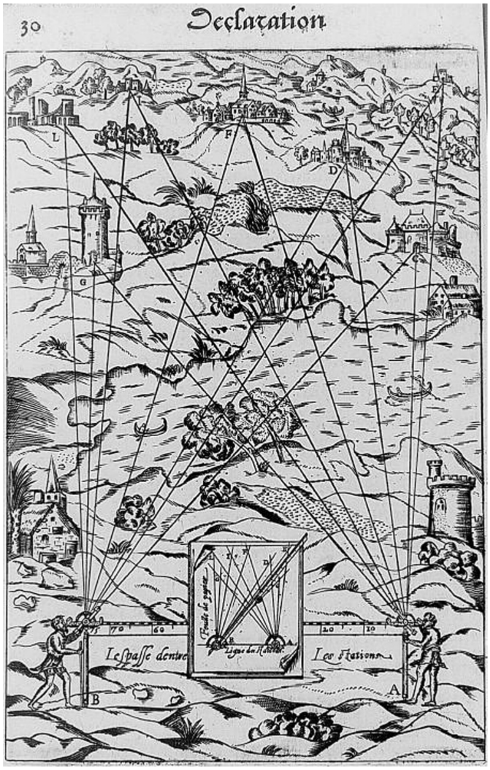
Fuente: Commentarii Societatis Regiae Scientiaru Gottingensis, Gottingae, 1752, 1755.

Las técnicas de medición usando el grafómetro

En un principio, las técnicas de medición que se empleaban con los grafómetros consistían en la *intersección angular* de los diferentes vértices de que constaban los terrenos, tomándose como puntos de referencia para las observaciones dos o más estaciones desde las cuales se dominaba con el instrumento el total de la superficie. Las estaciones establecían a su vez un lado *base* para los triángulos que así se formaban, logrando con ello una *red* de triángulos o triangulación elemental. En la figura 5 se aprecia el modelo de medición angular y lineal utilizado con el grafómetro.

No obstante, otros métodos expeditivos que se llegaron a utilizar fueron el de *radiaciones,* que consiste en medir los vértices de los terrenos sobre un punto central *P* (véase el ejemplo que se muestra en la figura 6) desde el cual se domina su totalidad, tomando, a su vez, una de las radiaciones (por ejemplo la línea *PA*) como referencia base para la medición de los ángulos centrales.

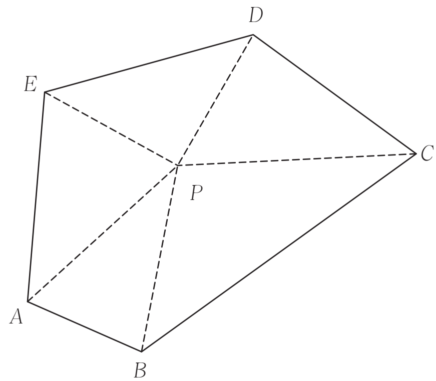
Figura 5 Técnica de medición angular y lineal mediante *intersecciones*, haciendo uso del grafómetro sugerido por Danfrie (1597)



Otro método común era (y sigue siendo) el de *itinerarios* o *caminamiento cerrado*, que consiste en levantar el polígono midiendo sus ángulos internos; por ejemplo, en la figura 6, el ángulo *EAB*, así como las longitudes correspondientes entre cada vértice, iniciando con la distancia *AB* para concluir la medición con la distancia *EA*, toda vez que se sigue la marcha de la medición sobre el itinerario del polígono en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

En la actualidad, las técnicas de medición se siguen eligiendo de acuerdo con los *reconocimientos* previos que hay que desarrollar antes de la medición de los terrenos. No obstante, y de acuerdo con su aparición, históricamente las técnicas se pueden resumir en dos; en primer lugar, el método de triangulación elemental y, en segundo, el de poligonación o itinerarios.

Figura 6 Técnica de medición angular y lineal de un terreno mediante *radiaciones* desde el punto *P*



GEOMETRIZACIÓN DE UNA PORCIÓN DE SUPERFICIE DE TERRENO HACIENDO USO DEL GRAFÓMETRO

Situemos el siguiente ejemplo a finales del siglo XVIII,[8] conviniendo que el terreno *ABCDEA* de la figura 6, en su forma ideal, fue medido a partir de un levantamiento topográfico que utilizó la técnica de poligonación itinerante con un grafómetro de aproximación angular de 1´ y una cuerda resistente dividida en décimos de metro. Supóngase que se cuenta ya con la medición de los ángulos internos y las distancias medidas sobre el terreno. No obstante, consideremos un error sistemático en la medida de las longitudes debido a lo defectuoso de la cuerda.[9]

Una primera condición que se establece es que la suma s de los ángulos internos medidos debe ser:

$$s = (n - 2)180^{\circ} \text{ grados} \tag{1}$$

[8] Con la salvedad del uso del sistema métrico, el cual fue establecido en Francia hacia el año de 1791.

[9] En la práctica de las operaciones topográficas actuales, el grueso de los errores lineales que se exponen en el ejemplo con el grafómetro y cordel se encuentra lejos de ocurrir debido a la precisión de los instrumentos de uso, es el caso de teodolitos actuales de aproximación angular de centésimos de segundo sexagesimal, así como de la *estación total* o distanciómetros electrónicos para la determinación de las longitudes.

En la expresión 1, n es el número de vértices con que cuenta el polígono; para el caso que nos ocupa $s = 720º$ –sugerida en los *Elementos* de Euclides para las figuras geométricas regulares–.[10] Una cuestión que surge de esto último es la generalización que se hace de la expresión 1 para los polígonos irregulares como el que se muestra en la figura 6. Pero dejemos por lo pronto esta cuestión y supongamos que la suma s' que se obtuvo difiere de s por una cantidad angular $\pm e$, la cual aceptamos, como principio fundamental, que debe dividirse en partes iguales entre todos los ángulos. Es más, supongamos que ya ejecutamos esta última operación y el *cierre* angular cumple con lo especificado en la expresión 1.

El trabajo que seguía era el diseño de la planta topográfica a cierta escala previamente convenida. Al no contarse con un sistema de coordenadas rectangulares,[11] lo que se permitía era el uso del transportador para la medición polar de los ángulos en el papel y de una regla graduada para las longitudes, la cual hacía las veces de escalímetro. Supongamos que el contorno del terreno *ABCDEA*, de la figura 6 no *cierra* al dibujarse debido a los pequeños errores de observación de las distancias causados por el uso y las limitaciones de los instrumentos, dando la pequeña diferencia $k = AF$, que se ha exagerado en la figura 7 para darle más claridad. En este caso, el error k, que se comete al trazar sobre el papel un lado medido equivocadamente sobre el terreno, influye en la posición de los siguientes lados del polígono.

Hasta esta parte del trabajo, el espacio real es el polígono cerrado *ABCDEA* que se muestra en la figura 6, mientras que el microespacio preliminar que resulta corresponde al polígono abierto formado por los vértices *ABCDEF* de la figura 7.

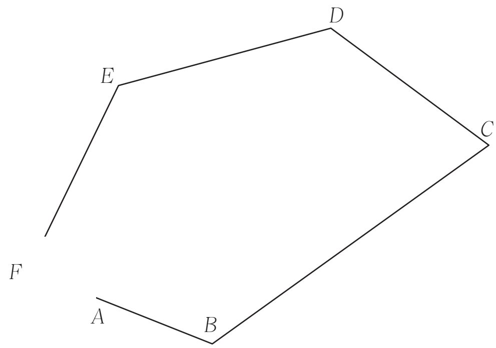
El modelo de análisis que se presenta a continuación fue tomado de diferentes fuentes (Gauss, 1822; Díaz Covarrubias, 1896, pp. 240-247; Toscano, 1955, p. 57; Caillemer, 1967, p. 70; Pasini, 1969, p. 342; Jordan, Reinhertz y Eggert, 1981, p. 466).

Por su naturaleza, el error $k = FA$ en la geometrización es inevitable. Pero supongamos que se encuentra dentro de la tolerancia previamente especificada para este tipo de levantamientos, razón por la cual no es necesario verificar la medición, es decir, elaborar de nuevo el levantamiento. Por tanto éste puede *disi-*

[10] Al final de los *Elementos*, Euclides demuestra en un lema que los ángulos interiores de un pentágono regular miden un ángulo recto y un quinto de este último, es decir 108º, lo cual deja ver el conocimiento que se tenía de este tema. Sin embargo, esto no prueba la generalización de la expresión 1 para cualquier figura regular.

[11] Aun cuando el modelo de coordenadas fuera conocido, su difusión no tenía el alcance de utilidad que se desarrollaría a lo largo del siglo XIX.

Figura 7 Al dibujar el espacio real identificado por el polígono cerrado ABCDEA con transportador y regla graduada a cierta escala, éste no *cierra* debido a los errores de observación de las distancias cometidos con el grafómetro y el cordel, quedando así el polígono abierto ABCDEF



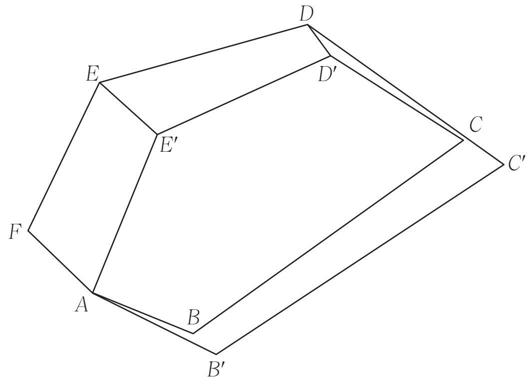
mularse, o sea, no eliminarse, sino repartiendo proporcionalmente su valor entre los lados del polígono. Al no haber más fundamentos para atribuir a una parte de las longitudes mayor error que el resto, habrá que dividir el error k proporcionalmente entre éstas. Esto consiste en desplazar cada vértice, paralelamente al error k, una cantidad proporcional a la longitud de cada lado.

Supongamos que $AB = l_1$, $BC = l_2$,..., *etc.*, de modo que $c_1 = BB'$, $c_2 = CC'$,..., $c_{n-1} = EE'$, sean las correcciones que les corresponden, donde el polígono corregido es $A\,B'C'D'E'$ y, además, que $P = l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}$ sea el perímetro total (véase la figura 8). De aquí se sigue que, para el primer lado AB: $P : c_n :: l_1 : c_1$, de donde: $c_1 = \frac{c_n}{P} l_1$. De igual modo, para el segundo lado BC, se tendrá: $P : c_n :: l_1 + l_2 : c_2$, o bien: $c_2 = \frac{c_n}{P}\left(l_1 + l_2\right)$. Así que la corrección para el penúltimo lado está dada por la relación 2:

$$c_{n-1} = \frac{c_n}{P}\left(l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}\right) \qquad (2)$$

Puesto que, además, las correcciones son proporcionales entre sí, las magnitudes de éstas irán de menor a mayor, y la última quedará con la misma magnitud. Para ejemplificar, se contemplan los lados del polígono con las siguientes magnitudes dadas en metros: $AB = 175.2$, $BC = 341.7$, $CD = 289.6$, $DE = 274.5$

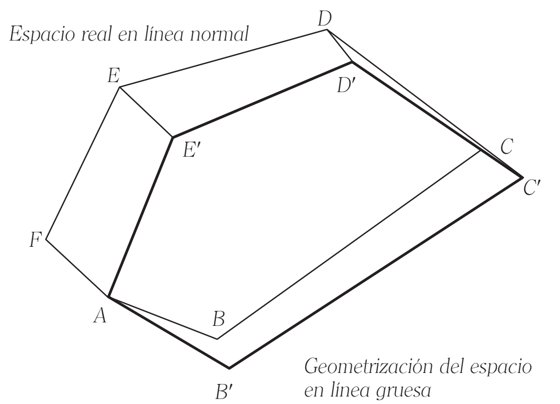
Figura 8 Las magnitudes *FA*, *BB′*, *CC′*, *DD′* y *EE′* son las que hay que restar a cada vértice respectivamente para que quede el polígono corregido



y $EA = 124.3$, cuyo perímetro es: $P = 1\ 205.3$. Haciendo uso de la expresión 2, las correcciones correspondientes quedan de la siguiente manera: $BB' = 1.16$, $CC' = 3.41$, $DD' = 5.32$, $EE' = 7.13$ y $FA = 8.00$. En este caso, el error de cierre $k = FA$ se midió directamente con la regla graduada en el polígono dibujado a la escala especificada.

Con este supuesto, la geometrización final del terreno se aprecia en línea más gruesa que el resto en la imagen de la figura 9.

Figura 9 La figura muestra la geometrización del espacio real ideal a partir del uso del grafómetro y un cordel defectuoso, así como el error o desplazamiento homotético que se produjo con ello



Como se ve en la figura 9, el error sistemático que supusimos en la medida de las longitudes tiene por efecto dar un polígono homotético del espacio real. En este caso, la relación de homotecia está en proporción directa al error sistemático.

CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

En el centro de la práctica topográfica se pueden plantear las siguientes observaciones desde la perspectiva de estudio que hemos elegido.

- La práctica de referencia es una práctica topográfica que involucró la medición del terreno haciendo uso de la técnica de poligonación itinerante, es decir, medir los ángulos internos del polígono y las distancias entre cada dos vértices marchando sobre el perímetro del terreno y siguiendo un orden inverso al de las manecillas del reloj.
- La práctica social que norma la actividad para determinar el microespacio es la geometrización. Esta actividad muestra argumentos en forma de discurso matemático, tomados inicialmente de los *Elementos* de Euclides, como es el caso de la ecuación 1 para el cierre angular. No obstante, el problema que surge en el cierre lineal hizo que se establecieran condiciones que dieran oportunidad de ajustar dicho error, como es el caso de la expresión 2.
- Para el levantamiento, la geometrización se mueve en un ambiente en el que se privilegia la *proporción* como una razón entre las magnitudes del terreno. Mientras que los objetos matemáticos de uso son los ángulos, magnitudes lineales y direcciones.
- La expresión 2, $c_{n-1} = \frac{c_n}{P} \sum_{i=2} l_{n-1}$, es un modelo matemático de compensación lineal, resultado de la práctica social. Por sí mismo, el modelo sugiere que "si hay un error en el cierre lineal $k = A'A$ de un polígono cerrado, éste debe ser repartido siguiendo una *compensación paralela proporcional*".
- La transposición del espacio real ideal del terreno al microespacio, resultado de la geometrización, se experimentó al confrontar el grafómetro con el uso del transportador y el cordel con la regla graduada.
- Por su lado, la métrica de uso para el espacio real se guarda mediante la

escala utilizada durante la geometrización del microespacio. De aquí que esta última sea una actividad que se ubica en ambas experiencias.

En principio no se aprecia que los conocimientos matemáticos sugeridos por la expresión 2, los cuales surgieron durante las actividades desarrolladas con la práctica social, hayan tenido una aplicación inmediata en el contexto de la matemática en sí y su enseñanza, pero ello no nos debe preocupar, puesto que esto último ocurriría posteriormente mediante las diferentes reformulaciones que sufrió el modelo de compensación 2. Incluso, Camacho (2011b) ha mostrado la transformación y evolución que sobrellevó la representación 2, al establecerse como un modelo de compensación más efectivo cuando fue innovado por Gauss, transformándolo en el método de los mínimos cuadrados. El método de los mínimos cuadrados se convirtió en práctica de uso común en la ingeniería a causa del *rigor* impuesto por Gauss tanto a los métodos de medición angular y lineal como a los del cálculo de las triangulaciones geodésicas que desarrolló en Hannover a lo largo de los años 1820 a 1825. El rigor fue consecuencia del perfeccionamiento tecnológico que sufrieron los teodolitos en esa época –sobre todo en la precisión angular– al tolerar la medición de los ángulos hasta centésimos de segundo sexagesimal.

Por su lado, las técnicas de medición angular y lineal de la topografía fueron rescatadas por pedagogos como Anfossi (1943) y Granville, Smith y Mikesh (1954), entre otros, para la enseñanza de los conceptos elementales involucrados en los cursos de trigonometría. Aunque estas ideas se han utilizado para introducir algunos conceptos de la geometría elemental. Así, por ejemplo, Matheron y Noirfalise (2007) han puesto a estudiantes del liceo francés a resolver problemas de geometría euclidiana a través de operarlos como problemas reales, incorporando técnicas y herramientas de uso procedimental. Desde la perspectiva de la *Teoría antropológica de lo didáctico*, les formularon –en una calca– una *organización didáctica* relacionada con problemas de medición de ángulos internos y lados de triángulos, de modo que las técnicas de uso fueron tomadas de las actividades que realizaban los topógrafos franceses a lo largo del siglo XX. De esta manera, crearon para los estudiantes un microespacio que modelaba el espacio real, incluidos juegos de geometría que simularon ser instrumentos de observación como el teodolito y la cinta métrica.

Por su lado, Camacho (2011a) desarrolló un diseño de situación de aprendizaje en la que incluyó elementos de una práctica de astronomía con la que se buscaba dotar de significado a las actividades de enseñanza del concepto de seno trigonométrico. En la actividad, se diseñaron tablas trigonométricas –que se utilizaron ampliamente en el ambiente escolar a lo largo del siglo XX– que simulaban las tablas de cuerdas de la astronomía ptolemaica, logrando con ello que los estudiantes bosquejaran las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. En el mismo artículo, el autor proporcionó a estudiantes de arquitectura microespacios de trabajo trigonométrico –hojas de papel milimétrico tamaño carta– en los que se consignaron lotes de terrenos a escala para que, triangulando en diagonal estos últimos, los estudiantes determinaran los ángulos internos del polígono, el área de la superficie del lote y el diseño en tinta de la planta topográfica correspondiente (Camacho, 2011a, pp. 154-157), con el objeto de hacer hincapié en el aprendizaje de las relaciones trigonométricas.

Estos últimos ejemplos dejan ver la utilidad no sólo de los significados que se rescatan en el estudio socioepistemológico, sino también la posible aplicación escolar de las técnicas e instrumentos de medición topográfica que hacen más funcional y comprensible –para los estudiantes– el diseño de las situaciones de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anfossi, A. (1943), *Trigonometría rectilínea,* México, Editorial Progreso.

Apóstol, T. (2004), "El túnel de Samos", *Ingeniería y Ciencia,* vol. 64, núm. 4, pp. 30-40. Obtenido el 28 de julio de 2010 de http://pr.caltech.edu/periodicals/EandS/articles/LXVII1/samos.htlm.

Bachelard, G. (1928), *Essai sur la connaissance approchée,* París, Librairie Philosophique J. Vrin.

Bails, B. (1789), *Principios Matemáticos de la Real Academia de San Fernando,* 2a. ed., Madrid, Imprenta de la Viuda de Ibarra, tomo II.

