



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

MATERIAL DIDÁCTICO

FUNCIONES ESPECIALES Y TRANSFORMADAS INTEGRALES CON APLICACIONES A LA MECÁNICA CUÁNTICA Y ELECTRODINÁMICA

AUTOR:

Dr. Juan Manuel Romero Sanpedro

**Departamento de Matemáticas
Aplicadas y Sistemas**

IBSN: 978-607-28-0038-0

Octubre 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
APLICADAS Y SISTEMAS



Casa abierta al tiempo

FUNCIONES ESPECIALES Y TRANSFORMADAS
INTEGRALES
CON APLICACIONES A LA MECÁNICA CUÁNTICA Y
ELECTRODINÁMICA

JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO
jromero@correo.cua.uam.mx

Índice general

0.1. Introducción	9
1. La Convención de Suma de Einstein, el Tensor de Levi-Civita y las Ecuaciones de Maxwell	11
1.1. Introducción	11
1.2. Producto escalar y la delta de Kronecker	13
1.3. Producto vectorial y el tensor de Levi-Civita	16
1.4. El tensor de Levi-Civita y las matrices	19
1.4.1. El tensor de Levi-Civita y las matrices antisimétricas	20
1.4.2. El tensor de Levi-Civita y las matrices simétricas	20
1.4.3. Conservación de carga	22
1.5. Triple producto escalar	22
1.6. Aplicaciones del triple producto escalar	23
1.6.1. Energía cinética	24
1.6.2. Conservación de la energía	24
1.7. Contracción de dos tensores de Levi-Civita	25
1.8. Triple producto vectorial I	27
1.9. Conservación del momento	28
1.9.1. Conservación del momento angular	31
1.10. Triple producto vectorial II	32
1.10.1. Ecuación de onda	33
1.11. Libertad de norma	33
1.12. Representación compleja de las ecuaciones de Maxwell	36
1.13. Otros resultados de cálculo vectorial	38
2. Operadores en Coordenadas Curvilíneas	40
2.1. Interpretación geométrica de operaciones vectoriales	40
2.2. Operadores en coordenadas cartesianas	42
2.2.1. Coordenadas esféricas	44
2.2.2. Coordenadas cilíndricas	45
2.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales	47

2.3.1.	Gradiente en coordenadas curvilíneas	48
2.3.2.	Divergencia en coordenadas curvilíneas	49
2.3.3.	Laplaciano en coordenadas curvilíneas	50
2.3.4.	Rotacional en coordenadas curvilíneas	51
2.4.	Operador momento angular	53
3.	El Factorial y la Función Gamma	57
3.1.	Función Gamma	57
4.	Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	62
4.1.	Teorema de existencia y unicidad	62
4.2.	El Wronskiano	62
4.3.	Independencia lineal	63
4.4.	Los ceros de las soluciones	64
4.4.1.	Forma normal	65
4.5.	Teorema de comparación de Sturm	68
4.6.	Problema de Sturm-Liouville	70
5.	Funciones de Bessel	73
5.1.	Ecuación de Bessel	73
5.2.	Función generatriz	77
5.3.	Relaciones de recurrencia	79
5.4.	Funciones de Bessel de orden $(n + \frac{1}{2})$	82
5.5.	Ortonormalidad	84
5.6.	La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas	87
5.6.1.	Ejemplo	89
5.7.	Ecuaciones tipo Bessel	92
5.7.1.	Partícula cuántica en una fuerza constante	94
5.8.	Mecánica cuántica conforme	94
5.9.	Ecuación de Fick-Jacobs	95
6.	Elementos de Álgebra Lineal	98
6.1.	Espacios vectoriales	98
6.2.	Ejemplos	99
6.2.1.	\mathbf{C}^n	99
6.2.2.	Sucesiones	99
6.2.3.	Matrices	100
6.2.4.	Funciones	100
6.3.	Producto escalar	101
6.4.	Ejemplos de producto escalar	102
6.4.1.	Producto escalar en \mathbf{C}^n	102

6.4.2.	Sucesiones	103
6.4.3.	Matrices	103
6.4.4.	Funciones	104
6.5.	Ortonormalidad e independencia lineal	105
6.6.	Teorema de Pitágoras	106
6.6.1.	Desigualdad de Bessel	108
6.6.2.	Desigualdad de Schwarz	108
6.6.3.	Desigualdad del triángulo	108
6.7.	Espacios normados	109
6.7.1.	Espacios métricos	110
6.8.	Ejemplos de bases ortonormales	111
6.8.1.	Exponencial compleja	111
6.8.2.	Ecuaciones tipo Sturm-Liouville	111
6.8.3.	Ecuación de Schrödinger en una dimension	113
6.8.4.	Ecuación de Schrödinger en tres dimensiones	113
6.8.5.	Armónicos esféricos	115
6.9.	Polinomios trigonométricos	117
6.10.	Espacios completos	119
6.11.	Operadores lineales	120
6.12.	Operador adjunto	122
6.12.1.	Matrices	123
6.12.2.	Derivada	123
6.12.3.	Derivada con peso	124
6.12.4.	Propiedades del operador adjunto	125
6.13.	Operadores Hermíticos	125
6.13.1.	Ejemplos de matrices Hermíticas	126
6.13.2.	Ejemplos de operadores Hermíticos	126
6.14.	Conmutador	127
6.14.1.	Propiedades de los conmutadores	129
6.14.2.	Ejercicio	130
6.15.	Conmutadores y la derivada	132
6.16.	Vectores propios	134
6.16.1.	Espectro de operadores Hermíticos	134
6.16.2.	Operadores que conmutan	135
7.	Prueba de Feynman de las Ecuaciones de Maxwell	136
7.1.	Fuerza de Lorentz	136
7.2.	Inexistencia de monopolos magnéticos	138
7.3.	Ley de Faraday	138

8. Series de Fourier	140
8.1. Funciones trigonométricas	140
8.2. Relaciones de ortonormalidad	142
8.2.1. Series de Fourier	143
8.3. Ejemplos	144
8.3.1. Caso $f(x) = x$	144
8.3.2. Caso $f(x) = x^2$	145
8.3.3. Caso $f(x) = \cos(\mu x)$	146
8.3.4. Función $f(x) = e^x$	148
8.4. Serie tipo coseno	149
8.5. Serie tipo seno	151
8.6. Intervalo arbitrario	152
8.6.1. Delta de Dirac	153
8.7. Serie coseno en el intervalo $[0, L]$	154
8.7.1. Delta de Dirac	155
8.8. Serie seno en el intervalo $[0, L]$	155
8.8.1. Delta de Dirac	156
8.9. Representación compleja	157
8.9.1. Delta de Dirac	157
8.10. Ecuación de Laplace en dos dimensiones	158
8.10.1. Ejemplo	159
8.11. Ecuación de Poisson en dos dimensiones con coordenadas polares	163
8.11.1. Fórmula de Poisson en dos dimensiones	165
8.11.2. Cilindro infinito	168
8.12. Ecuación de Schrödinger en una dimensión	170
8.12.1. Pozo infinito	171
8.13. Ecuación de Onda	172
8.13.1. Cuerda con extremos fijos	173
8.13.2. Condiciones iniciales	173
8.13.3. Energía	174
9. El Oscilador Armónico y los Polinomios de Hermite	176
9.1. Hamiltoniano	176
9.1.1. Ortonormalidad	177
9.2. Operadores de acenso y descenso	178
9.3. Estado base y ortonormalidad	182
9.4. Polinomios de Hermite	185
9.5. Función generadora	188
9.5.1. Ecuación de Hermite	191
9.6. Método tradicional	192

9.7.	Oscilador en campo eléctrico constante	195
9.8.	Suma de osciladores y el oscilador en D dimensiones	196
9.8.1.	Cadena de osciladores	198
9.8.2.	Oscilador en D dimensiones	200
9.9.	Niveles de Landau, partícula en un campo magnético constante	200
9.10.	Ecuación de Fokker-Planck, caso libre y homogéneo	203
10.	El Grupo de Rotaciones y los Armónicos Esféricos	206
10.1.	Transformaciones de coordenadas lineales	206
10.2.	Laplaciano y elemento de línea	208
10.3.	Grupo de transformaciones	210
10.4.	El grupo de rotaciones	211
10.4.1.	Transformaciones infinitesimales	215
10.5.	Armónicos esféricos	220
10.6.	Reglas de conmutación del momento angular	222
10.7.	Ecuación de valores propios de L^2	223
10.8.	Relaciones de ortonormalidad	224
10.9.	Operadores escalera y espectro de L^2	226
10.10.	Resultados preliminares	230
10.10.1.	Constante α y reglas de recurrencia	230
10.10.2.	Relaciones de recurrencia de L_{\pm}	231
10.11.	El armónico esférico $Y_l(\theta, \varphi)$	233
10.12.	Forma explícita de los armónicos esféricos	235
10.13.	Polinomios de Legendre y polinomios asociados de Legendre	236
10.14.	Propiedades de los polinomios de Legendre	239
10.14.1.	Función generadora	241
10.14.2.	Relaciones de recurrencia	243
10.15.	Relación de completez de los armónicos esféricos	246
10.16.	Teorema de adición de los armónicos esféricos	247
10.16.1.	Implicaciones del teorema de adición	252
10.17.	L^2 y el Laplaciano	253
10.18.	Paridad	254
11.	Ecuación de Laplace en Coordenadas esféricas	256
11.1.	Solución general	256
11.1.1.	Problema de la esfera	258
11.1.2.	Fórmula de Poisson	259
11.1.3.	Esfera partida	262
11.2.	Esfera a potencial cero	264
11.2.1.	Plano con protuberancia esférica	264

11.3. Problemas con simetría azimutal	266
11.3.1. Esfera con condiciones especiales	266
11.3.2. Potencial de un anillo circular	267
11.3.3. Esfera con hueco	269
11.4. Disco a potencial constante	270
11.5. Distribución de carga continua	273
11.5.1. Esfera cargada	275
11.6. Problemas en magnetismo	276
11.6.1. Esfera rotante	276
11.6.2. Anillo de corriente I	279
11.6.3. Anillo de corriente II	282
12. Los Polinomio de Laguerre y el átomo de hidrógeno	287
12.1. Átomo de hidrógeno	287
12.2. Función de onda	296
13. Ecuación de Helmholtz	298
13.1. El origen de la ecuación Helmholtz	298
13.2. Ecuación de Helmholtz en dos dimensiones	299
13.3. Ecuación de Helmholtz en tres dimensiones	301
13.4. Aplicaciones	303
13.5. Desarrollo en ondas parciales	304
14. Transformada de Fourier	308
14.1. Definición de transformada de Fourier	308
14.2. Ejemplos	308
14.2.1. Función Gaussiana	309
14.2.2. Función $e^{-\alpha x }$	309
14.3. Teorema de la convolución	310
14.4. Transformada inversa de Fourier	310
14.5. Ejemplos de la transformada inversa de Fourier	313
14.6. Transformada de Fourier de la derivada	314
14.7. Ecuación de calor y ecuación de Schrödinger libre	314
14.7.1. Ecuación de Schrödinger libre	315
14.8. Ecuación ordinaria de segundo orden	316
14.8.1. Ecuación de Laplace en dos dimensiones	317
14.9. Ecuación de Black-Scholes	318
14.10 Delta de Dirac	321
14.10.1. La función de Heaviside	324
14.11 Norma de una función	324
14.12 Transformada de Fourier en d dimensiones	325

14.13	Función de Green	325
14.13.1.	Función de Green y funciones propias	326
14.14	Ecuación de Laplace en dos dimensiones	327
14.15	Resultados de variable compleja	329
14.16	Ecuación de Poisson	329
14.17	Función de Green de la ecuación Helmholtz	333
14.17.1.	Ecuación de Lippman-Schwinger	334
14.18	Función de Green de la ecuación de onda	335

0.1. Introducción

Decía Galileo que los secretos de la naturaleza están escritos en el lenguaje de las matemáticas. I. Newton también se dio cuenta de este hecho e inventó el cálculo infinitesimal para entender el movimiento de los planetas. Al ser estudiados los fenómenos eléctricos y magnéticos surgieron nuevas matemáticas. Ahora esta parte de la naturaleza se expresó en términos de campos vectoriales y ecuaciones diferenciales parciales, las cuales se resumen en las ecuaciones de Maxwell. Al resolver las ecuaciones de Maxwell surgieron funciones con características especiales, por ello se les llama funciones especiales. Para la electrodinámica, dentro de esas funciones especiales, de notable importancia son las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, así como las llamadas series de Fourier. Las cantidades importantes de la electrodinámica se expresan en términos de estas funciones. Después de mucho esfuerzo los matemáticos se dieron cuenta que estas funciones forman espacios vectoriales con dimensión infinita, lo que hoy se conoce como espacios de Hilbert. Textos clásicos sobre electrodinámica se pueden ver en [1, 2] y referencias sobre espacios de Hilbert se pueden ver en [3, 4].

Por otra parte, en un inicio nadie entendía los fenómenos cuánticos y como expresarlos matemáticamente. Sin embargo, al proponer Schrödinger su ecuación de onda las cosas se entendieron un poco más. Sorprendentemente al resolver la ecuación de Schrödinger surgieron funciones especiales, como los polinomios de Hermite y los polinomios de Laguerre. Así, los matemáticos de la época se dieron cuenta que estaban frente a una nueva aplicación de los espacios de Hilbert. Dos excelentes referencias sobre mecánica cuántica se pueden ver [5, 6]. Además, se encontró que una generalización de las series Fourier, la transformada de Fourier, es de vital importancia para entender diversos fenómenos cuánticos. La transformada de Fourier es un caso particular de las transformadas integrales, un texto sobre este tema se puede ver en [7].

Cabe señalar que en un inicio las ecuaciones diferenciales que surgían en la electrodinámica y en la mecánica cuántica se resolvían mediante series de potencial, ese es el método tradicional [8, 9, 10]. Sin embargo, el matemático francés Jean Gaston Darboux se dio cuenta que muchas de esas ecuaciones se pueden resolver con lo que hoy se llama el método de Factorización. Al ser aplicado este método en mecánica cuántica mostró su gran potencia. Referencias sobre este último método se pueden ver en [11, 12]. Otra aportación importante fue dada por el matemático francés Sophus Lie, quien mostró que la teoría de grupos es de gran ayuda para encontrar soluciones de las ecuacio-

nes diferenciales. Posteriormente, Pauli mostró que usando teoría de grupos podía obtener los estados cuánticos de varios sistemas físicos. Así, pocos se sorprendieron cuando se encontró una relación entre algunos grupos, como el grupo de rotaciones, y algunas funciones especiales, como los polinomios de Legendre. Con el tiempo la teoría de grupos se convirtió en una herramienta fundamental en varias áreas de la física teórica. Textos sobre aplicaciones de la teoría de grupos a las ecuaciones diferenciales se pueden ver [13, 14].

Notablemente, recientemente se ha encontrado que herramientas de la mecánica cuántica se pueden aplicar para abordar problemas de otras disciplinas. Por ejemplo, en estudios de las Finanzas [15] .

En este libro, se busca introducir al estudiante en las funciones especiales y las transformadas integrales junto con sus aplicaciones en la electrodinámica y en la mecánica cuántica. El objetivo principal de este texto es dar al estudiante las herramientas básicas para que aborde sin dificultad problemas avanzados a nivel licenciatura. Para que el lector tenga una visión de los objetos matemáticos que se estudian, se da una introducción a los espacios de Hilbert. En el libro se usan tres diferentes métodos para obtener las funciones especiales. Se usan la series de potencia para obtener las funciones de Bessel. Se usa el método de factorización para obtener los polinomios de Hermite y se usa el grupo de rotaciones para obtener los polinomios de Legendre y los armónicos esféricos.

A lo largo del texto, se realizan varios ejercicios para mostrar como se usan las funciones especiales. Así, se encuentran soluciones a ecuaciones como la ecuación de Laplace, de onda, de Helmholtz, de calor, de Schrödinger. En particular se obtienen los estados para el oscilador armónico y del átomo de Hidrógeno. También se obtienen las funciones de Green de la ecuación de Laplace, de la ecuación de Helmholtz y la ecuación de onda.

El material de este texto ha sido utilizado en cursos para estudiantes de las carreras de Física y Matemáticas de la UNAM y de Matemáticas Aplicadas de la UAM-Cuajimalpa. Normalmente los físicos se muestran más interesados en los aspectos formales, mientras que los matemáticos se interesan más en las aplicaciones. Se trató de tener un punto de equilibrio para que las dos clases de estudiantes logren obtener fundamentos sólidos y al mismo tiempo sean capaces de abordar problemas sofisticados.

Capítulo 1

La Convención de Suma de Einstein, el Tensor de Levi-Civita y las Ecuaciones de Maxwell

*Le calcul tensoriel sait mieux la physique que le physicien lui-même
(El cálculo tensorial sabe más física que los mismos físicos)
Paul Langevin 1964.*

1.1. Introducción

En este capítulo veremos algunas herramientas matemáticas que facilitan la manipulación de operaciones vectoriales. Para ver la eficacia de estas herramientas las aplicaremos a las ecuaciones de Maxwell y a la fuerza de Lorentz. En particular, ocupando estas herramientas, obtendremos las cantidades conservadas que implican las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de carga y \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica. De forma genérica \vec{J} se puede escribir como $\vec{J} = \rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)$, con $\vec{v}(\vec{x}, t)$ la velocidad de las partículas cargadas en el punto \vec{x} al tiempo t .

La ley de Gauss Eq. (1.1) relaciona la densidad de carga eléctrica con el campo eléctrico. La ley de Faraday Eq. (1.2) nos dice que un campo magnético que varia en el tiempo produce un campo eléctrico. La ecuación Eq. (1.3) nos dice que no existen cargas magnéticas. La ley de Ampère Eq. (1.4) nos dice dos cosas, la primera es que la corriente eléctrica produce campo magnético y la segunda es que la variación temporal del campo eléctrico produce campo magnético. Como se puede ver todas estas ecuaciones son lineales.

Además, la fuerza de Lorentz nos dice que una partícula de masa m y carga q en un campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} siente la fuerza

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (1.5)$$

Esta fuerza se puede obtener de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo para interpretar los resultados que obtendremos la supondremos independiente.

Las ecuaciones de Maxwell Eqs. (1.1)-(1.4) también se pueden escribir de forma integral. Para ver esto, recordemos el teorema de Gauss y el teorema de Stokes. Supongamos que tenemos una región de volumen V cuya frontera es la superficie S . Entonces, el **Teorema de Gauss** nos dice que, si \vec{F} es un campo vectorial suave definido en V , se cumple

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} da, \quad (1.6)$$

aquí $d\vec{a}$ es el elemento de área de S y \hat{n} representa la normal exterior a esta superficie.

Ahora, supongamos que tenemos una superficie S cuya frontera está dada por la curva Γ . Entonces, el **Teorema de Stokes** nos dice que si \vec{F} es un campo regular sobre S , se cumple

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} da = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (1.7)$$

donde \vec{l} es el vector tangente a Γ y gira en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Así, ocupando el teorema de Gauss Eq. (1.6) y de Stokes Eq. (1.7), las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi Q_T, \quad (1.8)$$

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (1.9)$$

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \quad (1.10)$$

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_e}{dt}. \quad (1.11)$$

Donde

$$Q_T = \int_V \rho dv \quad (1.12)$$

es la carga total contenida en el volumen V . Mientras que

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da, \quad \Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da \quad (1.13)$$

son, respectivamente, el flujo magnético y eléctrico que pasa por la superficie S . Adicionalmente

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da \quad (1.14)$$

representa la corriente total que pasa por la superficie S .

1.2. Producto escalar y la delta de Kronecker

Recordemos que un vector tridimensional se define como

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A^1, A^2, A^3), \quad (1.15)$$

también lo podemos representar como A^i con $i = 1, 2, 3$, es decir, A^i es la componente i -ésima.

Una operación importante entre vectores es el producto escalar. Si tenemos los vectores \vec{A} y $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$, el producto escalar se define como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 = \sum_{i=1}^3 A^i B^i. \quad (1.16)$$

Por simplicidad es común escribir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B^i, \quad (1.17)$$

donde se entiende que los índices repetidos se suman, a esta regla se le llama convención de Einstein. Cuando dos índices están repetidos se dice que están *contraídos*. Por ejemplo, si

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3) \quad (1.18)$$

es el vector posición, entonces el cuadrado de la distancia es

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^i x^i = x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1.19)$$

Ahora, definamos la delta de Kronecker como el símbolo tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.20)$$

En realidad se está definiendo una matriz, la matriz identidad I , pues,

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (1.21)$$

Con la delta de Kronecker y la convención de Einstein se tiene

$$\delta_{1j} A_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{1j} A_j = A_1, \quad \delta_{2j} A_j = A_2, \quad \delta_{3j} A_j = A_3, \quad (1.22)$$

es decir

$$\delta_{ij} A_j = A_i. \quad (1.23)$$

Por lo que, el producto escalar se puede escribir como

$$A^i \delta_{ij} B^j = A^i B^i = \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (1.24)$$

Además, con la convención de Einstein el símbolo δ_{ii} significa

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3. \quad (1.25)$$

Un vector importante es el gradiente, el cual se define como

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (1.26)$$

Por simplicidad, en algunos casos solo escribiremos

$$\left(\vec{\nabla} \right)_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.27)$$

Veamos que significa

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \partial_i x^j, \quad (1.28)$$

para cada valor de i y j se tiene un valor de $\partial_i x^j$ por lo que se tiene la matriz

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}. \quad (1.29)$$

Ahora, considerando que $r = \sqrt{x^i x^i}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x^j} &= \frac{\partial \sqrt{x^i x^i}}{\partial x^j} = \frac{1}{2\sqrt{x^i x^i}} \frac{\partial (x^i x^i)}{\partial x^j} = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j} x^i + x^i \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2r} (\delta_{ij} x^i + x^i \delta_{ij}) = \frac{x_j}{r}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

De donde

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = \frac{x_j}{r}, \quad \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}. \quad (1.31)$$

Si $f(r)$ es una función que solo depende de r se tiene

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x^i} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{x_i}{r}, \quad \vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r}. \quad (1.32)$$

Veamos otro ejemplo, consideremos la función

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.33)$$

con \vec{P} un vector constante, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \left(\frac{\partial \vec{P} \cdot \vec{r}}{\partial x^i} \right) \frac{1}{r^3} + \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{r^3} \right) \\
&= \left(\frac{\partial P_j x_j}{\partial x^i} \right) \frac{1}{r^3} - 3 \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x^i} \\
&= \frac{P_j}{r^3} \frac{\partial x_j}{\partial x^i} - 3 \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{1}{r^4} \frac{x_i}{r} \\
&= \frac{P_j \delta_{ij}}{r^3} - 3 \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{x_i}{r^5} = \frac{P_i}{r^3} - 3 \vec{P} \cdot \vec{r} \frac{x_i}{r^5} \\
&= \frac{P_i r^2 - 3 \vec{P} \cdot \vec{r} x_i}{r^5},
\end{aligned}$$

de donde

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{P} r^2 - 3 (\vec{P} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}. \quad (1.34)$$

Note que con esta notación la divergencia de un vector \vec{E} se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E_i}{\partial x^i} = \frac{\partial E_i}{\partial x^i} = \partial_i E_i.
\end{aligned} \quad (1.35)$$

También se puede probar la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (fg\vec{A}) = g (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f (\vec{\nabla} g) \cdot \vec{A} + fg (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (1.36)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (fg\vec{A}) &= \partial_i (fgA_i) = (\partial_i f) g A_i + f (\partial_i g) A_i + fg (\partial_i A_i) \\
&= g (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f (\vec{\nabla} g) \cdot \vec{A} + fg (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).
\end{aligned} \quad (1.37)$$

1.3. Producto vectorial y el tensor de Levi-Civita

Otra operación importante entre vectores es el producto vectorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1.38)$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{k},$$

es decir

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 = (A_2B_3 - A_3B_2), \quad (1.39)$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 = (A_3B_1 - A_1B_3), \quad (1.40)$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_3 = (A_1B_2 - A_2B_1). \quad (1.41)$$

Note que en la componente $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1$ no está A_1 ni B_1 . De hecho, esto también ocurre para las demás componentes, es decir, en la componente $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i$ no está la componente A_i ni la componente B_i .

Anteriormente vimos que el producto escalar se puede escribir en términos de una matriz, veamos si con el producto vectorial ocurre lo mismo. Consideremos la matriz antisimétrica

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Con esta matriz, las igualdades Eqs. (1.39)-(1.41) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 &= \begin{pmatrix} A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{ab}A_aB_b, \quad a, b = 2, 3, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_2 &= \begin{pmatrix} A_3 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{cd}A_cB_d, \quad c, d = 3, 1, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_3 &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_{ef}A_eB_f, \quad e, f = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Note que la matriz Eq. (1.42) está en dos dimensiones, mientras que el espacio es tridimensional. Así es más conveniente ocupar una generalización de Eq. (1.42) en tres dimensiones, la cual denotaremos con

$$\epsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.46)$$

En principio, para reproducir el productor vectorial basta que ϵ_{ijk} sea antisimétrico en las dos últimas entradas. Sin embargo, como en $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i$ no

está A_i ni B_i , pediremos que ϵ_{ijk} sea antisimétrico también en las dos primeras entradas. Es decir, pediremos las propiedades

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}, \quad \epsilon_{123} = 1. \quad (1.47)$$

Note que esto implica que, para cualquier i y k , se cumpla

$$\epsilon_{iik} = -\epsilon_{iik} = 0, \quad (1.48)$$

de donde

$$\epsilon_{iki} = -\epsilon_{kii} = 0. \quad (1.49)$$

Es decir, las componentes de ϵ_{ijk} con dos índices repetidos tienen valor cero. Por lo tanto, las componentes de ϵ_{ijk} no nulas tienen todos los índices diferentes. Ocupando las propiedades de ϵ_{ijk} Eq. (1.47) se puede ver que

$$\epsilon_{123} = 1, \quad (1.50)$$

$$\epsilon_{132} = -\epsilon_{123} = -1, \quad (1.51)$$

$$\epsilon_{213} = -\epsilon_{123} = -1, \quad (1.52)$$

$$\epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = 1, \quad (1.53)$$

$$\epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = 1, \quad (1.54)$$

$$\epsilon_{321} = -\epsilon_{312} = -1. \quad (1.55)$$

Claramente, todos estos valores se obtienen de permutar los índices de ϵ_{123} . Al símbolo Eq. (1.46) se le llama **tensor de Levi-Civita**. Ahora veremos que este tensor es útil para expresar el producto vectorial. Definamos

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (1.56)$$

Veamos que esta igualdad es correcta, para la primera componente tenemos

$$\begin{aligned} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k = \sum_{k=1}^3 (\epsilon_{11k} A_1 B_k + \epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k) \\ &= \sum_{k=1}^3 (\epsilon_{12k} A_2 B_k + \epsilon_{13k} A_3 B_k) \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$= \epsilon_{121} A_2 B_1 + \epsilon_{122} A_2 B_2 + \epsilon_{123} A_2 B_3 \quad (1.58)$$

$$+ \epsilon_{131} A_3 B_1 + \epsilon_{132} A_3 B_2 + \epsilon_{133} A_3 B_3 \quad (1.59)$$

$$= \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \quad (1.60)$$

$$= A_2 B_3 - A_3 B_2. \quad (1.61)$$

Este cálculo es más fácil si se ocupan las propiedades de ϵ_{ijk} . En efecto, si se tiene ϵ_{1jk} , los únicos valores que puede tomar j son 2 ó 3 y k solo puede tomar los valores 3 ó 2. Por lo que,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \\ &= A_2 B_3 - A_3 B_2. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Para las demás componentes tenemos

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_2 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{2jk} A_j B_k = \epsilon_{213} A_1 B_3 + \epsilon_{231} A_3 B_1 \\ &= A_3 B_1 - A_1 B_3, \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_3 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{3jk} A_j B_k = \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{321} A_2 B_1 \\ &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Como podemos ver, la definición de producto vectorial Eq. (1.56) coincide con Eq. (1.38).

Con el símbolo ϵ_{ijk} es más económico escribir un producto vectorial. Por ejemplo el momento angular se puede escribir como

$$L_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k. \quad (1.65)$$

Mientras que el rotacional se puede escribir como

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (1.66)$$

Además el momento angular cuántico, $\vec{L} = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla})$, se escribe

$$L_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} r_j \partial_k. \quad (1.67)$$

El tensor de Levi-Civita no es solo otra forma de expresar el producto vectorial, también es útil para simplificar los cálculos.

1.4. El tensor de Levi-Civita y las matrices

Vimos que con el tensor de Levi-Civita se puede expresar el producto vectorial de forma sencilla. Este tensor también se puede relacionar con las matrices. Se tienen resultados particularmente interesantes con matrices antisimétricas y simétricas.

1.4.1. El tensor de Levi-Civita y las matrices antisimétricas

Cualquier matriz antisimétrica de 3×3 se puede escribir como

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Con las componentes no nulas de esta matriz se puede formar el vector $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$. Note que si hacemos la contracción de ϵ_{ijk} con B_i se tiene $\epsilon_{ijk}B_k$ que es un objeto con dos índices libres, es decir es una matriz. Considerando las propiedades Eq. (1.47) se tiene

$$\epsilon_{ijk}B_k = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{123}B_3 & \epsilon_{132}B_2 \\ \epsilon_{213}B_3 & 0 & \epsilon_{231}B_1 \\ \epsilon_{312}B_2 & \epsilon_{321}B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = M_{ij}.$$

Por lo tanto, cualquier matriz antisimétrica M de 3×3 se puede poner en término del tensor de Levi-Civita y un vector B :

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k. \quad (1.69)$$

1.4.2. El tensor de Levi-Civita y las matrices simétricas

Hasta aquí hemos ocupado ϵ_{ijk} con vectores. Pero también lo podemos emplear con matrices de 3×3 . En efecto, dada la matriz M_{ij} podemos definir

$$V_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}M_{jk} = \epsilon_{ijk}M_{jk}. \quad (1.70)$$

Para evitar confusiones notemos que la contracción de los índices de ϵ_{ijk} se puede escribir de diferentes forma. Por ejemplo,

$$V_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}M_{jk} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ikj}M_{kj}. \quad (1.71)$$

Esta igualdad no se obtiene por un intercambio de índices en ϵ_{ijk} . Se obtiene por renombrar al mismo tiempo los dos últimos índices de ϵ_{rst} y los dos índices de M_{ab} . Con la convención de Einstein esta igualdad se escribe como

$$V_i = \epsilon_{ijk}M_{jk} = \epsilon_{ikj}M_{kj}. \quad (1.72)$$

Un resultado de este hecho trivial es que si M_{ij} es una matriz simétrica entonces la contracción con ϵ_{ijk} es cero, es decir,

$$M_{ij} = M_{ji} \quad \implies \quad \epsilon_{ijk}M_{jk} = 0. \quad (1.73)$$

Esto se debe a que

$$\epsilon_{ijk}M_{jk} = -\epsilon_{ikj}M_{jk} = -\epsilon_{ikj}M_{kj} = -\epsilon_{ijk}M_{jk}. \quad (1.74)$$

En la primera igualdad, se empleo que ϵ_{ijk} es antisimétrico, en la segunda que M_{jk} es simétrica, en la tercera la igualdad Eq. (1.72). Por lo tanto, $\epsilon_{ijk}M_{jk} = -\epsilon_{ijk}M_{jk}$ y se cumple Eq. (1.73).

Por ejemplo, con cualquier vector A_i se puede forma la matriz $M_{ij} = A_iA_j$. Esta matriz es simétrica, pues

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} A_1A_1 & A_1A_2 & A_1A_3 \\ A_2A_1 & A_2A_2 & A_2A_3 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & A_3A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_1 & A_2A_1 & A_3A_1 \\ A_1A_2 & A_2A_2 & A_3A_2 \\ A_1A_3 & A_2A_3 & A_3A_3 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Esto implica que

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0. \quad (1.76)$$

En efecto, ocupando la definición de producto vectorial y que la matriz

$$M_{ij} = A_iA_j$$

es simétrica se cumple

$$0 = \epsilon_{ijk}A_jA_k = (\vec{A} \times \vec{A})_i. \quad (1.77)$$

Otra matriz simétrica está dada por $M_{ij} = \partial_i\partial_j$. Esto implica que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi) = 0. \quad (1.78)$$

Pues,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{\nabla}\phi)_k = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\phi = 0. \quad (1.79)$$

También se puede mostrar la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (1.80)$$

En efecto, como $M_{ij} = \partial_i\partial_j$ es simétrica se llega a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \partial_i(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_jA_k) = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k \\ &= \epsilon_{kij}\partial_i\partial_jA_k = 0. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Esta identidad tiene implicaciones en las ecuaciones de Maxwell.

1.4.3. Conservación de carga

Un hecho experimental bien conocido es que la carga eléctrica se conserva. Veamos si las ecuaciones de Maxwell son compatibles con este resultado. Para esto ocuparemos la ley de Gauss Eq. (1.1) y la ley de Ampère Eq. (1.4). De la ley de Gauss obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.82)$$

y ocupando la ley de Ampère se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{J}). \quad (1.83)$$

Ahora, considerando Eq. (1.80) tenemos que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, de donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.84)$$

que es la llamada ecuación de continuidad. Integrando sobre un volumen V la expresión Eq. (1.84) y ocupando el teorema de Gauss Eq. (1.6) se encuentra

$$\frac{dQ_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int dV \rho \right) = \int dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\partial V} da \vec{J} \cdot \hat{n}. \quad (1.85)$$

Si el volumen de integración es suficientemente grande, de tal forma que en su frontera no haya corriente, el último término de Eq. (1.85) es cero y se obtiene

$$\frac{dQ_T}{dt} = 0, \quad (1.86)$$

es decir, la carga total se conserva en el tiempo.

1.5. Triple producto escalar

Algunas identidades vectoriales son fáciles de demostrar con la convención de Einstein y el símbolo de Levi-Civita. Por ejemplo el triple producto escalar

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}), \quad (1.87)$$

que se demuestra simplemente de la forma

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = C_k (\epsilon_{kij} A_i B_j) \\
&= C_k (\vec{A} \times \vec{B})_k = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \\
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = -B_j \epsilon_{jik} A_i C_k \\
&= B_j \epsilon_{jki} C_k A_i = B_j (\vec{C} \times \vec{A})_j = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}). \quad (1.88)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple Eq. (1.87). Note que ocupando la regla del triple producto escalar y la igualdad $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, se encuentra

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{A}) = 0. \quad (1.89)$$

Si en lugar del vector constante \vec{C} se tiene el operador $\vec{\nabla}$, la identidad del triple producto escalar ya no es válida. En este caso se cumple la identidad

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}. \quad (1.90)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i B_i = (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) B_i = \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k) B_i \\
&= \epsilon_{ijk} [\partial_j (A_k B_i) - A_k \partial_j B_i] = \partial_j (\epsilon_{jki} A_k B_i) + (\epsilon_{kji} \partial_j B_i) A_k \\
&= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}. \quad (1.91)
\end{aligned}$$

Otra identidad que se puede mostrar ocupando sólo las propiedades del tensor de Levi-Civita es

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.92)$$

Pues

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) = \epsilon_{ijk} (\partial_j \phi) A_k + \phi \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\
&= (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A})_i + (\phi \vec{\nabla} \times \vec{A})_i. \quad (1.93)
\end{aligned}$$

En la próxima sección veremos implicaciones de estas propiedades vectoriales.

1.6. Aplicaciones del triple producto escalar

Las identidades de la sección anterior tienen consecuencias importantes para las ecuaciones de Maxwell, veamos cuales son.

1.6.1. Energía cinética

Ocupando Eq. (1.89) en la fuerza de Lorentz se encuentra

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \left(q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (1.94)$$

este resultado nos indica que el campo magnético no hace trabajo.

Ahora, recordemos que la derivada temporal de la energía cinética es

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.95)$$

Para el caso particular de la fuerza de Lorentz se tiene

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (1.96)$$

Además, suponiendo que no tenemos una carga si no una distribución de cargas ρ en un volumen V , como $dq = \rho d^3x$,

$$dq\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v})d^3x = \vec{E} \cdot \vec{J}d^3x. \quad (1.97)$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}d^3x. \quad (1.98)$$

Para este razonamiento solo hemos ocupado la fuerza de Lorentz. Posteriormente veremos lo que dicen las ecuaciones de Maxwell respecto a la energía.

1.6.2. Conservación de la energía

Veamos que implicaciones tiene Eq. (1.91) en las ecuaciones de Maxwell.