Caillemer, A. (1967), *Topographie et photogrammétrie,* París, Sociéte des Editions Technip.

Camacho, A. (2005), "Sistemas sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza", *Revista Cinta de Moebio,* Universidad de Chile, 022.

——— (2010), "Análisis sociocultural de la noción de variabilidad", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* núm. especial, vol. 13, núm. 4, pp. 29-52.

——— (2011a), "Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial", *Revista Iberoamericana de Educación*

Superior (RIES), vol. 2, núm. 3, pp. 152-171. Disponible en http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/84.

Camacho, A. (2011b), "Gauss. Aplicación del cálculo de las probabilidades a un problema de geometría práctica. Estudio socioepistemológico". Documento presentado en el mes de julio durante el *Primer Encuentro Internacional de la Enseñanza en la Probabilidad y la Estadística* 2011, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006), "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9, pp. 83-102.

Chevallard, Y. (2006), "Passé et présent de la Théorie Antropologique du Didactique", en Ruiz-Higueras, L. Estepa, F. J. A. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Antropológica de lo Didáctico*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España, pp. 705-746.

Danfrie, Ph. (1597), Illustrations de declaration de l'usage du graphonomètre par la pratique duquel l'on peut mesurer toutes distances. Obtenido el 9 de julio de 2010 de http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100149p/f13.

De Gortari, E. (1988), Diccionario de la lógica, España, Plaza y Valdés.

Díaz, F. (1897), *Tratado elemental de topografía, geodesia y astronomía práctica*, México, Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento, tomo I, 3a. ed.

Gauss, F (1822), *Die trigonometrischen und polygonometrischenrechnungen in der feldmesskunst*, EudenStrien Halle.

Granville, W. A, Smith, P y Mikesh, J. (1954), *Plane and spherical trigonometry*, Boston Massachusetts, Ginn and Company.

Houdement, C., y Kusniak, A. (2006), *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 11, pp. 175-193.

Jordan, W., Reinhertz, C. y Eggert, O. (1981), *Topographie* (Mantero, J. M., trad.), Barcelona, Gustavo Gili (trabajo original publicado en 1890).

Kusniak, A (2005), "Espace de travail géométrique personnel: une approche didactique et statistique", *Third International Conference about Implicative Statistic Analysys*, Palermo, Italy, disponible en http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_Kusniak_16.

Matheron, Y. y R. Noirfalise (2007), "Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'aer et de per", *Une recherche de la Commission Interirem (cii) didactique soutenue par l'inrp"*, consultado el 5 de febrero de 2011, en http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/textes-fondateurs.

Montiel, G. (2008), "Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico", en Hernández, H. y G. Buendía (eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa,* Universidad Autónoma de Chiapas, pp. 105-119.

Pasini, C. (1969), *Tratado de topografía,* Barcelona, Gustavo Gili, 6a. ed. española.

Pérez de Moya, J. (1523), *Tratado de geometría práctica y especulativa,* Alcalá, Observatorio de Marina de San Fernando, Impreso por Iván Gracián.

Toscano, R. (1955), *Métodos topográficos,* México, Editorial Porrúa.

DATOS DE LOS AUTORES

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
camachoalberto@hotmail.com

Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, Ciudad Jiménez, Chihuahua, México
ivonne_mx_2000@yahoo.com

Ricardo Blanco Vega
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
ricardo.blanco@itchihuahuaii.edu.mx

Jesús Humberto Cuevas Acosta
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
jhca_1@yahoo.com

Control óptimo estocástico en la enseñanza de la economía matemática

Ma. Teresa V. Martínez Palacios y Francisco Venegas-Martínez

Resumen: En este documento exponemos de manera didáctica el planteamiento del problema de control óptimo estocástico en tiempo continuo, en el cual las restricciones son procesos de difusión observables conducidos por el movimiento geométrico browniano. Asimismo, con el propósito de ilustrar el uso del control óptimo estocástico en la economía matemática, presentamos de manera didáctica dos ejemplos. El primero es un modelo de un agente económico racional que dispone de una riqueza inicial y enfrenta la decisión de cómo distribuir su riqueza entre consumo y un portafolio de activos en horizonte de planeación infinito, de manera tal que maximice su utilidad total esperada por el consumo. El segundo ejemplo corresponde al caso de un horizonte temporal finito cuya duración es estocástica.

Palabras clave: optimización dinámica estocástica, control óptimo estocástico en tiempo continuo, ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman, teorema de verificación del cálculo estocástico, lema *n*-dimensional de Itô.

Stochastic optimal control in the teaching of mathematical economics

Abstract: In this paper we present in a didactic way the statement of the stochastic optimal control problem in continuous time where constraints are observable diffusion processes driven by the geometric Brownian motion. Furthermore, in order to illustrate the use of stochastic optimal control in Mathematical Economics, we present in an educational way two examples. The first is a model of a rational economic agent that has an initial wealth and faces the decision of how to distribute his wealth in consumption and a portfolio of assets in an infinite planning horizon, so as to maximize his total expected utility for consumption. The second example concerns the case of a finite time horizon of stochastic duration.

Keywords: stochastic dynamic optimization, stochastic optimal control in continuous time, partial differential equation of Hamilton-Jacobi-Bellman, verification theorem of stochastic calculus, *n*- dimensional Itô's lema.

Fecha de recepción: 10 de abril de 2011.

INTRODUCCIÓN

La necesidad de aplicar el control óptimo estocástico en tiempo continuo como herramienta de modelación en las ciencias económicas se ha incrementado notablemente en las últimas décadas. Las respuestas de investigación a tales necesidades se han hecho patentes en diversos textos, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008), Hernández-Lerma (1994), Björk (2004), Huyên (2009), entre otros.

Así pues, Venegas-Martínez (2008) presenta diversas aplicaciones económicas del control óptimo, determinista y estocástico, en tiempo continuo. Por su parte, Hernández-Lerma (1994) desarrolla aplicaciones económico-financieras de procesos de difusión markovianos controlados en un horizonte de tiempo finito. Asimismo, Björk (2004) presenta la teoría de control óptimo estocástico para la modelación del problema de selección de cartera y consumo óptimos. A pesar del éxito en sus aplicaciones, es bien conocido que el control óptimo estocástico en tiempo continuo no es fácil de comprender por el rigor matemático que lo sustenta y mucho menos es fácil de aplicar, aun para aquellos que son matemáticos no especialistas en el área. Por lo antes referido, el objetivo de este documento es presentar de manera accesible y didáctica el modelo de control óptimo estocástico en tiempo continuo y algunas de sus aplicaciones en Economía para aquellos que no son necesariamente expertos en control óptimo estocástico, pero que lo requieren como herramienta en sus actividades profesionales o de investigación.

Con este objetivo en mente, de manera didáctica, se formulará el problema de control óptimo estocástico y se presentará la técnica de programación dinámica para obtener la ecuación diferencial parcial (EDP) no lineal de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), cuya solución nos lleva a encontrar el control óptimo y, con ello, las trayectorias óptimas de las variables que optimizan la función objetivo.[1] Asimismo, como ilustración, se presentan dos ejemplos de aplicación. El primero de ellos corresponde a un modelo de un agente económico que desea maximizar su utilidad total esperada y descontada de consumo en un horizonte temporal infinito y el segundo ejemplo versa sobre un agente económico que desea maximizar su utilidad en un horizonte temporal finito y estocástico.[2]

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se hace el planteamiento del problema general de control óptimo estocástico en tiempo

[1] Para una rigurosa formalización de problemas de control óptimo estocástico en tiempo discreto y continuo léase Hernández-Lerma (1994).

[2] Para una amplia referencia de problemas de control óptimo estocástico en tiempo discreto y continuo, aplicados en Ciencias Económicas, refiérase a Venegas-Martínez (2008).

continuo cuando las restricciones son difusiones conducidas por movimientos brownianos. En la sección 3, se plantea de manera general la metodología de programación dinámica (recursividad) en la que se basa la solución del problema de control óptimo planteado, obteniendo como resultados centrales: primero, la ecuación diferencial parcial no lineal de Hamilton-Jacobi-Bellmam y, segundo, las condiciones de primer orden que llevan a encontrar de manera general la expresión de la variable óptima de control. En la sección 4, se enuncia el teorema de verificación del control óptimo estocástico y su demostración se presenta en el apéndice A.2 de este documento. En la sección 5, se realiza una primera aplicación del modelo de control óptimo estocástico y se presenta su solución. En la sección 6, se describen nuevamente, mediante otro ejemplo, la aplicación del problema de control óptimo estocástico y su solución con la verificación correspondiente. La sección 7 presenta las conclusiones de este trabajo y la última sección contiene un apéndice en el que se desarrolla detalladamente el lema de Itô para *n* movimientos brownianos y la demostración del teorema de verificación del cálculo estocástico, con la intención de proporcionarle al lector las partes del análisis que no aparecen en el cuerpo principal del trabajo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO

La optimización dinámica estocástica es el estudio de sistemas dinámicos sujetos a perturbaciones aleatorias que pueden ser controladas con el objetivo de optimizar algún criterio de desempeño. Surge en problemas de toma de decisiones bajo incertidumbre y encuentra un campo muy fértil para su aplicación en economía y finanzas. En un inicio, se utilizaban los principios de optimización de Pontryagin y Bellman, pero en los últimos años la teoría de control se ha desarrollado notablemente motivada por los problemas que surgen en la economía matemática y las matemáticas financieras (Huyên, 2009).

El control óptimo estocástico es una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo en un ambiente de incertidumbre. El problema matemático general de optimización intertemporal estocástica, en tiempo continuo o discreto, se compone de una función objetivo, definida sobre varios periodos (finitos o infinitos) sujeta a restricciones, de las cuales, al menos una de ellas es dinámica, así como a condiciones de frontera (Wickens, 2008), utilizando variables de control que permiten optimizar la función objetivo, a fin de encontrar las sendas óptimas y obtener así la trayectoria óptima de las variables de estado a partir de la ecuación de movimiento que las une (Cerda, 2001). Este problema intertemporal comúnmente se conoce como problema de control óptimo estocástico en optimización dinámica.

Para establecer el modelo matemático general del problema de control óptimo estocástico en optimización dinámica en tiempo continuo, resulta necesario disponer del planteamiento general del problema matemático. Para ello, se considera un sistema dinámico formulado en tiempo continuo en el horizonte temporal [0, T], y se definen las funciones $\mu\left(t,x,u\right)$ y $\sigma\left(t,x,u\right)$, dadas por,

$$\mu : \mathbf{R}_{+} \times \mathbf{R}^{n} \times \mathbf{R}^{k} \rightarrow \mathbf{R}^{n},$$

$$\sigma : \mathbf{R}_{+} \times \mathbf{R}^{n} \times \mathbf{R}^{k} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times d}.$$

Para un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ considere la siguiente ecuación diferencial estocástica de estado

$$\mathrm{d}X_t = \mu\left(t, X_t, u_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(t, X_t, u_t\right)\mathrm{d}W_t \tag{1}$$

$$X_0 = x_0, \tag{2}$$

en donde se considera el proceso n-dimensional X_t como el proceso de variables de estado que se requiere controlar, el proceso k-dimensional u_t como el proceso de control, cuya correcta elección controlará a X_t, y W_t es un proceso de Wiener o movimiento browniano d-dimensional, definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $\left(\Omega, F, (F_t^{w})_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$.

Se define a continuación una regla de control admisible; para tal efecto, se considera la clase de procesos de control admisible como un proceso de control cuyo valor u_t en el tiempo t se adapta al proceso de estado X_t, y el cual se obtiene mediante la función $\mathbf{u}(t, x)$.

$$\mathbf{u} : \mathbf{R}_{+} \times \mathbf{R}^{n} \rightarrow \mathbf{R}^{k},$$

definida por

$$u_t = \mathbf{u}(t, X_t)$$

$\mathbf{u}$, así definida, se llama regla de control de retroalimentación. Supóngase ahora que se elige la regla de control de retroalimentación fija u(t, x) y se sustituye en 1, de donde se obtiene la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X_t = \boldsymbol{\mu}\big(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t)\big)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}\big(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t)\big)\mathrm{d}W_t. \tag{3}$$

Además, se impone a **u** la restricción de que, para cada t, $u_t \in U \subset \mathbf{R}^k$, donde U es la clase de controles admisibles.

Definición 1. Una regla de control $\mathbf{u}(t, x)$ es admisible si (Björk, 2004);[3]

i) $\mathbf{u}(t, x) \in U, \ \forall t \in \mathbf{R}_+ \quad y \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$

ii) Para cualquier punto inicial (t, x) dado, la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}X_s = \boldsymbol{\mu}\big(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s)\big)\mathrm{d}s + \boldsymbol{\sigma}\big(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s)\big)\mathrm{d}W_s$$
$$X_t = x$$

tiene una única solución.

Puesto que el problema de control óptimo por definir se encuentra en el marco estocástico y toda vez que el proceso de estado es n-dimensional, será necesario definir las siguientes funciones y establecer el teorema fundamental del cálculo estocástico, llamado lema de Itô para el caso de n variables.

Definición 2

i) Para cualquier vector fijo $u \in \mathbf{R}^k$, las funciones $\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{u}}$ están definidas por

$$\boldsymbol{\mu}^u(t, x) = \boldsymbol{\mu}(t, x, u)$$
$$\boldsymbol{\sigma}^u(t, x) = \boldsymbol{\sigma}(t, x, u)$$

y se suponen con segundas derivadas continuas.

ii) Para cualquier regla de control **u** las funciones $\boldsymbol{\mu}^u$ y $\boldsymbol{\sigma}^u$ están definidas por

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{u}}(t, x) = \boldsymbol{\mu}\big(t, x, \mathbf{u}(t, x)\big)$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{u}}(t, x) = \boldsymbol{\sigma}\big(t, x, \mathbf{u}(t, x)\big)$$

y se suponen con segundas derivadas continuas.

---

[3] Varios de los conceptos teóricos fundamentales utilizados, así como alguna de la notación adoptada en este documento, provienen del texto de Björk (2004).

Lema de Itô[4] *para* n *variables*

i) Considere la función $y = f(\mathbf{x}, t)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}x_i = \mu_i\left(x_i, t\right)\mathrm{d}t + \sigma_i\left(x_i, t\right)\mathrm{d}W_{it}$$

y cualquier vector fijo $u \in \mathbf{R}^k$, en donde, como ya se indicó, W_t es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración aumentada $\left(\Omega, \boldsymbol{F}, (\boldsymbol{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$. Entonces, mediante una aplicación estándar de expansión en serie de Taylor y el uso de las reglas del cálculo de Itô, se obtiene el teorema fundamental del cálculo estocástico (véase el apéndice A, sección A.1),

$$\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i^u\left(x_i, t\right)\sigma_j^u\left(x_i, t\right)\rho_{ij}\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_i}\mu_i^u\left(x_i, t\right)\right]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_i}\sigma_i^u\left(x_i, t\right)\mathrm{d}W_{it}.$$

ii) Análogamente, para cualquier regla de control $\mathbf{u}$, se tiene (véase el apéndice A, sección A.1)

$$\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i, t\right)\sigma_j^{\mathbf{u}}\left(x_i, t\right)\rho_{ij}\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_i}\mu_i^{\mathbf{u}}\left(x_i, t\right)\right]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i, t\right)\mathrm{d}W_{it}.$$

Dada una regla de control $\mathbf{u}$ con su correspondiente proceso controlado $X^{\mathbf{u}}$, algunas veces usaremos la notación

$$dX_t^{\mathbf{u}} = \mu^{\mathbf{u}}\mathrm{d}t + \sigma^{\mathbf{u}}\mathrm{d}W_t \tag{4}$$

donde,

[4] Varios de los conceptos teóricos fundamentales utilizados, así como alguna de la notación empleada en este documento se adoptan del libro de Venegas-Martínez (2008).

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right)$$

Para definir la función objetivo del problema de control se consideran las funciones (Cerda, 2001):

$$F : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R} \qquad \text{dada por} \qquad \left(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t\right) \rightarrow F\left(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t\right)$$

y

$$\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \qquad \text{dada por} \qquad X_t^{\mathbf{u}} \rightarrow \Phi\left(X_t^{\mathbf{u}}\right)$$

donde F valúa el desempeño del sistema a través del tiempo y $\mathbf{\Phi}$ es el estado en el que queda el sistema en el horizonte temporal del problema. Se supone que tanto F como $\mathbf{\Phi}$ son de clase C^2.

Se define la funcional objetivo de nuestro problema como la función

$$J_0 : U \rightarrow \mathbf{R}$$

definida por,

$$J_0\left(\mathbf{u}\right) = \mathrm{E}\left[\int_0^T F\left(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t\right) \mathrm{d}t + \Phi\left(X_T^{\mathbf{u}}\right) \middle| \mathbf{F}_0\right],$$

donde X^u es la solución de 3, con condición inicial $X_0 = \mathrm{x}_0$, y donde $\mathbf{F}_0$ representa la información disponible hasta el tiempo $t = 0$. El problema de control puede ser escrito como uno de maximización de la funcional $J_0\left(\mathbf{u}\right)$, sobre todo $\mathbf{u} \in U$, de donde se define la funcional óptima por

$$\hat{J}_0 = \max_{\mathbf{u} \in U} J_0\left(\mathbf{u}\right).$$

Si existe la regla de control admisible $\hat{\mathbf{u}}$ tal que

$$\hat{J}_0 = J_0\left(\hat{\mathbf{u}}\right)$$

entonces $\hat{\mathbf{u}}$ se define como una regla de control óptimo para el problema dado.

Definición 3. Se supone una pareja (t, x) fija, donde $t \in [0,\ T]$ y $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$. El problema de control $P(t, \mathrm{x})$ se define como:

$$\underset{\mathbf{u}_s}{\text{Maximizar}}\ \mathrm{E}\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}t + \Phi\left(X_T^{\mathbf{u}}\right)\middle|\, \mathbf{F}_t\right]$$

sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\mathrm{d}X_s^{\mathbf{u}} = \mu\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\left(s, X_s^{\mathbf{u}}\right)\right)\mathrm{d}s + \sigma\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\left(s, X_s^{\mathbf{u}}\right)\right)\mathrm{d}W_s \tag{5}$$

$$X_t = \mathrm{x} \tag{6}$$

y a la restricción

$$\mathbf{u}\left(s, y\right) \in U, \quad \text{para todo} \quad \left(s, y\right) \in \left[t, T\right] \times \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

En esta sección nos enfocamos en la regla de control óptimo para el problema de control dado, para lo cual, utilizaremos la programación dinámica.