Para esto consideremos la ley de Faraday Eq. (1.2) y de Ampère Eq. (1.4). Haciendo el producto escalar de \vec{B} con la ley de Faraday encontramos que

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}. \quad (1.99)$$

Si hacemos el producto escalar de \vec{E} con la ley de Ampère se llega a

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}. \quad (1.100)$$

Restando estas dos ecuaciones y ocupando la identidad Eq. (1.91) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) &= -\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} \\ &= -\vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}).\end{aligned}\quad (1.101)$$

Al vector

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.102)$$

se le llama vector de Poynting. Ahora, integrando Eq. (1.101) sobre un volumen V y ocupando la teorema de Gauss Eq. (1.6) se encuentra

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{cin}) = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} da, \quad (1.103)$$

donde

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (1.104)$$

Como podemos ver, además de la energía cinética, las ecuaciones de Maxwell nos dicen que hay otra energía. Esta nueva energía se debe a los campos eléctricos y magnéticos dada por \mathcal{E}_{em} , a esta energía se le llama energía electromagnética. El término

$$\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{n} da$$

se interpreta como flujo de energía. Si el volumen es suficientemente grande de tal forma que no haya flujo de energía en su frontera, Eq. (1.103) implica

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{em} + \mathcal{E}_{cin} = \text{constante}, \quad (1.105)$$

es decir, la energía total se conserva.

1.7. Contracción de dos tensores de Levi-Civita

El tensor δ_{ij} es simétrico mientras que ϵ_{ijk} es totalmente antisimétrico. Sin embargo estos dos tensores están relacionados. Primero notemos que en dos dimensiones se cumple

$$\epsilon_{ik}\epsilon_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\delta_{ij}. \quad (1.106)$$

En tres dimensiones se cumple la identidad

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.107)$$

Para mostrar esto definamos el símbolo

$$M_{ijlm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.108)$$

Debido a que δ_{ab} es un tensor simétrico, se cumple

$$M_{ijlm} = -M_{jilm} = -M_{ijml}, \quad (1.109)$$

en efecto

$$M_{jilm} = \delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{il} = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = -M_{ijlm}, \quad (1.110)$$

$$M_{ijml} = \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm} = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = -M_{ijlm}. \quad (1.111)$$

En particular se tiene $M_{iilm} = M_{ijmm} = 0$. También se puede observar que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ es antisimétrico si hacemos una permutación en (ij) ó (lm) , es decir

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = -\epsilon_{jik} \epsilon_{klm} = -\epsilon_{ijk} \epsilon_{kml}. \quad (1.112)$$

Las igualdades Eqs. (1.109)-(1.112) nos indican que si Eq. (1.107) se cumple para una cuarteta ordenada $(ijml)$, también se cumple para las cuartetas ordenadas $(jilm)$, $(ijml)$.

Note si $i = j$, Eq. (1.107) toma la forma $0 = 0$. Así, los valores que falta por probar son $i \neq j$. De la definición Eq. (1.108) es claro que M_{ijlm} es diferente de cero sólo si $i = l, j = m$ ó $i = m, j = l$, que son las cuartetas ordenadas $(ijij)$ y $(ijji)$. Esta propiedad también la tiene la cantidad $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$. En efecto, recordemos que los índices i, j, k, l, m sólo pueden tomar los valores $(1, 2, 3)$, además en la suma $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ los únicos términos que contribuyen son tales que $i \neq j, i \neq k, j \neq k$ y $k \neq l, k \neq m, l \neq m$. Estas condiciones implican que $i = m, l = j$ ó $i = l, j = m$. Es decir las únicas cuartetas ordenadas que dan resultados no nulos en $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ son $(ijij)$ y $(ijji)$.

Como probar Eq. (1.107) para el caso $(ijij)$ es equivalente a probarla para el caso $(ijji)$, sólo probaremos los caso $(ijij) = (1212), (1313), (2323)$.

Si $(ijij) = (1212)$, se tiene

$$\epsilon_{12k} \epsilon_{k12} = \epsilon_{123} \epsilon_{312} = 1, \quad M_{1212} = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21} = 1. \quad (1.113)$$

Por lo tanto, Eq. (1.107) se cumple.

Si $(ijij) = (1313)$, se encuentra

$$\epsilon_{13k}\epsilon_{k13} = \epsilon_{132}\epsilon_{213} = 1, \quad M_{1313} = \delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}\delta_{23} = 1. \quad (1.114)$$

Por lo tanto, Eq. (1.107) se cumple.

Si $(ijij) = (2323)$, se llega a

$$\epsilon_{23k}\epsilon_{k23} = \epsilon_{231}\epsilon_{123} = 1, \quad M_{2323} = \delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{32} = 1. \quad (1.115)$$

Por lo tanto, Eq. (1.107) se cumple.

En conclusión la igualdad Eq. (1.107) es válida para cualquier $ijlm$. Una implicación de Eq. (1.107) es

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{mjs} + \epsilon_{sim}\epsilon_{mjl} = \epsilon_{ijm}\epsilon_{mils}. \quad (1.116)$$

En efecto ocupando Eq. (1.107) se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm}\epsilon_{mjs} + \epsilon_{sim}\epsilon_{mjl} &= (\delta_{ij}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lj}) + (\delta_{sj}\delta_{il} - \delta_{sl}\delta_{ij}) \\ &= \delta_{il}\delta_{sj} - \delta_{is}\delta_{lj} = \epsilon_{ijm}\epsilon_{mils}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

En la próxima sección veremos la importancia de la igualdad Eq. (1.107).

1.8. Triple producto vectorial I

Ocupando Eq. (1.107), se puede probar el llamado triple producto vectorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (1.118)$$

pues

$$\begin{aligned} \left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} A_j \left(\vec{B} \times \vec{C} \right)_k = \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= (A_m C_m) B_i - C_i (A_l B_l) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_i - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_i. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Si en lugar de un vector constante se tiene el operador $\vec{\nabla}$, la identidad Eq. (1.118) ya no es válida. Por ejemplo, si en lugar de $\vec{B} \times \vec{C}$ se considera $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, ahora se cumple

$$\left[(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A} \right]_i = \partial_j \left(A_i A_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} A^2 \right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) A_i. \quad (1.120)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{A} \right]_i &= \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j A_k = \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} \partial_l A_m) A_k \\ &= -\epsilon_{ikj} \epsilon_{jlm} (\partial_l A_m) A_k \\ &= -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) (\partial_l A_m) A_k \\ &= A_l \partial_l A_i - A_m \partial_i A_m \\ &= \partial_l (A_i A_l) - A_i \partial_l A_l - \frac{1}{2} \partial_i (A_m A_m) \\ &= \partial_l \left(A_i A_l - \frac{1}{2} \delta_{il} A^2 \right) - A_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Con esta identidad posteriormente veremos que se conserva el momento.

1.9. Conservación del momento

Para estudiar la conservación del momento veamos de nuevo la fuerza de Lorentz, la cual se puede escribir como

$$\frac{d\vec{P}_{cin}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (1.122)$$

Si tenemos una distribución ρ de carga, un elemento de carga está dado por $dq = \rho d^3x$ y el elemento de fuerza es

$$d\vec{F} = \left(\rho \vec{E} + \frac{\rho \vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) d^3x = \vec{\mathcal{F}} d^3x, \quad (1.123)$$

con

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \quad (1.124)$$

la densidad de fuerza mecánica. Así, la fuerza total mecánica es

$$\frac{d\vec{P}_{cin}}{dt} = \vec{F} = \int_V \left(\rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \right) d^3x. \quad (1.125)$$

En este resultado solo se ocupó la fuerza de Lorentz. Veamos que dicen las ecuaciones de Maxwell.

Si hacemos el producto vectorial de \vec{E} con la ley de Faraday Eq. (1.2) se tiene

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \times \vec{E}. \quad (1.126)$$

Si hacemos el producto vectorial de \vec{B} con la ley de Ampère Eq. (1.4) encontramos

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{B} = \left(\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \times \vec{B} \quad (1.127)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}. \quad (1.128)$$

Sumando estas dos ecuaciones y considerando

$$\frac{\partial \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.129)$$

se llega a

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \times \vec{E} + \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E}\right) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Además, tomando en cuenta Eq. (1.120), la ley de Gauss Eq. (1.1) y la ley de inexistencia de monopolos magnéticos Eq. (1.3), se tiene

$$\left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \times \vec{E}\right)_i = \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2\right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_i \quad (1.131)$$

$$= \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2\right) - 4\pi \rho E_i, \quad (1.132)$$

$$\left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \times \vec{B}\right)_i = \partial_j \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2\right) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_i \quad (1.133)$$

$$= \partial_j \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2\right). \quad (1.134)$$

Introduciendo estos resultados en Eq. (1.130) se llega a

$$\begin{aligned} & \partial_j \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (E^2 + B^2) \right) \\ &= 4\pi \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right)_i. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Antes de continuar definamos la densidad de momento electromagnético como

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (1.136)$$

y el tensor de esfuerzos de Maxwell como

$$\tau_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (E^2 + B^2) \right). \quad (1.137)$$

Entonces, la igualdad Eq. (1.135) toma la forma

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} + \mathcal{F}_i = \partial_j \tau_{ji}. \quad (1.138)$$

Integrando esta ecuación sobre un volumen V se tiene

$$\begin{aligned} \int_V dx^3 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial t} + \mathcal{F}_i \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int_V dx^3 \mathcal{P}_i \right) + \int_V dx^3 \mathcal{F}_i = \int_V dx^3 \partial_j \tau_{ji} \\ &= \oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Definiremos el momento electromagnético como

$$\vec{P}_{em} = \frac{1}{4\pi c} \int_V dx^3 \vec{E} \times \vec{B}, \quad (1.140)$$

entonces, considerando Eq. (1.125) se encuentra que

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{em} + \vec{P}_{cin} \right)_i = \oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da \quad (1.141)$$

Como podemos ver, además del momento cinético, las ecuaciones de Maxwell implican el momento electromagnético \vec{P}_{em} que solo depende de los campos. También podemos ver que

$$\oint_{\partial V} \tau_{ij} n_j da$$

es un término de fuerza y $\tau_{ij}n_j$ es una presión. De hecho, si definimos

$$\vec{P}_T = \vec{P}_{cin} + \vec{P}_{em}, \quad F_i = \oint_{\partial V} \tau_{ij}n_j da \quad (1.142)$$

se tiene la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}. \quad (1.143)$$

Ahora, si el volumen de integración es suficientemente grande de tal forma que el término de la derecha sea nulo, la ecuación Eq. (1.141) implica

$$(P_{cin} + P_{em})_i = \text{constante} \quad (1.144)$$

que significa que el momento total se conserva.

1.9.1. Conservación del momento angular

Tomando en cuenta la ecuación Eq. (1.138) se encuentra

$$\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial t} + \epsilon_{ijk}x_j \mathcal{F}_i = \epsilon_{ijk}x_j \partial_l \tau_{lk}. \quad (1.145)$$

Considerando que $\partial_t x_j = 0$ y que τ_{lk} es simétrico se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk}x_j \mathcal{P}_k) + (\vec{x} \times \vec{\mathcal{F}})_i &= \epsilon_{ijk} (\partial_l (x_j \tau_{lk}) - \tau_{lk} \partial_l x_j) \\ &= \epsilon_{ijk} (\partial_l (x_j \tau_{lk}) - \tau_{lk} \delta_{lj}) \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk}x_j \tau_{lk}) - \epsilon_{ijk} \tau_{jk} \\ &= \partial_l (\epsilon_{ijk}x_j \tau_{lk}). \end{aligned} \quad (1.146)$$

Definamos el momento angular electromagnético como

$$\vec{L}_{em} = \int_V dx^3 \vec{x} \times \vec{\mathcal{P}}. \quad (1.147)$$

Además, note que, como $\vec{\mathcal{F}}$ es una densidad de fuerza, $\vec{x} \times \vec{\mathcal{F}}$ es una densidad de torca. Por lo que, la torca, que es la deriva temporal del momento angular cinético, es

$$\frac{d\vec{L}_{cin}}{dt} = \int_V dx^3 \vec{x} \times \vec{\mathcal{F}}. \quad (1.148)$$

Así, integrando Eq. (1.146) sobre un volumen V y ocupando el teorema de Gauss, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_{em} + \vec{L}_{cin} \right)_i = \oint_{\partial V} (\epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk}) n_l da. \quad (1.149)$$

Si V es suficientemente grande de tal forma que no haya campo electromagnético en su frontera se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_{em} + \vec{L}_{cin} \right)_i = 0. \quad (1.150)$$

Es decir, el momento angular total se conserva.

1.10. Triple producto vectorial II

Hay otra versiones del triple producto escalar, una de ellas es la identidad

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.151)$$

Esta propiedad se demuestra de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i \\ &= \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_i. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Con esta identidad posteriormente mostraremos que de las ecuaciones de Maxwell se puede obtener la ecuación de onda.

Otro tipo de triple producto escalar es

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{A} \cdot \nabla \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (1.153)$$

Que se demuestra de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \right)_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} (A_l B_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (A_l B_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} B_m \partial_j A_l + \delta_{il} \delta_{jm} A_l \partial_j B_m \\ &\quad - (\delta_{im} \delta_{jl} B_m \partial_j A_l + \delta_{im} \delta_{jl} A_l \partial_j B_m) \\ &= B_j \partial_j A_i + A_i \partial_j B_j - B_i \partial_j A_j - A_j \partial_j B_i \\ &= \left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right]_i, \end{aligned}$$

que es la prueba de Eq. (1.153).

1.10.1. Ecuación de onda

Con la identidad Eq. (1.152) se puede probar que las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de onda. Por simplicidad veremos solo el caso donde no hay fuentes, por lo que las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.154)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.155)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.156)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.157)$$

De la ley de Faraday Eq. (1.155) se obtiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}, \quad (1.158)$$

ocupando la ley de Ampère sin fuentes Eq. (1.157) y la identidad Eq. (1.152) se llega a

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0. \quad (1.159)$$

Análogamente, aplicando el operador rotacional a la ley de Ampère Eq. (1.157) sin fuentes y ocupando la ley de Faraday Eq. (1.155) se obtiene

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0. \quad (1.160)$$

Por lo tanto, en el vacío los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda.

1.11. Libertad de norma

Recordemos dos teoremas de cálculo vectorial, el teorema de la divergencia y teorema del rotacional. El teorema de la divergencia nos dice que si \vec{a} es un campo vectorial tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \quad \implies \quad \exists \vec{b} \quad \text{tal que} \quad \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b}, \quad (1.161)$$

donde \vec{b} es un campo vectorial. Mientras que el teorema del rotacional establece que si \vec{f} es un campo vectorial tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{c} = 0 \quad \implies \quad \exists \quad h \quad \text{tal que} \quad \vec{c} = -\vec{\nabla}h, \quad (1.162)$$

donde h es un campo escalar.

De la ley de inexistencia de monopolos magnéticos Eq. (1.3) y del teorema de la divergencia Eq. (1.161) se infiere que existe un campo vectorial \vec{A} tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.163)$$

Sustituyendo este resultado en la ley de Faraday Eq. (1.2) obtenemos que

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.164)$$

Ahora, por el teorema del rotacional Eq. (1.162) se concluye que existe un campo escalar ϕ tal que

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (1.165)$$

Por lo tanto podemos decir que la inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday implican que existen los campos \vec{A} y ϕ tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = - \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (1.166)$$

Este es un resultado importante. Note que dados los campos \vec{E} , \vec{B} los campos \vec{A} y ϕ no son únicos. En efecto, sea $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ un campo escalar arbitrario y definamos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (1.167)$$

Entonces Eq. (1.166) implica

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad \vec{E}' = \vec{E}, \quad (1.168)$$

es decir los campos eléctrico y magnético no cambian bajo las transformaciones Eq. (1.167). Debido a que χ depende del espacio y del tiempo, se dice que las transformaciones Eq. (1.167) son locales y se les suele llamar transformaciones

de norma.

Ahora, definamos $U = e^{-i\chi}$, entonces Eq. (1.167) se puede escribir como

$$\vec{A}' = U^{-1} \left(\vec{A} + i\vec{\nabla} \right) U, \quad \phi' = U^{-1} \left(\phi - i\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) U. \quad (1.169)$$

Esto es interesantes pues el conjunto de todas las funciones

$$U = e^{-i\chi}, \quad (1.170)$$

forman un círculo de tamaño unitario y cumple las propiedades algebraica del grupo llamado $U(1)$ [16]. Por lo que, se dice que el grupo de norma de la electrodinámica es $U(1)$.

El resto de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Gauss Eq. (1.1) y la ley de Ampère Eq. (1.4), nos dan la dinámica de los campos ϕ y \vec{A} . En efecto, si sustituimos Eq. (1.166) en Eqs. (1.1,1.4) se obtiene

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = 4\pi\rho, \quad (1.171)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \left(\vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \right). \quad (1.172)$$

Ocupamos la identidad Eq. (1.152) se encuentra

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = -4\pi\rho, \quad (1.173)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (1.174)$$

Debido a que los campos de norma ϕ y \vec{A} no son únicos, para trabajar con estos debemos elegir un par de ellos de un número infinito de posibilidades. Para hacer esto se suele imponer condiciones sobre los campos de norma, una de las condiciones más recurridas es la norma de Lorentz que pide que se cumpla la condición

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (1.175)$$

En este caso Eqs. (1.173-1.174) toman la forma

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi\rho, \quad (1.176)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (1.177)$$

Que son ecuaciones de onda con fuentes.

Otra condición de norma que se puede ocupar es la llamada condición de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.178)$$

En este caso las Eqs.(1.173)-(1.174) toman la forma

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho, \quad (1.179)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (1.180)$$

Un estudio más detallado sobre las posibles condiciones de norma de la electrodinámica se puede ver en [16].

1.12. Representación compleja de las ecuaciones de Maxwell

Cuando no hay fuentes, $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.181)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.182)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.183)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.184)$$

En este caso podemos definir el vector $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + i\vec{B}$, donde $i^2 = -1$. Por lo que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \quad (1.185)$$

Claramente estas ecuaciones son invariantes bajo la transformación

$$\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}' = \left(\vec{E}' + i\vec{B}' \right) = e^{i\alpha} \vec{\mathcal{E}}, \quad \alpha = \text{constante}. \quad (1.186)$$

Esta transformación explícitamente toma la forma

$$\vec{\mathcal{E}}' = (\vec{E}' + i\vec{B}') = e^{i\alpha}\vec{\mathcal{E}} = (\vec{E} \cos \alpha - \vec{B} \sin \alpha) + i(\vec{B} \cos \alpha + \vec{E} \sin \alpha),$$

que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (1.187)$$

Si hay fuentes, las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo estas transformaciones. Para mantener esta invariancia, en 1931 P. A. M Dirac propuso la existencia de cargas y corrientes magnéticas. En este caso se pueden proponer la ecuaciones de Maxwell generalizadas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (1.188)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\left(\frac{4\pi}{c}\vec{J}_m + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right), \quad (1.189)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m, \quad (1.190)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \quad (1.191)$$

Definamos $\rho = \rho_e + i\rho_m$ y $\vec{\mathbf{J}} = \vec{J}_e + i\vec{J}_m$, entonces las ecuaciones de Maxwell con monopolos magnéticos toman la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = i\left(\frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}\right). \quad (1.192)$$

Estas ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones

$$\vec{\mathcal{E}} \rightarrow e^{i\alpha}\vec{\mathcal{E}} = (\vec{E} \cos \alpha - \vec{B} \sin \alpha) + i(\vec{B} \cos \alpha + \vec{E} \sin \alpha), \quad (1.193)$$

$$\rho \rightarrow e^{i\alpha}\rho = (\rho_e \cos \alpha - \rho_m \sin \alpha) + i(\rho_m \cos \alpha + \rho_e \sin \alpha), \quad (1.194)$$

$$\vec{\mathbf{J}} \rightarrow e^{i\alpha}\vec{\mathbf{J}} = (\vec{J}_e \cos \alpha - \vec{J}_m \sin \alpha) + i(\vec{J}_m \cos \alpha + \vec{J}_e \sin \alpha). \quad (1.195)$$

La fuerza de Lorentz con monopolos magnéticos toma la forma

$$\vec{F} = q_e\vec{E} + q_m\vec{B} + \frac{q_e}{c}\vec{v} \times \vec{B} - \frac{q_m}{c}\vec{v} \times \vec{E}. \quad (1.196)$$

1.13. Otros resultados de cálculo vectorial

Antes de finalizar este capítulo veamos otros resultados de cálculo vectorial que ocuparemos posteriormente.

Ahora, demostraremos los siguientes lemas.

Lema de Gauss: Si \vec{B} es un campo vectorial suave sobre una región de volumen V y frontera ∂V , se cumple

$$\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv = \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}). \quad (1.197)$$

Para probar esta afirmación ocuparemos el teorema de Gauss Eq. (1.6), el cual es válido para cualquier campo vectorial suave \vec{F} . En particular, si $\vec{F} = \vec{B} \times \vec{C}$, el teorema de Gauss Eq. (1.6) implica

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) dv = \oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da. \quad (1.198)$$

Además ocupando la identidad del triple producto escalar Eq. (1.87) se tiene

$$\oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da = \oint_{\partial V} (\hat{n} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} da. \quad (1.199)$$

Para el caso en que \vec{C} es un vector constante, se encuentra

$$\oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} da = \vec{C} \cdot \oint_{\partial V} (\hat{n} \times \vec{B}) da. \quad (1.200)$$

Además, si \vec{C} es constante, se cumple

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \partial_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = \partial_i (\epsilon_{ijk} B_j C_k) = C_k \epsilon_{ijk} \partial_i B_j \\ &= C_k \epsilon_{kij} \partial_i B_j = \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si \vec{C} es constante

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) dv = \vec{C} \cdot \int_V dv (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (1.201)$$

Así, igualando Eq. (1.198) con Eq. (1.201) para el caso \vec{C} constante se llega

$$\vec{C} \cdot \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv = \vec{C} \cdot \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}),$$

es decir

$$\vec{C} \cdot \left[\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dv - \oint_{\partial V} (d\vec{a} \times \vec{B}) \right] = 0.$$

Esta igualdad es válida para cualquier vector \vec{C} constante, por lo tanto se debe cumplir Eq. (1.197), que es el llamado lema de Gauss.

Lema de Stokes: Si ϕ es un campo escalar que toma valores sobre una superficie S cuya frontera es Γ , entonces

$$\int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da = \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}. \quad (1.202)$$

Probemos esta igualdad, supongamos que \vec{A} es un vector constante, entonces de (1.92) se llega a

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A}).$$

Ocupando este resultado y la identidad del triple producto escalar Eq. (1.87), se encuentra

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A})) \cdot \hat{n} da &= \int_S (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da = \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{A} da \\ &= \vec{A} \cdot \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Además, de acuerdo al teorema de Stokes Eq. (1.7), se llega a

$$\int_S (\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A})) \cdot \hat{n} da = \oint_{\Gamma} (\phi \vec{A}) \cdot d\vec{l} = \vec{A} \cdot \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}. \quad (1.204)$$

Por lo tanto, igualando Eq. (1.203) con Eq. (1.204) se tiene

$$\vec{A} \cdot \int_S (\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi) da = \vec{A} \cdot \oint_{\Gamma} \phi d\vec{l}.$$

Como \vec{A} es un vector arbitrario constante, se cumple el lema de Stokes Eq. (1.202).

Capítulo 2

Operadores en Coordenadas Curvilíneas

En este capítulo veremos la expresión de los operadores gradiente, Laplaciano y rotacional en términos de coordenadas curvilíneas. Primero recordaremos algunos resultados de cálculo vectorial en coordenadas cartesianas y después veremos el caso general en coordenadas curvilíneas.

2.1. Interpretación geométrica de operaciones vectoriales

Supongamos que tenemos los vectores \vec{A} y \vec{B} con magnitudes A y B . Recordemos que cualquiera dos vectores los podemos poner en un plano, por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\vec{A} = A(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $\vec{B} = B(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$. Entonces,

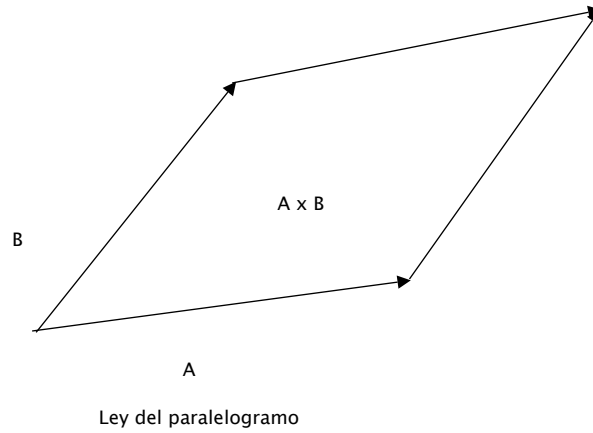
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = AB \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Es decir, como $\theta = \theta_1 - \theta_2$ es el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} , se tiene

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta. \tag{2.1}$$

También recordemos que dados los vectores \vec{A} y \vec{B} , siempre se puede construir un paralelogramo. El área de un paralelogramo es simplemente el producto de la base por la altura h , en este caso es [17]

$$a = hA = AB \sin \theta.$$



Esta cantidad se puede relacionar con $\vec{A} \times \vec{B}$. Primero notemos que ocupando el triple producto escalar Eq. (1.87), el triple producto vectorial Eq. (1.118) y el producto escalar Eq. (2.1), se encuentra

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \times \vec{B})^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot ((\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{A}) \\
 &= -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B})) \\
 &= -\vec{B} \cdot (\vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - A^2 \vec{B}) \\
 &= A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \\
 &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta \\
 &= A^2 B^2 \sin^2 \theta = a^2.
 \end{aligned}$$

Entonces, el área del paralelogramo que forman \vec{A} y \vec{B} está dada por

$$a = AB \sin \theta = |\vec{A} \times \vec{B}|.$$

Por esta razón a $\vec{A} \times \vec{B}$ se le suele llamar vector área. Note que este vector es normal al paralelogramo.

Otro resultado que es conveniente tener presente es que si tenemos tres vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ con ellos podemos formar un paralelepípedo. El volumen de un paralelepípedo está dado por el producto de la altura con el área de su base [17]

$$V = ha.$$

Donde $h = C \cos \gamma$, con γ el ángulo que hace \vec{C} con la normal de la base del paralelepípedo, es decir con $\vec{A} \times \vec{B}$. Además, $a = |\vec{A} \times \vec{B}|$, de donde

$$V = C \cos \gamma |\vec{A} \times \vec{B}| = \left| \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right|.$$

2.2. Operadores en coordenadas cartesianas

Un vector tridimensional $\vec{r} = (x, y, z)$ se puede escribir en diferentes coordenadas. En la base Euclidiana tenemos

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.2)$$

con

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1). \quad (2.3)$$

Para estos vectores el producto escalar es

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0. \end{aligned}$$

Otro vector que se puede construir es

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad (2.4)$$

que nos da el elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.5)$$

Note que la energía cinética está dada por

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

En esta base se tiene los productos vectoriales

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}.$$

Así, se pueden plantear los elementos de área

$$\begin{aligned} d\vec{a}_{xy} &= d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y = (dx\hat{i} \times dy\hat{j}) = dx dy \hat{k}, \\ d\vec{a}_{yz} &= d\vec{r}_y \times d\vec{r}_z = (dy\hat{j} \times dz\hat{k}) = dy dz \hat{i}, \\ d\vec{a}_{zx} &= d\vec{r}_z \times d\vec{r}_x = (dz\hat{k} \times dx\hat{i}) = dz dx \hat{j}, \end{aligned}$$

que forman el vector

$$d\vec{a} = dy dz \hat{i} + dz dx \hat{j} + dx dy \hat{k}. \quad (2.6)$$

Mientras que el elemento de volumen se plantea como

$$dV = d\vec{r}_z \cdot (d\vec{r}_x \times d\vec{r}_y) = dx dy dz. \quad (2.7)$$

En este caso el operador gradiente es

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}. \quad (2.8)$$

Por lo que un *elemento* de ϕ se puede escribir como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}. \quad (2.9)$$

Además, la divergencia es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (2.10)$$

tomando el caso $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$ se obtiene el Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.11)$$

Mientras que el rotacional es

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (2.12)$$

Estos resultados los ocuparemos para construir la versión del gradiente, divergencia, Laplaciano y rotacional en coordenadas curvilíneas.

2.2.1. Coordenadas esféricas

Antes de estudiar las coordenadas curvilíneas en general veremos dos casos particulares.

Primero veamos las coordenadas esféricas:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.13)$$

es decir

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ &= r(\cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Así,

$$d\vec{r} = \hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi, \quad (2.15)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \\ &= \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ &= \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + \sin \varphi \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Los vectores $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$ cumplen

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = 1, \quad (2.19)$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\theta = 0, \quad (2.20)$$

por lo que forman una base ortonormal.

Esto implica que el elemento de línea toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

mientras que la energía cinética es

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right). \quad (2.22)$$

Con el producto vectorial se tiene

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r. \quad (2.23)$$

Por lo que los elementos de área son

$$d\vec{a}_{r\theta} = d\vec{r}_r \times d\vec{r}_\theta = (\hat{e}_r dr \times r \hat{e}_\theta d\theta) = r dr d\theta \hat{e}_\varphi, \quad (2.24)$$

$$d\vec{a}_{\varphi r} = d\vec{r}_\varphi \times d\vec{r}_r = (r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi \times \hat{e}_r dr) = r \sin \theta dr d\varphi \hat{e}_\theta, \quad (2.25)$$

$$d\vec{a}_{\theta\varphi} = d\vec{r}_\theta \times d\vec{r}_\varphi = (r \hat{e}_\theta d\theta \times r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r, \quad (2.26)$$

que forman el vector

$$d\vec{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r + r \sin \theta dr d\varphi \hat{e}_\theta + r dr d\theta \hat{e}_\varphi. \quad (2.27)$$

Para este caso el elemento de volumen es

$$dV = d\vec{r}_r \cdot (d\vec{r}_\theta \times d\vec{r}_\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.28)$$

a $d\Omega$ se le llama elemento de ángulo sólido.

Además ocupando Eqs. (2.16)-(2.18) se encuentra

$$\hat{i} = \cos \varphi \sin \theta \hat{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.29)$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \sin \theta \hat{e}_r + \sin \varphi \cos \theta \hat{e}_\theta + \cos \varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.30)$$

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta. \quad (2.31)$$

2.2.2. Coordenadas cilíndricas

Ahora veamos la transformación de coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (2.32)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \\ &= \rho \cos \varphi \hat{i} + \rho \sin \varphi \hat{j} + z \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De donde,

$$d\vec{r} = \hat{e}_\rho d\rho + \rho \hat{e}_\varphi d\varphi + \hat{e}_z dz, \quad (2.34)$$

con

$$\hat{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}, \quad (2.35)$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}, \quad (2.36)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \hat{k}. \quad (2.37)$$

Estos vectores son ortonormales, pues cumplen

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1, \quad (2.38)$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = 0, \quad (2.39)$$

que implica

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (2.40)$$

Así, la energía cinética toma la forma

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.41)$$

Con el producto vectorial tenemos

$$\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho, \quad \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z, \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi. \quad (2.42)$$

Por lo que los elementos de área son

$$d\vec{a}_{\rho\varphi} = d\vec{r}_\rho \times d\vec{r}_\varphi = \rho d\rho d\varphi \hat{e}_z,$$

$$d\vec{a}_{z\rho} = d\vec{r}_z \times d\vec{r}_\rho = dz d\rho \hat{e}_\varphi,$$

$$d\vec{a}_{\varphi z} = d\vec{r}_\varphi \times d\vec{r}_z = \rho d\varphi dz \hat{e}_\rho,$$

que definen el vector elemento área

$$d\vec{a} = \rho d\varphi dz \hat{e}_\rho + dz d\rho \hat{e}_\varphi + \rho d\rho d\varphi \hat{e}_z. \quad (2.43)$$

Mientras que el elemento de volumen está dado por

$$dV = d\vec{r}_z \cdot (d\vec{r}_\rho \times d\vec{r}_\varphi) = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.44)$$

2.3. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Ya hemos practicado suficiente, ahora veamos el caso general. Supongamos que tenemos el cambio de coordenadas

$$x = f_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = f_2(u_1, u_2, u_3), \quad z = f_3(u_1, u_2, u_3), \quad (2.45)$$

es decir

$$\vec{r} = (f_1(u_1, u_2, u_3), f_2(u_1, u_2, u_3), f_3(u_1, u_2, u_3)). \quad (2.46)$$

De donde,

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du^1 + h_2 \hat{e}_2 du^2 + h_3 \hat{e}_3 du^3, \quad (2.47)$$

con

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}, \quad \hat{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}, \quad (2.48)$$

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} \right|. \quad (2.49)$$

Claramente los vectores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ son unitarios. Supondremos que la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ forma una base ortonormal

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1, \quad (2.50)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0. \quad (2.51)$$

Esto implica que el elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (h_1)^2 (du_1)^2 + (h_2)^2 (du_2)^2 + (h_3)^2 (du_3)^2, \quad (2.52)$$

por lo que la energía cinética toma forma

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} ((h_1)^2 \dot{u}_1^2 + (h_2)^2 \dot{u}_2^2 + (h_3)^2 \dot{u}_3^2). \quad (2.53)$$

También supondremos que $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ forman una base derecha, es decir

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2, \quad (2.54)$$

que implica los elementos de área

$$d\vec{a}_{12} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = h_1 h_2 (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) du^1 du^2 = h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3, \quad (2.55)$$

$$d\vec{a}_{23} = d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3 = h_2 h_3 (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) du^2 du^3 = h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1, \quad (2.56)$$

$$d\vec{a}_{31} = d\vec{r}_3 \times d\vec{r}_1 = h_3 h_1 (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) du^3 du^1 = h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2, \quad (2.57)$$

con el cual se forma el vector

$$d\vec{a} = h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1 + h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2 + h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3. \quad (2.58)$$

Además, el elemento de volumen está dado por

$$\begin{aligned} dV &= d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3) = h_1 du^{(1)} \hat{e}_1 \cdot (h_2 du^{(2)} \hat{e}_2 \times h_3 du^{(3)} \hat{e}_3) \\ &= h_1 h_2 h_3 du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Estas cantidades son de gran utilidad para construir operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas.

2.3.1. Gradiente en coordenadas curvilíneas

Como $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ forma una base, cualquier vector \vec{A} se puede escribir en términos de ella, es decir,

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3. \quad (2.60)$$

En particular, el gradiente se debe escribir como

$$\vec{\nabla}\phi = (\nabla\phi)_1 \hat{e}_1 + (\nabla\phi)_2 \hat{e}_2 + (\nabla\phi)_3 \hat{e}_3. \quad (2.61)$$

De donde, considerando Eq. (2.9), se tiene

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \\ &= \left[(\nabla\phi)_1 \hat{e}_1 + (\nabla\phi)_2 \hat{e}_2 + (\nabla\phi)_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \left[h_1 \hat{e}_1 du^1 + h_2 \hat{e}_2 du^2 + h_3 \hat{e}_3 du^3 \right] \\ &= (\nabla\phi)_1 h_1 du^1 + (\nabla\phi)_2 h_2 du^2 + (\nabla\phi)_3 h_3 du^3. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Esta cantidad tiene el mismo valor independientemente de las coordenadas en que se calcule. Además en las variables u_1, u_2, u_3 se encuentra

$$d\phi(u^1, u^2, u^3) = \frac{\partial\phi}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial\phi}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial\phi}{\partial u^3} du^3. \quad (2.63)$$

Por lo tanto, como las variables u_1, u_2, u_3 son independientes, igualando Eq. (2.63) con Eq. (2.62) se llega a

$$(\nabla\phi)_1 h_1 = \frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \quad (\nabla\phi)_2 h_2 = \frac{\partial\phi}{\partial u^2}, \quad (\nabla\phi)_3 h_3 = \frac{\partial\phi}{\partial u^3}, \quad (2.64)$$

es decir,

$$(\nabla\phi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u^1}, \quad (\nabla\phi)_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u^2}, \quad (\nabla\phi)_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u^3}. \quad (2.65)$$

Así, el gradiente en coordenadas curvilíneas es

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u^3} \hat{e}_3. \quad (2.66)$$

En particular el gradiente en coordenadas esféricas es

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{e}_\varphi. \quad (2.67)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas tenemos

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (2.68)$$

2.3.2. Divergencia en coordenadas curvilíneas

Para obtener la divergencia en coordenadas curvilíneas ocuparemos el teorema de Gauss Eq. (1.6). Note que usando los elementos de área Eq. (2.6) y volumen Eq. (2.7) en coordenadas cartesianas, este teorema se puede escribir como

$$\int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\partial V} (A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy). \quad (2.69)$$

Con el elemento de volumen Eq. (2.59) en coordenadas curvilíneas se tiene

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})_c h_1 h_2 h_3 du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)}. \quad (2.70)$$

Mientras que ocupando \vec{A} y el elemento de área en coordenadas curvilíneas, Eq. (2.60) y Eq. (2.58), se encuentra

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial V} \left[A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \\ &\quad \left[h_2 h_3 \hat{e}_1 du^{(2)} du^{(3)} + h_3 h_1 \hat{e}_2 du^{(3)} du^{(1)} + h_1 h_2 \hat{e}_3 du^{(1)} du^{(2)} \right] \\ &= \oint_{\partial V} \left[A_1 h_3 h_1 du^{(3)} du^{(2)} + A_2 h_3 h_1 du^{(3)} du^{(1)} + A_3 h_1 h_2 du^{(1)} du^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x &= A_1 h_2 h_3, & \tilde{A}_y &= A_2 h_3 h_1, & \tilde{A}_z &= A_3 h_1 h_2, \\ d\tilde{x} &= du^{(1)}, & d\tilde{y} &= du^{(2)}, & d\tilde{z} &= du^{(3)}. \end{aligned}$$

y considerando la igualdad Eq. (2.69) se llega a

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial V} \left[\tilde{A}_x \tilde{z} d\tilde{y} + \tilde{A}_y d\tilde{z} d\tilde{x} + \tilde{A}_z d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \\
&= \int_V \left(\frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{A}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{z}} \right) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
&= \int_V du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)} \left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right). \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Así, igualando Eq. (2.70) con Eq. (2.71) se llega a

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)_c h_1 h_2 h_3 = \left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right), \quad (2.72)$$

es decir

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)_c = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u^{(1)}} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u^{(2)}} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right). \quad (2.73)$$

Esta es la expresión de la divergencia en coordenadas curvilíneas. Para coordenadas esféricas obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (2.74)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se llega a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.75)$$

2.3.3. Laplaciano en coordenadas curvilíneas

La expresión Eq. (2.73) es válida para cualquier campo vectorial \vec{A} , en particular si es el gradiente de un campo escalar ϕ :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^3} \hat{e}_3. \quad (2.76)$$

En este caso $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla^2 \phi$, de donde

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(1)}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^{(2)}} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(2)}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u^{(3)}} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u^{(3)}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Para coordenadas esféricas se tiene

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \quad (2.77)$$

también se puede ocupar

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi). \quad (2.78)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se encuentra

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.79)$$

2.3.4. Rotacional en coordenadas curvilíneas

El rotacional es un vector, por lo que se debe poder escribir de la forma

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_1 \hat{e}_1 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_2 \hat{e}_2 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_3 \hat{e}_3. \quad (2.80)$$

Para encontrar los coeficientes $\left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_i$, notemos que el teorema de Stokes Eq. (1.7) en coordenadas cartesianas toma la forma

$$\begin{aligned} \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot d\vec{a} &= \int_S \left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_x dydz + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_y dzdx \right. \\ &\quad \left. + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_z dxdy \right] \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dxdy + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy \right] \\ &= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} (A_x, A_y, A_z) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \int_{\partial S} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ahora, considerando \vec{A} y $d\vec{r}$ en coordenadas generalizadas, Eq. (2.60) y Eq. (2.47), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial S} (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3) \cdot (h_1 \hat{e}_1 du^{(1)} + h_2 \hat{e}_2 du^{(2)} + h_3 \hat{e}_3 du^{(3)}) \\ &= \int_{\partial S} (A_1 h_1 du^{(1)} + A_2 h_2 du^{(2)} + A_3 h_3 du^{(3)}). \end{aligned}$$

Por lo que definiendo

$$(A'_x, A'_y, A'_z) = (A_1 h_1, A_2 h_2, A_3 h_3), \quad (dx', dy', dz') = (du^{(1)}, du^{(2)}, du^{(3)})$$

y ocupando el teorema de Stokes Eq. (2.81), se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial S} (A'_x dx' + A'_y dy' + A'_z dz') \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) dy' dz' + \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) dx' dy' + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} \right) dx' dy' \right] \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right) du^{(2)} du^{(3)} \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right) du^{(1)} du^{(3)} \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right) du^{(1)} du^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Además, usando el elemento de área y $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$ en coordenadas generalizadas, Eq. (2.58) y Eq. (2.80), tenemos

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} &= \int_S \left[(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 \hat{e}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 \hat{e}_2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 \hat{e}_3 \right] \cdot \\ &\quad \left[h_2 h_3 du^2 du^3 \hat{e}_1 + h_3 h_1 du^3 du^1 \hat{e}_2 + h_1 h_2 du^1 du^2 \hat{e}_3 \right] \\ &= \int_S \left[(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 h_2 h_3 du^2 du^3 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 h_3 h_1 du^3 du^1 \right. \\ &\quad \left. + (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 h_1 h_2 du^1 du^2 \right], \end{aligned} \quad (2.83)$$

igualando Eq. (2.82) con Eq. (2.83) se obtiene

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 h_2 h_3 &= \left(\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 h_3 h_1 &= \left(\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 h_1 h_2 &= \left(\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(2)}} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(3)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(3)}} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u^{(1)}} \right), \\
(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u^{(1)}} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u^{(2)}} \right),
\end{aligned} \tag{2.85}$$

que son las componentes del rotacional en coordenadas generalizadas.

En particular para coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_\theta + \\
&\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas se llega a

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{e}_\varphi + \\
&\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

2.4. Operador momento angular

Para obtener mayor práctica en el manejo de vectores veamos el operador

$$\vec{L} = -i (\vec{r} \times \vec{\nabla}). \tag{2.88}$$

Este operador surge de manera natural en mecánica cuántica, pero también es importante en la teoría del potencial, en el grupo de rotaciones y para el estudio de las ondas electromagnéticas.

En coordenadas cartesianas, usando Eq. (2.2) y Eq. (2.8), se encuentra

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \hat{L}_x \hat{i} + \hat{L}_y \hat{j} + \hat{L}_z \hat{k} \\
&= -i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) = -i (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \times \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left[x \frac{\partial}{\partial y} (\hat{i} \times \hat{j}) + x \frac{\partial}{\partial z} (\hat{i} \times \hat{k}) + y \frac{\partial}{\partial x} (\hat{j} \times \hat{i}) + y \frac{\partial}{\partial z} (\hat{j} \times \hat{k}) \right. \\
&\quad \left. + z \frac{\partial}{\partial x} (\hat{k} \times \hat{i}) + z \frac{\partial}{\partial y} (\hat{k} \times \hat{j}) \right] \\
&= -i \left[\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{k} \right].
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\hat{L}_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \hat{L}_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \hat{L}_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (2.89)$$

En coordenadas esféricas, considerando Eq. (2.14) y Eq. (2.67), se llega a

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= -i \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \right) = -i (r \hat{e}_r) \times \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -i \left((\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -i \left(\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned}$$

es decir

$$\vec{L} = -i \left(\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (2.90)$$

De esta expresión se puede obtener $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ en coordenadas esféricas. En efecto, utilizando Eqs. (2.16)-(2.18), en (2.90) se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= -i \left[\left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\
&= -i \left[\left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{i} \right. \\
&\quad \left. + \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{k} \right],
\end{aligned}$$

por lo que,

$$\hat{L}_x = i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.91)$$

$$\hat{L}_y = -i \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.92)$$

$$\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.93)$$

Un operador importante es

$$L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \quad (2.94)$$

Este operador es más sugerente en coordenadas esféricas, usando Eq. (2.90) se encuentra

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= \vec{L} \cdot \vec{L} = -i \left(\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \vec{L} \\ &= -i \left(\hat{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \theta} - \frac{\hat{e}_\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Antes de continuar notemos que si \vec{A} y \vec{B} dependen de la variable u , entonces

$$\frac{\partial (\vec{A} \cdot \vec{B})}{\partial u} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial u}, \quad (2.96)$$

además de Eqs. (2.16)-(2.17) se llega a

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0) = \cos \theta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \cos \theta \hat{e}_\varphi,$$

Tomando en cuenta esta dos ultimas igualdades, las expresiones Eqs. (2.90), (2.16)-(2.18), se tiene

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \theta} &= \frac{\partial (\hat{e}_\varphi \cdot \vec{L})}{\partial \theta} = -i \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \hat{e}_\theta \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (\hat{e}_\theta \cdot \vec{L})}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\hat{e}_\theta)}{\partial \varphi} \cdot \vec{L} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \cos \theta \hat{e}_\varphi \cdot \vec{L} \\ &= i \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Sustituyendo estos resultado en Eq. (2.95) se consigue

$$\hat{L}^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

además utilizando la igualdad

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.98)$$

se llega a

$$\hat{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.99)$$

Note que con este resultado el Laplaciano en coordenadas esféricas Eq. (2.78) se puede escribir como

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2 \phi}{r^2}. \quad (2.100)$$

Esta versión del Laplaciano es de gran utilidad para resolver la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, en coordenadas esféricas. Este problema lo estudiaremos en otro capítulo.

Capítulo 3

El Factorial y la Función Gamma

En este capítulo veremos una función que generaliza el factorial de un número natural, que es la función Gamma. El estudio de este tema no es exhaustivo pero es suficiente para resolver diferentes problemas interesantes.

3.1. Función Gamma

Dado un número natural, n , se define el factorial como

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1. \quad (3.1)$$

También se puede definir un producto similar para los primeros n números pares mediante

$$(2n)!! = (2n) \cdot 2(n - 1) \cdot 2(n - 2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2, \quad (3.2)$$

factorizando un 2 de cada término se encuentra

$$(2n)!! = 2^n (n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1) = 2^n n!, \quad (3.3)$$

es decir

$$(2n)!! = 2^n n!. \quad (3.4)$$

Además, el producto de los primeros $(n + 1)$ números impares es

$$(2n + 1)!! = (2n + 1) \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1. \quad (3.5)$$

Ahora, multiplicando y dividiendo este número por $(2n)!!$ se encuentra

$$\begin{aligned}(2n+1)!! &= \frac{(2n+1) \cdot (\mathbf{2n}) \cdot (2n-1) \cdot \mathbf{2(n-1)} \cdots (5) \cdot (4) \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1)}{(2n) \cdot 2(n-1) \cdots (4) \cdot (2)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!},\end{aligned}$$

es decir

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}. \quad (3.6)$$

Adicionalmente se puede definir el factorial para cualquier número real o complejo. Para hacer esa definición ocuparemos la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (3.7)$$

Primero veamos dos valores de esta función. Notemos que si $z = 1$, se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

mientras que si $z = \frac{1}{2}$, con el cambio de variable $u = t^{1/2}$, se encuentra

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dudve^{-(u^2+v^2)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} \right)^{1/2} \\ &= \left(2\pi \frac{(-)}{2} \int_0^{\infty} dr \frac{de^{-r^2}}{dr} \right)^{1/2} = \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

es decir,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.8)$$

La función $\Gamma(z)$ tiene las mismas propiedades que el factorial, en efecto observemos que se cumple

$$e^{-t} t^z = z t^{z-1} e^{-t} - \frac{d}{dt} (e^{-t} t^z), \quad (3.9)$$

que implica

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z), \quad (3.10)$$

es decir

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (3.11)$$

Usando de forma reiterada (3.11) se encuentra

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)(z-2)\Gamma(z-2) \\ &= z(z-1)(z-2)\cdots(z-k)\Gamma(z-k), \quad \operatorname{Re}(z-k) > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En particular si z es un natural, n , el máximo valor que puede tomar k es $n-1$, por lo que

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))\Gamma(1) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \\ &= n!, \end{aligned}$$

entonces

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (3.13)$$

Así, para cualquier número complejo con $\operatorname{Re}(z-k) > 0$, definiremos el factorial como

$$z! = \Gamma(z+1) = z(z-1)(z-2)\cdots(z-k)\Gamma(z-k), \quad \operatorname{Re}(z-k) > 0. \quad (3.14)$$

Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.15)$$

Si queremos saber cuanto vale $(n + \frac{1}{2})!$ debemos ocupar la definición (3.14). Para este caso es claro que el máximo valor que puede tomar k es n , de donde

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right)! &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n+1)}{2} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-3)}{2} \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!!}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

De este resultado se tiene

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}\right)! &= \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2(n-1)+1)!}{2^{2(n-1)+1}(n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!(2n)}{2^{2n-1}(n-1)!(2n)} = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}, \end{aligned}$$

de donde

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

También se puede calcular el factorial para números negativos, por ejemplo

$$\left(\frac{-1}{2}\right)! = \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.16)$$

De hecho, ocupando que la ecuación (3.11) implica

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (3.17)$$

se puede definir $\Gamma(z)$ para números negativos. Por ejemplo, si $z = -\frac{1}{2}$, se encuentra

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}. \quad (3.18)$$

Similarmente, si $0 < \epsilon < 1$, podemos definir

$$\Gamma(-\epsilon) = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{-\epsilon}. \quad (3.19)$$

La parte derecha de esta igualdad tiene sentido pues $(1-\epsilon) > 0$, así la parte izquierda tiene sentido.

Ocupando de forma reiterada (3.17) se llega a

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \dots = \\ &= \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)(z+2)(z+3)\dots(z+(k-1))}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si $z + k > 0$ la parte derecha de esta igualdad tiene sentido, por lo tanto la parte izquierda está bien definida, aún si $z < 0$. Por ejemplo, si z es de la forma $z = -n + \epsilon$, con n un natural y $\epsilon \in (0, 1)$, tomando $k = n$ se cumple $z + k > 0$ y la cantidad

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \Gamma(-n + \epsilon) \\ &= \frac{\Gamma(\epsilon)}{(-n + \epsilon)(-n + \epsilon + 1)\cdots(-1 + \epsilon)}\end{aligned}\quad (3.21)$$

está bien definida.

Ahora, es claro que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-n + \epsilon)(-n + \epsilon + 1)\cdots(-1 + \epsilon) = (-1)^n n!. \quad (3.22)$$

Mientras que de la integral (3.7) se tiene $\Gamma(0^+) = \infty$ y de (3.19) se encuentra $\Gamma(0^-) = -\infty$. Por lo tanto, si n es un natural se cumple

$$\Gamma(-n^\pm) = (-1)^n (\pm)\infty, \quad (3.23)$$

en ambos caso

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0. \quad (3.24)$$

Existen más propiedades de la función $\Gamma(z)$, pero las que hemos visto nos bastan para estudiar las funciones de Bessel.

Capítulo 4

Repaso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este capítulo veremos una serie de resultados sobre ecuaciones diferenciales que aplicaremos posteriormente.

4.1. Teorema de existencia y unicidad

El primer resultado es sobre la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dY(x)}{dx} + Q(x)Y(x) = R(x). \quad (4.1)$$

Si $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$, entonces existe una única solución de Eq. (4.1) que cumple las condiciones iniciales

$$Y(x_0) = a_1, \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = a_2, \quad (4.2)$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Este resultado lo usaremos sin demostrar, la demostración se puede ver en [18].

4.2. El Wronskiano

Un concepto de mucha utilidad en el estudio de la independencia de las soluciones de las ecuaciones diferenciales es el Wronskiano. Supongamos que

tenemos dos funciones f y g , el Wronskiano se define como

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ \frac{df}{dx} & \frac{dg}{dx} \end{vmatrix} (x) = f(x) \frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x), \quad (4.3)$$

note que

$$\frac{dW(f, g)(x)}{dx} = f(x) \frac{d^2g(x)}{dx^2} - \frac{d^2f(x)}{dx^2} g(x). \quad (4.4)$$

4.3. Independencia lineal

Ahora, si $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY(x)}{dx} + Q(x)Y(x) = 0, \quad (4.5)$$

es decir, si se cumple

$$\frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY_1(x)}{dx} + Q(x)Y_1(x) = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2Y_2(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dY_2(x)}{dx} + Q(x)Y_2(x) = 0, \quad (4.7)$$

se obtiene

$$Y_2(x) \frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} + P(x)Y_2(x) \frac{dY_1(x)}{dx} + Q(x)Y_2(x)Y_1(x) = 0, \quad (4.8)$$

$$Y_1(x) \frac{d^2Y_2(x)}{dx^2} + P(x)Y_1(x) \frac{dY_2(x)}{dx} + Q(x)Y_1(x)Y_2(x) = 0. \quad (4.9)$$

Al restar estas ecuaciones se llega a

$$Y_2(x) \frac{d^2Y_1(x)}{dx^2} - Y_2(x) \frac{dY_1(x)}{dx} + P(x) \left(Y_1(x) \frac{dY_1(x)}{dx} - Y_2(x) \frac{dY_1(x)}{dx} \right) = 0,$$

esta última ecuación se puede escribir como

$$\frac{dW(Y_1, Y_2)(x)}{dx} + P(x)W(Y_1, Y_2)(x) = 0, \quad (4.10)$$

cuya solución es

$$W(Y_1, Y_2)(x) = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C = \text{constante}. \quad (4.11)$$

Como la función exponencial nunca se anula, si el Wronskiano es cero en un punto, implica que $C = 0$. Por lo tanto, si el Wronskiano es cero en un punto, es cero en cualquier otro punto. Claramente también es cierto que si el Wronskiano es diferente de cero en un punto, es diferentes de cero en cualquier otro punto. Además, si el Wronskiano es diferente de cero no puede cambiar de signo, pues de lo contrario tendría que pasar por cero.

Con el Wronskiano se puede obtener información sobre $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$. En efecto, si $W(Y_1, Y_2)(x) = 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ \frac{dY_1(x)}{dx} & \frac{dY_2(x)}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

tiene solución no trivial y las funciones $Y_1(x), Y_2(x)$ son linealmente dependientes. Ahora, si $W(Y_1, Y_2)(x) \neq 0$, la única solución a (4.12) es la trivial y por lo tanto, $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son linealmente independientes.

Supongamos que $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de Eq. (4.5), entonces podemos afirmar que estas funciones no se pueden anular en un mismo punto. Esto es verdad, pues si existe x_0 tal que $Y_1(x_0) = Y_2(x_0) = 0$, entonces $W(Y_1, Y_2)(x_0) = 0$, que no puede ser posible pues $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son linealmente independientes.

4.4. Los ceros de las soluciones

Diremos que a_1 y a_2 son ceros sucesivos de $Y_1(x)$, si para toda x en el intervalo (a_1, a_2) se cumple $Y_1(x) \neq 0$ y $Y_1(a_1) = Y_1(a_2) = 0$.

El Wronskiano nos da información sobre los puntos donde se anulan las soluciones linealmente independientes de Eq. (4.5). En efecto, supongamos que $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de Eq. (4.5) y que a_1 y a_2 son ceros sucesivos de $Y_1(x)$, entonces podemos afirmar que $Y_2(x)$ tiene un cero en el intervalo (a_1, a_2) . Para probar esta afirmación, notemos que la derivada de $Y_1(x)$ no puede tener el mismo signo en a_1 y a_2 , además

$$W(Y_1, Y_2)(a_1) = -\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_1} Y_1(a_1), \quad (4.13)$$

$$W(Y_1, Y_2)(a_2) = -\frac{dY_1(x)}{dx} \Big|_{a_2} Y_1(a_2). \quad (4.14)$$

Ahora como $\left. \frac{dY_1(x)}{dx} \right|_{a_2}$ tiene signo diferente a $\left. \frac{dY_1(x)}{dx} \right|_{a_1}$ y el Wronskiano no cambia de signo, entonces $Y_2(a_1)$ y $Y_2(a_2)$ tienen signos diferentes. Como $Y_2(x)$ es continua, existe un punto $a_3 \in (a_1, a_2)$ tal que $Y_2(a_3) = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

De hecho, podemos afirmar que si $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de Eq. (4.5), $Y_2(x)$ tiene un único cero entre dos ceros sucesivos de $Y_1(x)$.

4.4.1. Forma normal

Para poder estudiar la ecuación diferencial Eq. (4.5) en muchos caso es mejor expresarla en una forma más conveniente. Por ejemplo, supongamos que $Y(x) = u(x)v(x)$, de donde

$$\frac{dY(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}, \quad (4.15)$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \frac{d^2u(x)}{dx^2}v(x) + 2\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + u(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}, \quad (4.16)$$

por lo que Eq. (4.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u(x)}{dx^2}v(x) + \left(2\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x)\right)\frac{du(x)}{dx} \\ & + \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dv(x)}{dx} + Q(x)v(x)\right)u(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si pedimos que

$$2\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x) = 0, \quad (4.18)$$

se obtiene,

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{P(x)v(x)}{2}, \quad \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \left(-\frac{1}{2}\frac{dP(x)}{dx} + \frac{P^2(x)}{4}\right)v(x). \quad (4.19)$$

Sustituyendo estos resultados en Eq. (4.17) se llega a

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left(Q(x) - \frac{P^2(x)}{4} - \frac{1}{2}\frac{dP(x)}{dx}\right)u(x) = 0. \quad (4.20)$$

A esta ecuación se le llama forma normal de Eq. (4.5). Note que la solución de Eq. (4.18) es

$$v(x) = ce^{-\frac{1}{2} \int dx P(x)}, \quad c = \text{constante} \quad (4.21)$$

y esta función nunca se anula. Así la información de los ceros de $Y(x)$ está contenida en $u(x)$. Por lo tanto, para estudiar los ceros de las soluciones de Eq. (4.5) es más conveniente estudiar su forma normal (4.20).

Notablemente la ecuación normal Eq. (4.20) es un caso particular de

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, para estudiar los ceros de las soluciones de la ecuación diferencial Eq. (4.5) basta estudiar los ceros de la ecuación diferencial Eq. (4.22). Antes de entrar en detalles formales observemos que Eq. (4.22) se puede escribir como

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = -q(x)Y(x) \quad (4.23)$$

que se puede ver como la segunda ley de Newton donde $Y(x)$ representa la posición de una partícula y $q(x)$ una fuerza que cambia punto a punto.

Primero veamos un caso sencillo. Supongamos que $q(x) = \beta$, con β una constante, en este caso Eq. (4.23) toma la forma

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = -\beta Y(x), \quad (4.24)$$

que es la segunda ley de Newton con una fuerza constante centrada en el origen. Si $\beta > 0$, la fuerza es atractiva y una partícula bajo su influencia pasa una cantidad infinita de veces por el cero. Es decir, si $\beta > 0$ las soluciones de Eq. (4.24) tienen un número infinito de ceros. Ahora, si $\beta < 0$ tenemos una fuerza repulsiva y una partícula bajo su influencia a lo más puede pasar una vez por el cero. Por lo tanto podemos, afirmar que, si $\beta < 0$ las soluciones de Eq. (4.24) tienen a lo más un cero.

Ahora veamos un caso más general donde $q(x)$ tiene signo definido. Primero supongamos que $q(x) < 0$ para cualquier x positiva. Entonces afirmamos que la soluciones de Eq. (4.22) a lo más tienen un cero. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que, desde el punto de vista físico Eq. (4.23) representa una partícula bajo una fuerza repulsiva. Por lo que, si existe x_0 tal

que $Y(x_0) = 0$, la partícula no puede regresar a la posición $Y(x_0) = 0$. Por lo tanto, si $q(x) < 0$ las soluciones de Eq. (4.22) a lo más tienen un cero.

Si $q(x) > 0$, podemos afirmar que la soluciones de Eq. (4.22) tiene un número infinito de ceros. Primero notemos que, desde el punto de vista físico, la ecuación Eq. (4.23) representa una partícula bajo una fuerza atractiva. Supongamos que $Y(x)$ es una solución con un número finito de cero. Si α es el máximo de los ceros, entonces si $x > \alpha$ la posición $Y(x)$ debe tener signo definido. Ahora, como la fuerza es tractiva, la partícula debe regresar de nuevo a la posición que tenía en α , es decir debe regresar a cero. Esto implica que debe existir $x_1 > \alpha$ donde $Y(x_1) = 0$. Por lo tanto, α no es el máximo de los ceros de $Y(x)$ y esta función no puede tener un número finito de ceros.

Otra forma de mostrar esta afirmación es la siguiente, como α es el máximo de los ceros de $Y(x)$, entonces si $x > \alpha$, la función $Y(x)$ tiene signo definido. De Eq. (4.23) se puede observar que si $Y(x) > 0$, entonces la segunda derivada es negativa, lo que quiere decir que la tasa de crecimiento disminuye, es decir $Y(x)$ decrece y eventualmente llega a cero. Que contradice el hecho de que α sea el máximo de los ceros de $Y(x)$. Ahora si $Y(x) < 0$, entonces de Eq. (4.23) se puede observar que la segunda derivada es positiva, lo que quiere decir que la tasa de crecimiento aumenta. Por lo tanto, $Y(x)$ crece y eventualmente llega a cero. Esto contradice el hecho de que α sea el máximo de los cero de $Y(x)$.

También podemos afirmar que en un intervalo cerrado y acotado las soluciones de Eq. (4.23) sólo pueden tener un número finito de ceros. Para probar esta afirmación recordemos el principio de Weierstrass, el cual no dice que una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente. Ahora, supongamos que $Y(x)$ es solución no trivial de Eq. (4.23) y que tiene un número infinito de ceros en el intervalo $[a, b]$. Con ese conjunto infinito de ceros se puede formar una sucesión acotada. Por lo que existe una subsucesión, $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, de ceros de $Y(x)$ que converge en un punto x_0 de $[a, b]$. Como $Y(x)$ es continua, se debe cumplir $Y(x_0) = 0$, además

$$\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Y(x_i) - Y(x_0)}{x_i - x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_i - x_0} = 0. \quad (4.25)$$

Así, tenemos una solución de Eq. (4.23) que cumple $Y(x_0) = 0$, $\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$, por el teorema de unicidad, este resultado implica que $Y(x) = 0$. Esto es absurdo, pues supusimos que $Y(x)$ es una solución no trivial de Eq. (4.23). Así, en un intervalo cerrado y acotado las soluciones de Eq. (4.23) solo puede tener

un número finito de ceros, que implica que los ceros de $Y(x)$ deben formar un conjunto numerable.

4.5. Teorema de comparación de Sturm

Ahora, supongamos que $\tilde{q}(x) < q(x)$ y que $Y(x)$ y $\tilde{Y}(x)$ son soluciones de las ecuaciones

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2\tilde{Y}(x)}{dx^2} + \tilde{q}(x)\tilde{Y}(x) = 0. \quad (4.27)$$

Entonces se puede afirmar que $Y(x)$ tiene un cero entre dos ceros consecutivos de $\tilde{Y}(x)$. A esta afirmación se le llama el **Teorema de Comparación de Sturm**, para su demostración ocuparemos el Wronskiano

$$W(Y, \tilde{Y})(x) = Y(x)\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} - \frac{dY(x)}{dx}\tilde{Y}(x). \quad (4.28)$$

Se puede probar que considerando Eq. (4.26) y Eq. (4.27) se encuentra

$$\frac{dW(Y, \tilde{Y})(x)}{dx} = Y(x)\frac{d^2\tilde{Y}(x)}{dx^2} - \frac{d^2Y(x)}{dx^2}\tilde{Y}(x) = (q(x) - \tilde{q}(x))\tilde{Y}(x)Y(x) \quad (4.29)$$

Ahora, supongamos que a_1, a_2 son ceros consecutivos de $\tilde{Y}(x)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tilde{Y}(x) > 0$ en (a_1, a_2) , esto implica

$$\left.\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx}\right|_{a_1} > 0 \quad \left.\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx}\right|_{a_2} < 0. \quad (4.30)$$

También se cumple

$$W(Y, \tilde{Y})(a_1) = Y(a_1)\left.\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx}\right|_{a_1}, \quad W(Y, \tilde{Y})(a_2) = Y(a_2)\left.\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx}\right|_{a_2}. \quad (4.31)$$

De Eq. (4.29) es claro que el signo de $\frac{dW(Y, \tilde{Y})(x)}{dx}$ en $[a_1, a_2]$ solo depende del signo de $Y(x)$. Supongamos que $Y(x)$ no tiene ceros en ese intervalo, si $Y(x) > 0$ entonces $(q(x) - \tilde{q}(x))Y(x)\tilde{Y}(x) > 0$. Note que al integrar Eq. (4.29) se encuentra que $W(a_2) > W(a_1)$. Mientras que de Eq. (4.31) se tiene $W(a_1) > 0$ y $W(a_2) < 0$, lo cual es absurdo. Así, $Y(x)$ no puede tener

signo positivo en el intervalo $[a_1, a_2]$. Ahora, si $Y(x) < 0$ en $[a_1, a_2]$, entonces $(q(x) - \tilde{q}(x))Y(x)\tilde{Y}(x) < 0$ y al integrar Eq. (4.29) se encuentra que $W(a_2) < W(a_1)$. Pero de Eq. (4.31) se tiene $W(a_1) < W(a_2)$, lo cual es absurdo. Así, $Y(x)$ no puede tener solo signo negativo en el intervalo $[a_1, a_2]$. Esto implica que debe cambiar de signo en el intervalo $[a_1, a_2]$ y por lo tanto debe tener un cero en ese intervalo.

Por ejemplo, supongamos que tenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + q(x)Y(x) = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2\tilde{Y}(x)}{dx^2} + k^2\tilde{Y}(x) = 0, \quad k = \text{constante}, \quad (4.33)$$

y se cumple $q(x) > k^2$. Como las soluciones de Eq. (4.33) tienen ceros en los intervalos $\left[\frac{n\pi}{k}, \frac{(n+1)\pi}{k}\right]$, podemos afirmar que las soluciones de Eq. (4.32) también tienen ceros en esos intervalos.

Los resultados que hemos visto nos sirven para estudiar los ceros de las soluciones de la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Y(x) = 0, \quad (4.34)$$

a las soluciones de esta ecuación se les llaman funciones de Bessel. En este caso la forma normal es

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x)u(x) = 0, \quad (4.35)$$

con

$$q(x) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}. \quad (4.36)$$

Note que si $x > (\sqrt{4\nu^2 - 1})/2$, se tiene $q(x) > 0$. Por lo tanto, las funciones de Bessel tienen un número infinito de ceros.

Las funciones de Bessel las podemos comparar con las soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = 0, \quad (4.37)$$

cuyas soluciones son $\{\sin x, \cos x\}$. La distancia entre dos ceros consecutivos para estas funciones es π .

Ahora, si $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2}$, se cumple

$$1 < 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}. \quad (4.38)$$

Entonces cada intervalo de longitud π tiene al menos un cero de las soluciones de la ecuación de Bessel. Para el caso $\nu = \frac{1}{2}$, la ecuación normal de Bessel Eq. (4.35) se reduce a Eq. (4.37) y la distancia entre los ceros es exactamente π . Ahora, si $\frac{1}{2} < \nu$, se cumple

$$1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} < 1, . \quad (4.39)$$

Esto implica que entre dos ceros sucesivos de las soluciones de Eq. (4.37) hay a lo más un cero de las funciones de Bessel. En efecto, supongamos que α_1 y α_2 son ceros sucesivos de Eq. (4.37) y que en (α_1, α_2) hay dos ceros de las funciones de Bessel. Como se cumple Eq. (4.39), debe haber un cero de las soluciones de Eq. (4.37), lo cual es absurdo, pues supusimos que α_1 y α_2 son ceros sucesivos de las soluciones de Eq. (4.37). Por lo tanto, si $\frac{1}{2} < \nu$, en cada intervalo de longitud π hay a lo más un cero de las funciones de Bessel.

4.6. Problema de Sturm-Liouville

Una ecuación diferencial que surge en diferentes problemas de física y matemáticas es la ecuación de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + (\lambda q(x) + r(x)) \psi(x) = 0. \quad (4.40)$$

Donde $q(x), p(x), r(x)$ son funciones reales, $q(x)$ es una función positiva en el intervalo (a, b) y λ es una constante real. El problema consiste en encontrar las constantes λ y funciones $\psi(x)$ que resuelven Eq. (4.40).

La ecuación Eq. (4.40) se suele resolver con las condiciones de Dirichlet

$$\psi(a) = \psi(b) = 0, \quad (4.41)$$

o las de Neumann

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0. \quad (4.42)$$

Si no se cumple ninguna de estas condiciones se puede pedir que $p(x)$ cumpla

$$p(a) = p(b) = 0. \quad (4.43)$$

La afirmación importante aquí es que si $\psi_{\lambda_1}(x)$ es solución de Eq. (4.40) con λ_1 y $\psi_{\lambda_2}(x)$ es solución de Eq. (4.40) con λ_2 y además se satisfacen una de las condiciones Eqs. (6.72)-(4.43), entonces se cumple

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0.$$

Para probar esta afirmación ocuparemos que se satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) + (\lambda_1 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

El complejo conjugado de la segunda ecuación es

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}^*(x) = 0. \quad (4.45)$$

Además, multiplicando $\psi_{\lambda_2}^*(x)$ por Eq. (4.44) y $\psi_{\lambda_1}(x)$ por Eq. (4.45) se llega a

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) + (\lambda_1 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) + (\lambda_2 q(x) + r(x)) \psi_{\lambda_1}(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) &= 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, considerando

$$f(x) \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(x)g(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x)$$

se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \right) - p(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \\ + \left(\lambda_1 q(x) + r(x) \right) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(p(x) \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) - p(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \\ + \left(\lambda_2 q(x) + r(x) \right) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Restando estas dos últimas ecuaciones se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(p(x) \left(\psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} - \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) \right) \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2) q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0. \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación en el intervalo $[a, b]$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(p(x) \left(\psi_{\lambda_2}^*(x) \frac{d\psi_{\lambda_1}(x)}{dx} - \psi_{\lambda_1}(x) \frac{d\psi_{\lambda_2}^*(x)}{dx} \right) \right) \Big|_a^b \\ & + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0. \end{aligned}$$

Suponiendo que las soluciones satisfacen las condiciones de Dirichlet, de Neumann o bien que $p(x)$ se anule en la frontera, se consigue

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0,$$

que es lo que queríamos probar.

En particular note que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se infiere que

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (4.46)$$

Además, se puede ver que la integral

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = \alpha_\lambda, \quad (4.47)$$

es positiva, es decir $\alpha_\lambda > 0$. Por lo que, si $\alpha_\lambda < \infty$, el conjunto de funciones

$$\frac{\tilde{\psi}_\lambda(x)}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \quad (4.48)$$

cumplen

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \tilde{\psi}_{\lambda_2}(x) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.49)$$

Se dice que las soluciones de Eq. (4.40) que satisfacen alguna de las condiciones Eqs. (6.72)-(4.43) son un conjunto de funciones ortonormales con función de peso $q(x)$. En los próximos capítulos veremos varias aplicaciones de este resultado.

Capítulo 5

Funciones de Bessel

En este capítulo estudiaremos la ecuación de Bessel y sus soluciones, las cuales se llaman funciones de Bessel. Las funciones de Bessel tienen aplicaciones en diversos problemas de mecánica cuántica, electrodinámica y otras disciplinas.