Definición 4

i) La función de valor

$$J : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}$$

está definida por

$$J\left(t, x, \mathbf{u}\right) = \mathrm{E}\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}s + \Phi\left(X_T^{\mathbf{u}}\right)\middle|\, \mathbf{F}_t\right]$$

junto con las ecuaciones dinámicas 5 y 6.

ii) La función de valor óptimo es

$$\hat{J} : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

y está definida por

$$\hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) = \max_{\mathbf{u} \in U} J\left(t, x, \mathbf{u}\right).$$

El objetivo, ahora, es caracterizar la función de valor en el control óptimo y hacer una derivación de su ecuación diferencial parcial, mejor conocida como la EDP de HJB,[5] por lo cual se hacen los siguientes supuestos.

Supuestos 1. Se supone que:

1) Existe una regla de control óptimo **u**.
2) La función de valor óptimo $\hat{J}$ es de clase C^2.

Considere el par $(t,x) \in (0,T) \times \mathbf{R}$ fijo pero arbitrario y suponga un incremento muy pequeño, de hecho, diferencial $\mathrm{d}t \in \mathbf{R}$, tal que $t < t + \mathrm{d}t < T$. También elegimos una regla de control **u** fija pero arbitraria. Por tanto, dada la definición de la función de valor óptimo y el incremento dt, se tiene la relación recursiva temporal (Venegas-Martínez, 2008),

$$\begin{aligned}
\hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) &= \max_{\mathbf{u}\in U} J\left(t,x,\mathbf{u}\right) = \max_{\mathbf{u}\in U} \mathrm{E}\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}s + \Phi\left(X_T^{\mathbf{u}}\right) \middle| \mathbf{F}_t\right] \\
&= \max_{\mathbf{u}\in U} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^T F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}s + \Phi\left(X_T^{\mathbf{u}}\right) \middle| \mathbf{F}_t\right] \\
&= \max_{\mathbf{u}\in U} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} F\left(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s\right)\mathrm{d}s + \hat{J}\left(t+\mathrm{d}t, X_t^{\mathbf{u}} + \mathrm{d}X_t^{\mathbf{u}}\right) \middle| \mathbf{F}_t\right],
\end{aligned}$$

a esta expresión se le aplica en el primer sumando el teorema del valor medio de cálculo integral y, en el segundo sumando se aplica expansión en serie de Taylor, de lo que resulta

$$\hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) = \max_{\mathbf{u}\in U} \mathrm{E}\left[F\left(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t\right)\mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) + \hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) + \mathrm{d}\hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) + o\left(\mathrm{d}t\right) \middle| \mathbf{F}_t\right],$$

simplificando, se tiene

$$0 = \max_{\mathbf{u}\in U} \mathrm{E}\left[F\left(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t\right)\mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) + \mathrm{d}\hat{J}\left(t, X_t^{\mathbf{u}}\right) \middle| \mathbf{F}_t\right].$$

En la expresión anterior aplicamos el lema de Itô para obtener la diferencial estocástica de $\hat{J}$, así

[5] La ecuación de HJB es el resultado central en la teoría de control óptimo. La ecuación correspondiente en tiempo discreto se conoce como la ecuación de Bellman.

$$0=\max_{\mathbf{u}\in U}\mathrm{E}\left[F\left(t,X_t^{\mathbf{u}},\mathbf{u}_t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\left[\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i}\mu_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\sigma_j^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\mathrm{d}W_{it}\middle|\mathbf{F}_t\right].$$

Puesto que $\mathrm{d}W_{it}\sim N(\mathrm{d}t)$, al tomar valores esperados a los términos aleatorios de la ecuación anterior, se sigue que:

$$0=\max_{\mathbf{u}\in U}\left[F\left(t,X_t^{\mathbf{u}},\mathbf{u}_t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\left[\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i}\mu_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\sigma_j^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right]\mathrm{d}t\right].$$

Ahora, se divide entre $\mathrm{d}t$ y se toma el límite cuando $\mathrm{d}t\to 0$

$$0=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left\{\max_{\mathbf{u}\in U}\left[F\left(t,X_t^{\mathbf{u}},\mathbf{u}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}+\frac{o\left(\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}t}+\left[\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i}\mu_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\sigma_j^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right]\right\}$$

y así se obtiene finalmente la EDP de HJB:

$$0=\max_{\mathbf{u}\in U}\left[F\left(t,X_t^{\mathbf{u}},\mathbf{u}\right)+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i}\mu_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\sigma_j^{\mathbf{u}}\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right]. \qquad (8)$$

Puesto que el análisis ha sido realizado sobre un punto fijo pero arbitrario, la ecuación se sostiene para todo punto $(t, x) \in (0, T) \times \mathbf{R}^n$, y podemos establecer ahora el siguiente teorema.

Teorema 1. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Bajo los supuestos 1 se afirma lo siguiente:

a) $\hat{J}$ satisface la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} 0 = \max\limits_{u \in U} \left[F\left(t, X_t^u, u\right) + \dfrac{\partial \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial x_i} \boldsymbol{\mu}_i^u\left(x_i, t\right) \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial x_j \partial x_i} \boldsymbol{\sigma}_i^u\left(x_i, t\right) \boldsymbol{\sigma}_j^u\left(x_i, t\right) \boldsymbol{\rho}_{ij} \right] \text{ para toda pareja } (x, t) \in \left(0, T\right) \times \mathbf{R}^n \\ \hat{J}(t, X_T^u) = \Phi(X_T^u) \text{ para toda } X \in \left(0, T\right) \times \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

b) Para cada $(t, x) \in (0, T) \times \mathbf{R}^n$, el máximo en la ecuación HJB es alcanzado por $u = \hat{\mathbf{u}}\,(t,x)$.

Condiciones de primer orden

A partir de la ecuación de HJB, se sigue que $\mathbf{u}$ es la única variable, ya que x y t son fijos y las funciones F, $\hat{J}$, $\boldsymbol{\mu}_i^u, \boldsymbol{\sigma}_i^u$ y $\boldsymbol{\sigma}_j^u$ se consideran como dadas. Si se tiene que $u \in U$ es máximo, entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden en $\hat{J}$,

$$\begin{aligned} 0 = F\left(t, X_t^u, u\right) + \frac{\partial \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial x_i} \boldsymbol{\mu}_i^u\left(x_i, t\right) \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{J}\left(t, X_t^u\right)}{\partial x_j \partial x_i} \boldsymbol{\sigma}_i^u\left(x_i, t\right) \boldsymbol{\sigma}_j^u\left(x_i, t\right) \boldsymbol{\rho}_{ij}. \end{aligned}$$

Al derivar dicha ecuación con respecto de la variable de control u se tiene la condición de primer orden

$$0=\frac{\partial F\left(t,X_t^u,u\right)}{\partial u}+\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^u\right)}{\partial u\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^u\right)}{\partial x_i}\mu_i^u\left(x_i,t\right)\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^u\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^u\left(x_i,t\right)\sigma_j^u\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right). \tag{9}$$

La ecuación 9, condicionada por las funciones F, $\hat{J}$ (junto con sus derivadas parciales) μ_i^u, σ_i^u y σ_j^u, caracteriza al control óptimo u en función de x y t y $\hat{J}$; es decir, $\hat{u} = \hat{u}\,(t, xi, \hat{J})$.

Para resolver la ecuación de HJB y encontrar la trayectoria óptima del control, teóricamente se procede a resolver por el método de funciones en variables separables (en un producto), ya que se trata de una ecuación diferencial parcial no lineal; aunque es necesario recordar que, en general, es difícil obtener una solución explícita de la ecuación de HJB. Sin embargo, para el tipo de aplicaciones que se requieren en las ciencias económicas, existen algunos casos en los que, a pesar de ser no triviales, la ecuación de HJB tiene una solución analítica; véanse, al respecto, Merton (1990), Lehoczky (1983) y Hakansson (1970).

TEOREMA DE VERIFICACIÓN

Obsérvese que el teorema 1 tiene la forma de una condición necesaria, pero afortunadamente la ecuación de HJB también actúa como condición suficiente para el problema de control óptimo. El resultado que sustenta esta condición, el cual se enuncia a continuación, se conoce como el teorema de verificación para la programación dinámica (refiérase al apéndice A sección A.2 para ver la demostración del teorema de verificación).

Teorema 2. Teorema de verificación

Suponga que se tienen las funciones $H(t,X_t^u)$ y $g(t,x)$, tales que

i) H satisface la integral de Itô y es solución de la EDP HJB, es decir,

$$0=\max_{u\in U}\left[F\left(t,X_t^u,u\right)+\frac{\partial H\left(t,X_t^u\right)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H\left(t,X_t^u\right)}{\partial x_i}\mu_i^u\left(x_i,t\right)\right.$$

$$\begin{cases} \left. +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H\left(t,X_t^u\right)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i^u\left(x_i,t\right)\sigma_j^u\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right] \text{para todo par } (x,t)\in\left(0,T\right)\times\mathbf{R}^n \\ H(t,X_T^u)=\Phi(X_T^u) \text{ para todo } X\in\mathbf{R}^n \end{cases}$$

ii) La función g es una regla de control admisible.
iii) Para cada $(t, x) \in (0, T) \times \mathbf{R}^n$, (t, x), fijo pero arbitrario, el máximo en la ecuación de HJB es alcanzado por la elección $u = g(t, x)$.

Por lo tanto se sostiene lo siguiente:

1) La función de valor óptimo $\hat{J}$ del problema de control, esta dada por

$$\hat{J}(t,X_t^u)=H(t,X_t^u).$$

2) Existe una regla de control óptima $\hat{\mathbf{u}}$ tal que $\hat{\mathbf{u}}(t, x) = g(t, x)$.

UN PROBLEMA DE CONSUMO ÓPTIMO

Considere un agente económico racional de vida infinita, lo que se interpreta como que su descendencia heredará su riqueza y su función de utilidad por el consumo. En el tiempo $t = 0$, el agente es dotado con una riqueza inicial x_0 y enfrenta el problema de cómo distribuir su riqueza entre inversión y consumo en un horizonte infinito de tal modo que maximice su función de utilidad por el consumo.

Así pues, suponemos que la utilidad total del agente está dada por

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\infty F\left(c_s,s\right)\mathrm{d}s\,\middle|\,\mathbf{F}_0\right]$$

donde F es la función de satisfacción por el consumo y $\mathbf{F}_0$ es la información disponible en el tiempo t_0.

Suponemos que el agente puede invertir una parte de su dinero como ahorro en un banco que le otorga una tasa de interés $r > 0$, libre de riesgo de incumplimiento. Así, el saldo de la inversión en el tiempo t es $B_t = B_0 e^{rt}$, el cual puede ser expresado mediante la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}B_t = rB_t \mathrm{d}t, \qquad \text{con } B_0 \text{ dado,}$$

lo cual implica que

$$R_B \equiv \frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t. \tag{10}$$

También puede invertir en un activo con riesgo cuyo proceso de precios es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

Lo cual conduce a

$$\mathrm{d}R_S \equiv \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \tag{11}$$

donde W_t es un proceso de Wiener, también llamado movimiento browniano, que está definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $\left(\Omega, \mathbf{F}, (\mathbf{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P}\right)$.

Las proporciones de la riqueza que se destinarán a los activos sin riesgo y con riesgo en el portafolio de inversión en el tiempo t las denotaremos por $1 - \theta_t$ y θ_t. Asimismo, denotaremos por c_t la tasa de consumo, a la que se le pide que $c_t \geq 0, \forall t \geq 0$. Adicionalmente, restringimos las estrategias de consumo-inversión a que sean autofinanciables y suponemos, además, que vivimos en un mundo en el que las negociaciones son posibles de manera continua sin incurrir en ningún momento en costos por comisiones a agentes de bolsa ni pagos de impuestos a autoridades fiscales. Suponemos también que las ventas en corto (pedir acciones prestadas) son permitidas e ilimitadas.

De esta manera, si X_t representa la riqueza del consumidor en el tiempo t, entonces la dinámica del proceso de la riqueza está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= X_t\left(1-\theta_t\right)\mathrm{d}R_B + X_t\theta_t \mathrm{d}R_S - c_t\mathrm{d}t \\
&= X_t\left(1-\theta_t\right)r\mathrm{d}t + X_t\theta_t\left(\mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t\right) - c_t\mathrm{d}t \\
&= X_t r\mathrm{d}t - X_t\theta_t r\mathrm{d}t + X_t\theta_t\mu\mathrm{d}t + X_t\theta_t\sigma\mathrm{d}W_t - c_t\mathrm{d}t \\
&= X_t\theta_t\left(\mu - r\right)\mathrm{d}t + \left(X_t r - c_t\right)\mathrm{d}t + X_t\theta_t\sigma\mathrm{d}W_t \\
&= X_t\left(r + \theta_t\left(\mu - r\right) - \frac{c_t}{X_t}\right)\mathrm{d}t + X_t\theta_t\sigma\mathrm{d}W_t,
\end{aligned} \tag{12}$$

equivalentemente,

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X dt + \sigma_X dW_t \tag{13}$$

donde

$$\mu_X = r + \theta_t(\mu - r) - \frac{c_t}{X_t} \qquad \text{y} \qquad \sigma_X = \theta_t \sigma. \tag{14}$$

En la ecuación 12 se interpreta $X_t \theta_t \mu dt$ como el rendimiento esperado de la inversión con riesgo de $X_t\theta_t$ pesos durante el periodo de t a $t + dt$; $X_t\theta_t\sigma dW$ representa el riesgo implicado en invertir los $X_t\theta_t$ pesos en el activo riesgoso; el término $X_t(1 - \theta_t)rdt$ es el interés ganado por el ahorro de $X_t(1 - \theta_t)$ pesos y, finalmente, $c_t dt$ representa el consumo en el intervalo de tiempo de t a $t + dt$ (Sethi y Thompson, 2000).

En resumen, y estableciendo formalmente el problema de maximización de utilidad del consumidor como un problema de control óptimo estocástico, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\underset{\theta, c_s}{\text{Maximizar}}\, \mathrm{E}\left[\int_0^\infty F(c_s, s)\, ds \,\middle|\, \mathbf{F}_t\right] \\
&dx_t = X_t\left(r + \theta_t(\mu - r) - \frac{c_t}{X_t}\right)dt + X_t\theta_t\sigma dW_t \\
&X_0 = x_0 \\
&c_t \geq 0, \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Para dar solución a nuestro problema, definimos la función de valor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
J(X_t, t) &= \max_{\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s} \mathrm{E}\left[\int_t^\infty F(c_s, s)\, ds \,\middle|\, \mathbf{F}_t\right] \\
&= \max_{\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq c_s} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+dt} F(c_s, s)\, ds + \int_{t+dt}^\infty F(c_s, s)\, ds \,\middle|\, \mathbf{F}_t\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

Al aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral al primer sumando y recursividad al segundo sumando, se obtiene que

$$J\left(X_t,t\right)=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+J\left(X_t+\mathrm{d}X_t,t+\mathrm{d}t\right)\middle|\mathsf{F}_t\right\}.$$

Si se utiliza la expansión en serie de Taylor al segundo sumando, se obtiene

$$J\left(X_t,t\right)=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+J\left(X_t,t\right)+\mathrm{d}J\left(X_t,t\right)+o\left(\mathrm{d}t\right)\middle|\mathsf{F}_t\right\}$$

consecuentemente,

$$0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\mathrm{d}J\left(X_t,t\right)\middle|\mathsf{F}_t\right\}.$$

Al aplicar a $\mathrm{d}J\,(X,\,t)$ el lema de Itô y simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned}0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}&\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\sigma_X\mathrm{d}W_t\right.\\&\left.+\left[\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\mu_X+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t^2\sigma_X^2\right]\mathrm{d}t\middle|\mathsf{F}_t\right\}.\end{aligned}$$

Ahora se toma el valor esperado de la última ecuación, puesto que $\mathrm{d}W_t$ se distribuye $N\,(0,\,\mathrm{d}t)$, se elimina el término con el movimiento browniano, de lo que resulta

$$\begin{aligned}0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},c_t|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}&\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t^2\sigma_X^2\mathrm{d}t\right.\\&\left.+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\mu_X\mathrm{d}t\middle|\mathsf{F}_t\right\}.\end{aligned}$$

A continuación se divide la expresión anterior entre $\mathrm{d}t$ y se toma el límite de ésta cuando $\mathrm{d}t\to 0$, para obtener la EDP de HJB

$$0 = \max_{\theta \in \boldsymbol{R}, c_t} \left\{ F(c_t, t) + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right\}. \quad (17)$$

Ahora suponemos que la función de utilidad es de la forma $F(c_t, t) = e^{-\rho t} V(c_t)$, donde $V(c_t)$ es un miembro de la familia de funciones de utilidad HARA (Merton, 1990 y Hakansson, 1970)[6] y ρ es un parámetro que representa la ansiedad por consumir del agente. Para nuestro problema elegimos, en particular, la función de consumo

$$F(c_t, t) = e^{-\rho t} c^{\gamma}, \qquad \text{con} \qquad 0 < \gamma < 1,$$

Note que $V(c_t)$ tiene la propiedad de que

$$V'(0) = \left. \frac{\gamma c^{\gamma}}{c} \right|_{c=0} = \infty \quad \text{dado que} \quad 0 < \gamma < 1,$$

lo que forzará a que el consumo sea positivo a través del horizonte temporal.