5.1. Ecuación de Bessel

La ecuación de Bessel es

$$\frac{d^2 R(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) R(z) = 0, \quad (5.1)$$

que se puede escribir de la forma

$$z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + z \frac{dR(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) R(z) = 0. \quad (5.2)$$

Para resolver esta ecuación ocuparemos el *Método de Frobenius* [18], es decir propondremos soluciones de la forma

$$R(z) = z^m \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m}, \quad a_0 \neq 0. \quad (5.3)$$

De donde

$$\begin{aligned} -\nu^2 R(z) &= \sum_{n \geq 0} -\nu^2 a_n z^{n+m} = -\nu^2 a_0 z^m - \nu^2 a_1 z^{m+1} - \sum_{n \geq 2} \nu^2 a_n z^{n+m}, \\ z^2 R(z) &= z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m} = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+m+2} = \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^{n+m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z \frac{dR(z)}{dz} &= z \sum_{n \geq 0} (n+m) a_n z^{n+m-1} = \sum_{n \geq 0} (n+m) a_n z^{n+m} \\
&= m a_0 z^m + (m+1) a_1 z^{m+1} + \sum_{n \geq 2} (n+m) a_n z^{n+m}, \\
z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} &= z^2 \sum_{n \geq 0} (n+m)(n+m-1) a_n z^{n+m-2} \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+m)(n+m-1) a_n z^{n+m} \\
&= m(m-1) a_0 z^m + (m+1) m a_1 z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} (n+m)(n+m-1) a_n z^{n+m}.
\end{aligned}$$

Considerando estas cuatro igualdades en Eq. (5.2) y tomando en cuenta que

$$(n+m)(n+m-1) + (n+m) = (n+m)^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned}
z^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + z \frac{dR(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) R(z) &= \\
&= a_0 (-\nu^2 + m + m(m-1)) z^m + a_1 (-\nu^2 + (m+1) + (m+1)m) z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} \left[[(n+m)(n+m-1) + (n+m) - \nu^2] a_n + a_{n-2} \right] z^{n+m} \\
&= a_0 (m^2 - \nu^2) z^m + a_1 ((m+1)^2 - \nu^2) z^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n \geq 2} (a_{n-2} + ((n+m)^2 - \nu^2) a_n) z^{n+m} = 0, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

que se debe cumplir para cualquier z . Esto implica

$$a_0(m^2 - \nu^2) = 0, \tag{5.5}$$

$$a_1((1+m)^2 - \nu^2) = 0, \tag{5.6}$$

$$a_{n-2} + a_n((n+m)^2 - \nu^2) = 0. \tag{5.7}$$

Como $a_0 \neq 0$, Eq. (5.5) induce

$$m^2 = \nu^2, \quad m = \pm \nu, \tag{5.8}$$

introduciendo este resultado en Eq. (5.6) se llega a

$$a_1 = 0. \tag{5.9}$$

Además, considerando

$$(n+m)^2 - \nu^2 = (n \pm \nu)^2 - \nu^2 = n^2 \pm 2n\nu + \nu^2 - \nu^2 = n(n \pm 2\nu) \quad (5.10)$$

en Eq. (5.7) obtiene

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\nu)}. \quad (5.11)$$

Apartir de esta igualdad y ocupando Eq. (5.9) se infiere que $a_3 = 0$, que a su vez implica $a_5 = 0$. Es claro que en general $a_{2n+1} = 0$. Así, los únicos a_n diferentes de cero son de la forma

$$a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{2n(2n \pm 2\nu)} = \frac{(-)}{2^2 n(n \pm \nu)} a_{2(n-1)}. \quad (5.12)$$

Note que hay un problema si ν es un natural y se considera el signo negativo en (5.12), después trataremos esta cuestión. Observe que Eq. (5.12) se puede escribir como

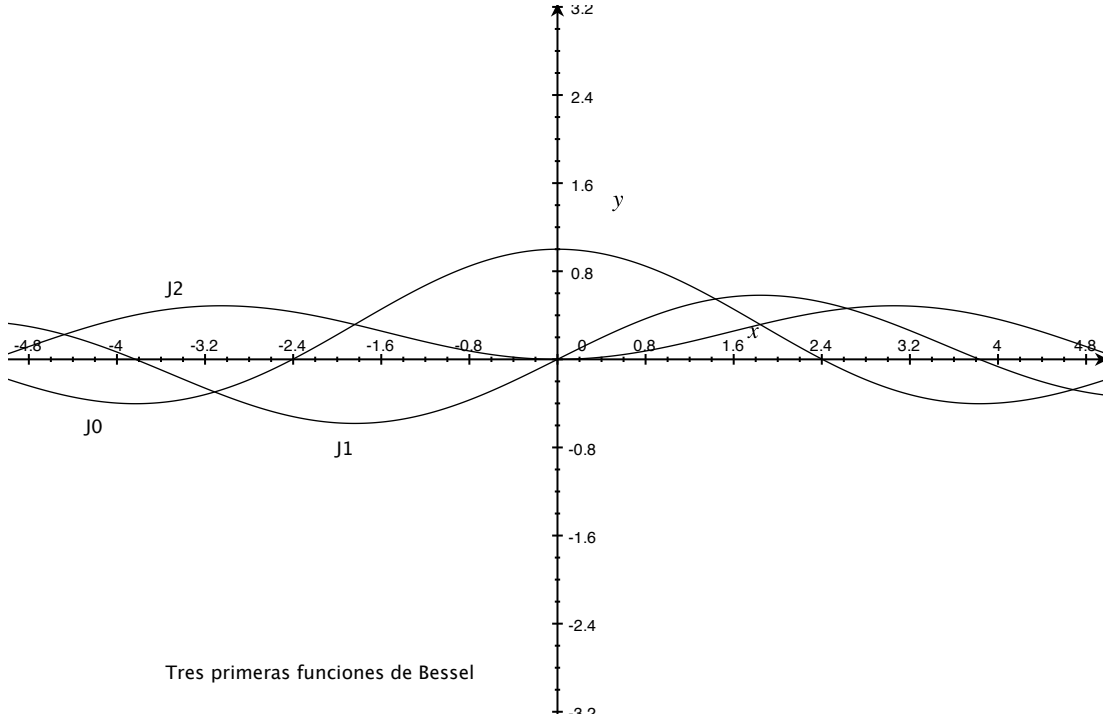
$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-)}{2^2 n(n \pm \nu)} a_{2(n-1)} = \frac{(-)(n-1)!(n-1 \pm \nu)!}{2^2 n!(n \pm \nu)!} a_{2(n-1)} \\ &= \left(\frac{(-)(n-1)!(n-1 \pm \nu)!}{2^2 n!(n \pm \nu)!} \right) \left(\frac{(-)(n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^2 (n-1)!(n-1 \pm \nu)!} \right) a_{2(n-2)} \\ &= \left(\frac{(-)^2 (n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 2} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-2)} \\ &= \left(\frac{(-)^2 (n-2)!(n-2 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 2} n!(n \pm \nu)!} \right) \left(\frac{(-)(n-3)!(n-3 \pm \nu)!}{2(n-2)!(n-2 \pm \nu)!} \right) a_{2(n-3)} \\ &= \left(\frac{(-)^3 (n-3)!(n-3 \pm \nu)!}{2^{2 \cdot 3} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-3)} \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{(-)^k (n-k)!(n-k \pm \nu)!}{2^{2 \cdot k} n!(n \pm \nu)!} \right) a_{2(n-k)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

El máximo valor que puede tomar k en la expresión anterior es n , entonces

$$a_{2n} = \frac{(-)^n (\pm \nu)!}{2^{2n} n!(n \pm \nu)!} a_0, \quad (5.14)$$

tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm \nu} (\pm \nu)!}, \quad (5.15)$$



se tiene

$$a_{2n} = \frac{(-)^n}{2^{2n\pm\nu} n!(n \pm \nu)!}. \quad (5.16)$$

Sustituyendo este resultado en Eq. (5.3) se encuentra

$$R(z) = z^{\pm\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{2^{2n\pm\nu} n!(n \pm \nu)!} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n \pm \nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n \pm \nu}, \quad (5.17)$$

que son las llamadas funciones de Bessel. Se puede observar que ocupando la función Gamma, $\Gamma(z)$, las funciones de Bessel se pueden escribir como

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (5.18)$$

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}. \quad (5.19)$$

Note que si $\nu > 0$, se cumple $J_\nu(0) = 0$ y $J_{-\nu}(0) = \infty$.

Ahora, para el caso en que ν es un natural, $\nu = m$, probaremos que se cumple

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \quad (5.20)$$

Primero notemos que $J_{-m}(z)$ está bien definida y recordemos que si l es un natural $1/\Gamma(-l) = 0$. Por lo que, el término $1/\Gamma(n-m+1)$ es nulo si $n-m+1 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m} \\ &= \sum_{n \geq m} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n+m-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\ &= (-1)^m \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m} \\ &= (-1)^m J_m(z), \end{aligned} \quad (5.21)$$

que es lo que queríamos probar. Es decir, si m es natural, $J_{-m}(z)$ es solución de la ecuación de Bessel, pero no es linealmente independientes de $J_m(z)$. Por esta razón en lugar de usar las funciones de Bessel del tipo $J_{-\nu}(z), \nu > 0$, se suelen ocupar las funciones de Neuman

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}, \quad (5.22)$$

o las funciones de Hankel

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = J_\nu(z) \pm iN_\nu(z). \quad (5.23)$$

5.2. Función generatriz

Existe una función de la cual se pueden extraer todas las funciones de Bessel de orden n . A esta función se le llama función generatriz y es:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) t^n. \quad (5.24)$$

Para probar esta igualdad primero note que

$$e^{\frac{zt}{2}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{zt}{2} \right)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^k,$$

$$e^{\frac{-z}{2t}} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \left(\frac{-z}{2t} \right)^j = \sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j t^{-j}}{j!} \left(\frac{z}{2} \right)^j,$$

estas series implican

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{zt}{2}} e^{\frac{-z}{2t}} = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^k \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j t^{-j}}{j!} \left(\frac{z}{2} \right)^j \right)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{t^{k-j} (-)^j}{k! j!} \left(\frac{z}{2} \right)^{k+j}.$$

Ahora, definamos $n = k - j$, por lo que $k = n + j$ y $k + j = 2j + n$, con este cambio de variable se llega a

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \geq 0} \frac{t^n (-)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2j+n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \sum_{j \geq 0} \frac{(-)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2j+n}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(z).$$

Por lo tanto, se cumple Eq. (5.24). En particular si $t = e^{i\theta}$ se encuentra

$$\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = iz \sin \theta, \quad (5.25)$$

de donde

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (5.26)$$

Adicionalmente, como $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$ y $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, se llega a

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (i)^n J_n(z) e^{in\theta}, \quad (5.27)$$

esta es la llamada propiedad de Jacobi-Anger.

Además, considerando que si m y n son enteros se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{in\theta} = 2\pi\delta_{nm} \quad (5.28)$$

y recurriendo a Eq. (5.26) se consigue

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - m\theta)} &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{iz \sin \theta} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) 2\pi\delta_{nm} \\ &= 2\pi J_m(z), \end{aligned}$$

entonces

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - n\theta)}. \quad (5.29)$$

Tomando en cuenta la paridad de las funciones $\{\sin u, \cos u\}$ y la fórmula de Euler, esta integral toma la forma

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(z \sin \theta - n\theta)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (\cos(z \sin \theta - n\theta) + i \sin(z \sin \theta - n\theta)) \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (5.30)$$

es decir

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta). \quad (5.31)$$

Esta expresión de las funciones de Bessel fue la que originalmente encontró F. W. Bessel.

5.3. Relaciones de recurrencia

Ahora veremos que las funciones de Bessel satisfacen las relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad (5.32)$$

$$\frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_{\nu}(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (5.33)$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^{\nu} J_{\nu}(z)) = z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z), \quad (5.34)$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^{-\nu} J_{\nu}(z)) = (-)^n z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}(z). \quad (5.35)$$

Para probar la primera identidad notemos que

$$z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2(n+\nu)}}{2^{2n+\nu}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(z^{\nu} J_{\nu}(z))}{dz} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n 2(n+\nu)}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2(n+\nu)-1}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu-1)!} \frac{z^{2n+\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}} z^{\nu} \\ &= z^{\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu-1} = z^{\nu} J_{\nu-1}(z), \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la identidad Eq. (5.32).

Ahora,

$$z^{-\nu} J_{\nu}(z) = z^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n}}{2^{2n+\nu}},$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d(z^{-\nu} J_{\nu}(z))}{dz} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n 2n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^n 2n}{n!(n+\nu)!} \frac{z^{2n-1}}{2^{2n+\nu}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^{n+1} 2(n+1)}{(n+1)!(n+\nu+1)!} \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+\nu+2}} \\ &= (-) \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu+1)!} \frac{z^{2n+\nu+1}}{2^{2n+\nu+1}} z^{-\nu} \\ &= (-) z^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n}{n!(n+\nu+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1} \\ &= (-) z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \end{aligned}$$

así, se cumple la identidad Eq. (5.33).

Para probar las identidades Eqs. (5.34)-(5.35) ocuparemos inducción. Primero haremos la prueba de Eq. (5.34). Para $n = 0$ esta igualdad es correcta, por lo que la base inductiva está demostrada. Para el paso inductivo debemos suponer Eq. (5.34) y probar

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^\nu J_\nu(z)) = z^{\nu-(n+1)} J_{\nu-(n+1)}(z).$$

Note que ocupando la hipótesis inductiva y Eq. (5.32) se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^\nu J_\nu(z)) &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^\nu J_\nu(z)) \right) \\ &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{\nu-n} J_{\nu-n}(z)) \\ &= \frac{1}{z} (z^{\nu-n} J_{\nu-n-1}(z)) = z^{\nu-(n+1)} J_{\nu-(n+1)}(z) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Así, la igualdad (5.34) es correcta para cualquier n .

Ahora probaremos Eq. (5.35). Para $n = 0$ esta igualdad es correcta, por lo que la base inductiva está demostrada. Para el paso inductivo debemos suponer Eq. (5.35) y demostrar la igualdad

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = (-)^{n+1} z^{-(\nu+n+1)} J_{\nu+n+1}(z).$$

Usando la hipótesis inductiva y Eq. (5.33) se encuentra

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} (z^{-\nu} J_\nu(z)) &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n (z^{-\nu} J_\nu(z)) \right) \\ &= \frac{1}{z} \frac{d}{dz} ((-)^n z^{-\nu-n} J_{\nu+n}(z)) \\ &= (-)^n \frac{1}{z} \frac{d}{dz} (z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}(z)) \\ &= (-)^n (-) \frac{1}{z} (z^{-(\nu+n)} J_{\nu+n+1}(z)) \\ &= (-)^{n+1} z^{-(\nu+n+1)} J_{\nu+n+1}(z) \end{aligned}$$

esto es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto la igualdad Eq. (5.35) es válida para cualquier n .

Las identidades Eqs. (5.32)-(5.35) también se pueden escribir como

$$J_{\nu-1}(z) = \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \frac{\nu}{z}J_\nu(z), \quad (5.36)$$

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{dJ_\nu(z)}{dz} - \frac{\nu}{z}J_\nu(z), \quad (5.37)$$

$$J_{\nu-n}(z) = z^{n-\nu} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^\nu J_\nu(z)), \quad (5.38)$$

$$J_{\nu+n}(z) = (-1)^n z^{\nu+n} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n (z^{-\nu} J_\nu(z)). \quad (5.39)$$

Estas identidades son importantes para las aplicaciones.

5.4. Funciones de Bessel de orden $(n + \frac{1}{2})$

Las funciones de Bessel de orden $(n + \frac{1}{2})$ son particularmente importantes para las aplicaciones, por lo que vale la pena estudiar sus propiedades. Primero observemos que ocupando Eq. (5.18) y la serie de Taylor de la función $\sin z$ se llega a

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (n + \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \left(\frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)! \sqrt{\pi}} z^{2n} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \end{aligned}$$

es decir

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z. \quad (5.40)$$

Además, considerando Eq. (5.18) y la serie de Taylor de la función $\cos z$, se obtiene

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! (n - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \left(\frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

por lo que

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z. \quad (5.42)$$

Usando Eqs. (5.39)-(5.40) se encuentra

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right). \quad (5.43)$$

De forma analoga, apelando a (5.39)-(5.40) se llega a

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(z) = z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right). \quad (5.44)$$

Adicionalmente, ocupando el resultado

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi = 0, \quad \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi = (-)^n, \quad (5.45)$$

se encuentra

$$\begin{aligned} N_{(n+\frac{1}{2})}(z) &= \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(z) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi - J_{-(n+\frac{1}{2})}(z)}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} \\ &= (-)^{n+1} J_{-(n+\frac{1}{2})}(z), \end{aligned}$$

es decir

$$N_{(n+\frac{1}{2})}(z) = (-)^{n+1} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right).$$

Las funciones de Hankel de orden $(n + \frac{1}{2})$ tienen la forma

$$\begin{aligned} H_{(n+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z) &= J_{(n+\frac{1}{2})}(z) \pm i N_{(n+\frac{1}{2})}(z) \\ &= (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right) \\ &\quad \pm i (-)^{n+1} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right) \\ &= (-)^n z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z \mp i \cos z}{z}\right) \\ &= (-)^n (\mp i) z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z \pm i \sin z}{z}\right) \\ &= (\mp i) (-)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right), \end{aligned}$$

entonces

$$H_{(n+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z) = (\mp i)(-)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right).$$

Definiremos las funciones esféricas de Bessel como

$$\begin{aligned} j_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} J_{(l+\frac{1}{2})}(z), \\ n_l(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} N_{(l+\frac{1}{2})}(z), \\ h_l^{(1,2)}(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{(l+\frac{1}{2})}^{(1,2)}(z), \end{aligned} \quad (5.46)$$

de donde

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\sin z}{z}\right), \quad (5.47)$$

$$n_l(z) = -(-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{\cos z}{z}\right),$$

$$h_l^{(1,2)}(z) = (\mp i)(-z)^l \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^l \left(\frac{e^{\pm iz}}{z}\right). \quad (5.48)$$

Estas funciones se usan en mecánica cuántica y electrodinámica.

5.5. Ortonormalidad

En el capítulo anterior vimos que cada función de Bessel $J_\nu(z)$ tienen un número numerable de raíces, λ_n , que satisfacen $J_\nu(\lambda_n) = 0$. Ocuparemos este resultado para probar que la integral del producto de dos funciones de Bessel satisfacen una propiedad que llamaremos de ortonormalidad.

La ecuación

$$\frac{d^2 R_\alpha(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR_\alpha(x)}{dx} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R_\alpha(x) = 0, \quad (5.49)$$

con el cambio de variable $z = \alpha x$ se convierte en la ecuación de Bessel Eq. (5.1) que tiene las soluciones $J_\nu(z)$, por lo que $R_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$. Además, Eq. (5.49) se puede escribir como

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR_\alpha(x)}{dx}\right) + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R_\alpha(x) = 0, \quad (5.50)$$

es decir

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right) + \left(x\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\alpha(x) = 0. \quad (5.51)$$

En particular si $\alpha = \lambda_n$ se tiene la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dR_\nu(x)}{dx} \right) + \left(x\lambda_n^2 - \frac{\nu^2}{x} \right) R_\nu(x) = 0, \quad (5.52)$$

que tiene las soluciones $R_\nu(x) = J_\nu(\lambda_n x)$. Note que esta ecuación es del tipo Sturm-Liouville Eq. (4.40) y si $\nu \geq 0$, se cumplen las condiciones de borde de Dirichlet

$$R_\nu(0) = R_\nu(1) = 0. \quad (5.53)$$

Por lo tanto, usando el teorema de Sturm-Liouville, mostrado en el capítulo anterior, se llega a

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = 0. \quad (5.54)$$

En particular si $\lambda_n \neq \lambda_m$, se debe cumplir

$$\int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = 0, \quad (5.55)$$

de donde

$$\int_0^1 dx x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) = \delta_{nm} a^2, \quad a = \text{constante}. \quad (5.56)$$

A esta propiedad se le llamada de ortogonalidad, se dice que las funciones de Bessel son ortogonales con peso x .

Para calcular la constante a multiplicaremos Eq. (5.49) por $2x^2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx}$, de donde

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx} \frac{d^2 R_\alpha(x)}{dx^2} + 2x \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) 2 \frac{dR_\alpha(x)}{dx} R_\alpha(x) \\ &= x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + 2x \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 \\ &= \frac{d}{dx} \left(x^2 \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 \right) - \nu^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 + x^2 \alpha^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2, \end{aligned}$$

ocupando que

$$x^2 \frac{d}{dx} (R_\alpha(x))^2 = \frac{d}{dx} (x^2 (R_\alpha(x))^2) - 2x (R_\alpha(x))^2,$$

se tiene

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) (R_\alpha(x))^2 \right) - 2\alpha^2 x (R_\alpha(x))^2 = 0. \quad (5.57)$$

Por lo tanto,

$$2\alpha^2 \int_0^1 dx x (R_\alpha(x))^2 = \left(x^2 \left(\frac{dR_\alpha(x)}{dx} \right)^2 + (x^2 \alpha^2 - \nu^2) (R_\alpha(x))^2 \right) \Big|_0^1. \quad (5.58)$$

En particular, como $R_\alpha(x) = J_\nu(\alpha x)$, si $\nu > 0$ y $\alpha = \lambda_n$ con $J_\nu(\lambda_n) = 0$, se tiene

$$2\lambda_n^2 \int_0^1 dx x (J_\nu(\lambda_n x))^2 = \left(\frac{dJ_\nu(\lambda_n x)}{dx} \right)^2 \Big|_{x=1} = \lambda_n^2 \left(\frac{dJ_\nu(\lambda_n x)}{d(\lambda_n x)} \right)^2 \Big|_{x=1}, \quad (5.59)$$

considerando la identidad Eq. (5.37) se llega a

$$\int_0^1 dx x (J_\nu(\lambda_n x))^2 = \frac{1}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2. \quad (5.60)$$

Por lo que, si $\nu > 0$ y λ_n, λ_m son raíces de la función de Bessel $J_\nu(z)$ se cumple

$$\int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) J_\nu(\lambda_m z) = \frac{\delta_{nm}}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2. \quad (5.61)$$

Entonces, para cualquier función $f(z)$ definida en el intervalo $(0, 1)$ se puede expresar en términos de la función de Bessel $J_\nu(\lambda_n z)$. En efecto, supongamos que

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m J_\nu(\lambda_m z), \quad (5.62)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) f(z) &= \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) \sum_{m \geq 0} a_m J_\nu(\lambda_m z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) J_\nu(\lambda_m z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \frac{\delta_{nm}}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2 = \frac{a_n}{2} (J_{\nu+1}(\lambda_n))^2, \end{aligned} \quad (5.63)$$

por lo que

$$a_n = \frac{2}{(J_{\nu+1}(\lambda_n))^2} \int_0^1 dz z J_\nu(\lambda_n z) f(z). \quad (5.64)$$

En la próxima sección veremos una aplicación de este resultado.

5.6. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

Ahora veremos algunas aplicaciones de las funciones de Bessel.

Primero estudiaremos las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = 0.$$

Para resolver esta ecuación proponemos $\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, de donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{\partial^2 R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}{\partial z^2} \\ &= \frac{\Phi(\varphi)Z(z)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + R(\rho)\Phi(\varphi) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} = \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (5.65)$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) = 0,$$

que induce

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2, \quad \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \alpha^2 Z(z), \quad (5.66)$$

la solución general a esta ecuación es

$$Z(z) = a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}. \quad (5.67)$$

Sustituyendo (5.66) en (5.65) se tiene

$$\frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} = \frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 = 0,$$

así

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho^2 \frac{\nabla^2 \phi(\rho, \varphi, z)}{\phi(\rho, \varphi, z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (5.68)$$

que implica

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\nu^2, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\nu^2 \Phi(\varphi), \quad (5.69)$$

cuya solución general es

$$\Phi(\varphi) = A_\nu e^{i\nu\varphi} + B_\nu e^{-i\nu\varphi}. \quad (5.70)$$

Introduciendo (5.69) en (5.65) se llega a

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} + \alpha^2 = 0,$$

es decir,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Con el cambio de variable $\zeta = \alpha\rho$ se encuentra

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{dR(\zeta)}{d\zeta} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2} \right) R(\zeta) = 0, \quad (5.71)$$

que es la ecuación de Bessel. De donde

$$R(\rho) = C_\nu J_\nu(\alpha\rho) + D_\nu J_{-\nu}(\alpha\rho).$$

Por lo que las soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas son de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, \nu} = (a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}) (A_\nu e^{i\nu\varphi} + B_\nu e^{-i\nu\varphi}) (C_\nu J_\nu(\alpha\rho) + D_\nu J_{-\nu}(\alpha\rho)).$$

Las constantes $a_\alpha, b_\alpha, A_\nu, B_\nu, C_\nu, D_\nu$ se determinan según las condiciones de borde del problema.

Por ejemplo, si en $\rho = 0$ el potencial debe ser finito, como la función de Bessel $J_{-\nu}(\alpha\rho)$ diverge en $\rho = 0$, debe ocurrir que $D_\nu = 0$. En ese caso la solución es de la forma

$$\phi(\rho, \varphi, z)_{\alpha, \nu} = (a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}) (A_\nu e^{i\nu\varphi} + B_\nu e^{-i\nu\varphi}) J_\nu(\alpha\rho).$$

Además, para muchos problemas es importante que $\phi(\rho, \varphi, z)$ sea una función univaluada. Así, como (ρ, φ, z) y $(\rho, \varphi + 2\pi, z)$ representan el mismo punto, se debe cumplir

$$\phi(\rho, \varphi + 2\pi, z) = \phi(\rho, \varphi, z), \quad (5.72)$$

en consecuencia

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = A_\nu e^{i\nu(\varphi+2\pi)} + B_\nu e^{-i\nu(\varphi+2\pi)} = \Phi(\varphi) = A_\nu e^{i\nu\varphi} + B_\nu e^{-i\nu\varphi}, \quad (5.73)$$

que induce

$$e^{i2\pi\nu} = 1. \quad (5.74)$$

Por lo tanto, ν debe ser un número natural n . Esto implica que $R(\rho)$ debe ser de la forma

$$R(\rho) = C_n J_n(\alpha\rho) + D_n J_{-n}(\alpha\rho). \quad (5.75)$$

Así, para este caso se tiene las soluciones

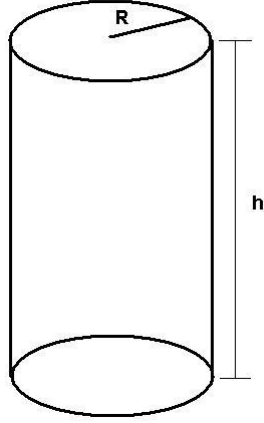
$$\phi_{\alpha, n}(\rho, \varphi, z) = (a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) (C_n J_n(\alpha\rho) + D_n J_{-n}(\alpha\rho)).$$

Por lo tanto, si el potencial es univaluado y además finito en el origen, debe ser una combinación lineal de potenciales de la forma

$$\phi_{\alpha, n}(\rho, \varphi, z) = (a_\alpha e^{\alpha z} + b_\alpha e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) J_n(\alpha\rho).$$

5.6.1. Ejemplo

Veamos un problema de electrostática.



Supongamos que tenemos un cilindro de radio \tilde{R} y altura h . La tapa inferior del cilindro y la superficie lateral tiene potencial cero, mientras que la tapa superior tiene potencial $V(\rho, \varphi)$. Calcularemos el potencial eléctrico en el interior del cilindro suponiendo que no hay cargas en esa región.

Por simplicidad, pondremos el eje del cilindro en el eje z y la tapa inferior la pondremos sobre el plano $x - y$. En este sistema las condiciones de borde son

$$\phi(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0, \quad \phi(\rho, \varphi, h) = V(\rho, \varphi). \quad (5.76)$$

Como no hay fuentes dentro del cilindro, el potencial debe ser finito en el interior. Además como el potencial debe ser univaluado, éste debe ser de la forma

$$\phi_{\alpha,n}(\rho, \varphi, z) = (a_{\alpha}e^{\alpha z} + b_{\alpha}e^{-\alpha z}) (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) J_n(\alpha\rho).$$

$$R(\rho) = C_n J_n(\alpha\rho). \quad (5.77)$$

Adicionalmente, como se debe cumplir la condición de borde $\phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0$, se tiene que

$$R(\tilde{R}) = C_n J_n(\alpha\tilde{R}) = 0, \quad (5.78)$$

que implica

$$\alpha\tilde{R} = \lambda_{nm}, \quad \alpha = \frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}}. \quad (5.79)$$

Donde λ_{nm} es la raíz m -ésima la función de Bessel de orden n . Así, la funciones $R(\rho)$ son de la forma

$$R(\rho) = C_n J_n \left(\frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right). \quad (5.80)$$

Note que Eq. (5.79) implica que $Z(z)$ tome la forma

$$Z(z) = a_{nm} e^{\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} + b_{nm} e^{-\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} \quad (5.81)$$

Mientras que la condición de borde $\phi(\rho, \varphi, 0) = 0$ implica que

$$Z(0) = (a_{nm} + b_{nm}) = 0, \quad (5.82)$$

por lo tanto,

$$Z(z) = a_{nm} \left(e^{\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} - e^{-\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}}} \right) = A_{nm} \sinh \left(\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}} \right). \quad (5.83)$$

Así, la solución más general de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de borde $\phi(\rho, \varphi, 0) = \phi(\tilde{R}, \varphi, z) = 0$, es

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left(\frac{\lambda_{nm} z}{\tilde{R}} \right) J_n \left(\frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) (A_{nm} \cos n\phi + B_{nm} \sin n\phi).$$

Para determinar los coeficientes A_{nm}, B_{nm} debemos imponer la condición de borde faltante:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi, h) &= V(\rho, \varphi) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left(\frac{\lambda_{nm} h}{\tilde{R}} \right) J_n \left(\frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) (A_{nm} \cos n\phi + B_{nm} \sin n\phi). \end{aligned}$$

Ahora, se puede probar que si k y l son naturales se cumplen las integrales

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos k\varphi \cos l\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin k\varphi \sin l\varphi = \pi \delta_{kl}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \cos k\varphi \sin l\varphi = 0,$$

por lo que, usando Eq. (5.61), se encuentra

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \left(\frac{\rho}{\tilde{R}} \right) \sin k\varphi J_k \left(\frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) V(\rho, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh \left(\frac{\lambda_{nm} h}{\tilde{R}} \right) B_{nm} \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \sin k\varphi \sin n\varphi \int_0^1 d \left(\frac{\rho}{\tilde{R}} \right) J_k \left(\frac{\lambda_{kl} \rho}{\tilde{R}} \right) J_n \left(\frac{\lambda_{nm} \rho}{\tilde{R}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sinh\left(\frac{\lambda_{nm}h}{\tilde{R}}\right) B_{nm} \pi \delta_{kn} \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) J_k\left(\frac{\lambda_{kl}\rho}{\tilde{R}}\right) J_n\left(\frac{\lambda_{nm}\rho}{\tilde{R}}\right) \\
&= \sum_{m \geq 0} \sinh\left(\frac{\lambda_{km}h}{\tilde{R}}\right) B_{km} \pi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) J_k\left(\frac{\lambda_{kl}\rho}{\tilde{R}}\right) J_k\left(\frac{\lambda_{km}\rho}{\tilde{R}}\right) \\
&= \sum_{m \geq 0} \sinh\left(\frac{\lambda_{km}h}{\tilde{R}}\right) B_{km} \pi \delta_{lm} \frac{1}{2} (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2 = \sinh\left(\frac{\lambda_{kl}h}{\tilde{R}}\right) B_{kl} \pi (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2,
\end{aligned}$$

entonces

$$B_{kl} = \frac{2}{\pi \sinh\left(\frac{\lambda_{kl}h}{\tilde{R}}\right) (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) \sin k\varphi J_k\left(\frac{\lambda_{kl}\rho}{\tilde{R}}\right) V(\rho, \varphi).$$

De la misma forma se obtiene

$$A_{kl} = \frac{2}{\pi \sinh\left(\frac{\lambda_{kl}h}{\tilde{R}}\right) (J_{k+1}(\lambda_{kl}))^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\left(\frac{\rho}{\tilde{R}}\right) \cos k\varphi J_k\left(\frac{\lambda_{kl}\rho}{\tilde{R}}\right) V(\rho, \varphi).$$

5.7. Ecuaciones tipo Bessel

Existen varias ecuaciones que se pueden reducir a la ecuación de Bessel. Por ejemplo, si $R(z)$ es solución de la ecuación de Bessel, la función

$$u(z) = z^{-c} R(az^b)$$

es una solución de la ecuación

$$z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + (2c + 1)z \frac{du(z)}{dz} + (a^2 b^2 z^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)) u(z) = 0. \quad (5.84)$$

Para probar esta afirmación tomaremos el cambio de variable $w = az^b$, de donde

$$z = \left(\frac{w}{a}\right)^{\frac{1}{b}}, \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \frac{z}{bw} = \frac{z^{1-b}}{ba}, \\ R(w) &= z^c u(z). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Por lo que

$$(w^2 - \nu^2) R(w) = (a^2 z^{2b} - \nu^2) z^c u(z) = \frac{z^c}{b^2} (a^2 b^2 z^{2b} - \nu^2 b^2) u(z),$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR(w)}{dw} &= \frac{d}{dw} (z^c u(z)) = \frac{dz}{dw} \frac{d}{dz} (z^c u(z)) \\
&= \left(\frac{z^{1-b}}{ab} \right) \left(cz^{c-1} u(z) + z^c \frac{du(z)}{dz} \right) \\
&= \frac{1}{ab} \left(cz^{c-b} u(z) + z^{c-b+1} \frac{du(z)}{dz} \right) \\
w \frac{dR(w)}{dw} &= \frac{z^c}{b} \left(cu(z) + z \frac{du(z)}{dz} \right) = \frac{z^c}{b^2} \left(cbu(z) + zb \frac{du(z)}{dz} \right) \\
\frac{d^2 R(w)}{dw^2} &= \frac{dz}{dw} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{ab} \left(cz^{c-b} u(z) + z^{c-b+1} \frac{du(z)}{dz} \right) \right) \\
&= \frac{1}{ab} \left(c(c-b) z^{c-b-1} u(z) + (2c-b+1) z^{c-b} \frac{du(z)}{dz} \right. \\
&\quad \left. + z^{c-b+1} \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right) \\
w^2 \frac{d^2 R(w)}{dw^2} &= \frac{z^c}{b^2} \left(c(c-b) u(z) + (2c+1-b) z \frac{du(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right).
\end{aligned}$$

De donde, como $R(w)$ satisface la ecuación de Bessel, se encuentra

$$\begin{aligned}
0 &= w^2 \frac{d^2 R(w)}{dw^2} + w \frac{dR(w)}{dw} + (w^2 - \nu^2) R(w) \\
&= \frac{z^c}{b^2} \left(c(c-b) u(z) + (2c+1-b) z \frac{du(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \right) \\
&+ \frac{z^c}{b^2} \left(cbu(z) + zb \frac{du(z)}{dz} \right) + \frac{z^c}{b^2} (a^2 b^2 z^{2b} - \nu^2 b^2) u(z) \\
&= \frac{z^c}{b^2} \left(z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + (2c+1) z \frac{du(z)}{dz} + (a^2 b^2 z^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)) u(z) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Lo que implica que la función $u(z)$ es solución de Eq. (5.84). Este resultado tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, consideremos la ecuación de Airy

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + zu(z) = 0. \tag{5.87}$$

Note que si

$$c = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{2}{3}, \quad \nu = \pm \frac{1}{3} \tag{5.88}$$

Eq. (5.84) se convierte en Eq. (5.87). Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Airy es

$$u(z) = |z|^{\frac{1}{2}} \left(AJ_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2|z|^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + BJ_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2|z|^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \right), \tag{5.89}$$

con A y B constantes.

5.7.1. Partícula cuántica en una fuerza constante

La ecuación de Schrödinger para una partícula en una fuerza constante, F , es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - Fx\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (5.90)$$

Con el cambio de variable

$$z = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(x + \frac{E}{F}\right) \quad (5.91)$$

se obtiene

$$x = z \left(\frac{\hbar^2}{2mF}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{E}{F}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.92)$$

por lo que Eq. (5.90) toma la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\right)\psi(z) = 0, \quad (5.93)$$

que es la ecuación de Airy. Entonces, considerando (5.89), se tiene

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left|x + \frac{E}{F}\right|^{\frac{1}{2}} \left[AJ_{\frac{1}{3}} \left(\left| \frac{8mF}{9\hbar^2} \right|^{\frac{1}{2}} \left|x + \frac{E}{F}\right|^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ & \left. + BJ_{-\frac{1}{3}} \left(\left| \frac{8mF}{9\hbar^2} \right|^{\frac{1}{2}} \left|x + \frac{E}{F}\right|^{\frac{3}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

que es la función de onda del sistema.

5.8. Mecánica cuántica conforme

La ecuación de Schrödinger para la llamada cuántica conforme es [20, 21]

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{g}{x^2}\right)\psi(x,t). \quad (5.95)$$

Este sistema tiene aplicaciones en diferentes áreas de la física. En este caso tomaremos la propuesta

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \phi(x), \quad (5.96)$$

de donde (5.95) toma la forma

$$E\phi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{g}{x^2} \right) \phi(x), \quad (5.97)$$

la cual se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mg}{\hbar^2 x^2} \right) \right) \phi(x) = 0. \quad (5.98)$$

Se puede observar que tomando las constantes

$$c = -\frac{1}{2}, \quad b = 1, \quad a = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \nu = \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2mg}{\hbar^2}} \quad (5.99)$$

en la ecuación (5.84) se obtiene (5.87). Por lo tanto,

$$\phi(x) = A|x|^{\frac{1}{2}} J_{\pm\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2mg}{\hbar^2}}} \left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x \right). \quad (5.100)$$

con A una constante. Entonces, la función de onda de la mecánica cuántica conforme es

$$\psi(x, t) = A e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |x|^{\frac{1}{2}} J_{\pm\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2mg}{\hbar^2}}} \left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x \right). \quad (5.101)$$

5.9. Ecuación de Fick-Jacobs

En diferentes sistemas es importante el estudio de difusión de partículas en un medio. El modelo de difusión más simple está dado por la ecuación de Fick

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5.102)$$

Aquí $C(x, t)$ es la concentración de partículas y D es el coeficiente de difusión. Si D es una constante, la ecuación de Fick es equivalente a la ecuación de calor

(14.36), así la ecuación de Fick se puede resolver con las técnicas usadas para resolver esta última ecuación. Más adelante se estudiará la ecuación de calor.

Cuando la difusión se da en canales la geometría de éste es importante y la ecuación de Fick ya no es válida. Para el caso en que el canal tiene la forma de una superficie de revolución, donde el área de la sección transversal es $A(x)$, la ecuación de Fick se debe cambiar por la llamada ecuación de Fick-Jacobs [22]

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) A(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C(x, t)}{A(x)} \right) \right]. \quad (5.103)$$

Claramente esta ecuación es más sofisticada que la ecuación de Fick (5.102).

Existen caso en los cuales la ecuación de Fick-Jacobs se puede escribir como una ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, si

$$D(x) = D_0 = \text{constante},$$

usando la propuesta

$$C(x, t) = \sqrt{A(x)} \psi(x, t)$$

se obtiene

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D_0}{2\sqrt{A(x)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{A(x)}} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \right) \right] \psi(x, t). \quad (5.104)$$

Por lo tanto proponiendo la solución $\psi(x, t) = e^{-Et} \phi(x)$, se llega a la ecuación de Schrödinger

$$E\phi(x) = H\phi(x), \quad (5.105)$$

con

$$H = -D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_0}{2\sqrt{A(x)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{A(x)}} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \right). \quad (5.106)$$

Para el caso particular de canales con sección transversal de la forma

$$A(x) = (a + \lambda x)^{2\nu} \quad (5.107)$$

el Hamiltoniano es

$$H = -D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{g}{(a + \lambda x)^2}, \quad g = \lambda^2 D_0 \nu (\nu - 1). \quad (5.108)$$

Por lo que, usando el cambio de variable

$$z = a + \lambda x, \quad (5.109)$$

se llega a

$$H = -D_0\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{g}{z^2}, \quad g = \lambda^2 D_0 \nu (\nu - 1). \quad (5.110)$$

Por lo tanto, la ecuación a resolver es

$$E\phi(x) = \left(-D_0\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{g}{z^2} \right) \phi(x), \quad g = \lambda^2 D_0 \nu (\nu - 1), \quad (5.111)$$

que tiene la misma forma que la ecuación (5.97). Entonces, usando los resultados de la sección previa, se encuentra que concentración de partículas está dada por

$$C_\nu(x, t) = B e^{-Et} (a + \lambda x)^{\frac{2\nu+1}{2}} J_{\pm(\frac{2\nu-1}{2})} \left(\pm \sqrt{\frac{E}{\lambda^2 D_0}} (a + \lambda x) \right), \quad (5.112)$$

donde B es una constante.

Capítulo 6

Elementos de Álgebra Lineal

En este capítulo veremos algunas herramientas del álgebra lineal. Este capítulo es importante para entender los capítulos posteriores. También es importante para entender los principios de la mecánica cuántica, así como para resolver ecuaciones diferenciales.

6.1. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial se define con un conjunto \mathbf{V} , un campo \mathbf{K} y dos operaciones

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad (6.1)$$

$$\mu : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}. \quad (6.2)$$

Estas operaciones deben cumplir que si u, v pertenecen a \mathbf{V} , entonces $u + v$ pertenece a \mathbf{V} y si α pertenece a \mathbf{K} , entonces $\mu(\alpha, v) = \alpha v$ pertenece a \mathbf{V} . Además, se debe cumplir

$$1) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}, \quad u + v = v + u, \quad (6.3)$$

$$2) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{V}, \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad (6.4)$$

$$3) \quad \forall u, v \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (6.5)$$

$$4) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \quad (6.6)$$

$$5) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \quad (6.7)$$

$$6) \quad \exists 0 \in \mathbf{V} \text{ tal que } \forall v \in \mathbf{V}, \quad 0 + v = v, \quad (6.8)$$

$$7) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad \exists -v \in \mathbf{V}, \text{ tal que } v + (-v) = 0, \quad (6.9)$$

$$8) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad ev = v, \quad (6.10)$$

aquí e representa el neutro multiplicativo de \mathbf{K} .

6.2. Ejemplos

Ahora, veremos algunos ejemplos de espacios vectoriales. El lector puede verificar que los siguientes espacios cumplen las reglas de espacios vectoriales.

6.2.1. \mathbf{C}^n

Supongamos que \mathbf{C} es el conjunto de los números complejos. Un ejemplo de espacio vectorial son los arreglos de la forma

$$\mathbf{C}^n = \{(c_1, c_2, \dots, c_n), c_i \in \mathbf{C}\}. \quad (6.11)$$

Si se tienen dos vectores de \mathbf{C}^n ,

$$(c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (6.12)$$

la suma se define como

$$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n). \quad (6.13)$$

Mientras que si λ es un número complejo, el producto por un escalar se define como

$$\lambda(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n). \quad (6.14)$$

6.2.2. Sucesiones

Una generalización de \mathbf{C}^n es tomar el límite $n \rightarrow \infty$, que nos da el espacio de sucesiones

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n \in \mathbf{C}. \quad (6.15)$$

Para este caso debemos pedir que

$$\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty. \quad (6.16)$$

Así, si se tienen dos sucesiones

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad a_n, b_n \in \mathbf{C} \quad (6.17)$$

la suma se define como

$$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6.18)$$

Mientras que si λ es un número complejo, el producto por un escalar se define como

$$\lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}. \quad (6.19)$$

6.2.3. Matrices

Otra generalización de \mathbf{C}^n es el espacio de matrices $M_{(nm)}$ de entradas complejas

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix}, \quad M_{ij} \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Si se tienen dos matrices

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & M_{12} & \cdots & N_{1m} \\ N_{21} & M_{22} & \cdots & N_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1} & N_{n2} & \cdots & N_{nm} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

La suma se define como

$$M + N = \begin{pmatrix} M_{11} + N_{11} & M_{12} + N_{12} & \cdots & M_{1m} + N_{1m} \\ M_{21} + N_{21} & M_{22} + N_{22} & \cdots & M_{2m} + N_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} + N_{n1} & M_{n2} + N_{n2} & \cdots & M_{nm} + N_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Mientras que el producto por un escalar, $\lambda \in \mathbf{C}$, se define como

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda M_{11} & \lambda M_{12} & \cdots & \lambda M_{1m} \\ \lambda M_{21} & \lambda M_{22} & \cdots & \lambda M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda M_{n1} & \lambda M_{n2} & \cdots & \lambda M_{nm} \end{pmatrix}.$$

6.2.4. Funciones

Otro ejemplo de espacio vectorial es el espacio de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. Supongamos que tenemos dos funciones

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.22)$$

la suma se define como

$$f + g : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.23)$$

con la regla de correspondencia

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in [a, b]. \quad (6.24)$$

Mientras que el producto por un escalar, $\lambda \in \mathbf{C}$, se define como

$$\lambda f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.25)$$

con la regla de correspondencia

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (6.26)$$

6.3. Producto escalar

Una operación importante entre vectores es el producto escalar. Este producto manda dos vectores a un número complejo

$$\langle | \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{C}, \quad (6.27)$$

y debe satisfacer los axiomas:

$$\cdot) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad \langle v|v \rangle \geq 0, \quad \langle v|v \rangle = 0 \iff v = 0, \quad (6.28)$$

$$\cdot\cdot) \quad \forall v, u, w \in \mathbf{V} \quad \langle v + u|w \rangle = \langle v|w \rangle + \langle u|w \rangle, \quad (6.29)$$

$$\cdot\cdot\cdot) \quad \forall v, u \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbf{C} \quad \langle v|\lambda u \rangle = \lambda \langle v|u \rangle, \quad (6.30)$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot) \quad \forall v, u \in \mathbf{V}, \quad \langle v|u \rangle = (\langle u|v \rangle)^*. \quad (6.31)$$

Existen diferentes implicaciones de estos axiomas. Por ejemplo, para cualquier vector v se cumple $\langle v|0 \rangle = 0$. En efecto sabemos que $v - v = 0$, entonces

$$\langle v|0 \rangle = \langle v|v - v \rangle = \langle v|v \rangle - \langle v|v \rangle = 0. \quad (6.32)$$

Otra implicación es que si λ es un número complejo y v_1, v_2 dos vectores, entonces se cumple

$$\langle \lambda v_1|v_2 \rangle = \lambda^* \langle v_1|v_2 \rangle. \quad (6.33)$$

Esta igualdad es correcta pues considerando Eq. (6.30) y Eq. (6.31) se encuentra

$$\begin{aligned} \langle \lambda v_1|v_2 \rangle &= (\langle v_2|\lambda v_1 \rangle)^* = (\lambda \langle v_2|v_1 \rangle)^* = \lambda^* (\langle v_2|v_1 \rangle)^* \\ &= \lambda^* \langle v_1|v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Además, si v y w son dos vectores, entonces

$$\begin{aligned}
 & \langle v+w|v+w \rangle + \langle v-w|v-w \rangle = \langle v+w|v+w \rangle \\
 & + \langle v-w|v-w \rangle \\
 & = \langle v|v+w \rangle + \langle w|v+w \rangle + \langle v|v-w \rangle - \langle w|v-w \rangle, \\
 & = \langle v|v \rangle + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle + \langle w|w \rangle + \langle v|v \rangle - \langle v|w \rangle \\
 & - \langle w|v \rangle + \langle w|w \rangle \\
 & = 2(\langle v|v \rangle + \langle w|w \rangle),
 \end{aligned}$$

es decir

$$\langle v+w|v+w \rangle + \langle v-w|v-w \rangle = 2(\langle v|v \rangle + \langle w|w \rangle), \quad (6.34)$$

que es la llamada igualdad del paralelogramo.

Antes de ver otras propiedades del producto escalar veremos algunos ejemplos de ellos.

6.4. Ejemplos de producto escalar

6.4.1. Producto escalar en \mathbf{C}^n

Si tenemos dos vectores en \mathbf{C}^n , $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, el producto escalar se define como

$$\langle v|w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i. \quad (6.35)$$

Note que a los vectores v y w se les puede asignar las matrices columna

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad (6.36)$$

por lo que

$$\langle v|w \rangle = v^{*T} w = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & \cdots & v_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

6.4.2. Sucesiones

Si tenemos dos sucesiones $s_1 = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $s_2 = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ y $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty, \sum_{n \geq 0} |b_n|^2 < \infty$, se puede definir el producto escalar como

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \sum_{n \geq 0} a_n^* b_n, \quad (6.38)$$

note que éste es una generalización del producto escalar entre vectores.

6.4.3. Matrices

En el espacio vectorial de las matrices de entradas complejas de $n \times n$ también es posible definir un producto escalar. Antes de definir este producto recordemos que si M es una matriz de entradas M_{ij} , la traza se define como $Tr(M) = \sum_{i=1}^n M_{ii}$. También recordemos que las entradas de la matriz transpuesta M^T se definen como $(M^T)_{ij} = M_{ji}$. Además si N es otra matriz de $n \times n$ las entradas de la matriz producto, MN , son $(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n M_{ik} N_{kj}$. De estas definiciones es claro que

$$\begin{aligned} Tr(M^T) &= Tr(M), & Tr(M+N) &= Tr(M) + Tr(N), \\ Tr(NM) &= Tr(MN), & (MN)^T &= N^T M^T, \end{aligned}$$

en efecto

$$\begin{aligned} Tr(M^T) &= \sum_{i=1}^n (M^T)_{ii} = \sum_{i=1}^n M_{ii} = Tr(M), \\ Tr(M+N) &= \sum_{i=1}^n (M+N)_{ii} = \sum_{i=1}^n (M_{ii} + N_{ii}) = \sum_{i=1}^n M_{ii} + \sum_{i=1}^n N_{ii} \\ &= Tr(M) + Tr(N), \\ Tr(MN) &= \sum_{a=1}^n (MN)_{aa} = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n M_{ab} N_{ba} = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n N_{ba} M_{ab} \\ &= \sum_{b=1}^n \left(\sum_{a=1}^n N_{ba} M_{ab} \right) = \sum_{b=1}^n (NM)_{bb} = Tr(NM), \\ ((MN)^T)_{ij} &= (MN)_{ji} = \sum_{k=1}^n M_{jk} N_{ki} = \sum_{k=1}^n N_{ki} M_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (N^T)_{ik} (M^T)_{kj} = (N^T M^T)_{ij}. \end{aligned}$$

Definiremos el producto escalar entre matrices como

$$\langle M|N \rangle = \text{Tr} (M^{*T} N) . \quad (6.39)$$

El primer axioma se cumple, pues

$$\begin{aligned} \langle M|M \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} M) = \sum_{i=1}^n (M^{*T} M)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M^{*T})_{ik} M_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ki}^* M_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |M_{ik}|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

De donde, si $\langle M|M \rangle = 0$, entonces $M_{ik} = 0$, es decir $M = 0$.

Además, si N_1 y N_2 son matrices de $n \times n$,

$$\begin{aligned} \langle M|N_1 + N_2 \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} (N_1 + N_2)) = \text{Tr} (M^{*T} N_1 + M^{*T} N_2) \\ &= \text{Tr} (M^{*T} N_1) + \text{Tr} (M^{*T} N_2) \\ &= \langle M|N_1 \rangle + \langle M|N_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que se cumple el segundo axioma de producto escalar.

También se puede observar que si λ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} \langle M|N \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} \lambda N) = \sum_{i=1}^n (M^{*T} \lambda N)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n (M^{*T} N)_{ii} \\ &= \lambda \text{Tr} (M^{*T} N) = \lambda \langle M|N \rangle. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Adicionalmente, se encuentra

$$\begin{aligned} \langle M|N \rangle &= \text{Tr} (M^{*T} N) = \text{Tr} \left((M^{*T} N)^T \right) = \text{Tr} (N^T M^*) \\ &= \left([\text{Tr} (N^T M^*)]^* \right)^* = \left(\text{Tr} (N^{*T} M) \right)^* = \left(\langle N|M \rangle \right)^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (6.39) es un producto escalar para el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$.

6.4.4. Funciones

Si $q(x)$ es una función real, continua y positiva en el intervalo (a, b) , para el espacio vectorial de las funciones continuas, $\{f\}$, que va del intervalo $[a, b]$ a los complejos, tales que

$$\int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) < \infty, \quad (6.42)$$

se puede definir el producto escalar como

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x). \quad (6.43)$$

Considerando las propiedades del $q(x)$ y $f(x)$, el primer axioma de producto escalar se cumple pues

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) = \int_a^b dx q(x) |f(x)|^2 \geq 0, \\ \langle f|f \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) f(x) = \int_a^b dx q(x) |f(x)|^2 = 0 \iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

El segundo axioma de producto escalar se cumple, en efecto

$$\begin{aligned} \langle f|g_1 + g_2 \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) (g_1(x) + g_2(x)) \\ &= \int_a^b dx q(x) (f(x)^* g_1(x) + f(x)^* g_2(x)) \\ &= \int_a^b dx q(x) f(x)^* g_1(x) + \int_a^b dx q(x) f(x)^* g_2(x) \\ &= \langle f|g_1 \rangle + \langle f|g_2 \rangle. \end{aligned}$$

Los axiomas restantes también se cumplen, para probar esta afirmación supongamos que λ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned} \langle f|\lambda g \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) \lambda g(x) = \lambda \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x) = \lambda \langle f|g \rangle, \\ \langle f|g \rangle &= \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x) = \left(\int_a^b dx (q(x) f^*(x) g(x))^* \right)^* \\ &= \left(\int_a^b dx q(x) g^*(x) f(x) \right)^* = (\langle g|f \rangle)^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Eq. (6.43) es un producto escalar para el espacio vectorial de las funciones.

6.5. Ortonormalidad e independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si cualquier combinación lineal de la forma

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad (6.44)$$

implica $a_i = 0$. Además, se dice que un conjunto de vectores, $\{v_i\}_{i=1}^n$, es ortonormal si

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.45)$$

Si un conjunto de vectores es ortonormal, entonces es linealmente independiente. En efecto, supongamos que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ son un conjunto de escalares tales que se cumple Eq. (6.44), entonces como los vectores son ortonormales,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_j | 0 \rangle = \left\langle v_j \left| \sum_{i=1}^n a_i v_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_j | a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle v_j | v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j, \end{aligned}$$

es decir $a_i = 0$, lo que completa la prueba.

Un conjunto de vectores ortonormal, $\{v_i\}_{i=1}^n$, tiene varias propiedades interesantes. Por ejemplo, si v es una combinación lineal de estos vectores, es decir si $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, se cumple

$$\langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (6.46)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle v | v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i \left| \sum_{j=1}^n a_j v_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i v_i | a_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j \langle v_i | v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* a_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \end{aligned} \quad (6.47)$$

6.6. Teorema de Pitágoras

Supongamos que v es un vector y $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de vectores ortonormales, entonces el vector

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i$$

es ortonormal a

$$w_2 = v - \sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j.$$

Esta afirmación se satisface, pues

$$\begin{aligned}
\langle w_1 | w_2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left(v - \sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| v \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left(\sum_{j=1}^n \langle v_j | v \rangle v_j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | (\langle v_i | v \rangle) | v \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle (\langle v_i | v \rangle v_i) | (\langle v_j | v \rangle v_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_j | v \rangle \langle v_i | v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_j | v \rangle \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle^* \langle v_i | v \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Además, ocupando que $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de vectores ortonormales se cumple

$$\langle w_1 | w_1 \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2. \quad (6.48)$$

Adicionalmente, se puede notar que

$$v = w_1 + w_2, \quad (6.49)$$

considerando que w_1 y w_2 son vectores ortonormales, se puede probar que

$$\langle v | v \rangle = \langle w_1 | w_1 \rangle + \langle w_2 | w_2 \rangle. \quad (6.50)$$

Tomando en cuenta los resultados anteriores, claramente se cumple que si $\{v_n\}$ es un conjunto de vectores ortonormales, para cualquier vector v se tiene que

$$\langle v | v \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 + \left\langle \left(v - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \middle| \left(v - \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i \right) \right\rangle. \quad (6.51)$$

6.6.1. Desigualdad de Bessel

Note que el teorema de Pitágoras implica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 \leq \langle v | v \rangle, \quad (6.52)$$

que es la llamada desigualdad de Bessel.

6.6.2. Desigualdad de Schwarz

Sea w un vector diferente de cero, claramente el conjunto formado por $\left\{ \frac{w}{\sqrt{\langle w | w \rangle}} \right\}$ es ortonormal. Entonces, de acuerdo a la desigualdad de Bessel Eq. (6.63), para cualquier vector v se cumple

$$\left| \left\langle \frac{w}{\sqrt{\langle w | w \rangle}} \middle| v \right\rangle \right|^2 \leq \langle v | v \rangle, \quad \implies \quad |\langle w | v \rangle|^2 \leq \langle w | w \rangle \langle v | v \rangle \quad (6.53)$$

que implica

$$|\langle w | v \rangle| \leq \sqrt{\langle w | w \rangle} \sqrt{\langle v | v \rangle}. \quad (6.54)$$

Esta es la llamada desigualdad de Schwarz.

6.6.3. Desigualdad del triángulo

Sean v y w dos vectores, entonces

$$\begin{aligned} \langle v + w | v + w \rangle &= \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle \\ &= \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + (\langle w | v \rangle^* + \langle w | v \rangle) \\ &= \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle w | v \rangle) \\ &\leq \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2|\langle w | v \rangle|. \end{aligned} \quad (6.55)$$

De donde, ocupando desigualdad de Schwarz Eq. (6.64) se tiene

$$\begin{aligned} \langle v + w | v + w \rangle &\leq \langle v | v \rangle + \langle w | w \rangle + 2\sqrt{\langle w | w \rangle} \sqrt{\langle v | v \rangle} \\ &= \left(\sqrt{\langle w | w \rangle} + \sqrt{\langle v | v \rangle} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.56)$$

es decir

$$\langle v + w | v + w \rangle \leq \left(\sqrt{\langle w | w \rangle} + \sqrt{\langle v | v \rangle} \right)^2 \quad (6.57)$$

esta es la llamada desigualdad del triángulo.

6.7. Espacios normados

Sea V un espacio vectorial y $\| \cdot \|$ una función de V en los reales. Se dice que $(V, \| \cdot \|)$ es un espacio normado si

$$\begin{aligned}
 I) \quad & \|v\| \geq 0, \\
 II) \quad & \|v\| = 0, \quad \iff \quad v = 0, \\
 III) \quad & \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \\
 IV) \quad & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.
 \end{aligned}
 \tag{6.58}$$

Note que si V es un espacio vectorial con producto escalar, entonces se puede definir un espacio normado con la norma dada por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}. \tag{6.59}$$

En efecto, las propiedades *I)* y *II)* se cumplen, pues por los axiomas de producto escalar se tiene que $\langle v|v \rangle \geq 0$ y $\langle v|v \rangle = 0 \iff v = 0$. La propiedad *III)* se cumple pues, si α es un escalar, se tiene

$$\begin{aligned}
 \|\alpha v\| &= \sqrt{\langle \alpha v|\alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^* \alpha \langle v|v \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle v|v \rangle} \\
 &= |\alpha| \sqrt{\langle v|v \rangle} = |\alpha| \|v\|.
 \end{aligned}
 \tag{6.60}$$

La propiedad *IV)* también se cumple pues, ocupando la desigualdad del triángulo se encuentra

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w|v + w \rangle \leq \left(\sqrt{\langle w|w \rangle} + \sqrt{\langle v|v \rangle} \right)^2 = (\|w\| + \|v\|)^2,$$

es decir

$$\|v + w\| \leq \|w\| + \|v\|.$$

Por lo tanto, un espacio vectorial con producto escalar es un espacio normado con la norma dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$.

Note que ocupando la notación de espacios normados la igualdad del paralelogramo toma la forma

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2 (\|v\|^2 + \|w\|^2). \tag{6.61}$$

Mientras que, si $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de vectores ortonormales, el teorema de Pitágoras se puede escribir como

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v_i|v \rangle|^2 + \left\| v - \sum_{i=1}^n \langle v_i|v \rangle v_i \right\|^2. \tag{6.62}$$

Además, la desigualdad de Bessel toma la forma

$$\sum_{i=1}^n |\langle v_i | v \rangle|^2 \leq \|v\|^2, \quad (6.63)$$

y la desigualdad de Schwarz es

$$|\langle w | v \rangle| \leq \|w\| \|v\|. \quad (6.64)$$

6.7.1. Espacios métricos

Sea un conjunto M y d una función de $M \times M$ en los reales. Se dice que (M, d) es un espacio métrico si satisface que $\forall x, y \in M$ se cumple

$$\begin{aligned} A) \quad & d(x, y) \geq 0, \\ B) \quad & d(x, y) = 0, \quad \iff \quad x = y, \\ C) \quad & d(x, y) = d(y, x), \\ D) \quad & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned} \quad (6.65)$$

A la función d se le llama distancia.

Si V es un espacio normado, entonces se tiene un espacio métrico con la distancia definida por

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|. \quad (6.66)$$

Los dos primeros axiomas de distancia se cumplen, pues

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| \geq 0 \quad \text{y} \quad d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = 0 \quad \iff \quad v_1 - v_2 = 0,$$

es decir $v_1 = v_2$. También se cumple,

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= \|v_1 - v_2\| = \|(-)(v_2 - v_1)\| = |(-)| \|v_2 - v_1\| = \|v_2 - v_1\| \\ &= d(v_2, v_1), \end{aligned}$$

por lo tanto, se cumple el axioma C). Además, por la desigualdad del triángulo, se tiene

$$\begin{aligned} d(v_1, v_3) &= \|v_1 - v_3\| = \|(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3)\| \leq \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - v_3\| \\ &= d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3), \end{aligned}$$

de donde se cumple el axioma D).

Así, un espacio normado es métrico. Lo que quiere decir que cualquier espacio con producto escalar es normado y por lo tanto métrico.

6.8. Ejemplos de bases ortonormales

En esta sección veremos diferentes conjuntos de funciones que forman una base ortonormal.

6.8.1. Exponencial compleja

Sea el conjunto de funciones

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.67)$$

definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, aquí n es un número entero. Este conjunto de funciones es ortonormal. En efecto

$$\langle \Phi_n(\varphi) | \Phi_m(\varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi (\Phi_n(\varphi))^* \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n)\varphi}. \quad (6.68)$$

Si $m = n$, es claro que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-n)\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 1. \quad (6.69)$$

Adicionalmente, si $n \neq m$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-n)\varphi} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-m)} e^{i(m-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(m-n)} ((-1)^{2(m-n)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle \Phi_n(\varphi) | \Phi_m(\varphi) \rangle = \delta_{mn}, \quad (6.70)$$

es decir, el conjunto Eq. (6.67) es ortonormal y entonces linealmente independiente.

6.8.2. Ecuaciones tipo Sturm-Liouville

Anteriormente vimos que si $(\psi_{\lambda_1}(x), \lambda_1)$, $(\psi_{\lambda_2}(x), \lambda_2)$ son soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + (\lambda q(x) + r(x)) \psi(x) = 0 \quad (6.71)$$

que satisfacen la condiciones de Dirichlet

$$\psi(a) = \psi(b) = 0 \quad (6.72)$$

ó las de Neumann

$$\left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi(x)}{dx} \right|_{x=b} = 0 \quad (6.73)$$

ó bien que $p(x)$ cumpla

$$p(a) = p(b) = 0, \quad (6.74)$$

se encuentra que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0.$$

En particular note que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se tiene

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_2}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (6.75)$$

Además, se puede ver que la integral

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \psi_{\lambda_1}(x) = \alpha_\lambda, \quad (6.76)$$

es positiva, es decir $\alpha_\lambda > 0$. Por lo que, si $\alpha_\lambda < \infty$, el conjunto de funciones

$$\frac{\tilde{\psi}_\lambda(x)}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \quad (6.77)$$

cumplen

$$\int_a^b dx q(x) \psi_{\lambda_1}^*(x) \tilde{\psi}_{\lambda_2}(x) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (6.78)$$

Se dice que las soluciones de Eq. (6.71) que satisfacen alguna de las condiciones Eqs. (6.72)-(6.74) son un conjunto de funciones ortonormales con función de peso $q(x)$.

6.8.3. Ecuación de Schrödinger en una dimension

Supongamos que $V(x)$ es una función real, la ecuación de Schrödinger en el intervalo $[a, b]$ es

$$H\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (6.79)$$

donde E es una constante real a determinar y se deben satisfacer las condiciones de borde $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Claramente este es un problema tipo Sturm-Liouville con condiciones de Dirichlet. Por lo que si $\psi_E(x)$ es solución con la constante E y $\psi_{E'}(x)$ es solución con la contante E' , entonces

$$\langle \psi_E(x) | \psi_{E'}(x) \rangle = \int_a^b dx \psi_E^*(x) \psi_{E'}(x) = \delta_{EE'}. \quad (6.80)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Schrödinger en una dimensión forman un conjunto de funciones ortonormales.

6.8.4. Ecuación de Schrödinger en tres dimensiones

Para la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones se tiene el mismo resultado. Veamos este caso, si $U(x, y, z)$ es una función real, la ecuación de Schrödinger es

$$H\psi(x, y, z) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z). \quad (6.81)$$

Supondremos que esta ecuación está definida en una región de volumen V cuya frontera es Σ , por lo que la condición de Dirichlet es $\psi(x, y, z)|_{\Sigma} = 0$.

Si $\psi_E(x, y, z)$ es solución con la constante E y $\psi_{E'}(x, y, z)$ es solución con la contante E' , entonces

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_E(x, y, z) = E\psi_E(x, y, z), \quad (6.82)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_{E'}(x, y, z) = E'\psi_{E'}(x, y, z). \quad (6.83)$$

El complejo conjugado de la segunda ecuación es

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) \right) \psi_{E'}^*(x, y, z) = E'\psi_{E'}^*(x, y, z), \quad (6.84)$$

Por lo tanto, multiplicando $\psi_{E'}^*$ por Eq. (6.82) y ψ_E por Eq. (6.84) se encuentra

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{E'}^*\nabla^2\psi_E + U(x, y, z)\psi_{E'}^*\psi_E &= E\psi_{E'}^*\psi_E, \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E\nabla^2\psi_{E'}^* + U(x, y, z)\psi_E\psi_{E'}^* &= E'\psi_E\psi_{E'}^*, \end{aligned}$$

Ahora, considerando la igualdad

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) = (\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}g) + f\nabla^2g, \quad (6.85)$$

se llega a

$$f\nabla^2g = \vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g) - (\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}g), \quad (6.86)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} \cdot (\psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E) - \vec{\nabla}\psi_{E'}^* \cdot \vec{\nabla}\psi_E) + U\psi_{E'}^*\psi_E &= E\psi_{E'}^*\psi_E, \\ -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} \cdot (\psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^*) - \vec{\nabla}\psi_E \cdot \vec{\nabla}\psi_{E'}^*) + U\psi_E\psi_{E'}^* &= E'\psi_E\psi_{E'}^*, \end{aligned}$$

restando estas ecuaciones se encuentra

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla} \cdot (\psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E - \psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^*) = (E - E')\psi_{E'}^*\psi_E.$$

Integrando esta última ecuación sobre el volumen V y usando el teorema de Gauss Eq. (1.6), se tiene

$$(E - E') \int_V dv\psi_{E'}^*\psi_E = \frac{\hbar^2}{2m} \oint_{\Sigma} da (\psi_{E'}^*\vec{\nabla}\psi_E - \psi_E\vec{\nabla}\psi_{E'}^*) \cdot \hat{n} = 0, \quad (6.87)$$

es decir

$$(E - E') \int_V dv\psi_{E'}^*\psi_E = 0. \quad (6.88)$$

Por lo tanto, si $E \neq E'$, se llega a

$$\int_V dv\psi_{E'}^*(x, y, z)\psi_E(x, y, z) = 0. \quad (6.89)$$

Si la funciones de onda son tales que $\int_V dv\psi_E^*\psi_E = \alpha < \infty$, siempre se puede tener un conjunto de funciones tales que

$$\int_V dv\psi_{E'}^*(x, y, z)\psi_E(x, y, z) = \delta_{EE'}. \quad (6.90)$$

Por lo tanto con las soluciones de la ecuación de Schrödinger se puede formar un conjunto ortonormal de funciones. Este resultado es fundamental para la mecánica cuántica.

6.8.5. Armónicos esféricos

Otro ejemplo está en las funciones propias del operado \hat{L}^2 ,

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi),$$

que deben satisfacer

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_\lambda(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi).$$

Por ahora no resolveremos esta ecuación, pero veremos algunas de sus propiedades respecto a la ortonormalidad.

Propondremos $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, de donde

$$\hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin^2 \theta \hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)} \right) &= - \left[\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= \lambda \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.91)$$

que implica

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin^2 \theta \hat{L}^2 Y_\lambda(\theta, \varphi)}{Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)} \right) = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (6.92)$$

entonces

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 = \text{constante}, \quad (6.93)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi). \quad (6.94)$$

Sustituyendo Eq. (6.93) en Eq. (6.91), se llega a

$$- \left[\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - m^2 \right] = \lambda \sin^2 \theta, \quad (6.95)$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (6.96)$$

Esta ecuación depende de los parámetros λ y m por lo que redefiniremos $\Theta(\theta)$ como $\Theta(\theta) = P_\lambda^m(\cos \theta)$. Note que Eq. (6.96) es tipo Sturm-Liouville con

$$p(\theta) = \sin \theta, \quad q(\theta) = \sin \theta, \quad r(\theta) = -\frac{m^2}{\sin \theta}. \quad (6.97)$$

Además como $p(0) = \sin 0 = p(\pi) = \sin \pi = 0$, las soluciones de Eq. (6.96) son ortormales en el intervalo $[0, \pi]$ con función de peso $\sin \theta$, es decir

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) = \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda' \lambda}, \quad \alpha_{\lambda m} = \text{constante} > 0. \quad (6.98)$$

Note que las funciones

$$\Phi_m(\varphi) = A_0 e^{im\varphi} \quad (6.99)$$

son soluciones de Eq. (6.94). En particular si todas las m son enteros el conjunto de funciones

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.100)$$

son ortonormales en intervalo $[0, 2\pi]$, como fue mostrado en Eq. (6.70). Así, si el conjunto de las m está en los enteros, las funciones

$$Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}} \sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \quad (6.101)$$

son ortonormales. En efecto, considerando la ortonormalidad de las funciones $\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ y $P_\lambda^m(\cos \theta)$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle Y_{\lambda' m'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle &= \int d\Omega Y_{\lambda' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{\lambda' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda' m'}} \sqrt{2\pi}} e^{im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \right)^* \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}} \sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{2\pi}} e^{-im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}}\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \delta_{mm'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_\lambda^m(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda'm'}}\alpha_{\lambda m}} \delta_{mm'} \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\lambda m}}\sqrt{\alpha_{\lambda m}}} \alpha_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda},
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle Y_{\lambda'm'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (6.102)$$

Aún no sabemos cual es la forma explícita las funciones $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$, pero podemos decir que son un conjunto de funciones ortornales. Posteriormente ocuparemos este hecho para encontrar la forma explícita de estas funciones. Cabe señalar que las funciones $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$ son importantes para diferentes áreas de la física, como la mecánica cuántica y la electrodinámica.

6.9. Polinomios trigonométricos

Supongamos que $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ es un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[a, b]$, es decir

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_n^*(x) \psi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (6.103)$$

aquí $q(x)$ es una función de peso positiva en el intervalo (a, b) . Con este conjunto de funciones podemos hacer las combinaciones lineales

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^n b_i \psi_i(x), \quad (6.104)$$

las cuales llamaremos polinomios trigonométricos. Note que debido a que $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ es un conjunto de funciones ortonormales, la norma de $T_n(x)$ es

$$\|T_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2. \quad (6.105)$$

Sea $F(x)$ una función tal que $\langle F|F \rangle = \|F\|^2 = \int_a^b dx q(x) |F(x)|^2 < \infty$, entonces definiremos los coeficientes de Fourier de F como

$$a_n = \langle \psi_n | F \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_n^*(x) F(x). \quad (6.106)$$

Ahora veremos que tanto se puede aproximar la función $F(x)$ con polinomios de la forma $T_n(x)$. El sentido de la distancia en este espacio está dada por la norma de las funciones. Así, el problema es encontrar los polinomios tales que

$$d^2(F, T_n) = \|F - T_n\|^2 = \int_a^b dx q(x) |F(x) - T_n(x)|^2 \quad (6.107)$$

es mínimo. Básicamente se trata de encontrar los coeficientes b_i que hacen mínimo (6.107). Podemos iniciar notando que

$$\begin{aligned} d^2(F, T_n) &= \|F - T_n\|^2 = \langle F - T_n | F - T_n \rangle \\ &= \langle F | F \rangle - \langle F | T_n \rangle - \langle T_n | F \rangle + \langle T_n | T_n \rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \langle F | T_n \rangle - \langle T_n | F \rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \left\langle F \left| \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \right. \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \middle| F \right\rangle \\ &= \|F\|^2 + \|T_n\|^2 - \sum_{i=1}^n b_i^* \langle F | \psi_i \rangle - \sum_{i=1}^n b_i \langle \psi_i | F \rangle, \end{aligned}$$

considerando la norma de $T_n(x)$ y la definición de los coeficientes de Fourier se llega a

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 + \sum_{i=1}^n (|b_i|^2 - b_i a_i^* - b_i^* a_i). \quad (6.108)$$

Además, como

$$|b_i - a_i|^2 = (b_i - a_i)(b_i - a_i)^* = |b_i|^2 + |a_i|^2 - (b_i a_i^* + b_i^* a_i), \quad (6.109)$$

se tiene

$$|b_i - a_i|^2 - |a_i|^2 = |b_i|^2 - (b_i a_i^* + b_i^* a_i). \quad (6.110)$$

De donde,

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 + \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \quad (6.111)$$

Claramente la distancia entre estas dos funciones es mínima cuando $b_i = a_i$, es decir, cuando el polinomio tienen los coeficientes de Fourier.

Si $b_i = a_i$ se encuentra

$$\|F - T_n\|^2 = \|F\|^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0. \quad (6.112)$$

Por lo que, para cualquier n

$$\|T_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \|F\|^2 < \infty. \quad (6.113)$$

Esta desigualdad se llama la desigualdad de Bessel, la cual implica que la sucesión $\|T_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$ está acotada.

Un resultado de cálculo diferencial nos dice que si una sucesión es monótona creciente y está acotada, converge [17]. Note que la sucesión $\|T_n\|^2$ es monótona creciente y está acotada, entonces converge. La pregunta es hacia donde converge, supondremos sin demostrar que converge a $\|F\|^2$, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 = \|F\|^2. \quad (6.114)$$

A esta igualdad se llama igualdad de Parseval. Demostrar esta igualdad es un problema importante [3, 4], pero altamente no trivial y rebasa el propósito de este escrito por lo que solo tocaremos este tema en casos particulares.

6.10. Espacios completos

Cuando se cumple la igualdad de Parseval se dice que el conjunto de funciones $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 0}$ es completo. En este caso cualquier función, $F(x)$, con $\|F\| < \infty$ se puede escribir como combinación lineal de $\{\psi_n(x)\}_{n \geq 0}$, es decir

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \psi_n(x). \quad (6.115)$$

Un resultado de cálculo diferencial es que si $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.

Esto tiene diferentes implicaciones físicas. Por ejemplo, en mecánica cuántica significa que es más probable que el sistema esté en estado base. Mientras que en electrostática, significa que en un sistema de cargas los términos más importantes son el monopolo, dipolo, cuádrupolo. Posteriormente veremos ejemplos concretos de esta afirmación.