Al suponer máximo interior y hacer las sustituciones correspondientes, de la EDP de HJB se obtiene

$$0 = e^{-\rho t} c^{\gamma} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} X_t \left(r + \theta_t (\mu - r) - \frac{c_t}{X_t} \right) \quad (18)$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 (\theta_t \sigma)^2.$$

Lo que ahora se requiere es optimizar para c_t y θ_t. Las condiciones de primer orden son:

$$0 = e^{-\rho t} \gamma c^{\gamma - 1} - \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} \quad \Rightarrow \quad \gamma c^{\gamma - 1} = \frac{\partial J(X_t, t)}{\partial X_t} e^{\rho t}$$

[6] Si la función de utilidad es tal que su medida de aversión absoluta o relativa al riesgo es positiva e hiperbólica en el consumo y puesto que se ha supuesto que los precios de los activos son generados por el movimiento browniano, será posible obtener soluciones explícitas para el consumo y portafolio óptimos. Para un amplio análisis de funciones de utilidad de tipo HARA, véanse por ejemplo Merton (1990) y Hakansson (1970).

$$0=\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\left(\mu-r\right)+\frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t^2\theta_t\sigma^2 \quad\Rightarrow\quad \theta_t=-\frac{\dfrac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}\left(\mu-r\right)}{\dfrac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t\sigma^2}.$$

Ahora, para elegir la función $J(X_t, t)$ que satisfaga la EDP de HJB y toda vez que se trata de una ecuación diferencial parcial no lineal, su función solución es un producto de funciones en variables separables (en un producto) de la forma $J\left(X_t,t\right)=V\left(x_t\right)h(t)e^{-\rho t}$, es decir,

$$J\left(X_t,t\right)=h(t)e^{-\rho t}x^{\gamma}. \tag{19}$$

Una vez elegido el candidato de solución para J, se calculan sus derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}&=\gamma x^{\gamma-1}h\left(t\right)e^{-\rho t},\\ \frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}&=\gamma\left(\gamma-1\right)x^{\gamma-2}h\left(t\right)e^{-\rho t},\\ \frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial t}&=-\rho x^{\gamma}h\left(t\right)e^{-\rho t}+x^{\gamma}h'\left(t\right)e^{-\rho t}.\end{aligned} \tag{20}$$

Sustituimos los valores anteriores en las condiciones de primer orden de tal manera que

$$\gamma c^{\gamma-1}=\frac{\partial J\left(x_t,t\right)}{\partial x_t}e^{\rho t}=\gamma x^{\gamma-1}h\left(t\right)e^{-\rho t}e^{\rho t}\ \Rightarrow\ c^{\gamma-1}=x^{\gamma-1}h\left(t\right) \tag{21}$$

$$\Rightarrow\ \hat{c}=xh^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(t\right),$$

$$\theta_t=-\frac{\dfrac{\partial J\left(x_t,t\right)}{\partial x_t}\left(\mu-r\right)}{\dfrac{\partial^2 J\left(x_t,t\right)}{\partial x_t^2}x_t\sigma^2}=-\frac{\left(\mu-r\right)\gamma x^{\gamma-1}e^{-\rho t}}{x_t\sigma^2\gamma\left(\gamma-1\right)x^{\gamma-2}e^{-\rho t}}\Rightarrow\hat{\theta}_t=-\frac{\left(\mu-r\right)}{\sigma^2\left(\gamma-1\right)}. \tag{22}$$

Observamos que la proporción óptima que se asigna a la tenencia del activo riesgoso es constante y la regla óptima de consumo es lineal en la riqueza. Para usar el teorema de verificación, se requiere mostrar que $J(X, t)$ resuelve la ecuación de HJB, por lo que sustituimos las ecuaciones 20, 21 y 22 en la ecuación 18, de tal modo que:

$$0 = x^{\gamma}\left\{h'(t) + h(t)\left[(-\rho) + \gamma\left(r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2(\gamma - 1)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\gamma(\mu - r)^2}{\sigma^2(\gamma - 1)}\right] + (1 - \gamma)h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right\}. \tag{23}$$

Al denotar las constantes

$$k_1 = \left[(-\rho) + \gamma\left(r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2(\gamma - 1)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\gamma(\mu - r)^2}{\sigma^2(\gamma - 1)}\right] \text{ y } k_2 = (1 - \gamma), \tag{24}$$

se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$0 = x^{\gamma}\left[h'(t) + k_1 h(t) + k_2 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right]. \tag{25}$$

Si esta ecuación se sostiene para toda x y t, entonces $h(t)$ debe de resolver la ecuación

$$h'(t) + k_1 h(t) = -k_2 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t), \tag{26}$$

la cual es una ecuación de Bernoulli con $p(x) = k_1$, $q(x) = -k_2$ y $n = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$. Para transformar la ecuación de Bernoulli en una ecuación diferencial lineal de una función (desconocida), sustituimos $z = h^{1-n}(t) = h^{-\frac{1}{\gamma-1}}(t)$, de donde se tiene que $h(t) = z^{1-\gamma}$ y $h'(t) = (1 - \gamma)z^{-\gamma}z'$, al sustituir en 26 y multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{z^{\gamma}}{(1 - \gamma)}$, se obtiene,

$$z' + \frac{k_1}{(1-\gamma)} z = -\frac{k_2}{(1-\gamma)} \qquad \text{o} \qquad z' + k_{11} z = -k_{22}. \tag{27}$$

Para resolver esta ecuación lineal, se tiene que el factor integrante está dado por

$$\mu(t) = e^{\int k_{11} dt} = e^{tk_{11}},$$

de donde se obtiene que $z(t)$ es

$$z(t) = \frac{\int \mu(t) q(t) dt + k_5}{\mu(t)} = \frac{-k_{22} \int e^{tk_{11}} dt + k_5}{e^{tk_{11}}} = \frac{-\frac{k_{22}}{k_{11}} \int e^u du + k_5}{e^{tk_{11}}} \tag{28}$$

$$= -\frac{k_{22}}{k_{11}} + k_5 e^{-tk_{11}},$$

y, por tanto,

$$h(t) = \left(-\frac{k_{22}}{k_{11}} + k_5 e^{-tk_{11}} \right)^{1-\gamma}. \tag{29}$$

Hemos mostrado que, si J está definida por 19 con $h(t)$ dada por 29 y definida como la solución de 25 y si definimos $\hat{\theta}$ y $\hat{c}$ por 21 y 22, entonces J satisface la ecuación de HJB y $\hat{\theta}$ y $\hat{c}$ consiguen optimizar el problema de control óptimo.

UN PROBLEMA DE CONSUMO-INVERSIÓN ÓPTIMOS

Consideremos un agente económico y un intervalo de tiempo fijo $[0, T]$, en el tiempo $t = 0$; el agente es dotado con una riqueza inicial X_0 y el problema que enfrenta es cómo distribuir su riqueza entre inversión y consumo de tal modo que su riqueza no sea negativa en un horizonte de tiempo finito y tal que maximice su utilidad total esperada y descontada por el consumo.

Supongamos que la utilidad del agente está dada por:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T F(t, c_t) \mathrm{d}t + \Phi(X_T) \middle| \mathrm{F}_0 \right]$$

donde F es la función de utilidad para consumo y Φ es la función de legado o herencia (o función de retiro en el tiempo T), la cual mide la utilidad de tener algo de dinero al final del periodo.

Suponemos que el agente puede invertir una parte de su dinero como ahorro en un banco que le otorga una tasa de interés $r > 0$ (continuamente capitalizable). Así, el monto acumulado en el tiempo t es $B_t = B_0 e^{rt}$, el cual puede ser expresado mediante la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}R_B = \frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t. \tag{30}$$

También puede invertir en un activo con riesgo cuyo proceso de precios es modelado por la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \alpha\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t, \tag{31}$$

donde W_t es un proceso de Wiener, o movimiento browniano, definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathsf{F}, (\mathsf{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ con su filtración aumentada.

Como antes, las proporciones relativas al portafolio en el tiempo t las denotamos por $1 - \theta_t$ y θ_t para los activos libre de riesgo y con riesgo, respectivamente, c_t denota la tasa de consumo y se restringe a las estrategias de consumo-inversión que sean autofinanciables. Además, se supone que el agente vive en un mundo en el que las negociaciones son posibles de manera continua sin incurrir en ningún momento en costos por comisiones a agentes de bolsa ni pagos de impuestos a autoridades fiscales, y que las ventas en corto son permitidas e ilimitadas.

De esta manera, si X_t representa la riqueza del consumidor en el tiempo t, entonces la dinámica del proceso de la riqueza está dada por,

$$\mathrm{d}X_t = X_t\left(r + \theta_t\left(\alpha - r\right) - \frac{c_t}{X_t}\right)\mathrm{d}t + X_t\theta_t\sigma\mathrm{d}W_t, \tag{32}$$

equivalentemente,

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = \alpha_X\mathrm{d}t + \sigma_X\mathrm{d}W_t \tag{33}$$

donde

$$\alpha_X = r + \theta_t(\alpha - r) - \frac{c_t}{X_t} \quad \text{y} \quad \sigma_X = \theta_t \sigma. \tag{34}$$

Dados los supuestos del problema, obsérvese que el agente puede pedir prestada una cantidad ilimitada e invertirla en acciones, por lo que, en algún momento, su riqueza podría llegar a ser cero e incluso negativa. De esta manera, T es una variable aleatoria, la cual se llama tiempo de paro. Para librar este problema, se restringe el dominio a $D = [0,T] \times \{x \mid x > 0\}$, y se define la función

$$\tau = \min\left[\inf\left\{t > 0 \mid X_t = 0\right\}, T\right],$$

y la interpretación correspondiente es que, cuando el proceso de riqueza pegue en la frontera del dominio, es decir, sea cero, entonces la actividad se termina y ya no hay herencia, de esta manera lo natural es que Φ sea cero.

En resumen, y estableciendo formalmente el problema de maximización de utilidad del consumidor como un problema de control óptimo estocástico, se tiene

$$\begin{aligned}
&\underset{\theta, c}{\text{Maximizar}} \ \mathrm{E}\left[\int_0^\tau F(t, c_t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathbf{F}_0\right], \\
&\mathrm{d}X_t = X_t \theta_t (\alpha - r)\,\mathrm{d}t + (X_t r - c_t)\,\mathrm{d}t + X_t \theta_t \sigma \mathrm{d}W_t, \\
&X_0 = x_0, \\
&c_t \geq 0, \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Para dar solución a nuestro problema y encontrar las proporciones óptimas en el portafolio de inversión y el consumó óptimo del agente maximizador, definimos la función de valor de nuestro problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
J(X_t, t) &= \max_{\theta \in \boldsymbol{R}, 0 \leq c_s|_{[t,\tau]}} \mathrm{E}\left[\int_t^\tau F(c_s, s)\,\mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right] \\
&= \max_{\theta \in \boldsymbol{R}, 0 \leq c_s|_{[t,\tau]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} F(c_s, s)\,\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{\tau} F(c_s, s)\,\mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right].
\end{aligned} \tag{36}$$

Después de aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral al primer sumando y recursividad al segundo sumando, se obtiene que

$$J\left(X_t,t\right)=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},0\leq c_t\big|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+J\left(X_t+\mathrm{d}X_t,t+\mathrm{d}t\right)\Big|\mathbf{F}_t\right\}.$$

Al aplicar la expansión en serie de Taylor al segundo sumando, se tiene

$$J\left(X_t,t\right)=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},0\leq c_t\big|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}$$
$$\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+J\left(X_t,t\right)+\mathrm{d}J\left(X_t,t\right)+o\left(\mathrm{d}t\right)\Big|\mathbf{F}_t\right\}$$

por consiguiente,

$$0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},0\leq c_s\big|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\mathrm{d}J\left(X_t,t\right)\Big|\mathbf{F}_t\right\}.$$

Al aplicar a $\mathrm{d}J\left(X_t,\ t\right)$ el lema de Itô y simplificar, se obtiene

$$0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},0\leq c_t\big|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\sigma_X\mathrm{d}W_t\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\alpha_X+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t^2\sigma_X^2\right]\mathrm{d}t\Big|\mathbf{F}_t\right\}.$$

A continuación, se obtiene el valor esperado de esta última ecuación y, puesto que $\mathrm{d}W_t$ se distribuye $N(0,\ \mathrm{d}t)$, se elimina el término con browniano, de lo que resulta

$$0=\max_{\theta\in\boldsymbol{R},0\leq c_t\big|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{F\left(c_t,t\right)\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t^2}X_t^2\sigma_X^2\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial J\left(X_t,t\right)}{\partial X_t}X_t\alpha_X\mathrm{d}t\Big|\mathbf{F}_t\right\}.$$

Ahora se divide esta expresión entre dt y se toma su límite cuando d$t \to 0$

$$0 = \max_{\theta \in \mathbf{R}, 0 \leq c_t} \left\{ F\left(c_t, t\right) + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t} X_t \alpha_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right\}.$$

A esta ecuación le anexamos las condiciones de frontera correspondientes para obtener la EDP de HJB

$$\begin{cases} 0 = \max\limits_{\theta \in \mathbf{R}, 0 \leq c_t|_{[t, t+\mathrm{d}t]}} \left\{ F\left(c_t, t\right) + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t} X_t \alpha_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right\}, \\ \qquad J\left(T, x\right) = 0, \\ \qquad J\left(t, 0\right) = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Las condiciones de frontera incorporan el tiempo de paro. Suponemos ahora que la función de utilidad es de la forma $F(c_t, t) = e^{-\rho t} V\,(c_t)$, donde $V(c_t)$ es un miembro de la familia de funciones de utilidad HARA (Merton, 1990; Hakansson, 1970); para nuestro problema en particular, elegimos la función de consumo

$$F\left(c_t, t\right) = e^{-\rho t} \frac{c^\gamma}{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Observe que $V(c_t)$ tiene la propiedad de que

$$V'(0) = \left. \frac{c^\gamma}{c} \right|_{c=0} = \infty,$$

lo que forzará a que el consumo sea positivo a través del horizonte temporal.

Al suponer máximo interior y hacer las sustituciones correspondientes en la EDP de HJB, se tiene

$$\begin{aligned} 0 = e^{-\rho t} \frac{c^\gamma}{\gamma} + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t} X_t \left(r + \theta_t \left(\alpha - r\right) - \frac{c_t}{X_t} \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J\left(X_t, t\right)}{\partial X_t^2} X_t^2 \left(\theta_t \sigma\right)^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Ahora, lo que se requiere es optimizar para c_t y θ_t, de donde se obtienen las condiciones de primer orden,

$$c_t^{\gamma-1} = \frac{\partial J\left(x_t, t\right)}{\partial x_t} e^{\rho t} \quad \text{y} \quad \theta_t = -\frac{\dfrac{\partial J\left(x_t, t\right)}{\partial x_t} x_t \left(\alpha - r\right)}{\dfrac{\partial^2 J\left(x_t, t\right)}{\partial x_t^2} x_t^2 \sigma^2}, \tag{39}$$

Ahora bien, para elegir la función $J(X_t, t)$ que satisfaga la EDP de HJB y ya que se trata de una ecuación diferencial parcial no lineal, su solución es un producto de funciones separables de tal manera que:

$$J\left(X_t, t\right) = e^{-\rho t} h\left(t\right) \frac{x^\gamma}{\gamma}, \tag{40}$$

junto con $h(T) = 0$ debido a las condiciones de frontera de la ecuación de HJB. Dado J, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J\left(x_t, t\right)}{\partial t} &= \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} h'(t) - \rho \frac{x^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} h(t) \\ \frac{\partial J\left(x_t, t\right)}{\partial x_t} &= x^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t) \\ \frac{\partial^2 J\left(x_t, t\right)}{\partial x_t^2} &= \left(\gamma - 1\right) x^{\gamma-2} e^{-\rho t} h(t). \end{aligned} \tag{41}$$

Si sustituimos los valores de 41 en 39, se obtiene:

$$c_t^{\gamma-1} = x^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t) e^{\rho t} \quad \Rightarrow \quad c_t = \left[x^{\gamma-1} h(t)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad \hat{c}_t = x h^{\frac{1}{\gamma-1}}(t), \tag{42}$$

$$\hat{\theta}_t = -\frac{x^{\gamma-1} e^{-\rho t} h(t) x_t \left(\alpha - r\right)}{\left(\gamma - 1\right) x^{\gamma-2} e^{-\rho t} h(t) x_t^2 \sigma^2} = -\frac{\left(\alpha - r\right)}{\sigma^2 \left(\gamma - 1\right)}, \tag{43}$$

obsérvese que $\hat{c}$ es lineal en la riqueza y la proporción de portafolio óptimo $\hat{\theta}$ es constante. Para hacer la verificación mediante el teorema enunciado, se requiere mostrar que $J(X_t, t)$ resuelve la ecuación de HJB, para lo que sustituimos las ecuaciones 41, 42 y 43 en la ecuación 38, de donde se obtiene la ecuación,

$$0 = x^{\gamma}\left\{h'(t)\frac{1}{\gamma} + h(t)\left[\left(-\frac{\rho}{\gamma}\right) + \left(r - \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right) - \frac{1}{2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{(1-\gamma)}{\gamma}h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right\}.$$

Después de multiplicar por γ, se tiene que

$$0 = x^{\gamma}\left\{h'(t) + h(t)\left[(-\rho) + \left(r\gamma - \frac{\gamma(\alpha - r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\gamma(\alpha-r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right]\right.$$
$$\left. + (1-\gamma)h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right\}.$$

Si se sustituyen los términos constantes por

$$\left[(-\rho) + \left(r\gamma - \frac{\gamma(\alpha - r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\gamma(\alpha-r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\right] = k_3 \quad \text{y} \quad k_4 = (1-\gamma)$$

se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$0 = x^{\gamma}\left\{h'(t) + k_3 h(t) + k_4 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t)\right\}. \tag{44}$$

Si esta ecuación se sostiene para toda x y *t*, entonces $h(t)$ debe de resolver la ecuación

$$h'(t) + k_3 h(t) = -k_4 h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t), \quad h(T) = 0, \tag{45}$$

que es una ecuación de Bernoulli con $p(x) = k_3$, $q(x) = -k_4$ y $n = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$. Análogamente al ejercicio anterior, se hace la sustitución $z = h^{1-n}(t) = h^{\frac{-1}{\gamma-1}}(t)$, de donde se tiene que $h(t) = z^{1-\gamma}$ y $h'(t) = (1-\gamma)z^{-\gamma}z'$, al sustituir en 45 y multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{Z'}{(1-\gamma)}$, se obtiene,

$$z' + \frac{k_3}{(1-\gamma)} z = -\frac{k_4}{(1-\gamma)} \quad \text{o} \quad z' + k_{33} z = -k_{44}, \tag{46}$$

para resolver esta ecuación lineal, se tiene que el factor integrante está dado por:

$$\mu(t) = e^{\int k_{33} dt} = e^{tk_{33}},$$

de donde se obtiene que $z(t)$ es

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\int \mu(t) q(t) dt + k_6}{\mu(t)} = \frac{-k_{44} \int e^{tk_{33}} dt + k_6}{e^{tk_{33}}} \\ &= \frac{-\frac{k_{44}}{k_{33}} \int e^u du + k_6}{e^{tk_{33}}} = -\frac{k_{44}}{k_{33}} + k_6 e^{-tk_{33}}, \end{aligned} \tag{47}$$

y, por tanto,

$$h(t) = \left(-\frac{k_{44}}{k_{33}} + k_6 e^{-tk_{33}} \right)^{1-\gamma}. \tag{48}$$

Ahora bien, para satisfacer la condición de frontera se debe de cumplir:

$$\begin{aligned} h(T) = \left(-\frac{k_{44}}{k_{33}} + k_6 e^{-Tk_{33}} \right)^{1-\gamma} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{k_{44}}{k_{33}} + k_6 e^{-Tk_{33}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{k_{44}}{k_{33}} e^{Tk_{33}} = k_6 \end{aligned}$$

por consiguiente, la solución de 45 está dada por,

$$h(t) = \left(-\frac{k_{44}}{k_{33}} + \frac{k_{44}}{k_{33}} e^{(T-t)k_{33}} \right)^{1-\gamma}. \tag{49}$$

Hemos así mostrado que si J está dada por 40, con 49 definida como la solución de 45 y si definimos $\hat{\theta}$ y $\hat{c}$ por 43 y 42, entonces J satisface la ecuación de HJB y $\hat{\theta}$ y $\hat{c}$ consiguen optimizar el problema de control óptimo con horizonte temporal estocástico.

CONCLUSIONES

Es de reconocerse el importante papel que ha desempeñado la matemática en la economía. Específicamente, la teoría de control óptimo estocástico en tiempo continuo se ha revelado como un instrumento fundamental en la economía matemática cuando se requiere modelar alguna actividad económica que se desarrolla de manera dinámica.

Por lo anterior, este documento tuvo como propósito hacer accesibles la enseñanza y el aprendizaje de la modelación en problemas de optimización dinámica en economía matemática. Por lo que, de manera didáctica, se presentó de manera general el modelo matemático del problema de control óptimo estocástico en tiempo continuo. Además, de modo ameno y sencillo, se dedujo la ecuación diferencial parcial de segundo orden y lineal, ecuación de HJB (condición necesaria de óptimo) del problema en cuestión, cuya solución lleva a encontrar las trayectorias óptimas que dan solución al problema planteado, lo cual asegura el teorema de verificación (demostrado en el apéndice).

Asimismo, se presentaron dos ejemplos de aplicación en economía matemática, el primero de ellos corresponde a un modelo de un consumidor racional que dispone de una riqueza inicial y enfrenta la decisión de distribuir su riqueza entre consumo y un portafolio de activos en un horizonte de planeación infinito de tal modo que maximice su utilidad total esperada por el consumo. El segundo ejemplo es análogo al primero, con la salvedad de que ahora se establece un horizonte temporal finito cuya duración es estocástica. Una particularidad en ambos ejemplos es el supuesto de que la dinámica de los precios está modelada por un proceso de difusión, lo cual incorpora mayor realismo al modelado.

La principal dificultad de los problemas de control óptimo estocástico es resolver la ecuación de HJB, ya que no hay una teoría general disponible para esto. No obstante, para el caso de las aplicaciones que nos ocupan en este artículo, es posible encontrar soluciones analíticas y cerradas de dicha ecuación siempre que se incorpore en los supuestos que la dinámica de los precios sigue el movimiento geométrico browniano y la función de utilidad es del tipo $U(c,t) = e^{-\rho t}V(c)$,donde V es un miembro de la familia de funciones de tipo HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*).[7]

[7] Para una amplia clasificación de las funciones tipo HARA, véanse por ejemplo Merton (1990) y Hakanson(1970).

APÉNDICE A

A.1. Lema de Itô para el caso de n movimientos brownianos geométricos en forma diferencial

Considere la función $f(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, y la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}x_i=\mu_i\left(x_i,t\right)\mathrm{d}t+\sigma_i\left(x_i,t\right)\mathrm{d}W_{it}, \tag{A.1}$$

donde $\mathrm{d}W_{it}\sim N(0,\,\mathrm{d}t)$ es un movimiento browniano o proceso de Wiener. Considere también la siguiente tabla de multiplicación para la diferenciación estocástica,

	$\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}W_{it}$	$\mathrm{d}W_{jt}$
$\mathrm{d}t$	0	0	0
$\mathrm{d}W_{it}$	0	$\mathrm{d}t$	$\rho_{ij}\mathrm{d}t$
$\mathrm{d}W_{jt}$	0	$\rho_{ij}\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}t$

Obsérvese que, en la tabla anterior, el coeficiente de correlación $\rho_{ii}=1$, para todo $i=1,\ldots,n$. Para obtener el lema de Itô, primeramente se hace una expansión en serie de Taylor hasta los términos de segundo orden, ya que los términos de orden mayor se anularían según la tabla arriba enunciada. Por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\left(\mathbf{x},t\right)=&\frac{\partial f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\\&+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_i^2}\mathrm{d}x_i^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\right.\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i \partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x_t+\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2\Bigg]. \qquad \text{(A.2)}$$

Ahora, se sustituye en la ecuación el movimiento geométrico browniano en su forma diferencial y se hace uso de las reglas de multiplicación para la diferenciación estocástica,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\mathbf{x},t)=&\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\left(\mu_i(x_i,t)\mathrm{d}t+\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}W_{it}\right)+\\
&+\tfrac{1}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}\left(\mu_i(x_i,t)\mathrm{d}t+\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}W_{it}\right)^2\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_j \partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i\Bigg],
\end{aligned}$$

al sustituir

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i^2 &=\mu_i^2(x_i,t)\mathrm{d}t^2+2\mu_i(x_i,t)\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}W_{it}+\sigma_i^2(x_i,t)\mathrm{d}W_{it}^2.\\
\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j &=\mu_i(x_i,t)\mu_j(x_j,t)\mathrm{d}t^2+\mu_i(x_i,t)\sigma_j(x_j,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}W_{jt}\\
&\quad+\mu_j(x_j,t)\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}W_{it}+\sigma_i(x_i,t)\sigma_j(x_j,t)\mathrm{d}W_{it}\mathrm{d}W_{jt}\\
&=\sigma_i(x_i,t)\sigma_j(x_j,t)\rho_{ij}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

y simplificar, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\mathbf{x},t)=&\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\mu_i(x_i,t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}W_{it}\\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}\mu_i^2(x_i,t)\mathrm{d}t^2+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}2\mu_i(x_i,t)\sigma_i(x_i,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}W_{it}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}\sigma_i^2(x_i,t)\,\mathrm{d}W_{it}^2 \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\sigma_j(x_i,t)\rho_{ij}\,\mathrm{d}W_{it}\mathrm{d}W_{jt} \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_j\sigma_i\rho_{ji}\,\mathrm{d}W_{jt}\mathrm{d}W_{it}\Bigg] \\
&=\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\mu_i(x_i,t)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\,\mathrm{d}W_{it} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i^2}\sigma_i^2(x_i,t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\sigma_j(x_i,t)\rho_{ij}\,\mathrm{d}t \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_j(x_i,t)\sigma_i(x_i,t)\rho_{ji}\,\mathrm{d}t\Bigg],
\end{aligned}
$$

de donde, finalmente, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\mathbf{x},t)=\Bigg[&\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\mu_i(x_i,t) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x},t)}{\partial x_j \partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\sigma_j(x_i,t)\rho_{ij}\Bigg]\mathrm{d}t \\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\sigma_i(x_i,t)\,\mathrm{d}W_{it}.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

A.2. Demostración del teorema de verificación para programación dinámica

Demostración del teorema 2. Supóngase que H y g son dadas como se enunció anteriormente. Se elije una regla de control arbitraria $u \in U$ y un punto fijo (x,t). Se define el proceso $X^{\mathbf{u}}$ en el intervalo de tiempo $[t,T]$ como la solución de la ecuación

$$dX_s^u = \mu\left(s, X_s^u\right)ds + \sigma\left(s, X_s^u\right)dW_s, \tag{A.4}$$

$$X_t = x. \tag{A.5}$$

Obsérvese primero que

$$\begin{aligned} H\left(T, X_T^u\right) &= H\left(t + \left(T - t\right), X_{t+\left(T-t\right)}^u\right) = H\left(t, X_t^u\right) + dH\left(t, X_t^u\right) \\ &= H\left(t, X_t^u\right) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial H\left(s, X_s^u\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_j \partial x_i} \sigma_i^u\left(x_i, t\right)\sigma_j^u\left(x_i, t\right)\rho_{ij} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_i} \mu_i^u\left(x_i, t\right) \right\} ds + \int_t^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_i} \sigma_i\left(x_i, t\right) \right\} dW_{is}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Ahora bien, como H es solución de la EDP HJB, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial t} + F\left(t, x, u\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial x_i} \mu_i^u\left(x_i, t\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H\left(t, x\right)}{\partial x_j \partial x_i} \sigma_i^u\left(x_i, t\right)\sigma_j^u\left(x_i, t\right)\rho_{ij} \right) ds \leq 0, \quad \forall u \in U, \end{aligned}$$

entonces, para cada s, se cumple que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H\left(t, X_t^u\right)}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_i} \mu_i^u\left(x_i, t\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_j \partial x_i} \sigma_i^u\left(x_i, t\right)\sigma_j^u\left(x_i, t\right)\rho_{ij} \right) ds \leq F\left(s, X_s^u\right) \end{aligned} \tag{A.7}$$

dada la condición de frontera de la EDP HJB y las ecuaciones A.6 y A.7, se sigue que

$$\begin{aligned} H\left(t, X_s^u\right) &\geq \int_t^T F\left(s, X_s^u, u\right) ds + \Phi\left(X_T^u\right) \\ &- \int_t^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H\left(s, X_s^u\right)}{\partial x_i} \sigma_i\left(x_i, t\right) \right\} dW_{is} \end{aligned}$$

al tomar valor esperado se tiene

$$H\left(t,X_s^u\right)\geq E\left[\int_t^T F\left(s,X_s^u,u\right)ds+\Phi\left(X_T^u\right)\right]=J\left(t,x,u\right),$$

de donde se concluye que

$$H\left(t,X_s^u\right)\geq \max J\left(t,x,u\right)=\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right), \tag{A.8}$$

esto toda vez que la regla de control u fue elegida arbitrariamente.

Ahora, suponga que se elige una regla de control $\mathbf{u}(t, x) = g(t, x)$, dado por supuesto el inciso iii del teorema 2, de manera análoga se obtiene,

$$\frac{\partial H\left(t,x\right)}{\partial t}+F^g\left(t,x\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H\left(t,x\right)}{\partial x_i}\mu_i^g\left(x_i,t\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H\left(t,x\right)}{\partial x_j\partial x_i}\sigma_i^g\left(x_i,t\right)\sigma_j^g\left(x_i,t\right)\rho_{ij}\right)ds=0,$$

lo que conduce a la siguiente igualdad

$$H\left(t,X_s^u\right)=\mathrm{E}\left[\int_t^T F^g\left(s,X_s^g\right)ds+\Phi\left(X_T^g\right)\right]=J\left(t,x,g\right). \tag{A.9}$$

Dado que $\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)$ es la función de valor óptima, se tiene que

$$\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)\geq J\left(t,x,g\right), \tag{A.10}$$

pero al unir las ecuaciones A.8, A.9 y A.10, se sigue

$$H(t,X_s^u)\geq \hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)\geq J\left(t,x,g\right)=H(t,X_s^u)\ ,$$

es decir,

$$H(t,X_s^u)=\hat{J}\left(t,X_t^{\mathbf{u}}\right)=J\left(t,x,g\right)$$

por tanto, $H=\hat{J}$ y g es la regla de control óptima.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertsekas, D. (2005), *Dynamic programming and optimal control,* 3a. ed., Belmont, Massachusetts, Athena Scientific.

Björk, T. (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time,* 2a. ed., Oxford University Press.

Björk, T., J. Myhrman y M. Persson (1987), "Optimal consumption with stochastic prices in continuous time", *Journal of Applied Probability,* vol. 24, núm. 1, pp. 35-47.

Cerda, E. (2001), *Optimización dinámica,* Madrid, Prentice-Hall.

Hakansson, N. (1970), "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions", *Econometrica,* vol. 38, núm. 5, pp. 587-607.

Hernández-Lerma, O. (1994), "Lectures on Continuous-Time Markov Control Processes", *Aportaciones Matemáticas 3,* Sociedad Matemática Mexicana.

Huyên, P. (2009), *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Berlin y Heidelberg, Springer.

Lehoczky, J., S. Sethi y S. Shreve (1983), "Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumption Constraints and Bankruptcy", *Mathematics of Operations Research,* vol. 8, núm. 4, pp. 613-636.

Merton, R. (1990), *Continuous-Time Finance,* Cambridge, Massachusetts, Basil Blackwell.

Schmidli, H (2008), *Stochastic Control in Insurance,* Londres, Springer.

Sethi, S. y G. Thompson (2000), *Optimal Control Theory,* Nueva York, Springer.

Venegas-Martínez, F. (2008), *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre,* 2a. ed., México, Cengage.

Wickens, M. (2008), *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach,* Princeton and Oxford University Press.

DATOS DE LOS AUTORES

Ma. Teresa V. Martínez Palacios
Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional (ESE-IPN).
terevioleta@hotmail.com
Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional (ESE-IPN).
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Construcciones SERLIST y SERFUNC de series infinitas

Rafael Martínez-Planell, Ana Carmen González,
Gladys Di Cristina Yumet y Vanessa Acevedo

Resumen: Éste es un estudio de cómo construyen estudiantes universitarios la noción de serie infinita como sucesión de sumas parciales. Usando la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), se muestra cómo los estudiantes suelen construir dos objetos cognitivos diferentes que describimos en el artículo y que denominamos SERLIST y SERFUNC. Esencialmente, en la conceptuación SERLIST se percibe una serie como una suma infinita, mientras que en la conceptuación SERFUNC, ésta se percibe como una sucesión de sumas parciales. Las nociones SERLIST y SERFUNC generalizan nociones análogas anteriormente usadas en el caso de sucesiones infinitas. El estudio cualitativo está basado en entrevistas semiestructuradas a 14 estudiantes de pregrado. Hallamos que 12 de los 14 estudiantes entrevistados tuvieron gran dificultad en construir una noción de serie como sucesión de sumas parciales. Nuestro estudio sugiere algunas actividades que podrían ayudar a remediar esta dificultad.

Palabras clave: cálculo, series infinitas, APOE, sucesión de sumas parciales, sucesiones.

Construcciones serlist y serfunc de series infinitas

Abstract: This is a study of how college students construct the notion of an infinite series as a sequence of partial sums. Using Action-Process-Object-Schema theory (APOS) it is shown that students tend to construct two different cognitive objects, SERLIST and SERFUNC, which are described in the article. Essentially, in a SERLIST conception a series is perceived as an infinite sum while in a SERFUNC conception it is perceived as a sequence of partial sums. The SERLIST and SERFUNC notions generalize analogous notions that have been used in the case of infinite sequences. The qualitative study is based on semi-structured interviews to 14 undergraduate students. We found that 12 of the 14 interviewed students

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2009.

had great difficulty constructing a notion of infinite series as a sequence of partial sums. Our study suggests some activities that may help remedy this situation.

Keywords: calculus, infinite series, APOS, sequence of partial sums, sequences.

INTRODUCCIÓN

El concepto de serie infinita causa gran dificultad en muchos estudiantes (Bagni, 2000; Sierpińska, 1987). Por ello, es importante conocer cómo construyen los estudiantes este objeto cognitivo para así poder guiarlos a un mejor entendimiento del concepto.

El entendimiento intuitivo de series infinitas como sumas infinitas es un obstáculo para el entendimiento formal de series infinitas. Para algunos estudiantes, la naturaleza de un proceso infinito es tal que no se puede completar en una cantidad finita de tiempo y esto puede causarles dificultad en el momento de sumar una serie (Sierpińska, 1987). Esto puede observarse en el caso de estudiantes que no han tenido enseñanza formal en series infinitas, como en Fischbein, Tirosh y Melamed (1981), donde se explora la posibilidad de medir la "aceptación intuitiva" *(intuitive acceptance)* de una idea, asignándole un valor numérico a esta noción con base en una serie de seis preguntas diseñadas para tratar de medir cuánta confianza tiene el estudiante en su respuesta a un problema y qué tan obvia le parece su respuesta al problema. En cada uno de los ocho problemas del cuestionario que utilizaron, los participantes debían contestar el problema, justificar su contestación y, además, contestar las seis preguntas que los investigadores usaron para clasificar su "aceptación intuitiva" de la respuesta que dieron. Dos de los problemas incluidos en su cuestionario fueron:

1) Dado un segmento $AB = 1$ m. Supongamos que se añade otro segmento $BC = \frac{1}{2}$ m. Continuemos añadiendo de esta manera segmentos de $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, etc. ¿Este proceso de añadir segmentos, como se describe arriba, terminará? (se incluía una figura)

2) Consideremos nuevamente la pregunta anterior. ¿Cuál será la suma de los segmentos $AB + BC + CD + \ldots$ (y así sucesivamente)?

Los resultados del cuestionario de Fischbein, Tirosh y Melamed (1981), que fue usado con 107 estudiantes en el octavo o noveno año de estudio preuniversitario, incluyen:

La mayoría (84.1%) de los sujetos admiten la infinidad del proceso en la pregunta 1, dando justificaciones tales como: "siempre es posible añadir un segmento de recta que mida la mitad que el anterior", "una recta consiste de una infinidad de puntos y cada segmento se puede dividir una infinidad de veces. Por tanto, se puede continuar añadiendo segmentos", "1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ... los números no tienen fin", "Para cada número es posible hallar un número que sea su mitad y, por tanto, el proceso no tiene fin". Más aún, estos estudiantes mostraron un alto grado de "aceptación intuitiva" según las preguntas diseñadas por los investigadores para tratar de medir ésta noción. Sólo seis de los 107 estudiantes (5.6%) contestaron que la suma de los segmentos en la pregunta 2 era 2 y los que así contestaron lo hicieron con un grado muy bajo de "aceptación intuitiva", según las preguntas diseñadas para medir esto. De hecho, tres de los estudiantes que dijeron que la suma era 2 no dieron justificación alguna de su respuesta. Los otros tres hicieron referencia a la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ... La mayoría de los estudiantes dieron una contestación diferente de 2 en la pregunta 2, pero consideraron que su respuesta tenía un grado relativamente alto de "aceptación intuitiva". Entre las respuestas dadas estaban que la suma era infinita y que la suma sólo se acerca a 2. Algunas de las justificaciones que dieron fueron: "el proceso se puede continuar sin fin", "va a haber una infinidad de segmentos", "la suma tiende a 2. Sin importar cuánto continuemos añadiendo segmentos, nunca vamos a alcanzar 2", "$S = 2 - (1/\infty)$, porque no hay fin para la suma de los segmentos". Este estudio de Fischbein, Tirosh, y Melamed evidencia la percepción de serie infinita que se tiene de manera natural antes de recibir instrucción formal en el tópico.