6.11. Operadores lineales

Sea V un espacio vectorial, una función $O : V \rightarrow V$ es un operador lineal, o transformación lineal, si

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad O(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \quad (6.116)$$

Por ejemplo, el operador derivada es lineal, pues

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) + \beta \frac{\partial}{\partial x} f_2(x). \quad (6.117)$$

Usando el producto por un escalar, con una función $f(x)$ podemos definir un operador lineal, O , de la forma:

$$O(v_1) = f(x)v_1,$$

claramente este operador es lineal, pues

$$O(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(x)(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(x)v_1 + f(x)\beta v_2 = \alpha O(v_1) + \beta O(v_2).$$

Dada una función $g(k, x)$ se puede definir una transformación con la integral

$$\tilde{f}(k) = \int_a^b dx g(k, x) f(x). \quad (6.118)$$

Esta transformación es lineal, pues si definimos $h(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ se encuentra

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \int_a^b dx g(k, x) h(x) = \int_a^b dx g(k, x) (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) \\ &= \alpha \int_a^b dx g(k, x) f_1(x) + \beta \int_a^b dx g(k, x) f_2(x) = \alpha \tilde{f}_1(k) + \beta \tilde{f}_2(k). \end{aligned}$$

A Eq. (6.119) se le llama transformada integral en base $g(k, x)$.

Por ejemplo, con $g(k, x) = e^{-ikx}$ se define la transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (6.119)$$

Para cada función, $g(k, x)$, bien portada se puede definir una transformada integral.

Si tenemos dos transformaciones lineales, O_1 y O_2 , cualquier combinación lineal de ellas también es lineal. En efecto, si a y b son dos escalares podemos construir la combinación lineal

$$O = aO_1 + bO_2, \quad (6.120)$$

entonces

$$\begin{aligned} O(\alpha v_1 + \beta v_2) &= (aO_1 + bO_2)(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= aO_1(\alpha v_1 + \beta v_2) + bO_2(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= a(\alpha O_1(v_1) + \beta O_1(v_2)) + b(\alpha O_2(v_1) + \beta O_2(v_2)) \\ &= \alpha(aO_1(v_1) + bO_2(v_1)) + \beta(aO_1(v_2) + bO_2(v_2)) \\ &= \alpha(aO_1 + bO_2)(v_1) + \beta(aO_1 + bO_2)(v_2) \\ &= \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \end{aligned}$$

Así, cualquier combinación lineal de dos operadores lineales nos da otro operador lineal.

Ahora veamos el productora de dos operadores lineales, definamos

$$O = O_1 O_2, \quad (6.121)$$

entonces

$$\begin{aligned} O(\alpha v_1 + \beta v_2) &= (O_1 O_2)(\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= O_1(O_2(\alpha v_1 + \beta v_2)) = O_1(\alpha O_2(v_1) + \beta O_2(v_2)) \\ &= \alpha O_1(O_2(v_1)) + \beta O_1(O_2(v_2)) \\ &= \alpha(O_1 O_2)(v_1) + \beta(O_1 O_2)(v_2) \\ &= \alpha O(v_1) + \beta O(v_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto de dos operadores lineales también nos da otro operador lineal. Por ejemplo, sabemos que los operadores

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.122)$$

son lineales, entonces también lo son

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.123)$$

Esto implica que el operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.124)$$

sea lineal. Cualquier función $V(x, y, z)$ como operador es lineal, entonces el operador Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \quad (6.125)$$

es lineal, esto se debe a que es combinación lineal de operadores lineales. Además las variables

$$x, \quad y, \quad z \quad (6.126)$$

como operadores son lineales. Entonces los operadores

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

son lineales, puesto que son combinaciones lineales de productos de operadores lineales. Por la misma razón el operador

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

es lineal.

6.12. Operador adjunto

Dado un operador A definiremos el operador adjunto, A^\dagger , como el operador que satisface

$$\langle Av|u \rangle = \langle v|A^\dagger u \rangle, \quad (6.127)$$

con u y v dos vectores arbitrarios.

6.12.1. Matrices

Por ejemplo, para \mathbf{C}^n se tiene

$$\langle Av|u\rangle = (Av)^{*T}u = v^{*T}A^{*T}u = \langle v|A^\dagger u\rangle = v^{*T}A^\dagger u, \quad (6.128)$$

de donde, para una matriz cuadrada con entradas complejas la matriz adjunta es

$$A^\dagger = A^{*T}. \quad (6.129)$$

6.12.2. Derivada

Para el espacio vectorial de las funciones, el adjunto de un operador depende fuertemente del dominio, las condiciones de borde que se satisfacen y del producto escalar. En el espacio de las funciones suaves e integrables $\psi(x)$ definidas en el intervalo $[a, b]$ y que cumplen $\psi(a) = \psi(b) = 0$. se puede definir el operador

$$A = \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6.130)$$

con α un número complejo. Veamos cual es el operador adjunto de este operador, para ello tomaremos el producto escalar Eq. (6.43) con función de peso $q(x) = 1$. En este caso se puede notar que

$$\begin{aligned} \langle A\psi_1|\psi_2\rangle &= \int_a^b dx (A\psi_1(x))^* \psi_2(x) = \int_a^b dx \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) \right)^* \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \frac{\partial \psi_1^*(x)}{\partial x} \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \left(\frac{\partial (\psi_1^*(x) \psi_2(x))}{\partial x} - \psi_1^*(x) \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} \right) \\ &= \alpha^* (\psi_1^*(x) \psi_2(x)) \Big|_a^b + \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left(-\alpha^* \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} \right) \\ &= \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left(-\alpha^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x), \end{aligned}$$

ahora

$$\langle \psi_1|A^\dagger \psi_2\rangle = \int_a^b dx \psi_1^*(x) A^\dagger \psi_2(x),$$

entonces

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = -\alpha^* \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.131)$$

Note que este resultado depende fuertemente de que se cumpla $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

6.12.3. Derivada con peso

Se puede observar que el adjunto del operador $A = \alpha \frac{\partial}{\partial x}$ no está bien definido con un producto escalar general

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b dx q(x) f^*(x) g(x), \quad q(x) > 0. \quad (6.132)$$

Para este caso es más conveniente ocupar el operador

$$\tilde{A} = \frac{\alpha}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6.133)$$

quien sí tiene bien definido su adjunto. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}\psi_1|\psi_2 \rangle &= \int_a^b dx q(x) (\tilde{A}\psi_1(x))^* \psi_2(x) \\ &= \int_a^b dx q(x) \left(\frac{\alpha}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) \right)^* \psi_2(x) \\ &= \alpha^* \int_a^b dx \frac{\partial \psi_1^*(x)}{\partial x} \psi_2(x) = \int_a^b dx \psi_1^*(x) \left(-\alpha^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x), \\ &= \int_a^b dx q(x) \psi_1^*(x) \left(\frac{-\alpha^*}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_2(x) \end{aligned} \quad (6.134)$$

ahora

$$\langle \psi_1|\tilde{A}^\dagger \psi_2 \rangle = \int_a^b dx q(x) \psi_1^*(x) \tilde{A}^\dagger \psi_2(x),$$

de donde

$$\tilde{A}^\dagger = -\frac{\alpha^*}{q(x)} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.135)$$

6.12.4. Propiedades del operador adjunto

Hay dos propiedades importantes de los operadores adjuntos. La primera propiedad está relacionada con la suma. Si A, B son dos operadores lineales, se tiene

$$\langle (A + B)v | u \rangle = \langle v | (A + B)^\dagger u \rangle, \quad (6.136)$$

pero

$$\begin{aligned} \langle (A + B)v | u \rangle &= \langle (Av + Bv) | u \rangle = \langle Av | u \rangle + \langle Bv | u \rangle \\ &= \langle v | A^\dagger u \rangle + \langle v | B^\dagger u \rangle = \langle v | (A^\dagger + B^\dagger) u \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle v | (A + B)^\dagger u \rangle = \langle v | (A^\dagger + B^\dagger) u \rangle,$$

este resultado es válido para cualquier par de vectores v y u , entonces

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger. \quad (6.137)$$

La otra propiedad está relacionada con el producto de dos operadores:

$$\langle (AB)v | u \rangle = \langle A(Bv) | u \rangle = \langle Bv | A^\dagger u \rangle = \langle v | B^\dagger A^\dagger u \rangle = \langle v | (AB)^\dagger u \rangle,$$

que implica

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \quad (6.138)$$

6.13. Operadores Hermíticos

Una clase importante de operadores son los autoadjuntos, que satisfacen

$$A^\dagger = A, \quad (6.139)$$

a estos operadores también se les llama Hermíticos.

De (6.137) se puede ver que la suma de dos operadores Hermíticos nos da otro operador Hermítico. Además de Eq. (6.138) es claro que si A y B son operadores Hermíticos y **conmutan**, es decir $AB = BA$, entonces

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA = AB. \quad (6.140)$$

Por lo tanto, el producto de dos operadores Hermíticos que **conmutan** es Hermítico.

6.13.1. Ejemplos de matrices Hermíticas

De (6.129) se puede ver que una matriz de \mathbf{C}^n Hermítica cumple

$$(\Lambda)^{*T} = \Lambda. \quad (6.141)$$

En \mathbf{C}^2 un ejemplo trivial una matriz Hermítica es la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.142)$$

En ese mismo espacio, se puede ver que las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.143)$$

son Hermíticas.

6.13.2. Ejemplos de operadores Hermíticos

En el espacio de funciones, claramente cualquier función real $f(\vec{r})$ es un operador Hermítico. De Eq. (6.131) se puede ver que si α es imaginario, por ejemplo si $\alpha = -i\hbar$ el operador

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.144)$$

es Hermítico. Además, como P_x conmuta con P_x , entonces $P_x P_x = P_x^2$ es un operador Hermítico. Si $V(x)$ es un potencial real, el operador Hamiltoniano de la mecánica cuántica

$$H = \frac{1}{2m} P_x^2 + V(x) \quad (6.145)$$

es Hermítico, pues es la suma de dos operadores Hermíticos.

Claramente los operadores

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.146)$$

son Hermíticos. Entonces, si $V(\vec{r})$ es una función real, el operador

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})$$

es Hermítico.

Si η y ξ son variables independientes, entonces definiendo

$$O_1 = \eta, \quad O_2 = -i \frac{\partial}{\partial \xi}$$

se tiene

$$O_1 O_2 f = \eta (-i) \frac{\partial f}{\partial \xi} = (-i) \frac{\partial}{\partial \xi} \eta f = O_2 O_1 f,$$

es decir η y $\left(-i \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$ conmutan. Así los operadores

$$\begin{aligned} xp_y &= x(-i) \frac{\partial}{\partial y}, & xp_z &= x(-i) \frac{\partial}{\partial z}, \\ yp_x &= y(-i) \frac{\partial}{\partial x}, & yp_z &= y(-i) \frac{\partial}{\partial z}, \\ zp_x &= z(-i) \frac{\partial}{\partial x}, & zp_y &= z(-i) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

son Hermíticos. Por lo tanto, también los operadores

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

son Hermíticos. Esto implica que el operador

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

es Hermítico.

6.14. Conmutador

Supongamos que tenemos los operadores lineales A y B , entonces definiremos el conmutador como

$$[A, B] = AB - BA. \quad (6.147)$$

Por ejemplo, si f es una función de prueba y tenemos los operadores x, y se tiene

$$(xy)f = xyf = yxf = (yx)f, \quad (6.148)$$

de donde

$$(xy - yx) f = 0. \quad (6.149)$$

Este resultado es válido para cualquier función, por lo que se suele escribir

$$[x, y] = 0. \quad (6.150)$$

Por lo misma razón se encuentra

$$[x, z] = [z, y] = 0. \quad (6.151)$$

Además si f es una función bien portada, se cumple

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f,$$

entonces si

$$p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6.152)$$

se llega a

$$\begin{aligned} (p_y p_x) f &= \left((-i) \frac{\partial}{\partial y} (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = (-i)(-i) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) f \\ &= \left((-i) \frac{\partial}{\partial y} (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = p_x p_y f, \end{aligned}$$

que implica

$$[p_x, p_y] = 0. \quad (6.153)$$

De la misma forma se tiene

$$[p_x, p_z] = [p_y, p_z] = 0. \quad (6.154)$$

Con los operadores y, p_x se tiene

$$(y p_x) f = \left(y (-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -iy \frac{\partial}{\partial x} f = -i \frac{\partial (yf)}{\partial x} = (p_x y) f,$$

por lo tanto,

$$[y, p_x] = 0. \quad (6.155)$$

Con los mismos argumentos se encuentra

$$[y, p_z] = [x, p_y] = [x, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0. \quad (6.156)$$

Ahora, si $x, p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$, entonces

$$\begin{aligned} (xp_x)f &= \left(x(-i) \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -ix \frac{\partial f}{\partial x}, \\ (p_x x)f &= \left((-i) \frac{\partial}{\partial x} x \right) f = -i \frac{\partial}{\partial x} (xf) = -if - ix \frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

es decir

$$(xp_x - p_x x) f = if. \quad (6.157)$$

Como este resultado es válido para cualquier función, se escribe

$$[x, p_x] = i. \quad (6.158)$$

También se tiene

$$[y, p_y] = i, \quad [z, p_z] = i. \quad (6.159)$$

Si definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ p_1 &= -i \frac{\partial}{\partial x_1}, & p_2 &= -i \frac{\partial}{\partial x_2}, & p_3 &= -i \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (6.160)$$

las anteriores reglas de conmutación se pueden escribir como

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (6.161)$$

Salvo un factor de \hbar , estas son las reglas de conmutación que propuso Heisenberg como base de la mecánica cuántica.

6.14.1. Propiedades de los conmutadores

Los conmutadores tiene varias propiedades algebraicas que los hacen importantes para la Física y las Matemáticas, a continuación veremos algunas de ellas. Sea c un número, entonces si A, B, C son operadores lineales se cumple

$$[A, c] = 0, \quad (6.162)$$

$$[A, B] = -[B, A], \quad (6.163)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad (6.164)$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \quad (6.165)$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [A, C]] = 0. \quad (6.166)$$

La identidad Eq. (6.162) es válida pues c es un número. La prueba de Eq. (6.163) es

$$[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B].$$

Mientras que la prueba de Eq. (6.164) es

$$\begin{aligned} [A, B + C] &= A(B + C) - (B + C)A = (AB + AC) - (BA + CA) \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) = [A, B] + [A, C]. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} [A, BC] &= A(BC) - (BC)A = (ABC) - (BAC) + (BAC) - (BCA) \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C], \end{aligned}$$

que prueba Eq. (6.165).

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, (BC - CB)] = [A, BC] - [A, CB] \\ &= B[A, C] + [A, B]C - (C[A, B] + [A, C]B) \\ &= B(AC - CA) + (AB - BA)C \\ &\quad - (C(AB - BA) + (AC - CA)B) \\ &= BAC + ABC + CBA + CAB \\ &\quad - (BCA + BAC + CAB + ACB) \\ &= ABC + CBA - (BCA + ACB), \end{aligned}$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} [C, [A, B]] &= CAB + BAC - (ABC + CBA), \\ [B, [C, A]] &= BCA + ACB - (CAB + BAC), \end{aligned}$$

sumando estas tres igualdades se llega a Eq. (6.166).

6.14.2. Ejercicio

Para tener un poco de práctica con los conmutadores calcularemos las reglas de conmutación del momento angular Eq. (2.89), cuyas componentes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y, \\ L_y &= zp_x - xp_z, \\ L_z &= xp_y - yp_x. \end{aligned}$$

De donde aplicando las propiedades de los conmutadores y considerando Eq. (6.161) se llega

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x - xp_z] + [-zp_y, zp_x - xp_z] \\
&= [yp_z, zp_x - xp_z] - [zp_y, zp_x - xp_z] \\
&= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - ([zp_y, zp_x] - [zp_y, xp_z]) \\
&= y [p_z, zp_x] + [y, zp_x] p_z - y [p_z, xp_z] - [y, xp_z] p_z \\
&\quad - (z [p_y, zp_x] + [z, zp_x] p_y - z [p_y, xp_z] - [z, xp_z] p_y) \\
&= yz [p_z, p_x] + y [p_z, z] p_x + z [y, p_x] p_z + [y, z] p_x p_z - yx [p_z, p_x] \\
&\quad - y [p_z, x] p_z - x [y, p_z] p_z - [y, x] p_z p_z - z [p_y, p_x] - z [p_y, z] p_x \\
&\quad - z [z, p_x] p_y - z [z, p_y] p_x + zx [p_y, p_z] + z [p_y, x] p_z \\
&\quad + x [z, p_z] p_y + [z, x] p_z p_y \\
&= i (xp_y - yp_x) = iL_z
\end{aligned} \tag{6.167}$$

Además

$$\begin{aligned}
[L_y, L_z] &= [zp_x - xp_z, xp_y - yp_x] = [zp_x, xp_y - yp_x] - [xp_z, xp_y - yp_x] \\
&= [zp_x, xp_y] + [xp_z, yp_x] = z [p_x, x] p_y + y [x, p_x] p_z \\
&= i (yp_z - zp_y) = iL_x, \\
[L_z, L_x] &= [xp_y - yp_x, yp_z - zp_y] = [xp_y, yp_z - zp_y] - [yp_x, yp_z - zp_y] \\
&= [xp_y, yp_z] + [yp_x, zp_y] = x [p_y, y] p_z + z [y, p_y] p_x \\
&= i (zp_x - xp_z) = iL_y.
\end{aligned} \tag{6.168}$$

Es decir,

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_z, L_x] = iL_y, \quad [L_y, L_z] = iL_x. \tag{6.169}$$

Ahora, considerando $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ y Eq. (6.169) se tiene

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x] = [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x] \\
&= L_y [L_y, L_x] + [L_y, L_x] L_y + L_z [L_z, L_x] + [L_z, L_x] L_z \\
&= -iL_y L_z - iL_z L_y + iL_z L_y + iL_y L_z = 0, \\
[L^2, L_y] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_y] = [L_x^2, L_y] + [L_y^2, L_y] + [L_z^2, L_y] \\
&= L_x [L_x, L_y] + [L_x, L_y] L_x + L_z [L_z, L_y] + [L_z, L_y] L_z \\
&= iL_x L_z + iL_z L_x - iL_z L_x - iL_x L_z = 0, \\
[L^2, L_z] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z] = [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + [L_z^2, L_z] \\
&= L_x [L_x, L_z] + [L_x, L_z] L_x + L_y [L_y, L_z] + [L_y, L_z] L_y \\
&= -iL_x L_y - iL_y L_x + iL_y L_x + iL_x L_y = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, L^2 conmuta con cualquier componente del momento angular

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0. \quad (6.170)$$

6.15. Conmutadores y la derivada

Una de las propiedades del conmutador entre dos operadores es que en algunos casos actúa como derivada. En efecto supongamos que

$$[A, B] = \alpha, \quad \alpha = \text{constante}, \quad (6.171)$$

entonces

$$[A, B^2] = [A, BB] = B[A, B] + [A, B]B = B\alpha + B\alpha = 2\alpha B. \quad (6.172)$$

En general se cumple que

$$[A, B] = \alpha \quad \implies \quad [A, B^n] = \alpha n B^{n-1}. \quad (6.173)$$

Probaremos esta afirmación por inducción. La hipótesis de inducción ya la hemos probado. Para probar el paso inductivo debemos mostrar que

$$[A, B^k] = \alpha k B^{k-1} \quad \implies \quad [A, B^{k+1}] = \alpha(k+1)B^k. \quad (6.174)$$

Esta última igualdad es correcta, pues ocupando la hipótesis de inducción y Eq. (6.164) se encuentra

$$\begin{aligned} [A, B^{k+1}] &= [A, BB^k] = B[A, B^k] + [A, B]B^k = \alpha k BB^{k-1} + \alpha B^k \\ &= \alpha(k+1)B^k, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. Por lo tanto, la propiedad (6.173) es válida para cualquier natural n . Así, en este caso el conmutador actúa como derivada.

Para ver de forma más explícita esta afirmación, supongamos que tenemos la función

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n,$$

con la cual podemos formar el operador

$$f(B) = \sum_{n \geq 0} b_n B^n.$$

De donde,

$$\begin{aligned} [A, f(B)] &= \left[A, \sum_{n \geq 0} b_n B^n \right] = \sum_{n \geq 0} b_n [A, B^n] = \sum_{n \geq 0} b_n \alpha n B^{n-1} \\ &= \alpha \sum_{n \geq 0} b_n n B^{n-1} = \alpha \frac{df(B)}{dB}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier función

$$[A, B] = \alpha, \quad \implies \quad [A, f(B)] = \alpha \frac{df(B)}{dB}. \quad (6.175)$$

Por ejemplo, sabemos que con $p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$ se cumple $[x, p_x] = i$, entonces si f y g son dos funciones se encuentra

$$\begin{aligned} [f(x), p_x] &= i \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\ [x, g(p_x)] &= i \frac{\partial g(p_x)}{\partial p_x}. \end{aligned}$$

Estas igualdades son de gran utilidad para obtener ecuaciones de movimiento en mecánica cuántica. En efecto, dado un Hamiltoniano H las ecuaciones de movimiento se definen como

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= [x, H], \\ i\dot{p} &= [p, H], \end{aligned} \quad (6.176)$$

que son las ecuaciones de Heisenger. En particular con el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + V(x),$$

se tiene

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= [x, H] = \left[x, \frac{1}{2m} p^2 \right] = \frac{i}{m} p, \\ i\dot{p} &= [p, H] = [p, V(x)] = -i \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.177)$$

es decir

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}.$$

6.16. Vectores propios

Sea A un operador lineal, si v es un vector tal que $Av = \lambda v$, se dice que v es un vector propio de A con valor propio λ . Al conjunto de valores propios de A se le llama el espectro de A .

Por ejemplo, los vectores propios del operador derivada deben cumplir

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \lambda f(x), \quad (6.178)$$

que son las funciones de la forma $f(x) = A_0 e^{\lambda x}$, $A_0 = \text{constante}$. En la física matemática es importante obtener las funciones propias y valores propios de diferentes operadores, como el momento angular Eq. (2.99)

$$L^2 Y_{\lambda m} = \lambda Y_{\lambda m}, \quad L_z Y_{\lambda m} = m Y_{\lambda m}, \quad (6.179)$$

y el operador Hamiltoniano

$$H\psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (6.180)$$

6.16.1. Espectro de operadores Hermíticos

Los operadores Hermíticos tienen valores propios reales. En efecto, si v es un vector propio de un operador Hermítico A con valor propio λ , es decir $Av = \lambda v$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle Av|v \rangle &= \langle \lambda v|v \rangle = \lambda^* \langle v|v \rangle \\ &= \langle v|A^\dagger v \rangle = \langle v|Av \rangle = \langle v|\lambda v \rangle = \lambda \langle v|v \rangle, \end{aligned}$$

que nos conduce al resultado

$$\lambda^* = \lambda. \quad (6.181)$$

Así, los valores propios de los operadores Hermíticos son reales.

Como el operador H es Hermítico, la ecuación diferencial

$$H\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2m} P^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

sólo tiene solución si E es un valor real. Posteriormente veremos como resolver esta ecuación para algunos casos particulares de $V(\vec{r})$.

De la misma forma, como L^2 es Hermítico, la ecuación diferencial

$$L^2 Y_\lambda(\theta, \varphi) = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_\lambda(\theta, \varphi) = \lambda Y_\lambda(\theta, \varphi)$$

solo tiene solución si λ es un número real. Las soluciones de esta ecuación se llaman armónicos esféricos y son de suma importancia para la electrostática y la mecánica cuántica.

6.16.2. Operadores que conmutan

Se dice que un operador A tiene espectro no degenerado si

$$Av = \lambda v \quad \text{y} \quad Au = \lambda u \implies \exists \alpha, \quad v = \alpha u. \quad (6.182)$$

Por ejemplo, el operador derivada tiene espectro no degenerado, pues todas las soluciones de Eq. (6.178) son de la forma $e^{\lambda x}$, en particular

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

tiene espectro no degenerado.

Supongamos que A y B son dos operadores lineales que conmutan, es decir

$$[A, B] = 0$$

y que A tiene espectro no degenerado. Entonces podemos afirmar que si v es vector propio de A , es decir $Av = \lambda v$, también lo es de B . Esta afirmación es correcta pues si $AB = BA$, entonces

$$ABv = BAv = B(Av) = \lambda Bv \implies A(Bv) = \lambda(Bv). \quad (6.183)$$

Así, (Bv) es vector propio de A con valor propio λ . De donde, como A tiene espectro no degenerado, existe β tal que

$$Bv = \beta v.$$

Esto quiere decir que v es vector propio de B , lo que completa la prueba.

Por ejemplo, L_z tiene espectro no degenerado y conmuta con L^2 . Por lo tanto, estos operadores comparten funciones propias. En el lenguaje de la mecánica cuántica significa que estas dos cantidades se pueden medir al mismo tiempo.

Capítulo 7

Prueba de Feynman de las Ecuaciones de Maxwell

Como un ejercicio para reforzar el usos de conmutadores y vectores, en este capítulo veremos la prueba de Feynman de dos ecuaciones de Maxwell.

Apesar de que las ecuaciones de Maxwell se obtienen de mediciones de la naturaleza, Feynman encontró que la ley de inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday se pueden deducir de la dinámica de una partícula. La demostración parte de suponer la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t) \quad (7.1)$$

y las reglas de conmutación

$$[x_i, x_j] = 0, \quad m[x_i, \dot{x}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (7.2)$$

Primero veremos como se obtiene la fuerza de Lorentz de estas hipótesis, para después hacer la deducción de la ley de inexistencia de monopolos magnéticos y la ley de Faraday.

7.1. Fuerza de Lorentz

Para iniciar, notemos que

$$x_i\ddot{x}_j = \frac{d}{dt}(x_i\dot{x}_j) - \dot{x}_i\dot{x}_j, \quad (7.3)$$

entonces,

$$[x_i, \ddot{x}_j] = x_i\ddot{x}_j - \ddot{x}_jx_i = \left(\frac{d}{dt}(x_i\dot{x}_j) - \dot{x}_i\dot{x}_j \right) - \left(\frac{d}{dt}(\dot{x}_jx_i) - \dot{x}_j\dot{x}_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}(x_i \dot{x}_j - \dot{x}_j x_i) + (\dot{x}_j \dot{x}_i - \dot{x}_i \dot{x}_j) \\
&= \frac{d}{dt}([x_i, \dot{x}_j]) + [\dot{x}_j, \dot{x}_i] = [\dot{x}_j, \dot{x}_i],
\end{aligned} \tag{7.4}$$

es decir,

$$[x_i, \ddot{x}_j] = [\dot{x}_j, \dot{x}_i]. \tag{7.5}$$

Por lo tanto, de la segunda ley de Newton Eq. (7.1) se obtiene

$$[x_i, F_j] = [x_i, m\ddot{x}_j] = m[\dot{x}_j, \dot{x}_i]. \tag{7.6}$$

Usando esta ecuación y la propiedad antisimétrica de los conmutadores, se llega a

$$[x_i, F_j] = m[\dot{x}_j, \dot{x}_i] = -m[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = -[x_j, F_i]. \tag{7.7}$$

De donde, $[x_i, F_j]$ es una matriz antisimétrica. Ahora, sabemos que cualquier matriz antisimétrica de 3×3 se puede escribir en términos del tensor de Levi-Civita y un vector, ver Eq. (1.69). Así, sin pérdida de generalidad podemos proponer

$$[x_i, F_j] = -\frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}B_k. \tag{7.8}$$

Note que de Eq. (7.6) y Eq. (7.8) se obtiene

$$[\dot{x}_i, \dot{x}_j] = \frac{i\hbar}{m^2}\epsilon_{ijk}B_k. \tag{7.9}$$

En principio B_k puede depender de la velocidad, sin embargo, por la identidad de Jacobi

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_i]] = 0, \tag{7.10}$$

las reglas de conmutación Eqs. (7.2), (7.6) y (7.8) se obtiene

$$[x_i, [x_j, F_k]] = -\frac{i\hbar}{m}[x_i, \epsilon_{jkl}B_l] = 0, \tag{7.11}$$

por lo tanto, B_k solo depende de las coordenadas. Así, la igualdad Eq. (7.8) implica que F_i debe ser de la forma $F_i = \epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k$. Note que la igualdad Eq. (7.8) se sigue cumpliendo si sumamos a F_i una función, E_i , que solo depende de las coordenadas. Así, la forma más general de la fuerza es

$$F_i = E_i + \epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k, \tag{7.12}$$

que es exactamente la fuerza de Lorentz.

7.2. Inexistencia de monopolos magnéticos

Ahora, veremos la ley de inexistencia de monopolos magnéticos. De Eq. (7.6) y Eq. (7.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] &= -\frac{\epsilon_{lij}}{m}[x_i, F_j] = -\frac{\epsilon_{lij}}{m} \left(\frac{-i\hbar}{m} \epsilon_{ijk} B_k \right) = \frac{i\hbar}{m^2} \epsilon_{lij} \epsilon_{ijk} B_k \\
 &= -\frac{i\hbar}{m^2} \epsilon_{lij} \epsilon_{jik} B_k = -\frac{i\hbar}{m^2} (\delta_{li} \delta_{ik} - \delta_{lk} \delta_{ii}) B_k = -\frac{i\hbar}{m^2} (\delta_{lk} - 3\delta_{lk}) B_k \\
 &= \frac{2i\hbar}{m^2} B_l,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

es decir,

$$B_l = \frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \dot{x}_j]. \tag{7.14}$$

Además, notemos que con los operadores A_1, A_2, A_3 la identidad de Jacobi se puede escribir como

$$\epsilon_{ijk}[A_i, [A_j, A_k]] = 0. \tag{7.15}$$

Por lo tanto, tomando $A_i = \dot{x}_i$ y considerando Eq. (7.14), se tiene

$$0 = \epsilon_{ijk}[\dot{x}_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = [\dot{x}_i, \epsilon_{ijk}[\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = -\frac{2\hbar}{im^2}[\dot{x}_i, B_i] = \frac{i2\hbar}{im^2} \partial_i B_i = \frac{2\hbar}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{B},$$

es decir, se cumple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{7.16}$$

Que es la ley de inexistencia de monopolos magnéticos.

7.3. Ley de Faraday

Veamos la deducción de la ley de Faraday. Primero notemos que ocupando las propiedades antisimétricas del tensor de Levi-Civita y del conmutador, además de renombrar índices se encuentra,

$$\epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \ddot{x}_j] = \epsilon_{lji}[\ddot{x}_j, \dot{x}_i] = \epsilon_{lij}[\ddot{x}_i, \dot{x}_j], \tag{7.17}$$

es decir,

$$\epsilon_{lij}[\dot{x}_i, \ddot{x}_j] = \epsilon_{lij}[\ddot{x}_i, \dot{x}_j]. \tag{7.18}$$

También se puede ver que se cumple

$$\dot{B}_l = \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m}. \quad (7.19)$$

Así, considerando Eqs. (7.14), (7.18) y (7.9) se encuentra

$$\begin{aligned} \dot{B}_l &= \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} [\dot{x}_i, \dot{x}_j] \right) = -\frac{im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \dot{x}_j - \dot{x}_j \dot{x}_i) \\ &= \frac{-im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} (\ddot{x}_i \dot{x}_j + \dot{x}_i \ddot{x}_j - \ddot{x}_j \dot{x}_i - \dot{x}_j \ddot{x}_i) \\ &= -\frac{im^2}{2\hbar} \epsilon_{lij} ([\ddot{x}_i, \dot{x}_j] + [\dot{x}_i, \ddot{x}_j]) = -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [m\ddot{x}_i, \dot{x}_j] \\ &= -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [F_i, \dot{x}_j] = -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} [E_i + \epsilon_{irs} \dot{x}_r B_s, \dot{x}_j] \\ &= -\frac{im}{\hbar} \epsilon_{lij} ([E_i, \dot{x}_j] + \epsilon_{irs} [\dot{x}_r B_s, \dot{x}_j]) \\ &= \epsilon_{lij} \partial_j E_i + \frac{im}{\hbar} \epsilon_{lji} \epsilon_{irs} (\dot{x}_r [B_s, \dot{x}_j] + [\dot{x}_r, \dot{x}_j] B_s) \\ &= -\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l + \frac{im}{\hbar} (\delta_{lr} \delta_{js} - \delta_{ls} \delta_{jr}) \left(\frac{i\hbar}{m} \dot{x}_r \frac{\partial B_s}{\partial x_j} + [\dot{x}_r, \dot{x}_j] B_s \right) \\ &= -\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l - \left(\dot{x}_l \frac{\partial B_s}{\partial x_s} - \dot{x}_j \frac{\partial B_l}{\partial x_j} \right) + \frac{im}{\hbar} [\dot{x}_l, \dot{x}_j] B_j - \frac{im}{\hbar} [\dot{x}_r, \dot{x}_r] B_l \\ &= -\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l - \dot{x}_l \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} - \frac{1}{m} \epsilon_{ljr} B_r B_j \\ &= -\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_l + \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Por lo tanto, igualando Eq. (7.19) con Eq. (7.20) se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.21)$$

que es la ley de Faraday.

Es notable que la fuerza de Lorentz y dos ecuaciones de Maxwell se puedan obtener partiendo solo de las reglas de conmutación y la segunda ley de Newton. Hay diversas opiniones sobre este hecho. Algunos piensan que hay algo profundo en este resultado, el cual aún no hemos comprendido. Pero también hay quienes piensan que es un resultado sin importancia y otros que creen tener una explicación de esta prueba. Feynman encontró esta prueba pero no la publicó, solo se la contó a algunos de sus amigos. Fue Dyson quien mandó a publicar el resultado después de la muerte de Feynman [19].

Capítulo 8

Series de Fourier

En este capítulo mostraremos que, eligiendo de manera adecuada los parámetros y el intervalo, las funciones trigonométricas $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ forman una base ortonormal en el espacio de funciones. Este capítulo es de especial importancia, pues se aplican varias de las herramientas desarrolladas en el capítulo 7. Al final del capítulo se muestran varios ejercicios.

8.1. Funciones trigonométricas

Recordemos que las funciones trigonométrica $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ satisfacen

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad (8.1)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad (8.2)$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad (8.3)$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha, \quad (8.4)$$

$$\sin n\pi = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (8.5)$$

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n, \quad (8.6)$$

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad (8.7)$$

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0, \quad (8.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos lx = \int_0^{2\pi} dx \cos lx = 0, \quad l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (8.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin lx = \int_0^{2\pi} dx \sin lx = 0, \quad (8.10)$$

$$\int_0^\pi dx \cos lx = 0 \quad (8.11)$$

También es útil recordar la fórmula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (8.12)$$

que induce

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad (8.13)$$

de estas dos igualdades se obtiene

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad (8.14)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}). \quad (8.15)$$

La representación de Euler es muy útil, pues nos permite obtener propiedades de las funciones trigonométricas de forma sencilla. Por ejemplo, como

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \quad (8.16)$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta), \end{aligned} \quad (8.17)$$

es decir,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha, \quad (8.18)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \quad (8.19)$$

De estas identidades y ocupando (8.1)-(8.2) se tiene

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha, \quad (8.20)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha. \quad (8.21)$$

Además, de Eqs. (8.18)-(8.21) se encuentra

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (8.22)$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (8.23)$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]. \quad (8.24)$$

8.2. Relaciones de ortonormalidad

Con las funciones trigonométricas

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (8.25)$$

se puede construir una base de funciones ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Para mostrar esta afirmación, primero notemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Además, considerado Eqs. (8.9)-(8.10) se encuentra

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = 0. \quad (8.26)$$

Esto nos indica que la función constante $1/\sqrt{2\pi}$ es ortogonal a las funciones $\{\cos nx, \sin nx\}$.

Ahora, definamos $l = n - m$ y $k = n + m$, entonces considerando Eqs. (8.22)-(8.24) y ocupando Eqs. (8.9)-(8.10) se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin mx \cos nx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\sin kx + \sin lx) = 0. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Para el caso en que $n \neq m$, usando de nuevo Eqs. (8.22)-(8.24) y ocupando Eqs. (8.9)-(8.10), se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos lx + \cos kx) = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin mx \sin nx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos lx - \cos kx) = 0. \end{aligned}$$

Además, se cumplen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \cos nx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\cos(n-n)x + \cos(2n)x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(2n)x = 1, \\
\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin nx \sin nx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\cos(n-n)x - \cos(2n)x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(2n)x = 1.
\end{aligned}$$

En resumen tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = \delta_{nm}, \quad (8.28)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \delta_{nm}, \quad (8.29)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 = 1, \quad (8.30)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad (8.31)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = 0, \quad (8.32)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = 0. \quad (8.33)$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones Eq. (8.25) son un conjunto de funciones ortornales en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

8.2.1. Series de Fourier

Como el conjunto de funciones Eq. (8.25) es ortornal en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces dada una función f en dicho intervalo se puede hacer la expansión

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (8.34)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x), \\ a_n &= \left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \middle| f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} f(x), \\ b_n &= \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \middle| f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} f(x). \end{aligned} \quad (8.35)$$

8.3. Ejemplos

En esta sección veremos varios ejemplos de series de Fourier

8.3.1. Caso $f(x) = x$

Consideremos la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Como esta función es impar, para este caso se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx x = 0, \\ a_n &= \left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos nx) x = 0. \end{aligned}$$

Además

$$b_n = \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\sin nx) x,$$

por lo que empleando el resultado

$$x \sin nx = -\frac{1}{n} \left(\frac{d}{dx} (x \cos nx) - \cos nx \right),$$

se llega a

$$b_n = -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(x \cos nx - \frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2\pi}{n\sqrt{\pi}} \cos n\pi = \frac{2\sqrt{\pi}}{n} (-)^n.$$

Así,

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n} (-)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^n}{n} \sin nx.$$

La igualdad de Parseval Eq. (6.114) para este caso es

$$\|x\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 = \sum_{n \geq 1} b_n^2,$$

es decir,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n \geq 1} \frac{4\pi}{n^2},$$

de donde

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Por otros métodos, este resultado fue obtenido primero por Euler.

También note que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

así

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8.3.2. Caso $f(x) = x^2$

Ahora consideremos la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Como esta función es par, se encuentra

$$\begin{aligned} b_n &= \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \middle| x^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\sin nx) x^2 = 0, \\ a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| x^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Adicionalmente, usando la igualdad

$$x^2 \cos nx = x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \right) - \frac{2}{n} x \sin nx, \quad (8.37)$$

se encuentra

$$\begin{aligned} a_n &= \left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \middle| x^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos nx) x^2, \\ &= -\frac{2}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\sin nx) x = -\frac{2}{n\sqrt{\pi}} \frac{2\pi(-)^{n+1}}{n} = \frac{4\sqrt{\pi}(-)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \frac{4\sqrt{\pi}(-)^n \cos nx}{n^2 \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-)^n}{n^2} \cos nx. \end{aligned}$$

Note que al evaluar esta función en $x = 0$ se tiene

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-)^n}{n^2},$$

de donde

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

8.3.3. Caso $f(x) = \cos(\mu x)$

Ahora estudiaremos la función $f(x) = \cos(\mu x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Como esta función es par, se tienen que

$$\begin{aligned} b_n &= \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \middle| \cos(\mu x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\sin nx) \cos(\mu x) = 0, \\ a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| \cos(\mu x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(\mu x) = \frac{2 \sin(\mu\pi)}{\mu\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

También se encuentra

$$\begin{aligned} a_n &= \left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \middle| \cos(\mu x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos nx) \cos(\mu x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos(n + \mu)x + \cos(n - \mu)x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sin(n + \mu)x}{n + \mu} + \frac{\sin(n - \mu)x}{n - \mu} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sin(n+\mu)\pi}{n+\mu} + \frac{\sin(n-\mu)\pi}{n-\mu} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sin \mu\pi \cos n\pi + \sin n\pi \cos \mu\pi}{n+\mu} + \frac{\sin n\pi \cos \mu\pi - \sin \mu\pi \cos n\pi}{n-\mu} \right) \\
&= \frac{(-)^n \sin \mu\pi}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{n+\mu} - \frac{1}{n-\mu} \right) = \frac{2(-)^{n+1} \sin \mu\pi}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{n^2 - \mu^2} \right) \\
&= \frac{2(-)^n \sin \mu\pi}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{\mu^2 - n^2} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\cos(\mu x) &= \frac{2 \sin \mu\pi}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \frac{2(-)^n \sin \mu\pi}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{\mu^2 - n^2} \right) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^n \cos nx}{\mu^2 - n^2} \right), \tag{8.38}
\end{aligned}$$

de este resultado se obtiene

$$\frac{\cos \mu x}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\mu} + \sum_{n \geq 1} \frac{\mu 2(-)^n \cos nx}{\mu^2 - n^2} \right). \tag{8.39}$$

Para el caso particular $x = \pi$, se llega a

$$\frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\mu} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\mu}{\mu^2 - n^2} \right), \tag{8.40}$$

de donde

$$\left(\frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} - \frac{1}{\pi\mu} \right) \pi = \sum_{n \geq 1} \frac{2\mu}{\mu^2 - n^2}. \tag{8.41}$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} - \frac{1}{\pi\mu} \right) \pi d\mu &= \int_0^{\pi x} \left(\frac{\cos u}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) du \\
&= \int_0^{\pi x} \frac{d}{du} (\ln \sin u - \ln u) \\
&= \int_0^{\pi x} \frac{d}{du} \ln \left(\frac{\sin u}{u} \right) \\
&= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right). \tag{8.42}
\end{aligned}$$

También se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n \geq 1} \frac{2\mu}{\mu^2 - n^2} d\mu &= \sum_{n \geq 1} \int_0^x \left(\frac{-2}{n^2} \right) \frac{d\mu}{1 - \frac{\mu^2}{n^2}} = \sum_{n \geq 1} \int_0^x \frac{d}{d\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu^2}{n^2} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{\mu^2}{n^2} \right) \Big|_0^x = \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\
&= \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right). \tag{8.43}
\end{aligned}$$

La expresión Eq. (8.41) nos indica que Eq. (8.42) debe ser igual a Eq. (8.43). De donde se obtiene

$$\ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \tag{8.44}$$

es decir

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right). \tag{8.45}$$

Definiendo $z = \pi x$, se llega a

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{n\pi} \right)^2 \right]. \tag{8.46}$$

Esta igualdad la dedujo por primera vez Euler. Sorprendentemente Feynman encontró que esta expresión tiene aplicaciones en mecánica cuántica [23]

8.3.4. Función $f(x) = e^x$

Para la función $f(x) = e^x$ se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2 \sinh \pi}{\sqrt{2\pi}}. \tag{8.47}$$

Además

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^x \cos nx, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^x \sin nx, \tag{8.48}$$

de donde

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^x (\cos nx + i \sin nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{x(1+in)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{x(1+in)}}{1+in} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\pi} e^{in\pi} - e^{-\pi} e^{-in\pi}}{1+in} = \frac{1-in}{\sqrt{\pi}(1+n^2)} (e^{\pi}(-)^n - (-)^n e^{-\pi}) \\
&= \frac{(1-in)(-)^n}{\sqrt{\pi}(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(1-in)(-)^n}{\sqrt{\pi}(1+n^2)} 2 \sinh \pi. \quad (8.49)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_n = \frac{2(-)^n \sinh \pi}{\sqrt{\pi}(1+n^2)}, \quad b_n = \frac{2n(-)^{n+1} \sinh \pi}{\sqrt{\pi}(1+n^2)},$$

que implican

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-)^n \cos nx}{1+n^2} + \frac{n(-)^{n+1} \sin nx}{1+n^2} \right). \quad (8.50)$$

De esta serie se encuentran las series

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-)^n \cos nx}{1+n^2} + \frac{n(-)^n \sin nx}{1+n^2} \right) \right], \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^n \cos nx}{1+n^2} \right], \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^{n+1} \sin nx}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

8.4. Serie tipo coseno

Para el espacio de funciones el intervalo donde éstas son definidas es muy importante. Por ejemplo, en el intervalo $[0, \pi]$ el conjunto (8.25) ya no es ortonormal. En este intervalo consideraremos el conjunto de funciones

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}. \quad (8.51)$$

Ocupando las identidades Eqs. (8.22)-(8.24), se encuentra

$$\int_0^{\pi} dx \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = 1, \quad (8.52)$$

$$\int_0^\pi dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx = 0, \quad (8.53)$$

$$\int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos mx = \delta_{nm}. \quad (8.54)$$

Entonces, si f es una función en el intervalo $[0, \pi]$, se puede expresar como

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \quad (8.55)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$a_0 = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\pi}} f(x),$$

$$a_n = \int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx f(x).$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = x$ se tienen

$$a_0 = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\pi}} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\pi}},$$

además

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \cos nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \int_0^\pi dx x \frac{d}{dx} \sin nx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n} \int_0^\pi dx \left(\frac{d}{dx} (x \sin nx) - \sin nx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi dx \frac{d}{dx} \cos nx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^2} [(-)^n - 1], \end{aligned}$$

de donde $a_{2n} = 0$ y

$$a_{2n-1} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \quad (8.56)$$

8.5. Serie tipo seno

En un mismo intervalo puede haber diferentes base para el espacio de funciones. Por ejemplo, usando las identidades Eqs. (8.22)-(8.24), se puede mostrar que se cumple

$$\int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx = \delta_{nm}. \quad (8.57)$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\} \quad (8.58)$$

es ortonormal en el intervalo $[0, \pi]$.

Entonces, si f es una función en el intervalo $[0, \pi]$, se encuentra

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad (8.59)$$

en este caso los coeficientes de Fourier son

$$b_n = \int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx f(x). \quad (8.60)$$

Por ejemplo, para la función constante $f(x) = C$ se tienen los coeficientes de Fourier

$$b_n = C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dx \sin nx = -\frac{C}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \Big|_0^\pi = -\frac{C}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(-)^n - 1],$$

de donde $b_{2n} = 0$ y

$$b_{2n-1} = \frac{2C}{2n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Así,

$$C = \frac{4C}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \quad (8.61)$$

8.6. Intervalo arbitrario

Ahora estudiaremos el espacio de funciones en el intervalo $[-L, L]$. En este intervalo mostraremos que el conjunto de funciones

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.62)$$

es ortonormal. Primero notemos que

$$\int_{-L}^L dx \left(\frac{1}{\sqrt{2L}} \right)^2 = 1, \quad (8.63)$$

$$\int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} = 0, \quad (8.64)$$

$$\int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} = 0. \quad (8.65)$$

Además, con el cambio de variable

$$u = \frac{\pi x}{L} \quad (8.66)$$

se encuentra

$$\int_{-L}^L dx f\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du f(u). \quad (8.67)$$

Para este caso es conveniente tomar las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \left\langle f\left(\frac{\pi x}{L}\right) \middle| g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\rangle_L &= \int_{-L}^L dx f^*\left(\frac{\pi x}{L}\right) g\left(\frac{\pi x}{L}\right), \\ \langle f(x) | g(x) \rangle_{\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} dx f^*(x) g(x). \end{aligned} \quad (8.68)$$

Ocupando el resultado (8.67) se encuentra

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} f\left(\frac{\pi x}{L}\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{L}} g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\rangle_L = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(u) \middle| \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(u) \right\rangle_{\pi}. \quad (8.69)$$

Entonces, utilizando las ecuaciones (8.28)-(8.33) se llega a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\rangle_L &= \delta_{nm}, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\rangle_L &= \delta_{nm}, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\rangle_L &= 0. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Estas ecuaciones junto con Eqs. (8.63)-(8.63) nos indican que el conjunto de funciones Eq. (8.62) forman un conjunto de funciones ortornales en el intervalo $[-L, L]$.

Este resultado implica que si f es una función continua en el intervalo $[-L, L]$, se puede escribir como

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2L}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (8.71)$$

aquí los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2L}} \middle| f(x) \right\rangle_L = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{2L}} f(x), \quad (8.72)$$

$$a_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \middle| f(x) \right\rangle_L = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) f(x), \quad (8.73)$$

$$b_n = \left\langle \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \middle| f(x) \right\rangle_L = \int_{-L}^L dx \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) f(x). \quad (8.74)$$

8.6.1. Delta de Dirac

Ahora veremos que las series de Fourier permiten generalizar la delta de Kronecker, esta generalización se llama delta de Dirac y es de utilidad para resolver problemas de mecánica cuántica y electromagnetismos.

Sustituyendo los coeficientes de Fourier Eqs. (8.72)-(8.74) en Eq. (8.71) se encuentra

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-L}^L dx' \frac{f(x')}{2L} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^L dx' f(x') \cos \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^L dx' f(x') \sin \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right], \\ &= \int_{-L}^L dx' \frac{f(x')}{L} \\ &\quad \left[\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\cos \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + \sin \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \right], \\ &= \int_{-L}^L dx' \frac{f(x')}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \cos \left(\frac{n\pi}{L} (x - x') \right) \right]. \quad (8.75) \end{aligned}$$

En el intervalo $[-L, L]$ definiremos la delta de Dirac como

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x - x')\right), \quad (8.76)$$

de donde

$$f(x) = \int_{-L}^L dx' f(x') \delta(x - x'). \quad (8.77)$$

Note que, bajo una integral, la delta de Dirac cambia la variable x' por x . En ese sentido la delta de Dirac es la generalización continua de la delta de Kronecker Eq. (1.20).

Ahora, recordemos la identidad trigonométrica

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (8.78)$$

por lo tanto la delta de Dirac se puede expresar como

$$\delta(x - x') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{(x-x')\pi}{L}\right]}{2L \sin \frac{(x-x')\pi}{2L}}. \quad (8.79)$$

8.7. Serie coseno en el intervalo $[0, L]$

Ahora, mostraremos que el conjunto de funciones

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.80)$$

es ortonormal en el intervalo $[0, L]$. Primero notemos que con el cambio de variable Eq. (8.67) se encuentra

$$\int_0^L dx f\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi du f(u). \quad (8.81)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right)^2 &= 1, \\ \int_0^L dx \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} &= 0, \\ \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos mx = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Así, el conjunto de funciones Eq. (8.80) forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $[0, L]$.

Entonces, si f es una función continua en el intervalo $[0, L]$, se puede escribir como

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{L}} + \sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (8.82)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$a_0 = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}} f(x), \quad (8.83)$$

$$a_n = \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) f(x). \quad (8.84)$$

8.7.1. Delta de Dirac

Sustituyendo los coeficientes de Fourier Eqs. (8.83)-(8.84) en Eq. (8.82) se encuentra

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^L dx' \frac{f(x')}{L} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{L} \left(\int_0^L dx' f(x') \cos \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \\ &= \int_0^L dx' \frac{f(x')}{L} \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.85)$$

En el intervalo $[0, L]$, con la base (8.80), definiremos la delta de Dirac como

$$\delta(x - x') = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} \cos \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (8.86)$$

por lo tanto

$$f(x) = \int_0^L dx' f(x') \delta(x - x'). \quad (8.87)$$

8.8. Serie seno en el intervalo $[0, L]$

Ahora estudiaremos el conjunto de funciones

$$\{\psi(x)\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.88)$$

mostraremos que este conjunto de funciones es ortonormal en el intervalo $[0, L]$. Ocupando el cambio de variable Eq. (8.67) y la igualdad Eq. (8.81), se encuentra

$$\int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} = \int_0^\pi dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx = \delta_{nm}.$$

Así, el conjunto de funciones Eq. (8.88) forman un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0, L]$.

Entonces, si f es una función continua en el intervalo $[0, L]$, se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (8.89)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$b_n = \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) f(x). \quad (8.90)$$

8.8.1. Delta de Dirac

Sustituyendo los coeficientes de Fourier Eq. (8.90) en Eq. (8.89) se encuentra

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^L dx' f(x') \sum_{n \geq 1} \frac{2}{L} \left(\int_0^L dx' f(x') \sin \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \\ &= \int_0^L dx' f(x') \left[\frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.91)$$

En el intervalo $[0, L]$, con la base (8.88), definiremos la delta de Dirac como

$$\delta(x - x') = \frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{n\pi x'}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (8.92)$$

por lo tanto

$$f(x) = \int_0^L dx' f(x') \delta(x - x'). \quad (8.93)$$

8.9. Representación compleja

En el intervalo $[-L, L]$ también podemos usar el conjunto de funciones

$$\{\psi_n(x)\} = \left\{ \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}}{\sqrt{2L}} \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8.94)$$

Note que si $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L dx \psi_n^*(x) \psi_m(x) &= \int_{-L}^L \frac{e^{i\frac{(m-n)\pi x}{L}}}{2L} = \frac{L}{i(m-n)\pi} \frac{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}}{2L} \\ &= \frac{L}{i(n-m)\pi} \frac{(-)^{n-m} - (-)^{m-n}}{2L} = 0, \end{aligned} \quad (8.95)$$

si $m = n$ se cumple

$$\int_{-L}^L dx \psi_n^*(x) \psi_n(x) = 1. \quad (8.96)$$

Así, el conjunto de funciones Eq. (8.94) es ortonormal. Entonces, si f es una función continua en el intervalo $[0, L]$, se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}}{\sqrt{2L}} \quad (8.97)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$\alpha_n = \int_{-L}^L dx \frac{e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{\sqrt{2L}} f(x). \quad (8.98)$$

Note que si la función f es real, se cumple

$$\alpha_n^* = \alpha_{-n}. \quad (8.99)$$

8.9.1. Delta de Dirac

Sustituyendo los coeficientes de Fourier Eq. (8.98) en Eq. (8.97) se encuentra

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx' f(x') e^{i\frac{n\pi(x-x')}{L}} = \int_{-L}^L dx' f(x') \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi(x-x')}{L}}}{2L}.$$

Así, la delta de Dirac en el intervalo $[-L, L]$ toma la forma

$$\delta(x - x') = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi(x-x')}{L}}}{2L}, \quad (8.100)$$

de donde

$$f(x) = \int_{-L}^L dx' f(x') \delta(x - x'). \quad (8.101)$$

8.10. Ecuación de Laplace en dos dimensiones

Ahora veremos algunas aplicaciones de las series de Fourier. Primero estudiaremos problemas en dos dimensiones.

Usando coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace en dos dimensiones es

$$\nabla_{2D}^2 \phi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = 0. \quad (8.102)$$

Para resolver esta ecuación propondremos

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (8.103)$$

sustituyendo esta propuesta en Eq. (8.102) se encuentra

$$\nabla_{2D}^2 \phi(x, y) = Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0, \quad (8.104)$$

de donde

$$\frac{\nabla_{2D}^2 \phi(x, y)}{\phi(x, y)} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0. \quad (8.105)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nabla_{2D}^2 \phi(x, y)}{\phi(x, y)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (8.106)$$

que implica

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2, \quad \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 X(x), \quad \alpha = \text{constante}. \quad (8.107)$$

Usando este resultado en Eq. (8.105) se llega a

$$-\alpha^2 + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0, \quad (8.108)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \alpha^2 Y(y). \quad (8.109)$$

Si $\alpha = 0$, entonces Eq. (8.107) y Eq. (8.109) toman la forma

$$X_0(x) = (A + Bx), \quad Y_0(y) = (C + Dy), \quad A, B, C, D = \text{constante.}$$

Si $\alpha \neq 0$ las soluciones a las ecuaciones (8.107) y (8.109) son

$$\begin{aligned} X_\alpha(x) &= (a_\alpha \cos \alpha x + b_\alpha \sin \alpha x), \\ Y_\alpha(y) &= (c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}), \quad a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha = \text{constante.} \end{aligned}$$

Así, en coordenadas cartesianas, las soluciones generales de la ecuación de Laplace en dos dimensiones son

$$\phi_0(x, y) = (A + Bx)(C + Dy), \quad (8.110)$$

$$\phi_\alpha(x, y) = (a_\alpha \cos \alpha x + b_\alpha \sin \alpha x)(c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}). \quad (8.111)$$

8.10.1. Ejemplo

Suponga que tiene un sistema en dos dimensiones cuyo potencial eléctrico satisface las condiciones de borde

$$\phi(x, 0) = V, \quad V = \text{constante}, \quad (8.112)$$

$$\phi(x, \infty) = 0, \quad (8.113)$$

$$\phi(0, y) = \phi(L, y) = 0. \quad (8.114)$$

Encontrar el potencial eléctrico en todo el espacio y mostrar que se puede escribir como

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{\sinh \frac{\pi y}{L}} \right). \quad (8.115)$$

Primero notemos que la condición de borde Eq. (8.114)

$$\phi_0(0, y) = A(C + Dy) = 0 \quad (8.116)$$

implica $A = 0$. Así, $\phi_0(x, y) = Bx(C + Dy)$. Además, si pedimos que

$$\phi_0(L, y) = BL(C + Dy) = 0, \quad (8.117)$$

se encuentra que $B = 0$. Por lo tanto $\phi_0(x, y) = 0$. De la misma condición de borde Eq. (8.114) se puede ver que

$$\phi_\alpha(0, y) = a_\alpha (c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}) = 0 \quad (8.118)$$

entonces $a_\alpha = 0$. Así, $\phi_\alpha(x, y) = b_\alpha \sin \alpha x (c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y})$. Además, si pedimos que

$$\phi(L, y) = b_\alpha \sin \alpha L (c_\alpha e^{\alpha y} + d_\alpha e^{-\alpha y}) = 0 \quad (8.119)$$

se debe cumplir

$$\sin \alpha L = 0, \quad (8.120)$$

que se satisface si

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.121)$$

De donde, las soluciones deben ser de la forma

$$\phi_n(x, y) = (c_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + d_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x. \quad (8.122)$$

Ahora, se puede observar que la condición de borde Eq. (8.113) implica $c_n = 0$. Así, las soluciones deben ser de la forma

$$\phi_n(x, y) = a_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x. \quad (8.123)$$

Por lo tanto, la solución más general que cumple las condiciones de borde Eqs. (8.113)-(8.114) es

$$\phi(x, y) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x. \quad (8.124)$$

Para cumplir la condición de borde Eq. (8.112) se debe pedir que

$$\phi(x, 0) = V = \sum_{n \geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad (8.125)$$

que se cumple siempre y cuando

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx V \sin \frac{n\pi}{L} x = \sqrt{\frac{2}{L}} V \int_0^L dx \sin \frac{n\pi}{L} x \\
&= \sqrt{\frac{2}{L}} V \frac{L}{n\pi} (-) \int_0^L dx \frac{d}{dx} \cos \frac{n\pi}{L} x \\
&= \sqrt{\frac{2}{L}} V \frac{L}{n\pi} (-) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L = \sqrt{\frac{2}{L}} V \frac{L}{n\pi} (-) [(-)^n - 1], \quad (8.126)
\end{aligned}$$

de donde

$$a_{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2VL}{(2n-1)\pi}, \quad a_{2n} = 0. \quad (8.127)$$

Sustituyendo estos resultados en Eq. (8.124), se obtiene

$$\phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{L} y} \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x. \quad (8.128)$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{(2n-1)\pi}{L} y} \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x &= \text{Im} \left(e^{-\frac{(2n-1)\pi}{L} y} e^{i \frac{(2n-1)\pi}{L} x} \right) = \text{Im} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{L} (ix-y)} \right) \\
&= \text{Im} \left(e^{i \frac{(2n-1)\pi}{L} (x+iy)} \right) = \text{Im} \left(e^{i \frac{\pi}{L} (x+iy)} \right)^{(2n-1)},
\end{aligned}$$

por lo tanto, definiendo

$$\omega = e^{i \frac{\pi}{L} (x+iy)},$$

se encuentra

$$\phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\omega^{2n-1}}{2n-1} \right). \quad (8.129)$$

Ahora, recordemos las series

$$\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n \geq 0} \omega^n, \quad \frac{1}{1+\omega} = \sum_{n \geq 0} (-)^n \omega^n, \quad (8.130)$$

de las cuales se deduce

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\omega}{1-\omega} &= -\ln(1-\omega) = \sum_{n \geq 0} \frac{\omega^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{\omega^n}{n}, \\
\int \frac{d\omega}{1+\omega} &= \ln(1+\omega) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n \omega^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 1} (-)^{n+1} \frac{\omega^n}{n}, \quad (8.131)
\end{aligned}$$

que a su vez implican

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) &= \ln(1+\omega) - \ln(1-\omega) = \sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-)^{n+1}\omega^n}{n} \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\omega^{2n-1}}{2n-1}.\end{aligned}\quad (8.132)$$

Entonces

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{Im} \left[\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \right]. \quad (8.133)$$

Además, si definimos

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega} = |z|e^{i\theta}, \quad \tan \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}, \quad (8.134)$$

se tiene que

$$\ln z = \ln |z| + i\theta. \quad (8.135)$$

Así,

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \theta. \quad (8.136)$$

Considerando la definición de ω , tenemos

$$\begin{aligned}z &= \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{(1+\omega)(1-\omega^*)}{|1-\omega|^2} = \frac{1+\omega-\omega^*-\omega\omega^*}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{L}(x+iy)} - e^{-i\frac{\pi}{L}(x-iy)} - e^{i\frac{\pi}{L}(x+iy)}e^{-i\frac{\pi}{L}(x-iy)}}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1 + e^{-\frac{\pi y}{L}}(e^{i\frac{\pi}{L}x} - e^{-i\frac{\pi}{L}x}) - e^{-\frac{2\pi}{L}}}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{2\pi y}{L}} + 2ie^{-\frac{\pi y}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}}{|1-\omega|^2},\end{aligned}\quad (8.137)$$

entonces

$$\tan \theta = \frac{2e^{-\frac{\pi y}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}}{1 - e^{-\frac{2\pi y}{L}}} = \frac{2 \sin \frac{2\pi x}{L}}{e^{\frac{\pi y}{L}} - e^{-\frac{\pi y}{L}}} = \frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{\sinh \frac{\pi y}{L}}. \quad (8.138)$$

Por lo tanto,

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{\sinh \frac{\pi y}{L}} \right). \quad (8.139)$$

8.11. Ecuación de Poisson en dos dimensiones con coordenadas polares

En coordenadas polares, la ecuación de Laplace en dos dimensiones es

$$\nabla_{2D}^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.140)$$

Para resolverla propondremos $\phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Psi(\varphi)$, de donde

$$\nabla_{2D}^2 \phi = \frac{\Psi(\varphi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (8.141)$$

que implica

$$\frac{\rho^2 \nabla_{2D}^2 \phi}{\phi} = \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.142)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho^2 \nabla_{2D}^2 \phi}{\phi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (8.143)$$

así

$$\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2, \quad \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2 \Psi(\varphi), \quad \alpha = \text{constante}. \quad (8.144)$$

Sustituyendo este resultado en Eq. (8.142) se llega a

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - \alpha^2 = 0, \quad \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = \alpha^2 R(\rho). \quad (8.145)$$

En consecuencia las ecuaciones a resolver son

$$\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2 \Psi(\varphi), \quad \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = \alpha^2 R(\rho). \quad (8.146)$$

Si $\alpha = 0$, para el sector angular se tiene

$$\Psi(\varphi) = (A + B\varphi), \quad A, B = \text{constante}. \quad (8.147)$$

Para la parte radial se tiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0, \quad (8.148)$$

es decir

$$\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} = C, \quad C = \text{constante}, \quad (8.149)$$

entonces

$$R(\rho) = C \ln \rho + D, \quad D = \text{constante}. \quad (8.150)$$

Por lo tanto,

$$\phi_0(\rho, \varphi) = (A + B\varphi)(C \ln \rho + D), \quad A, B, C, D = \text{constante}. \quad (8.151)$$

Si $\alpha \neq 0$, la parte angular tiene como solución

$$\Psi(\varphi) = a_\alpha \cos \alpha\varphi + b_\alpha \sin \alpha\varphi, \quad a_\alpha, b_\alpha = \text{constante}. \quad (8.152)$$

Para la parte radial propondremos $R(\rho) = E\rho^\lambda$, con E una contante. Al sustituir esta propuesta en Eq. (8.146) se encuentra $\alpha^2 = \lambda^2$, es decir $\lambda = \pm\alpha$. Así, la solución radial es

$$R(\rho) = c_\alpha \rho^\alpha + d_\alpha \rho^{-\alpha}, \quad c_\alpha, d_\alpha = \text{constante}. \quad (8.153)$$

De donde, si $\alpha \neq 0$, las soluciones son

$$\phi_\alpha(\rho, \varphi) = (a_\alpha \cos \alpha\varphi + b_\alpha \sin \alpha\varphi)(c_\alpha \rho^\alpha + d_\alpha \rho^{-\alpha}). \quad (8.154)$$

como (ρ, φ) y $(\rho, \varphi + 2\pi)$ representan el mismo punto en el espacio, se debe cumplir que

$$\phi(\rho, \varphi) = \phi(\rho, \varphi + 2\pi). \quad (8.155)$$

Para el caso $\alpha = 0$ esta condición implica $B = 0$, de donde

$$\phi_0(\rho, \varphi) = C \ln \rho + D, \quad C, D = \text{constante}. \quad (8.156)$$

Si $\alpha \neq 0$, la condición Eq. (8.155) impone que

$$\cos \alpha(\varphi + 2\pi) = \cos \alpha\varphi, \quad \sin \alpha(\varphi + 2\pi) = \sin \alpha\varphi, \quad (8.157)$$

que se satisfacen si $n = \alpha$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. Por lo tanto, las soluciones son

$$\phi_n(\rho, \varphi) = (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)(c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}). \quad (8.158)$$

Esto nos indica que, usando coordenadas polares, la solución general a la ecuación de Poisson en dos dimensiones es

$$\phi(\rho, \varphi) = C \ln \rho + \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}). \quad (8.159)$$

8.11.1. Fórmula de Poisson en dos dimensiones

Un cilindro infinito de radio R está a potencial $V(\varphi)$ en su superficie. Suponiendo que el potencial es finito en cualquier punto del espacio, muestre que el potencial se puede escribir como

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi' V(\varphi')}{1 - 2 \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2}, \quad (8.160)$$

con $\rho_{<} = \text{menor}\{\rho, R\}$ y $\rho_{>} = \text{mayor}\{\rho, R\}$.

Para este caso se debe ocupar la ecuación de Poisson en tres dimensiones con coordenadas cilíndricas. Pero en el cilindro es infinito el potencial no depende de z , por lo tanto la ecuación que se debe satisfacer es la ecuación de Poisson en dos dimensiones en coordenadas polares Eq. (8.140). Así, el potencial debe ser de forma Eq. (8.159). Como el potencial debe ser finito en el interior del cilindro, en esta región debe tomar la forma

$$\phi_{int}(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n. \quad (8.161)$$

Ahora, como el potencial debe ser finito en el exterior del cilindro, en esta región debe tomar la forma

$$\phi_{ext}(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{A_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{B_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \left(\frac{R}{\rho} \right)^n. \quad (8.162)$$

Además, si $\rho = R$ se debe cumplir

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \phi_{ext}(R, \varphi) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{A_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{B_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \\ &= \phi_{int}(R, \varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right), \end{aligned}$$

que implica

$$A_0 = a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V(\varphi')}{\sqrt{2\pi}} d\varphi', \quad (8.163)$$

$$a_n = A_n = \int_{-\pi}^{\pi} V(\varphi') \frac{\cos n\varphi'}{\sqrt{\pi}} d\varphi', \quad (8.164)$$

$$b_n = B_n = \int_{-\pi}^{\pi} V(\varphi') \frac{\sin n\varphi'}{\sqrt{\pi}} d\varphi'. \quad (8.165)$$

Así, los potenciales son

$$\begin{aligned}\phi_{int}(\rho, \varphi) &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^n, \\ \phi_{ext}(\rho, \varphi) &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \left(\frac{R}{\rho} \right)^n,\end{aligned}$$

estos dos potenciales se pueden escribir como

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \right) \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^n.$$

Ahora, sustituyendo los coeficientes de Fourier Eq. (8.163) en Eq. (8.165) se encuentra

$$\begin{aligned}\phi(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V(\varphi')}{\sqrt{2\pi}} d\varphi' + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' V(\varphi') \frac{\cos n\varphi'}{\sqrt{\pi}} d\varphi' \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' V(\varphi') \frac{\sin n\varphi'}{\sqrt{\pi}} d\varphi' \right) \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^n \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' V(\varphi') \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} (\cos n\varphi' \cos n\varphi + \sin n\varphi' \sin n\varphi) \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^n \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^n \cos n(\varphi - \varphi') \right).\end{aligned}$$

Definamos

$$z = \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) e^{i(\varphi - \varphi')} < 1, \quad (8.166)$$

de donde

$$\text{Re} z = \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi'). \quad (8.167)$$

Así,

$$\phi(\rho, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{\pi} \text{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} z^n \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{\pi} \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 0} z^n \right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{V(\varphi')}{\pi} \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+z} \right). \tag{8.168}
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \frac{1-z}{1+z} = \frac{1}{2} \frac{(1-z)(1+z^*)}{|1+z|^2} = \frac{1}{2} \frac{1+z^*-z-z^*}{|1+z|^2}. \tag{8.169}$$

Además, considerando la definición Eq. (8.166) se tiene

$$\begin{aligned}
1+z^*-z-z^*z &= 1 - 2i \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \sin(\varphi - \varphi') - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2, \\
1+z &= 1 + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') + i \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \sin(\varphi - \varphi') \\
|1+z|^2 &= \left(1 + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') \right)^2 + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2 \sin^2(\varphi - \varphi') \\
&= 1 + 2 \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2. \tag{8.170}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+z} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2}{1 + 2 \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2}. \tag{8.171}$$

Sustituyendo este resultado en Eq. (8.168) se llega a

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2 \right] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi' F(\varphi')}{1 - 2 \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right) \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2},$$

que es lo que se quería demostrar.

8.11.2. Cilindro infinito

Suponga que un cilindro infinito de radio R tiene en su superficie el potencial

$$V(\varphi) = \begin{cases} -V & \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ V & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \\ -V & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ V & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (8.172)$$

Suponiendo que el potencial es finito en cual quier punto del espacio, mostrar que el potencial en todo el espacio es

$$\phi(x, y) = -\frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2 \sin 2\varphi}{1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^4} \right), \quad (8.173)$$

con $\rho_{<} = \text{menor}\{\rho, R\}$ y $\rho_{>} = \text{mayor}\{\rho, R\}$.

Por las características del sistema, el potencial es de la forma Eq. (8.159) con los coeficientes de Fourier dados por Eqs. (8.163)-(8.165). Además, como $V(\varphi)$ es una función impar se encuentra que $a_0 = a_n = 0$ y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi V(\varphi) \sin n\varphi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} d\varphi V(\varphi) \sin n\varphi \\ &= \frac{2V}{n\sqrt{\pi}} \left(\cos n\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos n\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{2V}{n\sqrt{\pi}} \left((-1)^{n+1} - 1 + 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Como $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$, se encuentra que $b_{2n-1} = 0$, mientras que

$$b_{2n} = \frac{2V}{n\sqrt{\pi}} (-1 + \cos n\pi) = \frac{2V}{n\sqrt{\pi}} (-1 + (-1)^n),$$

de donde $b_{2(2n)} = 0$ y

$$b_{2(2n-1)} = \frac{-4V}{(2n-1)\sqrt{\pi}}. \quad (8.174)$$

Por lo tanto el potencial eléctrico es

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{-4V}{\pi} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^{2(2n-1)} \frac{1}{2n-1} \sin 2(2n-1)\varphi.$$

Con la definición

$$\omega = \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^2 e^{i2\varphi}, \quad (8.175)$$

el potencial se puede escribir de la forma

$$\phi(\rho, \varphi) = \frac{-4V}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\text{Im} \omega^{2n-1}}{2n-1} = \frac{-4V}{\pi} \text{Im} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\omega^{2n-1}}{2n-1} \right).$$

Además, además usando la serie

$$\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\omega^{2n-1}}{2n-1}$$

se obtiene

$$\phi(x, y) = -\frac{2V}{\pi} \text{Im} \left[\ln \left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \right]. \quad (8.176)$$

Ahora, si definimos

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega} = |z|e^{i\theta}, \quad \tan \theta = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}, \quad (8.177)$$

se encuentra

$$\ln z = \ln |z| + i\theta, \quad (8.178)$$

de donde

$$\phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \theta. \quad (8.179)$$

Ocupando la definición de ω tenemos que

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{(1+\omega)(1-\omega^*)}{|1-\omega|^2} = \frac{1+\omega-\omega^*-\omega\omega^*}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1+2i\left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^2 \sin 2\varphi - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^4}{|1-\omega|^2} = \frac{1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^4 + 2i\left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^2 \sin 2\varphi}{|1-\omega|^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\tan \theta = \frac{2\left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^2 \sin 2\varphi}{1 - \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^4}, \quad (8.180)$$

de donde

$$\phi(x, y) = -\frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{\rho_{\leq}}{\rho_{>}} \right)^2 \sin 2\varphi}{1 - \left(\frac{\rho_{\leq}}{\rho_{>}} \right)^4} \right), \quad (8.181)$$

que es lo que se quería mostrar.

8.12. Ecuación de Schrödinger en una dimensión

La ecuación de Schrödinger en una dimensión es

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \quad (8.182)$$

Para resolver esta ecuación, proponemos que $\psi(x, t) = T(t)\phi(x)$, sustituyendo esta propuesta en Eq. (8.182) se encuentra

$$i\hbar \phi(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = T(t)H\phi(x), \quad (8.183)$$

de donde

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{1}{\phi(x)} H\phi(x). \quad (8.184)$$

Por lo tanto,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) = 0, \quad (8.185)$$

es decir

$$i\hbar \left(\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) = E, \quad i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} = ET(t), \quad E = \text{constante},$$

de donde

$$T(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \quad (8.186)$$

Sustituyendo este resultado en Eq. (8.184) se llega a

$$H\phi(x) = E\phi(x), \quad (8.187)$$

como H es un operador Hermítico, E debe ser una constante real.