Como veremos en nuestro estudio, es común que los estudiantes sigan pensando en una serie como un proceso infinito aun después de recibir instrucción formal. En Tall (1992) se observó que ideas informales de límite traen consigo un sentido dinámico de algo acercándose a un valor límite y se dio como ejemplo que, cuando n aumenta, la suma $1 + \frac{1}{2} + \ldots + (\frac{1}{2})^n$ se acerca al límite 2. De aquí se argumenta que esto tiene como consecuencia la creencia que se llama "la propiedad genérica del límite", o sea, que una propiedad común a todos los términos de una sucesión también aplica a su límite. Esta creencia la vemos ejemplificada repetidamente en nuestras entrevistas. Bagni (2000, 2005) usó la historia de la matemática para obtener información de posibles obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Él observó que, para Guido Grandi (1671-1742), se puede obtener 1 o 0 como la suma de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Según Grandi: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$, cuya suma debe ser 0 y 1 – 1 + 1 – 1 + ... = 1 – (1 – 1) – (1 – 1)– ..., cuya suma debe ser 1. Además, también Grandi sustituyó x=1 en la expansión $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ para obtener que 1 – 1 + 1 – 1 + ... = ½. Bagni (2000, 2005) y otros historiadores (véase, por ejemplo, Kline, 1972) presentan múltiples ejemplos en los que la falta de una clara noción de convergencia lleva a matemáticos de la talla de James, John y Daniel Bernoulli, Lagrange, Leibniz, Newton, Euler, entre otros, a cometer lo que hoy día serían reconocidos como errores. No fue sino hasta el siglo XIX cuando Cauchy trabajó sobre las aportaciones de Gregory, Maclaurin, Euler y Gauss para construir la teoría de convergencia que usamos en la actualidad (véase Smith, 1958). Traduciendo a Kline (1972): "es justo decir que, en el trabajo en series del siglo XVII, dominaba el punto de vista formal. En general, los matemáticos hasta resentían cualquier tipo de limitación, tal como la necesidad de pensar acerca de convergencia". Observamos que, en las manipulaciones formales que hacían los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, éstos se permitían asociar términos de la serie de maneras diferentes, mientras que la formalización de Cauchy esencialmente sólo permite asociar los términos de una serie como: $\left(\left(\left(a_1 + a_2\right) + a_3\right) + a_4\right) + a_5 + \cdots$ Bagni (2000, 2005) consideró la opinión de estudiantes sobre la serie de Grandi, $1-1+1-1+\ldots$, y observó que sus respuestas eran similares a las que históricamente se dieron en la comunidad matemática, viendo en esto una instancia que sustenta la observación de Piaget y García (1983) de que, en algunos casos, el desarrollo del conocimiento en un individuo es paralelo al desarrollo histórico. Esto también se puede observar en nuestro estudio, donde se utiliza la serie de Grandi como parte de las entrevistas. Veremos en nuestro estudio que la mayor parte de los estudiantes, aun después de haber sido definida la convergencia de una serie infinita, siguen haciendo las construcciones de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII.

Recordemos que, dada una sucesión infinita $\left(a_i\right)_{i=1}^{\infty}$, la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se define como la sucesión de sumas parciales $\left(S_n\right)_{n=1}^{\infty}$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Por ende, una serie infinita es una sucesión y, como tal, es importante considerar lo que se conoce acerca de cómo entienden los estudiantes la noción de una sucesión infinita. Mamona (1990) halló que los estudiantes se resisten a la idea de considerar que una sucesión es una función. McDonald, Mathews y Strobel (2000) mostraron que los estudiantes suelen construir dos objetos cognitivos diferentes del concepto de sucesión. En una construcción, SEQLIST, los estudiantes piensan en una sucesión como una lista infinita. En la otra, SEQFUNC, piensan en una sucesión como una función con dominio en los números naturales. En un resultado similar, Przenioslo (2006) halló que las percepciones que tienen los estudiantes de sucesión infinita se pueden dividir en dos grupos. Como en McDonald, Mathews y Strobel (2000), un grupo percibe una sucesión como una función, mientras que el otro lo asocia con elementos ordenados. En el estudio de Przenioslo participaron 446 estudiantes de escuela secundaria y 156 que comenzaban sus estudios universitarios. La mitad de los participantes eran considerados talentosos matemáticamente. De todos los estudiantes sólo 12% percibió una sucesión como una función, lo que también sustenta la observación de Mamona (1990). Más aun, sólo la mitad de ese 12% fue capaz de usar eficientemente la noción de sucesión como función.

El artículo de McDonald, Mathews y Strobel (2000) nos sirve de base para el presente trabajo. Ellos aplicaron la teoría APOE para estudiar las construcciones que hacen los estudiantes del concepto de sucesión infinita. Los resultados de su estudio se resumen más adelante en este artículo.

MARCO TEÓRICO

Sólo proveemos una breve descripción de la terminología que se utiliza en la teoría APOE. Para mayor información puede consultar Dubinsky (1991, 1994), Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) o Dubinsky (1996). En la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), un individuo tiene una conceptuación de acción de una noción matemática cuando está limitado a transformar un objeto matemático de acuerdo con algún algoritmo explícito que percibe como externo o cuando se ve limitado a recurrir a datos memorizados. A medida que un individuo reflexiona sobre sus acciones, puede *interiorizar* éstas en un proceso. Una conceptuación de proceso es esta transformación interna de un objeto. El individuo puede describir o reflexionar sobre cada paso de la transformación sin tener que llevarlo a cabo explícitamente. Los procesos se pueden transformar revirtiéndolos o coordinándolos con otros procesos. Cuando un individuo reflexiona sobre acciones que se aplican a un proceso, puede llegar a cobrar conciencia del proceso como una totalidad, o sea, lo *encapsula* en un objeto. Un esquema de un concepto matemático es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos que se coordinan y sintetizan para formar estructuras matemáticas a las que se puede recurrir para resolver problemas (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Trigueros, 2005). Los esquemas evolucionan a medida que se construyen y reconstruyen nuevas relaciones entre acciones, procesos, objetos y otros esquemas nuevos y existentes. Su evolución se puede describir usando los niveles de la "tríada", *intra, inter* y *trans,* de Piaget y García (1983). Se dice que el desarrollo de un esquema está en nivel *intra* cuando las acciones, procesos, objetos y otros esquemas que lo componen están mayormente aislados los unos de los otros. Cuando hay algunas conexiones, transformaciones repetibles o subestructuras entre diferentes componentes del esquema, se dice que éste está en un nivel *inter* de desarrollo. En el nivel *trans,* los diferentes componentes del esquema se interrelacionan de una manera coherente, formando una nueva estructura que, a su vez, pasa a ser un nuevo objeto matemático para el individuo (Cooley, Trigueros y Baker, 2007).

Aunque pueda pensarse que en la teoría APOE hay una progresión lineal de acción a proceso a objeto y luego a organizar diferentes acciones, procesos y objetos en esquemas, esto frecuentemente se presenta como una progresión dialéctica en la que puede haber desarrollos parciales y retrocesos de una a otra conceptuación (Czarnocha, Dubinsky, Prabhu y Vidakovic, 1999). Lo que la teoría dice es que la manera en que un individuo trabaja con un problema matemático relacionado con un concepto es diferente, dependiendo de la conceptuación que se tenga.

La teoría APOE puede utilizarse para la investigación de dos maneras diferentes. Por un lado, se puede emplear la teoría para estudiar las construcciones que hacen los estudiantes luego de haber tomado uno o varios cursos relacionados con el tópico en estudio (Trigueros, 2000; Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005; Martínez-Planell y Trigueros, 2009; Trigueros y Martínez-Planell, 2010) y, por otro lado, la teoría también se puede usar para diseñar actividades destinadas a enseñar un tópico y luego analizar las construcciones que hicieron y las que no hicieron los estudiantes (Brown, De Vries, Dubinsky y Thomas, 1998; Dubinsky y Yiparaki, 2000; McDonald, Mathews y Strobel, 2000). Este estudio cae en la primera vertiente; usamos la teoría APOE para analizar las construcciones que hacen los estudiantes del concepto de serie infinita luego de que éstos han recibido instrucción formal en el tópico en uno o varios cursos.

Una descomposición genética de un concepto en APOE es una conjetura que establece el investigador basándose en su experiencia, en el concepto matemático según como es aceptado por la comunidad matemática y en la data que tenga disponible de las acciones, procesos, objetos, esquemas y coordinaciones que un estudiante puede hacer para construir el concepto. Debemos aclarar que una descomposición genética no es única. Diferentes investigadores pueden proponer diferentes descomposiciones genéticas. Lo que es importante es que ésta se compruebe utilizando data obtenida de estudiantes. A menudo, la data que se obtiene revela aspectos de la descomposición genética que deben describirse en mayor detalle para destacar construcciones en la descomposición que algunos estudiantes no están haciendo o construcciones que hacen los estudiantes que resultan ser diferentes de las esperadas en la descomposición genética. Esto lleva a crear materiales para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones que no están haciendo y a revisar la descomposición genética, mejorando cada vez más su capacidad descriptiva.

SUCESIONES INFINITAS SEGÚN MCDONALD, MATHEWS Y STROBEL Y UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE SERIE INFINITA

De acuerdo con McDonald, Mathews y Strobel (2000), los estudiantes pueden hacer una construcción SEQLIST (SEQ, del inglés "*sequence*" que significa "sucesión"– y LIST, "lista") o SEQFUNC (SEQ, "sucesión", y FUNC, "función") como acción, proceso u objeto de sucesión infinita. En la construcción SEQLIST, los estudiantes piensan en una sucesión como en una lista infinita de números, mientras que en SEQFUNC piensan en una sucesión como en una función con dominio en los números naturales. En ese artículo, todos los estudiantes entrevistados tenían una construcción de objeto SEQLIST y/o un proceso u objeto SEQFUNC.

En el mismo artículo nos dicen que los estudiantes han hecho una construcción de un *objeto* cognitivo SEQLIST cuando pueden referirse a una lista de números separados por comas como a una entidad en sí y pueden aplicar acciones a estas listas tales como compararlas. También exhiben comportamiento consistente con el de una construcción de un objeto SEQLIST, poniendo la lista en paréntesis o corchetes o refiriéndose a la lista en singular. Los estudiantes exhiben comportamiento consistente con el de una construcción SEQFUNC como proceso, cuando se sienten cómodos dando ejemplos de sucesiones en forma cerrada o cuando dicen que una sucesión es una función o que una función con su dominio apropiadamente restringido es una sucesión. Su construcción SEQFUNC es un *objeto* cognitivo cuando pueden hacer acciones tales como manipular las formas cerradas de sucesiones o dar sus propiedades. Se dice que un estudiante que aun no ha encapsulado su construcción de sucesión en un objeto está limitado a un *proceso* en su construcción del concepto. Este parecería ser el caso de un estudiante que se refiere a la sucesión en plural y a la función en singular. También los estudiantes pueden mostrar su construcción de un proceso SEQFUNC cuando son capaces de discutir sucesiones como un proceso de dar valores de entrada y obtener valores únicos de salida.

Pensemos ahora en cómo puede ser que un estudiante construya su noción de serie infinita. Nuestra discusión incluye los elementos de una posible descomposición genética de este concepto. Para comenzar, es necesario que el estudiante tenga una construcción de sucesión infinita como objeto cognitivo. Dada una serie infinita, el estudiante puede comenzar aplicando la acción de sumar consecutivamente unos cuantos de los primeros términos de la serie. Es crucial que se vayan sumando términos consecutivos. Mientras se interioriza ésta acción, podemos conjeturar que el estudiante con una conceptuación SEQLIST de sucesión pensará que, al ir sumando los primeros términos de la serie, está formando una lista de números en la que el último número que aparece le va dando un total parcial. No tiene la noción de que a un entero positivo le corresponde una suma parcial específica y que, por ende, los resultados parciales se pierden al no llevar constancia de ellos. Este estudiante puede perder de vista que debe sumar términos consecutivos de la serie y, para obtener resultados parciales más rápidamente, puede llegar a agrupar términos de diferentes maneras. El estudiante estará, en efecto, pensando en la serie como un proceso de suma que no termina. En este caso, el estudiante va a estar construyendo un proceso diferente del que se espera en la descomposición genética, pues no está interiorizando la acción de sumar términos *consecutivos* de una serie. Llamaremos a éste un proceso SERLIST, "SER" de "serie" y "LIST" de lista. Observe que la terminología SERLIST es análoga a la SEQLIST utilizada por McDonald, Mathews y Strobel (2000), lo único es que ahora empezamos con "SER" de "serie" en vez de con "SEQ" del inglés "sequence" que significa "sucesión". Un estudiante con una conceptuación SEQFUNC de sucesión (McDonald, Mathews y Strobel, 2000) está en posición de ver que, al ir sumando consecutivamente los términos de una serie, está formando una nueva sucesión de números, la sucesión de sumas parciales. Su conceptuación SEQFUNC de sucesión le permite ver que a cada entero positivo le corresponde una suma parcial. Cuando se interioriza esta acción, el estudiante puede reflexionar sobre el proceso de sumar términos consecutivos de una serie y explicar este proceso sin tener que llevarlo a cabo explícitamente. Llamaremos a éste un proceso SERFUNC, "SER" de "serie" y "FUNC" de "función". Que un estudiante esté en posición de cobrar conciencia de la sucesión de sumas parciales como un ente en sí mismo no implica que necesariamente procederá a hacer esta construcción. Un estudiante con una conceptuación de proceso puede ir y venir entre su noción de sucesión como lista y su noción de sucesión como función, por lo que podría ser inconsistente en su tratamiento de series infinitas, tratando la serie a veces como un proceso de suma que no termina y, otras, como una sucesión de sumas parciales.

La necesidad de aplicar acciones a series, ya sea para discutir su convergencia o computar su suma, obliga a que el estudiante encapsule la noción de proceso que tenga en un objeto cognitivo. Debemos tener en cuenta que, aplicar propiedades a una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que sólo requieran la manipulación de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no implica que se haga uso ni que se tenga conciencia de la sucesión de sumas parciales; como consecuencia, problemas que sólo requieren este tipo de acción no permiten distinguir entre las conceptuaciones SERLIST y SERFUNC. Finalmente, observamos que la acción de sumar una serie puede requerir que el estudiante coordine su construcción de serie con su esquema de límites.

Arriba hemos conjeturado dos posibles construcciones de serie infinita de acuerdo con la construcción de sucesión infinita que tenga el estudiante. Hay estudiantes que pueden exhibir la construcción de un objeto SERLIST (de SER, "serie", y LIST,"lista") cuando se refieren a una lista de números separados por signos de suma como a una entidad de por sí y pueden efectuar acciones sobre series así expresadas tales como clasificarlas, sumarlas o comparar dos de ellas. También pueden exhibir comportamiento consistente con una conceptuación SERLIST objeto cuando pueden expresar una tal suma infinita empleando notación sigma o cuando se refieren a una tal suma en singular. Estudiantes con una conceptuación SERFUNC (SER de "serie" y FUNC de "función") pueden considerar una serie numérica infinita como una función, o sea, están conscientes de que, dado un entero positivo, hay una suma parcial que corresponde a ese entero, aunque no se esté pidiendo explícitamente que se produzca tal suma. Siguiendo con esta idea, diremos que un estudiante exhibe una construcción de un objeto SERFUNC cuando es capaz de tratar una serie como una sucesión de sumas parciales, por ejemplo, al discutir la convergencia de una serie haciendo uso explícito de la sucesión de sumas parciales. Un estudiante también exhibe comportamiento consistente con una conceptuación SERFUNC cuando dice que una serie es una sucesión de sumas parciales o cuando expresa la suma de una serie infinita como el límite de la sucesión de sumas parciales. En la discusión de sucesiones que se da en McDonald, Mathews y Strobel (2000) se dice que un estudiante exhibe comportamiento SEQFUNC cuando se muestra cómodo trabajando con la forma cerrada de sucesiones. En el caso de series, la forma cerrada de una serie, o sea, una fórmula para la enésima suma parcial, sólo se puede hallar fácilmente en algunas situaciones especiales, como en el caso de series geométricas o en casos en que podemos usar fracciones parciales para expresar la enésima suma como una suma telescópica. De aquí que también decimos que un estudiante exhibe una conceptuación SERFUNC cuando se muestra cómodo trabajando con la fórmula para la enésima suma parcial de una serie geométrica o cuando puede usar fracciones parciales para obtener una fórmula para la enésima suma parcial de una serie.

En resumen, en la conceptuación de objeto SERLIST, el estudiante está limitado a pensar en una serie como un proceso de suma que no termina al cual le puede aplicar acciones. En la conceptuación de objeto SERFUNC, el estudiante cobra conciencia de que la serie es una sucesión de sumas parciales a la cual puede recurrir cuando sea necesario. Un estudiante que se muestre inconsistente en su uso de la sucesión de sumas parciales, en situaciones donde es necesario usarla, exhibe la construcción de un proceso SERFUNC; aún no ha encapsulado completamente su construcción de la sucesión de sumas parciales en un objeto y, por tanto, puede recurrir ocasionalmente a una conceptuación SERLIST, aun cuando ésta pueda ser insuficiente para la situación dada. Esto también puede suceder en el caso en que un estudiante con una conceptuación de objeto SERLIST pueda estar en el proceso de construir una conceptuación SERFUNC de serie, al reflexionar sobre situaciones que requieren la manipulación mental de la sucesión de sumas parciales, como puede suceder para sumar algunas series infinitas o entender algunas demostraciones. En este caso, podemos esperar ver muestras del comportamiento asociado con ambas conceptuaciones.

MÉTODO

La pregunta que nos planteamos en esta investigación es: ¿los estudiantes tienden a hacer las construcciones SERLIST y SERFUNC del concepto de serie infinita según hemos conjeturado anteriormente?

Esta conjetura se puso a prueba llevando a cabo entrevistas semiestructuradas a un grupo de 14 estudiantes de pregrado (primeros 2 o 3 años de universidad). Primero se les administró un instrumento escrito que luego sirvió de base para las entrevistas. Éstas fueron grabadas, transcritas, analizadas independientemente por cada miembro del grupo de investigadores y, finalmente, discutidas en grupo hasta llegar a un consenso. Los participantes eran estudiantes de matemática e ingeniería de una universidad pública que ya habían tomado el curso de cálculo elemental donde se introduce la noción de serie infinita. Se escogieron estudiantes que conocíamos como buenos estudiantes, pues habían tomado el curso con nosotros o porque habían sido recomendados como buenos estudiantes por nuestros colegas. Todos ellos obtuvieron las mejores calificaciones, A o B, en el curso. Se escogieron buenos estudiantes, ya que nos interesaba su construcción de la noción de series como sucesión de sumas parciales y conjeturamos que sólo este tipo de estudiante sería capaz de hacer esta construcción. Sin embargo, al escoger solamente buenos estudiantes, inadvertidamente perdimos la capacidad de obtener suficientes datos acerca de conceptuaciones de acción y proceso SERLIST, pues éstas son las que podría esperarse que tengan los estudiantes más débiles. Por tanto, en este artículo nos referimos únicamente a conceptuaciones de objeto SERLIST y de acción, proceso y objeto SERFUNC. En cuanto al libro de texto que usaron los estudiantes entrevistados (Stewart, 2001), podríamos decir que muestra preferencia por presentar los conceptos en un contexto matemático, pero haciendo hincapié en la mecanización de la solución de ejercicios. Cada entrevista duró de 45 minutos a 1 hora.

Reproducimos a continuación parte del cuestionario que utilizamos para las entrevistas.

1) En sus propias palabras defina lo que es una serie.

Se incluyó esta pregunta porque la manera en que un estudiante describe verbalmente una serie puede darnos algún indicio del tipo de conceptuación SERLIST o SERFUNC que tiene.

2) Considere la siguiente expresión:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Indique si la serie converge o diverge. En cualquiera de los dos casos justifique su contestación tan cuidadosamente como pueda.

Si se puede calcular esta suma, ¿cuál es su valor?

Esta serie, aunque posiblemente ha sido vista anteriormente por algunos estudiantes, puede darnos evidencia de la conceptualización SERFUNC que pueden tener. La serie es suficientemente sencilla como para que estudiantes de pregrado puedan hacer referencia a su sucesión de sumas parciales para discutir su divergencia. Sin embargo, esta serie también admite el argumento de que diverge, pues la sucesión de sumandos 1, −1, 1, −1,... no converge a 0. Por supuesto, este último argumento no nos dice nada acerca de su posible conceptuación SERFUNC.

3) Considere la sucesión $a_n = (1/2)^n$, $n = 1,2,3...$

a) Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$.

b) Sea $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$. Escriba los primeros cuatro términos de $\{S_N\}$.

c) Dibuje la gráfica de $\{S_N\}$.

d) ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{N\to\infty} S_N$?

e) Explique el significado del enunciado $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Las partes *a* y *b* de la pregunta buscan descubrir si los estudiantes están conscientes de las dos sucesiones que se pueden asociar de manera natural a una serie infinita; la sucesión (a_i) de los sumandos y la sucesión (S_N) de sumas parciales. La siguiente parte *c* también nos permite ver si los estudiantes distinguen entre estas dos sucesiones. Asimismo, nos permite ver si el estudiante puede tomar la acción de construir la representación gráfica de la serie infinita dada. La parte *d* se incluyó pensando en que ésta da al estudiante la oportunidad de expresar formal o verbalmente que el límite de la sucesión de sumas parciales es la suma de la serie, lo que podría darnos más evidencia de una conceptuación SERFUNC. Finalmente, la manera en que el estudiante trate la serie geométrica en la parte *e* puede potencialmente dar evidencia de su conceptuación SERFUNC O SERLIST.

4) Determine si las siguientes series convergen o divergen. Justifique su contestación.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{i}} + \frac{1}{i^5}$$

5) Se sabe que $\ln(n) < n$ para toda $n > 1$. Basado en esto, ¿qué puede decir del comportamiento de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ comparada con el de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$?

Las preguntas 4 y 5 no nos permiten distinguir si un estudiante tiene una conceptuación SERFUNC, ya que no requieren que se use ni se tenga conciencia de la sucesión de sumas parciales; las preguntas se pueden responder aplicando resultados que se articulan en términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sin embargo, estas preguntas nos pueden dar evidencia de que un estudiante tiene una conceptuación de objeto SERLIST (en vez de proceso o acción): identificar una serie como serie-*p*, determinar su convergencia, y comparar series son acciones que se aplican a un objeto.

RESULTADO DE LAS ENTREVISTAS

A continuación presentamos parte de las entrevistas a dos estudiantes. Comenzaremos con Juan, que exhibió una conceptuación de objeto SERFUNC. Luego consideraremos a Daniel, que muestra una conceptuación de proceso SERFUNC. Daniel también tiene una conceptuación de objeto SERLIST. El resto de los estudiantes mostró no haber interiorizado la acción de formar la sucesión de sumas parciales en un proceso, quedándose limitados a una conceptuación de acción SERFUNC y de objeto SERLIST.

Se le pidió a Juan que explicara lo que entiende por una serie:

Juan: Pues una serie... pues una acumulación de sucesión...

Entrevistador: ¿Una acumulación?....

Juan: ...de sucesiones, pues en vez de ponerle sucesión, pues tú vas acumulando, o sea, primero, los primeros dos términos, después los primeros terceros, después los cuatro términos, después una serie, a donde... hasta... dicho hasta donde llega la coma.

En su definición, Juan exhibe comportamiento asociado con una conceptuación SERFUNC; reconoce que se forma una nueva sucesión, la sucesión de sumas parciales. Para obtener más confirmación de esto se le pregunta:

Entrevistador: Dame un ejemplo de una serie.

Juan: S_1 es $1 + 2$, S_2 es igual a $1 + 2 + 3$, S_3... $1 + 2 + 3 + 4$, hasta S_n... que sería $1 + 2 + 3 \ldots + n + n + 1$.

Observe que el ejemplo de serie que da es el de una sucesión de sumas parciales. Al preguntarle sobre la serie $1 - 1 + 1 - 1$..., comienza argumentando su divergencia, basándose en el hecho de que la sucesión de sumandos $1, -1, 1, -1, \ldots$ no converge a 0. Sin embargo, también da un argumento basado en la sucesión de sumas parciales:

Juan: Diverge porque no tiende, la sucesión, a ningún valor específico, no tiende a cero, para empezar, y las sumas van a dar 0 o 1.

Entrevistador: ¿Cómo obtienes eso?

Juan: Porque tiene que, la sucesión tiene que, primero que nada tiene que converger a 0, y la sucesión no va a converger a 0 porque oscila entre 1 y −1.

Entrevistador: Bien, pero mira, aquí dices que va entre 1 y −1, pero aquí escribiste 1 y 0...

Juan: Pero eso es la serie... la serie va entre 1 y 0, porque la suma nunca da −1.

Entrevistador: Ok y ¿cómo llegas a eso?

Juan: Bueno, la primera da 1, la segunda 1 − 1, la tercera... 1 − 1 + 1, la tercera... esto es 1, esta otra es 1 − 1 + 1 − 1 que es 0..., ése es el patrón.

Juan puede evaluar los primeros términos S_1, S_2, S_3 y S_4 de la sucesión de sumas parciales, como le pide la parte *b* del problema *2* y es capaz de producir la gráfica de la sucesión de sumas parciales como pide la parte *c* (véase la figura 1). Esto provee evidencia adicional de su conceptuación SERFUNC. Parece ser que la conceptuación de Juan es de objeto, pues es capaz de aplicar acciones a la serie: la acción de decidir convergencia y la acción de conversión de una representación simbólica de la serie a una representación gráfica.

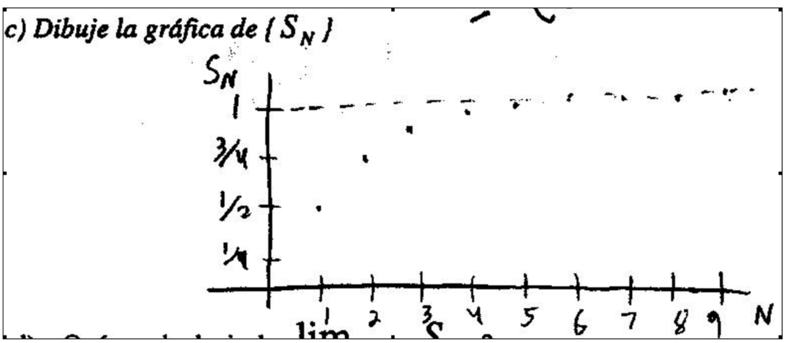


Figura 1 Respuesta escrita de Juan a la pregunta *3c*

Otro de los estudiantes entrevistados, Daniel, muestra un comportamiento diferente. Se le pregunta si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ converge o diverge. El estudiante la identifica como una serie geométrica e indica que converge a 1. Esto es consistente con una conceptuación de objeto: una serie es un objeto al cual se le pueden aplicar acciones tales como clasificarla y sumarla. Sin embargo, en ocasiones también puede exhibir una conceptuación de proceso, como en la siguiente discusión:

Entrevistador: Si escribo $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = 1$, ¿qué significa esto?

Daniel: Eso significa que cuando tomamos todos los términos de esta serie, o sea, tomamos la sucesión de $(1/2)^i$, entonces pues cada término es $1/2$ elevado al valor de *i* donde estemos, pues al sumar todos esos términos el valor al que se va a ir acercando esa suma va a ser a 1. Mientras más grande tomemos el valor donde llega la *i*, más y más se va a acercar a 1 hasta que lleguemos a un punto donde tomamos todos los números entre 1 e infinito entero y sumamos cada término de la sucesión pues el valor va a ser tan y tan parecido a 1 que asumimos que es 1.

Con esta contestación, sospechamos que Daniel ve una serie como un proceso interminable de suma al cual se le pueden aplicar acciones, o sea, que tiene una conceptuación SERLIST. Su conceptuación de proceso puede verse cuando dice "...al valor de *i* donde estemos..." y luego, "...al sumar... el valor al que se va a ir acercando..." Esta conceptuación de serie es la que va a encapsular para aplicar acciones, tal como sumar la serie. Vemos en Daniel el mismo tipo de respuesta que ha sido documentada en algunas investigaciones del concepto de límite, por ejemplo en Fischbein, Tirosh, y Melamed (1981), donde se observa que dada $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, la mayor parte de los estudiantes dice que la suma es infinita o que tiende a 1. Son pocos los que dicen que es 1. También, como observan en Gray y Tall (1987), puede ver el símbolo $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ como un proceso ejemplificado en la discusión anterior o como el resultado de ese proceso, como se muestra a continuación:

Entrevistador: Pero, ¿podrá ser menor que 1?

Daniel: Cuando nos acercamos a infinito, a medida que nos acercamos va a ser menor que infinito, pero cuando tomamos un número infinito no va a ser menor, va a ser 1. O sea, cuando llegamos hasta infinitos términos el valor va a ser 1.

Entrevistador: ¿Esto tiene algo que ver con límites?

Daniel: Sí, sí, esto lo podemos, esto lo podemos expresar también como sumatoria de *i* igual a 1 hasta *n* de $(1/2)^i$, donde el límite de *n* tiende a infinito. En este caso, estamos tomando la sumatoria y estamos viendo lo que sucede cuando la *n* se va acercando a infinito, o sea, cuando sumamos *n* términos de la sucesión, cuando se acerca a infinito decimos que esa sumatoria equivale a 1.

Observamos que, al principio, Daniel no usa terminología de límites para describir la serie; sin embargo, cuando se le pregunta directamente, es capaz de expresar correctamente la serie como un límite de su sucesión de sumas parciales, lo que abona a pensar que podría tener una conceptuación SERFUNC. Más aún, también fue capaz de hacer la gráfica de la sucesión de sumas parciales en el problema 3c, lo que también es consistente con una conceptuación SERFUNC.

Sin embargo, sostenemos que, aunque puede haber algunos indicios de conceptuación SERFUNC, Daniel muestra predominantemente una conceptuación de objeto SERLIST, pues su tendencia natural es a pensar en una serie como un proceso interminable de suma al que puede aplicar acciones. Parece ser frecuente que estudiantes como Daniel, a pesar de ser capaces de expresar una serie como un límite de sumas parciales, en el momento de hacer algún trabajo con series, dependen mayormente de su conceptuación SERLIST. Esto lo vemos a continuación:

Entrevistador: Ahora vamos a ver otro ejemplo, vamos a ver el ejemplo $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etcétera, continúa de esta manera. ¿Qué puedes decir de esta serie?

Daniel: En esta serie, cuando sumamos los términos, se puede observar que hay un término que se puede cancelar con el próximo, en este caso tenemos -1 que cancela con 1 que es 0 y entonces -1 con 1 y -1 con 1 hasta que sigamos. Pero lo que sucede entonces es que, cuando nos vamos acercando a la infinidad, no se puede saber precisamente el valor que vamos a tener en el último. En este caso, todos los valores entre el primero sin incluirlo y el último en la infinidad cancelarían entre sí, pero no sabemos si el último valor sería -1 o 1. En ese caso si el último valor sería -1 pues entonces la suma sería 0, si no, la suma daría 1. Y no podemos determinar exactamente entre cuál de los dos valores es que podría ser.

Entrevistador: Si la sucesión es infinita, ¿tiene un último valor?

Daniel: Se podría decir que, si tomamos la sucesión con el valor en infinito, pues es posible que encontremos un último valor. Para algunas sucesiones sí ocurre, para otras sucesiones no ocurre. Depende de la sucesión, podemos decir si el, o sea si escribimos la sucesión como un límite cuando *n* tiende a infinito de términos enésimos de la sucesión, pues el término puede ser un número exacto o puede ser que no exista, que sea un número en infinito, que no sea un número. En ese caso, si cuando tomamos ese límite de la sucesión en el término enésimo cuando *n* tiende a infinito nos da un número, pues sabemos que ese vendría siendo, pues, el último término, se podría llamar, de la sucesión.

Observamos que Daniel no interioriza la acción contemplada en la descomposición genética de sumar *consecutivamente* los primeros términos de la serie, sino que los agrupa. Esto no le permite formar la sucesión de sumas parciales. También podemos ver que Daniel parece llamar "último término" de una sucesión, al límite que tenga la sucesión. También podemos ver la debilidad de su esquema de límites. Ésta debilidad puede contribuir a que prefiera no tratar la suma de una serie como el límite de su sucesión de sumas parciales. Más adelante, a instancias del entrevistador, Daniel logra computar correctamente los primeros términos de la sucesión de sumas parciales. Refiriéndose al instrumento escrito, donde aparece $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$:

Entrevistador: Vamos a suponer que S_n es como tú tienes escrito ahí... ¿qué será S_1, S_2, S_3, S_4? ¿Qué valores tienen ésos?

Daniel: S_1 sería entonces cuando evaluamos la sumatoria desde el término primero hasta el término primero, o sea, que solamente tomamos en consideración el primer término, sería $(-1)^0$ que es 1. Para S_2 evaluamos la sumatoria desde el primer término hasta el segundo, en ese caso sería $(-1)^0 + (-1)^1$ y aquí tenemos $1 - 1$ que es 0. De la misma manera, proseguimos en S_3, evaluamos y vamos a obtener $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$ y esto es $1 - 1 + 1$ que es 1, y S_4 es $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3$ y esto es $1 - 1 + 1 - 1$ que es igual a 0.

Entrevistador: Si uno continuara esa sucesión de números S_1, S_2, S_3 y S_4, esa sucesión ¿tendría un límite?

Daniel: ¿A qué se refiere?

Entrevistador: Bueno, hay sucesiones que tienen límite y otras que no tienen límite y la pregunta es si esta sucesión que se forma de este modo tendría un límite.

Daniel: Si llega a un número, o sea, si seguimos tomando cada vez mas términos, pues en ese caso no, porque como se puede observar, con S_1 el valor fue 1 con S_2 fue 0, S_3 otra vez 1 y S_4 otra vez 0, cada vez que se sigue tomando un próximo término pues el valor cambia o 1 o 0 y seguimos añadiendo otro y es 0, otra vez 1 y después 0, después 1 y, cuando seguimos hacia infinidad, no se sabe exactamente si estamos en uno donde la suma nos dé 0 o nos dé 1.

El entrevistador trata nuevamente de ver si Daniel relaciona la suma de la serie con el límite de la sucesión de sumas parciales:

Entrevistador: Ese límite de esa S_n ¿tendrá algo que ver con la serie original $1 - 1 + 1 - 1$?

Daniel: Sí, porque esta serie original es la sumatoria expresada cuando tomamos el límite de n tiende a infinito, pues entonces acabaríamos con la serie original donde tenemos $1 - 1 + 1 - 1$ y así sucesivamente y expandimos la sumatoria hasta infinidad.

Aquí vemos que cuando Daniel dice "y expandimos la sumatoria hasta infinidad", está viendo el límite de la sucesión de sumas parciales como una notación conveniente que, al expandir, le permite recuperar su familiar y preferida suma infinita. Sin embargo, no usa el límite de la sucesión de sumas parciales para argumentar la divergencia de la serie.

En la pregunta 4, Daniel escribe que $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^5$ es una serie-p con $p>1$ y que por eso converge, que $\sum_{i=1}^{\infty} 3/\sqrt{i}$ es una serie-p con $p < 1$ y que, por tanto, diverge y concluye correctamente que la serie original diverge. En la pregunta 5, reconoce $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ como la serie armónica que diverge y, por comparación, concluye correctamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ln(n)$ diverge.

En resumen, Daniel no hace uso explícito y voluntario de la sucesión de sumas parciales (S_n) para analizar la divergencia de una serie. Por consiguiente, no tiene una conceptuación de objeto SERFUNC. La entrevista sugiere que tiene una conceptuación SERLIST. Su habilidad para clasificar series, hallar la suma de algunas series, expresarlas en notación $\sum$ y graficarlas sugieren que su conceptuación es de objeto. Sin embargo, también pudo reconocer la sucesión de sumas parciales, al menos como acción, cuando fue capaz de computar los primeros términos a petición del entrevistador. Además pudo expresar las series $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ y $1 - 1 + 1 - 1$... como el límite de su sucesión de sumas parciales y pudo producir la gráfica de la sucesión de sumas parciales (S_n) de $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$. Esto nos permite pensar que está al menos en transición a construir un proceso SERFUNC. También podemos explicar nuestras observaciones diciendo que el esquema de serie infinita de Daniel está en el estado *inter* de desarrollo, pues puede establecer algunas conexiones entre diversos conceptos: resultados de convergencia y divergencia de series geométricas y series-*p*, comparaciones de series, y la serie armónica. Sin embargo, su definición formal de serie como sucesión de sumas parciales parece estar desconectada de otros componentes de su esquema. Una de las razones que contribuyen a esta falta de coordinación es la debilidad de su esquema de límites. Puede ser que otra razón por la que tiene una conceptuación SERLIST en vez de SERFUNC sea que en el curso que tomó como estudiante de pregrado se encontró con pocas situaciones donde necesitaba ver una serie como una sucesión de sumas parciales.

Al comienzo del artículo, conjeturamos que la noción de sucesión infinita que tiene un estudiante desempeña un papel en la noción de serie infinita que éste logre construir. Cinco de los 14 estudiantes que participaron en el estudio mostraron haber hecho una construcción de objeto de sucesión infinita SEQFUNC, según lo definido por McDonald, Mathews y Strobel (2000). De esos cinco, dos lograron construir una conceptuación de serie infinita SERFUNC, uno como proceso y el otro como objeto. Ninguno de los estudiantes con noción SEQLIST de sucesión infinita logró una conceptuación SERFUNC más allá de acción. Estos datos sugieren que la noción de sucesión SEQFUNC puede ser necesaria, pero no es suficiente para la conceptuación SERFUNC de serie infinita.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS

Las investigaciones de McDonald, Mathews y Strobel (2000) y Przenioslo (2006) muestran que los estudiantes tienden a construir dos conceptuaciones diferentes de sucesión infinita: una como una lista infinita (SEQLIST), la otra como función (SEQFUNC). En este trabajo, nosotros hemos argumentado que, en el caso de series infinitas, los estudiantes también suelen construir dos objetos cognitivos diferentes: en uno de ellos, una serie infinita se percibe como una suma que no termina (SERLIST) y, en el otro, se construye la sucesión de sumas parciales (SERFUNC). Mostramos ejemplos de estudiantes con cada una de esas diferentes conceptuaciones. Nuestros resultados sugieren que, así como es difícil para los estudiantes construir una noción de sucesión infinita como función (Mamona, 1990; Przenioslo, 2006), también lo es construir una noción de serie infinita como sucesión de sumas parciales. Sólo 1 de 14 estudiantes que habían sido escogidos como "buenos" estudiantes por los investigadores pudo consistentemente tratar serie como sucesión de sumas parciales y usar esto como herramienta en el análisis de convergencia de una serie. O sea, sólo 1 de 14 estudiantes participantes exhibió una conceptuación de objeto SERFUNC. Se pudo considerar que únicamente otro estudiante tenía una conceptuación de proceso SERFUNC.

CONCLUSIONES

Los estudiantes suelen hacer las dos construcciones distintas, SERLIST y SERFUNC, para el concepto de serie infinita que han sido descritas en este artículo. La construcción SERFUNC parece ser particularmente difícil para los estudiantes. Algunas de las razones para esta dificultad pueden tener que ver con la naturaleza y demandas del curso o cursos donde se estudia. Otras dificultades, más al alcance de un curso introductorio de cálculo elemental, tienen que ver con la necesidad de construir una noción de sucesión infinita como objeto SEQFUNQ y la necesidad de desarrollar el esquema de límites, particularmente límites de sucesiones. Nuestro estudio puede sugerir estas últimas dos razones, mientras que las otras las ofrecemos como observaciones que requerirían más investigación para ser substanciadas.

No obstante, es bastante claro que, si los estudiantes rara vez se encuentran con situaciones que requieran el uso de la sucesión de sumas parciales, difícilmente podemos esperar que hagan una construcción de serie infinita basada en esa idea. La sucesión de sumas parciales puede aparecer en situaciones donde se sume una serie, sin incluir, por supuesto, el uso de la fórmula para una serie geométrica. Sin embargo, estas situaciones son poco comunes. Además, la gran mayoría de los resultados de convergencia se pueden expresar usando solamente la sucesión de sumandos (a_n) en vez de la sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se utiliza en las demostraciones de esos teoremas. En un curso de cálculo elemental, como el tomado por los participantes de este estudio, típicamente no se pide a los estudiantes que analicen o produzcan demostraciones. Esto hubiese requerido más reflexión en cuanto al papel de la sucesión de sumas parciales por parte de los estudiantes y es de esperarse que hubiese contribuido a que una mayor porción de ellos hubiera logrado construir una conceptuación SERFUNC de serie. Al no usarse la noción de serie como sucesión de sumas parciales, no se da la reflexión necesaria para interiorizarla como un proceso SERFUNC o encapsularla como un objeto SERFUNC.

La falta de desarrollo del esquema de límites de sucesiones en muchos estudiantes contribuye a la dificultad de construir una conceptuación de objeto de serie infinita SERFUNC. Esto se puede ver en las respuestas de varios estudiantes de nuestro estudio. Si tienen dificultad entendiendo el significado del límite de una sucesión, es poco probable que valoren o entiendan una noción que se basa en un límite. Estos estudiantes no están en posición de considerar la sucesión de sumas parciales como una herramienta con la cual obtener la suma de una serie o que pueden usar para reflexionar acerca de la veracidad de enunciados relacionados con series infinitas.

Podrían conjeturarse algunas actividades para llevarse a cabo en un curso introductorio de cálculo elemental que contribuyan a que los estudiantes construyan una conceptuación SERFUNC de serie infinita. Por supuesto, faltaría poner a prueba la conjetura en clase y validarla. Para comenzar, actividades con sucesiones infinitas que contribuyan a la construcción de una conceptuación de objeto de sucesión SEQFUNC podrían ser las siguientes: dada una sucesión representada como una fórmula para a_n, como una gráfica o como una lista $a_1, a_2, a_3,...,$ cambiarla a cualquiera de las otras formas de representación. Otras actividades incluyen el cómputo o discusión de lo que puede aparentar ser el límite de sucesiones en diferentes formatos. Luego, se pueden realizar actividades similares con series infinitas, o sea, cambiando entre las diferentes representaciones de series en todas las direcciones posibles (la simbólica $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$; la numérica $S_1, S_2, S_3,...$; la también numérica $a_1 + a_2 + a_3 + ...$; la gráfica; la simbólica (fórmula para S_n).

Todas estas acciones pueden contribuir a interiorizar una conceptuación de acción en una de proceso y a encapsular una conceptuación de proceso en una de objeto. Estas actividades incluyen, por ejemplo, producir los primeros términos de la sucesión de sumas parciales dada la sucesión de sumandos (a_n) o dada una serie en cualquiera de sus representaciones, producir la sucesión de sumandos (a_n) a partir de la sucesión de sumas parciales y obtener fórmulas para el enésimo término de series geométricas y telescópicas. También, por supuesto, hacen falta actividades como las del problema 2, donde se presenta al estudiante una situación que puede dar origen a conflicto cognitivo, o sea, actividades donde la noción SERLIST del estudiante produzca un resultado que entra en contradicción con lo que sigue de la definición formal de suma de serie como límite de la sucesión de sumas parciales. Se busca que el estudiante reflexione sobre la relación que hay en su esquema de serie entre el objeto SERLIST que posee y el conocimiento que tiene como acción o proceso de la noción de sucesión de sumas parciales. La noción de una sucesión de sumas parciales y muchas de estas actividades pueden ser exploradas antes de siquiera hablar de serie infinita. Dada la dificultad que tienen los estudiantes en construir una construcción de serie infinita como objeto SERFUNC, amerita que se pongan en práctica y se estudie el efecto de actividades como las sugeridas.

RECONOCIMIENTO

Agradecemos las sugerencias del profesor Ed Dubinsky, con quien sostuvimos varias conversaciones en la etapa inicial de este estudio. Su colaboración fue posible gracias a una dádiva de la Fundación Educativa Exxon/Mobil. También agradecemos las sugerencias de los árbitros de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and development in undergraduate mathematics education", en J. Kaput, E. Dubinsky y A. H. Schoenfeld (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*, Providence, American Mathematical Society, pp. 1-32.

Bagni, G. T. (2000), "Difficulties with series in history and in the classroom", en

J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 82-86.

Bagni, G. T. (2005), "Infinite series from history to mathematics education", *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [revista en línea], University of Plymouth, Reino Unido, leído el 30 de junio de 2005 en http://cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Baker, B., L. Cooley y M. Trigueros (2000), "The schema triad –a calculus example", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, pp. 557-578.

Brown, A., D. DeVries, E. Dubinsky y K. Thomas (1998), "Learning binary operations, groups, and subgroups", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 3, pp. 187-239.

Cooley, L., M. Trigueros y B. Baker (2007), "Schema thematization: a framework and an example", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 38, pp. 370-392.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, V. Prabhu y D. Vidakovic (1999), "One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research", en O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME* , vol. 1, Haifa, PME, pp. 95-110.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovic (2001), "Conceptions of area: in students and in history", *The College Mathematics Journal*, vol. 32, núm. 2, pp. 99-109.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, pp. 95-123.

——— (1994), "A theory and practice of learning college mathematics", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale, Erlbaum, pp. 221-243.

——— (1996), "Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria", *Educación Matemática*, vol. 3, núm 8, pp. 24-45.

Dubinsky, E., K. Weller, M. A. McDonald y A. Brown (2005), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis, Part 1", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 58, núm. 3, pp. 335-359.

Dubinsky, E. y O. Yiparaki (2000), "On student understanding of AE and EA quantification", en E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in collegiate mathematics education IV*, Providence, American Mathematical Society, pp. 239-289.

Fishbein, E., D. Tirosh y U. Melamed (1981), "Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 491-512.

Gray, E. M. y D. O. Tall (1987), "Duality, flexibility, and ambiguity: a proceptual view of elementary arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 2, pp. 116-140.

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol. 2, Nueva York, Oxford University Press.

Mamona, J. C. (1990), "Sequences and series-sequences and functions: students' confusions", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 21, pp. 333-337.

Martínez-Planell, R. y M. Trigueros (2009), "Students' ideas on functions of two variables: domain, range, and representations", en S. L. Swars, D. W. Stinson y S. Lemons-Smith (eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 5, Atlanta, Georgia State University, pp. 73-80.

McDonald, M. A., D. Mathews y K. Strobel (2000), "Understanding sequences: a tale of two objects", en E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, Providence, American Mathematical Society, pp. 77-102.

Piaget, J. y R. García (1983), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.

Przenioslo, M. (2006), "Conceptions of a sequence formed in secondary school", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 37, núm. 7, pp. 805-823.

Sierpińska, A. (1987), "Humanities students and epistemological obstacles related to limits", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 4, pp. 371-397.

Smith, D. E. (1958), *History of Mathematics*, vol. 2, Nueva York, Dover Publications.

Stewart, J. (2001), *Calculus: Concepts and Contexts*, 2a. ed., Pacific Grove, Brooks/Cole.

Tall, D. O. (1992), "The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, McMillan, pp. 495-511.

Trigueros, M. (2000), "Students' conception of solution curves and equilibrium in systems of differential equations", en M. L. Fernandez (ed.), *Proceedings of* *the XXII Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, ERIC, pp. 93-97.

——— (2005), "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp. 5-31.

Trigueros, M. y R. Martínez-Planell (2010), "Geometrical representations in the learning of two variable functions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 73, núm. 1, pp. 3-19.

DATOS DE LOS AUTORES

Rafael Martínez-Planell
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
rafael.martinez13@upr.edu
Ana Carmen González
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
anacarmen.gonzalez@upr.edu
Gladys Di Cristina Yumet
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
gladys.dicristina@upr.edu
Vanessa Acevedo
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
tatacevedo@yahoo.com

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada y con Comité multinacional, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y hallazgos que puedan ejercer influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación original rigurosos. EDUCACIÓN MATEMÁTICA se reserva también un espacio para ensayos teóricos sobre temas relevantes relacionados con la educación matemática, así como propuestas y experiencias de enseñanza, o discusiones sobre materiales y programas educativos, siempre y cuando las colaboraciones de este tipo estén conceptualmente fundamentadas y realizadas con rigor.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, estudiantes de posgrado, maestros en formación y en ejercicio, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
    - 1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    - 1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    - 1.3. Saber matemático
        - 1.3.1. Aritmética
        - 13.2. Geometría
        - 1.3.3. Probabilidad y estadística
        - 13.4. Preálgebra y álgebra
        - 1.3.5. Trigonometría y otros temas vinculados al currículo de la educación básica o afines a ésta.
    - 1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    - 1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    - 1.6. Uso de la tecnología
    - 1.7. Interacciones en el aula
    - 1.8. Evaluación
    - 1.9. Enseñanza experimental
    - 1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
    - 2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    - 2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    - 2.3. Saber matemático
        - 2.3.1. Álgebra
        - 2.3.2. Geometría
        - 2.3.3. Probabilidad y estadística
        - 2.3.4. Cálculo y otros temas vinculados al currículo de la educación preuniversitaria o afines a ésta.
        - 2.3.5. Razonamiento matemático
    - 2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    - 2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular

- 2.6. Uso de la tecnología
- 2.7. Interacción en el aula
- 2.8. Evaluación
- 2.9. Enseñanza experimental

3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
   - 3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   - 3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   - 3.3. Saber matemático
     - 3.3.1. Álgebra lineal
     - 3.3.2. Geometría
     - 3.3.3. Probabilidad y estadística
     - 3.3.4. Cálculo de una o varias variables
     - 3.3.5. Análisis
     - 3.3.6. Ecuaciones diferenciales
     - 3.3.7. Variable compleja, y otros temas vinculados al currículo de nivel universitario afines a éste
   - 3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   - 3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   - 3.6. Uso de la tecnología
   - 3.7. Interacciones en el aula
   - 3.8. Diagnósticos y evaluación
   - 3.9. Enseñanza experimental
4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
   - 4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
   - 4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
   - 4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
   - 5.1. Políticas
   - 5.2. Instituciones
   - 5.3. Asociaciones
   - 5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
   - 6.1. Teorías y marcos referenciales
   - 6.2. Métodos de investigación
   - 6.3. Validación
   - 6.4. Instituciones y organizaciones
   - 6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos o ensayos que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

GUÍA PARA AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica, en español, artículos de investigación, ensayos y otras contribuciones vinculadas a la enseñanza de las matemáticas que sean inéditas.
- Todos los escritos que se reciben son arbitrados. El Comité Editorial se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El contenido del artículo es responsabilidad del autor.
- El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título cuando lo considere conveniente, previa consulta al autor.
- El Comité Editorial y Editorial Santillana tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual al autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* como la que se podrá encontrar en la página www.santillana.com.mx/educacionmatematica.

PREPARACIÓN DEL ESCRITO

El escrito:

- Deberá estar preparado electrónicamente, en Microsoft Word o algún otro procesador compatible.
- Debe tener un máximo de 30 cuartillas (10 000 palabras), incluidas notas, referencias bibliográficas, cuadros, gráficas y figuras, así como un resumen de entre 100 y 150 palabras y cuando menos 5 palabras clave. Deberá incluirse también el título, un resumen y las palabras clave en inglés. El resumen debe incluir información referente al objetivo, enfoque y metodología de trabajo, así como los principales resultados y conclusiones. Debe ser completo en sí mismo.
- En archivo aparte, deberá prepararse una *carátula* que contenga: *a)* título y tema central del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publica-

ción (debe mencionarse explícitamente si el material ha sido presentado previamente –en versión sintética– en congresos; *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, fax y domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.

- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo de texto.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean familiares a un lector internacional.

Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, pp. 51-53).

Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo:

Ávila, A. y G. Waldegg (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos,* México, INEA.

Block, D. y Martha Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela", *Educación Matemática,* vol. 5, núm. 3, pp. 39-58.

Kaput, J. (1991), "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes", en Von Glaserfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education,* Dordretch, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

Si la lengua materna del autor no es el español, el artículo deberá ser revisado por un experto en redacción y ortografía españolas antes de ser enviado a la revista.

ENVÍO DEL ESCRITO

- Someter la contribución en el sitio http://www.santillanadigital.com.mx/ojs/index.php/em/index y a la dirección electrónica revedumat@yahoo.com.mx
- Seleccionar la sección Registro
- Completar el Perfil
- Al final del formato, seleccionar la casilla Registrarse como Autor/a: Puede enviar artículos a la revista.
- Continuar con el envío de archivos

PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Esta revisión interna tarda aproximadamente un mes, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de dos o tres expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión tarda aproximadamente tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores con nuevo arbitraje, o rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de tres meses. Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx/educacionmatematica

ENSAYOS

Además, EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica ensayos. Éstos pueden consistir en una revisión original, crítica y fundamentada de una problemática relevante para la investigación en el campo. La problemática puede ser de tipo teórico, metodológico o de otra índole. En los ensayos también se pueden desarrollar –fundamentadamente– opiniones respecto a asuntos importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como la orientación pedagógica de un currículo nacional y la instrumentación de estrategias particulares de mejora educativa. Los ensayos deberán ser preparados siguiendo los mismos lineamientos de presentación que los artículos.

NOTAS DE CLASE

Educación Matemática considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, reflexiones sobre programas o materiales educativos y, en general, cualquier producto de la experiencia docente que se considere valioso compartir con los colegas, siempre y cuando estén conceptualmente fundamentados y se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word con los mismos lineamientos de presentación que los artículos y ensayos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las cinco cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2 000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, institución de adscripción, y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

Árbitros, volumen 23

- *Luis Manuel Aguayo,* Secretaría de Educación y Cultura de Zacatecas, México
- *Hugo Alvarado Martínez,* Universidad Católica de Santiago de Chile, Chile
- *Modesto Arrieta,* Universidad del País Vasco, España
- *David Block Sevilla,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alicia Bruno,* Universidad de La Laguna, España
- *Abel Camacho Galván,* Universidad Nacional Autónoma de México, México
- *Patricia Camarena Gallardo,* Instituto Politécnico Nacional, México
- *Irene Cazorla,* Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil
- *José Luis Cortina,* Universidad Pedagógica Nacional, México
- *Magister Osmar Darío Vera,* Universidad de Granada, España
- *Enrique Delatorre,* Universidad de La Coruña, España
- *Darío Fiorentini,* UNICAMP, Brasil
- *Rosa del Carmen Flores,* Universidad Nacional Autónoma de México, México
- *Mercedes García Blanco,* Universidad de Sevilla, España
- *Silvia García Peña,* Profesional Independiente, México
- *José Cruz García Zagal,* Universidad Nacional Autónoma de México, México
- *María de Lourdes Guerrero Magaña,* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
- *Gregoria Guillén,* Universidad de Valencia, España
- *Ángel Gutiérrez,* Universidad de Valencia, España
- *José Guzmán Hernández,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Fernando Hitt,* Université du Québec à Montréal, Canadá
- *Santiago Inzunza Cázares,* Universidad Autónoma de Sinaloa, México
- *Víctor Larios Osorio,* Universidad Autónoma de Querétaro, México
- *María Dolores Lozano,* Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
- *Mar Moreno,* Universitat de Lleida, España
- *Eusebio Olivo,* Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, México
- *Rosa Elvira Páez Murillo,* Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México
- *María del Carmen Penalva,* Universidad de Alicante, España
- *Sandra Elisa Pérez Quezada,* Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
- *Jesús Enrique Pinto Sosa,* Universidad Autónoma de Yucatán, México
- *Francois Pluvinage,* Université de Strasbourg, Francia
- *Ricardo Quintero Zazueta,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Marisa Reid,* Universidad Nacional De La Pampa, Argentina
- *Nuria Rosich,* Universidad de Barcelona, España
- *Guadalupe Ruiz Cuéllar,* Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
- *Ernesto Alonso Sánchez,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Victoria Sánchez,* Universidad de Sevilla, España
- *Ivonne Sandoval,* Universidad Pedagógica Nacional, México
- *Manuel L. Santos Trigo,* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Guillermo Sierra,* Universidad Nacional Autónoma de México, México
- *Germán Torregrosa-Gironés,* Universidad de Alicante, España
- *Carlos Torres Sorando,* Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Julia Valls,* Universidad de Alicante, España

Precio del ejemplar en la República Mexicana: $100 más gastos de envío

ISSN: 0187-8298