8.12.1. Pozo infinito

Suponga que el potencial es dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L, \\ \infty & x < 0, \quad x > L. \end{cases} \quad (8.188)$$

Este potencial representa una partícula encerrada en una línea de longitud L . Como la partícula está encerrada, se deben cumplir las condiciones de frontera $\phi(0) = \psi(L) = 0$, que son condiciones de Dirichlet. Por lo tanto, Eq. (8.187) es tipo Sturm-Liouville y sus soluciones deben formar una base ortonormal.

Dentro de la línea $[0, L]$, se tiene la ecuación

$$H\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = E\phi(x), \quad (8.189)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x), \quad (8.190)$$

cuya solución general es

$$\phi(x) = A_E \sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x + B_E \cos \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x, \quad A_E, B_E = \text{constante.} \quad (8.191)$$

La condición de borde $\phi(0) = 0$ implica $B_E = 0$. Mientras que la condición $\phi(L) = 0$ implica

$$\sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = 0, \quad (8.192)$$

es decir

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = n\pi. \quad (8.193)$$

Por lo tanto las únicas energías permitidas son

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad (8.194)$$

además las funciones de onda normalizadas son

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (8.195)$$

Entonces, las funciones de onda del sistema son

$$\psi(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (8.196)$$

8.13. Ecuación de Onda

La ecuación de onda en una dimensión es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(x, t) = 0. \quad (8.197)$$

Para resolver esta ecuación proponemos la función $\phi(x, t) = T(t)X(x)$, al sustituirla en Eq. (8.197) se obtiene

$$T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \frac{X(x)}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.198)$$

que implica

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}, \quad (8.199)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (8.200)$$

es decir

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2, \quad \alpha = \text{constante}, \quad (8.201)$$

al considerar este resultado en Eq. (8.199) se llega a

$$\frac{1}{T(t)c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\alpha^2. \quad (8.202)$$

Por lo tanto, las ecuaciones a resolver son

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\alpha^2 c^2 T(t), \quad \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 X(x). \quad (8.203)$$

Si $\alpha = 0$, se tienen las soluciones

$$T(t) = (A + Bt), \quad X(x) = (C + Dx), \quad A, B, C, D = \text{constante},$$

es decir

$$\phi_0(x, t) = (A + Bt)(C + Dx). \quad (8.204)$$

Si $\alpha \neq 0$ se encuentra que

$$X(x) = (a_\alpha \cos \alpha x + b_\alpha \sin \alpha x), \quad T(t) = (c_\alpha \cos \alpha ct + d_\alpha \sin \alpha ct),$$

con $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ son constantes. De estas soluciones se tiene

$$\phi_\alpha(x, t) = (a_\alpha \cos \alpha x + b_\alpha \sin \alpha x)(c_\alpha \cos \alpha ct + d_\alpha \sin \alpha ct). \quad (8.205)$$

8.13.1. Cuerda con extremos fijos

Supongamos que tenemos una cuerda de longitud L con los extremos fijos. Para este caso, las soluciones de la ecuación de onda deben satisfacer las condiciones de borde

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0. \quad (8.206)$$

Estas condiciones implican

$$\phi_0(0, t) = A(C + Dt) = 0, \quad (8.207)$$

es decir $A = 0$, además

$$\phi_0(L, t) = BL(C + Dt) = 0, \quad (8.208)$$

que induce $B = 0$. Por lo tanto $\phi_0(x, t) = 0$. Para el caso $\alpha \neq 0$, se tiene

$$\phi_\alpha(0, t) = a_\alpha (c_\alpha \cos \alpha ct + d_\alpha \sin \alpha ct) = 0, \quad (8.209)$$

es decir $a_\alpha = 0$, además

$$\phi_\alpha(L, t) = b_\alpha \sin \alpha L (c_\alpha \cos \alpha ct + d_\alpha \sin \alpha ct) = 0, \quad (8.210)$$

que implica $\sin \alpha L = 0$, por lo que $\alpha L = n\pi$. De donde, en este caso las soluciones deben ser de la forma

$$\phi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]. \quad (8.211)$$

Así, la solución general es

$$\phi(x, t) = \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]. \quad (8.212)$$

8.13.2. Condiciones iniciales

Supongamos que se cumplen las condiciones iniciales

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (8.213)$$

entonces

$$\phi(x, 0) = f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.214)$$

por lo tanto

$$c_n = \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) = \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \phi(x, 0). \quad (8.215)$$

Además,

$$\left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n \geq 1} d_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (8.216)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} d_n &= \left(\frac{L}{n\pi c}\right) \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x) \\ &= \left(\frac{L}{n\pi c}\right) \int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

8.13.3. Energía

La energía para una cuerda está dada por

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (8.217)$$

Para calcular esta cantidad note que

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[-c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right],$$

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right],$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t}\right)^2 &= \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{l\pi}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \\ &\quad \left[-c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \left[-c_l \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) + d_l \cos\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) \right], \\ \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}\right)^2 &= \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{l\pi}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \\ &\quad \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \left[c_l \cos\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) + d_l \sin\left(\frac{l\pi ct}{L}\right) \right], \end{aligned}$$

ocupando las relaciones de ortormalidad se encuentra

$$\int_0^L dx \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \right)^2 = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[-c_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + d_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right]^2,$$
$$\int_0^L dx \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left[c_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right]^2.$$

Por lo tanto, la energía es

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 [(c_n)^2 + (d_n)^2]. \quad (8.218)$$

Capítulo 9

El Oscilador Armónico y los Polinomios de Hermite

En este capítulo obtendremos las funciones de onda propias del oscilador armónico cuántico. En principio para obtener estas funciones se debe resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Sin embargo, J. G. Darboux desarrolló el llamado método de factorización, el cual permite resolver diferentes ecuaciones diferenciales de forma algebraica. Al surgir la mecánica cuántica este método mostró su gran potencial, pues con el se pueden obtener soluciones exactas de sistemas sofisticados.

El material de este capítulo es importante desde el punto de vista físico, pues se presentan los operadores de ascenso y descenso, los cuales nos abre una ventana que nos permite ver más allá del oscilador armónico. También es importante como herramienta matemática, pues muestra como herramientas algebraicas permiten resolver ecuaciones diferenciales.

9.1. Hamiltoniano

El operador Hamiltoniano para el oscilador armónico en una dimensión es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad (9.1)$$

de donde la ecuación de onda estacionaria es

$$\hat{H}\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (9.2)$$

Esta ecuación está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y se debe cumplir las condiciones de Dirichlet $\psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0$. Resolver este problema equivale a

encontrar las funciones propias $\psi(x)$ y los valores propios E .

Aún sin resolver el problema sabemos que E debe ser real, pues \hat{p} y \hat{x} son operadores Hermíticos. Además para cualquier función f se cumple

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \hat{p}f | \hat{p}f \rangle = \langle f | \hat{p}^\dagger \hat{p}f \rangle = \langle f | \hat{p}^2 f \rangle, \\ 0 &\leq \langle \hat{x}f | \hat{x}f \rangle = \langle f | \hat{x}^\dagger \hat{x}f \rangle = \langle f | \hat{x}^2 f \rangle, \end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \langle f | Hf \rangle = \left\langle f \left| \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \right) f \right. \right\rangle. \quad (9.3)$$

En particular si $f = \psi$ y $\hat{H}\psi = E\psi$ se tiene

$$0 \leq E \langle \psi | \psi \rangle. \quad (9.4)$$

De este resultado es claro que si $E < 0$, entonces $\langle \psi | \psi \rangle = 0$, que implica que $\psi(x) = 0$. Además, si $\langle \psi | \psi \rangle \neq 0$, entonces $E \geq 0$. Es decir, la única solución con valor propio negativo es $\psi(x) = 0$, en cualquier otro caso se debe cumplir que $E \geq 0$.

9.1.1. Ortonormalidad

También podemos ver que Eq. (9.2) es tipo Sturm-Liouville, por lo que sus soluciones que satisfacen la condiciones de Dirichlet $\psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0$ con valores propios diferentes, son ortogonales. Es decir, si $\psi_a(x)$ y $\psi_b(x)$ son soluciones de Eq. (9.2) con los valores propios E_a y E_b y además $\psi_a(\pm\infty) = \psi_b(\pm\infty) = 0$, entonces se cumple

$$(E_a - E_b) \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = 0. \quad (9.5)$$

En particular, si $E_a \neq E_b$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = 0. \quad (9.6)$$

Por lo que las funciones de onda con diferente valor propio son ortonormales. Si $E_a = E_b$, entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_b^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a(x) \psi_a^*(x)$$

es la norma de la función de onda, la cual supondremos que está normalizada, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_a(x)|^2 = 1. \quad (9.7)$$

Como este resultado es válido para cualquier valor propio, se encuentra

$$\langle \psi_a | \psi_b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_a^*(x) \psi_b(x) = \delta_{ab}. \quad (9.8)$$

Por lo tanto, las funciones de onda del oscilador armónico forman una base ortonormal.

9.2. Operadores de acenso y descenso

Recordemos que se cumplen la reglas de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar, \quad [\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0. \quad (9.9)$$

Ahora, definamos el operador

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{p} - im\omega\hat{x}). \quad (9.10)$$

Como \hat{p} y \hat{x} son operadores hermíticos se tiene

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{p} + im\omega\hat{x}). \quad (9.11)$$

De donde

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p} + im\omega\hat{x}) (\hat{p} - im\omega\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} [\hat{p}(\hat{p} - im\omega\hat{x}) + im\omega\hat{x}(\hat{p} - im\omega\hat{x})] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}\hat{p} - im\omega\hat{p}\hat{x} + im\omega\hat{x}\hat{p} + m^2\omega^2\hat{x}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + im\omega[\hat{x}, \hat{p}]) \\ &= \frac{2m}{2m\hbar\omega} \left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} \right), \end{aligned} \quad (9.12)$$

por lo tanto,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (9.13)$$

Además, se cumple

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (9.14)$$

en efecto, tomando en cuenta (9.9) se encuentra

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \left[\frac{(\hat{p} - im\omega\hat{x})}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \frac{(\hat{p} + im\omega\hat{x})}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right] = \frac{1}{2m\hbar\omega} [\hat{p} - im\omega\hat{x}, \hat{p} + im\omega\hat{x}] \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} ([\hat{p}, \hat{p} + im\omega\hat{x}] - im\omega [\hat{x}, \hat{p} + im\omega\hat{x}]) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} ([\hat{p}, \hat{p}] + im\omega [\hat{p}, \hat{x}] - im\omega ([\hat{x}, \hat{p}] + im\omega [\hat{x}, \hat{x}])) \\ &= \frac{1}{2m\hbar\omega} (im(-i\hbar\omega) - im\omega(i\hbar)) = \frac{2m\hbar\omega}{2m\hbar\omega} = 1. \end{aligned}$$

También se cumplen las reglas de conmutación

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger, \quad (9.15)$$

pues

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}] &= \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a}) \\ &= \hbar\omega [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hbar\omega\hat{a}, \\ [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] &= \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a}^\dagger \right] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a}) \\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger. \end{aligned}$$

Estas dos igualdades se pueden escribir como

$$\hat{H}\hat{a} = \hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a}, \quad (9.16)$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger. \quad (9.17)$$

Con la ayuda de estas identidades encontraremos los valores propios E y las funciones propias $\psi(x)$ del operador Hamiltoniano \hat{H} . Primero supongamos que $\psi(x)$ satisface la ecuación $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$, entonces las funciones

$$\psi_{-(1)}(x) = \hat{a}\psi(x), \quad \psi_{+(1)}(x) = \hat{a}^\dagger\psi(x), \quad (9.18)$$

satisfacen las ecuaciones

$$\hat{H}\psi_{-(1)}(x) = (E - \hbar\omega)\psi_{-(1)}(x), \quad (9.19)$$

$$\hat{H}\psi_{+(1)}(x) = (E + \hbar\omega)\psi_{+(1)}(x). \quad (9.20)$$

Para probar estas afirmaciones primero notemos que de Eq. (9.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{-(1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}\psi(x) = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a})\psi(x) = \hat{a}\hat{H}\psi(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi(x) \\ &= E\hat{a}\psi(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi(x) = (E - \hbar\omega)\hat{a}\psi(x) = (E - \hbar\omega)\psi_{-(1)}(x), \end{aligned}$$

mientras que de Eq. (9.17) se encuentra

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{+(1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}^\dagger\psi(x) = (\hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger)\psi(x) = \hat{a}^\dagger\hat{H}\psi(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi(x) \\ &= E\hat{a}^\dagger\psi(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi(x) = (E + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi(x) = (E + \hbar\omega)\psi_{+(1)}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $\psi_{-(1)}(x)$ es función propia de \hat{H} con valor propio $E - \hbar\omega$, mientras que $\psi_{+(1)}(x)$ es función propia de \hat{H} con valor propio $E + \hbar\omega$. Es decir, si ψ es solución de la ecuación Schrödinger del oscilador armónico, la funciones $\psi_{-(1)} = a\psi$ y $\psi_{+(1)} = a^\dagger\psi$ también son soluciones de esta ecuación.

Por inducción se puede probar que las funciones

$$\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a})^n \psi(x), \quad \psi_{+(n)}(x) = (\hat{a}^\dagger)^n \psi(x), \quad (9.21)$$

satisfacen

$$\hat{H}\psi_{-(n)}(x) = (E - n\hbar\omega)\psi_{-(n)}(x), \quad (9.22)$$

$$\hat{H}\psi_{+(n)}(x) = (E + n\hbar\omega)\psi_{+(n)}(x). \quad (9.23)$$

Para ambos casos la base inductiva ya está probada, falta probar el paso inductivo. Primero probaremos el paso inductivo para las funciones $\psi_{-(n)}(x)$, en este caso debemos suponer que se cumple Eq. (9.22) y probar

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{-(n+1)}(x) &= [E - (n+1)\hbar\omega]\psi_{-(n+1)}(x), \quad \text{con} \\ \psi_{-(n+1)}(x) &= a\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a})^{n+1}\psi(x). \end{aligned}$$

Esta igualdad es cierta, pues de Eq. (9.16) y Eq. (9.22) se llega a

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{-(n+1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}\psi_{-(n)}(x) = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a})\psi_{-(n)}(x) \\ &= \hat{a}\hat{H}\psi_{-(n)}(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= (E - n\hbar\omega)\hat{a}\psi_{-(n)}(x) - \hbar\omega\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= (E - n\hbar\omega - \hbar\omega)\hat{a}\psi_{-(n)}(x) \\ &= [E - (n+1)\hbar\omega]\psi_{-(n+1)}(x), \end{aligned}$$

así la igualdad Eq. (9.22) se satisface para cualquier n .

Para el caso de $\psi_{+n}(x)$ debemos suponer Eq. (9.23) y probar que se cumple

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_{+(n+1)}(x) &= [E + (n+1)\hbar\omega]\psi_{+(n+1)}(x), \quad \text{con} \quad (9.24) \\ \psi_{+(n+1)}(x) &= \hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) = (\hat{a}^\dagger)^{n+1}\psi(x).\end{aligned}$$

Esta igualdad también es cierta, pues de Eq. (9.17) y Eq. (9.23) se encuentra

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_{+(n+1)}(x) &= \hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) = \left(\hat{a}^\dagger\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\right)\psi_{+(n)}(x) \\ &= \hat{a}^\dagger\hat{H}\psi_{+(n)}(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= (E + n\hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= (E + n\hbar\omega + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger\psi_{+(n)}(x) \\ &= [E + (n+1)\hbar\omega]\psi_{+(n+1)}(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad Eq. (9.23) es válidas para cualquier natural n .

Lo que hemos demostrado es que si $\psi(x)$ es función propia de \hat{H} , con valor propio E , entonces, dado cualquier natural n , las funciones $(\hat{a})^n\psi(x)$ y $(\hat{a}^\dagger)^n\psi(x)$ también son funciones propias del mismo operador, con valores propios $E - n\hbar\omega$ y $E + n\hbar\omega$, respectivamente.

Ahora, note que para cualquier valor E existen un natural \tilde{n} tal que el valor propio $\tilde{E}_{\tilde{n}} = E - \tilde{n}\hbar\omega$, con función propia $\psi_{-(\tilde{n})}(x) = (\hat{a})^{\tilde{n}}\psi(x)$, satisface $\tilde{E}_{-(\tilde{n})} = E - \tilde{n}\hbar\omega < 0$. Esto implica que $\psi_{\tilde{n}}(x) = 0$. Es decir, si $\psi(x)$ es una función propia de \hat{H} existe un natural \tilde{n} tal que $(\hat{a})^{\tilde{n}}\psi(x) = 0$. Note que en realidad existe un número infinito de posibles valores de \tilde{n} , pues si $(\hat{a})^{\tilde{n}}\psi(x) = 0$, entonces también se cumple $(\hat{a})^{\tilde{n}+1}\psi(x) = 0$.

Supongamos n' es el mínimo de los valores posibles de \tilde{n} tal que $(\hat{a})^{\tilde{n}}\psi(x) = 0$ y definamos $N = n' - 1$. Entonces, la función $\psi_0(x) = (\hat{a})^{n'-1}\psi(x) = (\hat{a})^N\psi(x)$ satisface $\hat{a}\psi_0(x) = 0$. Note que $\psi_0(x) \neq 0$, pues de lo contrario n' no sería el mínimo de los valores de \tilde{n} , note también que el valor de la energía de $\psi_0(x)$ es

$$E_0 = E - N\hbar\omega.$$

Así, podemos afirmar que existe una función, $\psi_0(x)$, tal que

$$\hat{a}\psi_0(x) = 0, \quad \psi_0(x) \neq 0 \quad (9.25)$$

a esta función le llamaremos estado base. Con el estado base se encuentra

$$\hat{H}\psi_0(x) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_0(x) = \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x). \quad (9.26)$$

Por lo que $E_0 = \hbar\omega/2$ es el valor propio de $\psi_0(x)$, pero este valor propio debe ser igual a $E_0 = E - N\hbar\omega$, de donde

$$E = E_N = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (9.27)$$

Como $\psi(x)$ es cualquier estado propio de \hat{H} , los valores propio E son discretos.

Además, si definimos $\psi_N(x) = (\hat{a}^\dagger)^N \psi_0(x)$ y consideramos (9.23), se llega a

$$\hat{H}\psi_N(x) = (E_0 + N\hbar\omega)\psi_N(x) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \psi_N(x). \quad (9.28)$$

Así, $\psi_N(x)$ tiene el mismo valor propio que $\psi(x)$. Por lo tanto, $\psi(x)$ y $\psi_N(x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial de segundo orden con las mismas condiciones de borde, esto implica que estas funciones deben ser iguales.

9.3. Estado base y ortonormalidad

En el caso que estamos estudiado, cualquier solución de la ecuación de Schrödinger se puede expresar en términos del estado base. Entonces, basta conocer esta función para obtener todas las soluciones. El estado base lo hemos definido como la función que satisface

$$\begin{aligned} \hat{a}\psi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (\hat{p} - im\omega\hat{x}) \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - im\omega x \right) \psi_0(x) \\ &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega}{\hbar} x \right) \psi_0(x) = 0, \end{aligned}$$

es decir, el estado base debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0(x),$$

cuya solución es

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}, \quad A = \text{constante.}$$

Para determinar la constante A pediremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0(x) \psi_0(x) = 1,$$

que quiere decir que el estado base tiene norma unitaria. De esta condición tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0(x) \psi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(A e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}} \right)^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2} = 1,$$

entonces

$$A = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2}}}.$$

Ahora recordemos como calcular una integral de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = \text{constante}.$$

Notablemente, es más fácil calcular I^2 , que es

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha x^2} e^{-\alpha y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

ocupando coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} dr r \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\alpha r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-\alpha r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr \frac{(-1)}{2\alpha} \frac{d(e^{-\alpha r^2})}{dr} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned}$$

De donde

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

considerando este resultado encontramos

$$A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}.$$

Así, el estado base normalizado es

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}. \quad (9.29)$$

Con esta función y a^\dagger podemos construir el resto de las funciones propias de \hat{H} , que tienen la forma

$$\psi_n(x) = A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x), \quad (9.30)$$

donde, A_n es una constante de normalización. Antes de calcular explícitamente las funciones de onda $\psi_n(x)$, calcularemos la constante de normalización A_n . Recordemos que las funciones $\psi_n(x)$ deben tener norma unitaria, es decir,

$$\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle = 1. \quad (9.31)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= \langle A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) | A_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \psi_n \rangle \\ &= A_n^* A_n \langle (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) | (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \psi_n \rangle \\ &= A_n^* A_n \langle \psi_0(x) | a^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) \rangle \\ &= A_n^* A_n \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0(x) (\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Como $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, se tiene $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n (\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ y entonces

$$\begin{aligned} (\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) &= (\hat{a})^{n-1} \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 \\ &= (\hat{a})^{n-1} (\hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n - (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\ &= (\hat{a})^{n-1} ([\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\ &= (\hat{a})^{n-1} (n (\hat{a}^\dagger)^{n-1} + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}) \psi_0(x) \\ &= (\hat{a})^{n-1} (n (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \psi_0(x) + (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} \psi_0(x)) \\ &= n (\hat{a})^{n-1} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \psi_0(x). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Este resultado lo podemos aplicar de forma reiterada k veces, donde $k \leq n$, por lo que

$$\begin{aligned} (\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) (\hat{a})^{n-k} (\hat{a}^\dagger)^{n-k} \psi_0(x) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} (\hat{a}^\dagger)^{n-k} \psi_0(x). \end{aligned} \quad (9.34)$$

El máximo valor que puede tomar k es n , de donde

$$(\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x) = n! \psi_0(x). \quad (9.35)$$

Introduciendo esta igualdad en (9.32), se obtiene

$$\langle \psi_n(x) | \psi_n(x) \rangle = |A_n|^2 n! \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \psi_0(x) = 1, \quad (9.36)$$

así

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}. \quad (9.37)$$

Por lo tanto, las funciones de onda normalizadas son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x). \quad (9.38)$$

9.4. Polinomios de Hermite

Veamos la forma explícita de las funciones $\psi_n(x)$, primero consideraremos que

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (\hat{p} + im\omega\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + im\omega\hat{x} \right) \\ &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m\omega}{\hbar} \hat{x} \right), \end{aligned}$$

por lo que, ocupando el cambio de variable

$$\zeta^2 = \frac{m\omega x^2}{\hbar}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \frac{d}{d\zeta} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx}, \quad (9.39)$$

se tiene

$$\psi_0(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{\zeta^2}{2}}, \quad a^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \right).$$

Por lo tanto, introduciendo estos resultados en Eq. (9.38) se llega a

$$\psi_n(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \zeta \right)^n e^{-\frac{\zeta^2}{2}}. \quad (9.40)$$

Note que

$$\begin{aligned} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \left(\frac{df}{d\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + f \frac{d \left(e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right)}{d\zeta} \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \left(\frac{df}{d\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} - f \zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left(\frac{df}{d\zeta} - f \zeta \right), \end{aligned}$$

es decir,

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) f. \quad (9.41)$$

En general se cumple

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^n f. \quad (9.42)$$

Probaremos esta afirmación por inducción. La base inductiva, $n = 1$ ya ha sido demostrada, falta demostrar el paso inductivo. Aquí debemos suponer que se cumple Eq. (9.42) y demostrar

$$e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) = \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f. \quad (9.43)$$

Ocupando la hipótesis de inducción, se encuentra

$$\left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f = \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^n f = \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right),$$

así definiendo $\tilde{f} = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right)$ y usando Eq. (9.41) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right)^{n+1} f &= \left(\frac{d}{d\zeta} - \zeta \right) \tilde{f} = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left(e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \tilde{f} \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left(e^{-\frac{\zeta^2}{2}} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \right) \\ &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d^n}{d\zeta^n} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \right) = e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{d\zeta^{n+1}} \left(f e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar, esto implica que Eq. (9.42) es válida para cualquier número natural n . Introduciendo el resultado Eq. (9.42) en Eq. (9.40)

se llega a

$$\begin{aligned}\psi_n(\zeta) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \left(e^{-\frac{\zeta^2}{2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} e^{-\zeta^2}.\end{aligned}\quad (9.44)$$

Definiremos el polinomio de Hermite de grado n como

$$H_n(\zeta) = (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} e^{-\zeta^2}.\quad (9.45)$$

A esta expresión también se le llama fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite. En particular se tiene

$$H_0(\zeta) = 1, \quad H_1(\zeta) = 2\zeta, \quad H_2(\zeta) = -2 + 4\zeta^2, \dots\quad (9.46)$$

Por lo tanto, la función de onda Eq. (9.44) se escribe como

$$\psi_n(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta)\quad (9.47)$$

Debido a que las funciones de onda forman un conjunto ortonormal de funciones, ocupando el cambio de variable Eq. (9.39), tenemos

$$\begin{aligned}\delta_{nl} &= \langle \psi_n(x) | \psi_l(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^*(x) \psi_l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right) \psi_n^*(\zeta) \psi_l(\zeta) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!2^n}} \frac{(i)^l}{\sqrt{l!2^l}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} H_n(\zeta) H_l(\zeta),\end{aligned}$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\zeta^2} H_n(\zeta) H_l(\zeta) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nl}.\quad (9.48)$$

De donde, los polinomios de Hermite, forman un conjunto de funciones ortonormales con función de peso $e^{-\zeta^2}$.

9.5. Función generadora

Ahora veremos una función que está íntimamente relacionada con los polinomios de Hermite, la llamada función generadora. Primero recordemos que cualquier función, $f(z)$, bien comportada se puede expresar en su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \left(\frac{d^n f(z)}{dz^n} \Big|_{z=0} \right), \quad (9.49)$$

en particular

$$W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} \right). \quad (9.50)$$

Note que, como

$$2\zeta t - t^2 = -(t^2 - 2\zeta t + \zeta^2 - \zeta^2) = -((t - \zeta)^2 - \zeta^2) = -(t - \zeta)^2 + \zeta^2,$$

entonces

$$\frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n e^{2\zeta t - t^2}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n e^{\zeta^2 - (t - \zeta)^2}}{\partial t^n} = e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-(t - \zeta)^2}}{\partial t^n}. \quad (9.51)$$

Además, con el cambio de variable $u = \zeta - t$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} = (-) \frac{\partial}{\partial u}, \quad u|_{t=0} = \zeta. \quad (9.52)$$

Por lo tanto, considerando Eq. (9.45) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n W(\zeta, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0} &= e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-(t - \zeta)^2}}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = e^{\zeta^2} (-)^n \frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n} \Big|_{u=\zeta} \\ &= e^{\zeta^2} (-)^n \frac{\partial^n e^{-\zeta^2}}{\partial \zeta^n} = (-)^n e^{\zeta^2} \frac{\partial^n e^{-\zeta^2}}{\partial \zeta^n} = H_n(\zeta), \end{aligned} \quad (9.53)$$

sustituyendo este resultado en Eq. (9.50) se llega a

$$W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta), \quad (9.54)$$

que es la llamada función generadora de los polinomios de Hermite. Con esta función podemos obtener la forma explícita de las funciones $H_n(\zeta)$. Para esto

recordemos los resultados

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N C_k^N a^{N-k} b^k, \quad C_k^N = \frac{N!}{k!(N-k)!},$$

$$e^z = \sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W(\zeta, t) = e^{2\zeta t - t^2} &= \sum_{N \geq 0} \frac{(2\zeta t - t^2)^N}{N!} = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N C_k^N (2\zeta t)^{N-k} (-t^2)^k \\ &= \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N C_k^N (2\zeta)^{N-k} (-)^k t^{2k+N-k} \\ &= \sum_{N \geq 0} \sum_{k=0}^N \frac{(-)^k}{N!} C_k^N (2\zeta)^{N-k} t^{N+k}. \end{aligned}$$

Para hacer más fácil el cálculo, definamos $n = N + k$, entonces $N = n - k$ y $N - k = n - 2k$. Note que el máximo valor que puede tener k es N , es decir $N - k = n - 2k \geq 0$, que implica $k \leq n/2$. Así, si n es par, el máximo valor que puede tomar k es $n/2$. Pero si n es impar, k no puede tomar el valor $n/2$ porque éste no es un número natural. En este caso el máximo valor que puede tomar k es $(n-1)/2$. Definiremos como $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ como el máximo entero menor o igual a $n/2$. Entonces, el máximo valor que puede tomar k es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Por lo tanto, si tomamos como variable de suma a n en lugar de N , se tiene

$$\begin{aligned} W(\zeta, t) &= e^{2\zeta t - t^2} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k}{(n-k)!} C_k^{n-k} (2\zeta)^{n-k-k} t^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!} C_k^{n-k} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!} \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta). \end{aligned} \tag{9.55}$$

Entonces,

$$H_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!} (2\zeta)^{n-2k}. \quad (9.56)$$

Con la función generatriz se pueden probar varias propiedades de los polinomios de Hermite, por ejemplo, note que

$$W(-\zeta, t) = e^{2(-\zeta)t-t^2} = e^{2\zeta(-t)-(-t)^2} = W(\zeta, -t). \quad (9.57)$$

Utilizando Eq. (9.54) se tiene

$$W(-\zeta, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(-\zeta) = W(\zeta, -t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} H_n(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (-)^n H_n(\zeta),$$

igualdando término a término se encuentra

$$H_n(-\zeta) = (-)^n H_n(\zeta). \quad (9.58)$$

Por lo tanto, los polinomios de Hermite, son pares o impares dependiendo de su grado n . En particular $H_{2n+1}(-0) = (-)^{2n+1} H_{2n+1}(0)$, es decir

$$H_{2n+1}(0) = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} W(\zeta = 0, t) &= e^{-t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-)^n t^{2n}}{n!} \\ W(\zeta = 0, t) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(0) = \sum_{n \geq 0} \frac{H_{2n}(0)}{(2n)!} t^{2n}. \end{aligned}$$

Igualando término a término estas dos expresiones se llega a

$$H_{2n}(0) = (-)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

También se tiene el resultado

$$\frac{\partial W(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{\partial e^{2\zeta t - t^2}}{\partial \zeta} = 2te^{2\zeta t - t^2} = 2tW(\zeta, t). \quad (9.59)$$

Adicionalmente, considerando Eq. (9.54) y que $H_0(\zeta) = 1$ se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\zeta, t)}{\partial \zeta} &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta}, \\
2tW(\zeta, t) &= 2t \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{2t^{n+1}}{n!} H_n(\zeta) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(\zeta) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} 2nH_{n-1}(\zeta). \quad (9.60)
\end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = 2nH_{n-1}(\zeta). \quad (9.61)$$

9.5.1. Ecuación de Hermite

De la fórmula de Rodríguez para los polinomios de Hermite Eq. (9.45) se tiene

$$\begin{aligned}
H_n(\zeta) &= (-)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n e^{-\zeta^2}}{d\zeta^n} = (-)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d^{n-1} e^{-\zeta^2}}{d\zeta^{n-1}} \right) \\
&= (-)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left[e^{-\zeta^2} \left((-)^{n-1} e^{\zeta^2} \frac{d^{n-1} e^{-\zeta^2}}{d\zeta^{n-1}} \right) \right] \\
&= (-)^n e^{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left(e^{-\zeta^2} H_{n-1}(\zeta) \right) \\
&= (-)^n e^{\zeta^2} \left(-2\zeta e^{-\zeta^2} H_{n-1}(\zeta) + e^{-\zeta^2} \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} \right) \\
&= 2\zeta H_{n-1}(\zeta) - \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$H_n(\zeta) = 2\zeta H_{n-1}(\zeta) - \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}. \quad (9.62)$$

Derivando esta igualdad con respecto a ζ , se llega a

$$\frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} = 2H_{n-1}(\zeta) + 2\zeta \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2 H_{n-1}(\zeta)}{d\zeta^2}. \quad (9.63)$$

Además, usando Eq. (9.61) se encuentra

$$2nH_{n-1}(\zeta) = 2H_{n-1}(\zeta) + 2\zeta \frac{dH_{n-1}(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2H_{n-1}(\zeta)}{d\zeta^2} \quad (9.64)$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2H_n(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dH_n(\zeta)}{d\zeta} + 2nH_n(\zeta) = 0, \quad (9.65)$$

esta es la llamada ecuación de Hermite.

9.6. Método tradicional

Ahora ocuparemos el método tradicional para resolver la ecuación de onda del oscilador armónico

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (9.66)$$

Con el cambio de variable Eq. (9.39) la ecuación (9.66) toma la forma

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) \psi(\zeta) = \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(\zeta). \quad (9.67)$$

Note que en el límite $\zeta \rightarrow \infty$ se tiene la ecuación asintótica

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) \psi(\zeta) \approx 0. \quad (9.68)$$

Proponemos como solución asintótica a la función $\psi(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$, que satisface

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\zeta} &= -\zeta\psi(\zeta), \\ \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} &= -\frac{d}{d\zeta}(\zeta\psi(\zeta)) = -(\psi(\zeta) - \zeta^2\psi(\zeta)) \approx -\zeta^2\psi(\zeta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\zeta \gg 1$ se tiene

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta^2 \right) \psi(\zeta) \approx 0. \quad (9.69)$$

Así, cuando $\zeta \rightarrow \infty$ las soluciones de Eq. (9.67) deben ser de la forma

$$\psi(\zeta) \approx e^{-\frac{\zeta^2}{2}},$$

para el caso general, propondremos como solución

$$\psi(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \phi(\zeta), \quad (9.70)$$

con $\phi(\zeta)$ una función que crece menos rápido que $e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$. Para esta propuesta se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} &= e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left(-\zeta\phi(\zeta) + \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} \right), \\ \frac{d^2\psi(\zeta)}{d\zeta^2} &= e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left(\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + (\zeta^2 - 1)\phi(\zeta) \right). \end{aligned} \quad (9.71)$$

Sustituyendo Eq. (9.71) en Eq. (9.67) se encuentra

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{\zeta^2}{2}} (-) \left(\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + (\zeta^2 - 1)\phi(\zeta) \right) + e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \zeta^2\psi(\zeta) \\ &= \frac{2E}{\hbar\omega} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \zeta^2\phi(\zeta). \end{aligned}$$

De donde

$$-\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} + 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \phi(\zeta) = \frac{2E}{\hbar\omega}\phi(\zeta), \quad (9.72)$$

es decir

$$\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi(\zeta) = 0. \quad (9.73)$$

Para resolver esta ecuación propondremos la solución en serie de potencia

$$\phi(\zeta) = \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n, \quad (9.74)$$

de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi(\zeta) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right) a_n \zeta^n, \\ -2\zeta \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} &= -2\zeta \sum_{n \geq 0} n a_n \zeta^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (-2n) a_n \zeta^n, \\ \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} &= \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n \zeta^{n-2} = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n \zeta^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} \zeta^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) \phi(\zeta) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\left[\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) - 2n \right] a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) \zeta^n = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$a_{n+2} = \frac{\left(2n - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)\right) a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad (9.75)$$

es decir

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{\left(2n - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)\right)}{(n+2)(n+1)}. \quad (9.76)$$

Note que esta relación de recurrencia separa los términos pares e impares, por lo que se tendrán series de la forma $\sum_{n \geq 0} a_{2n} \zeta^{2n}$ y $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} \zeta^{2n+1}$. Para el caso par, si $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$\frac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}} \rightarrow \frac{4n}{(2n+2)(2n+1)} \approx \frac{1}{n}, \quad (9.77)$$

que es el mismo comportamiento que tiene los coeficientes de Taylor de la serie

$$e^{\zeta^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{\zeta^{2n}}{n!}. \quad (9.78)$$

Por lo tanto, en este caso la solución $\phi(\zeta)$ tiene el mismo comportamiento asintótico que $e^{\frac{\zeta^2}{2}}$. Para el caso impar, la serie tiene el mismo comportamiento asintótico que $\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}$. Ninguno de estos dos caso debe ocurrir, pues $\phi(\zeta)$ debe estar dominada por $e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$. El problema se resuelve si $\phi(\zeta)$ no es una serie, sino un polinomio. Esto se cumple si después de cierto número todos los términos de la serie son cero, es decir $a_{n+2}/a_n = 0$. Lo que implica

$$2n - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 0, \quad (9.79)$$

de donde,

$$E = E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (9.80)$$

Entonces la energía debe ser discreta y las funciones $\phi(\zeta)$ son polinomios. Sustituyendo E_n en Eq. (9.73) se obtiene

$$\frac{d^2\phi(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d\phi(\zeta)}{d\zeta} + 2n\phi(\zeta) = 0, \quad (9.81)$$

que es la ecuación de Hermite (9.65). Por lo tanto, las funciones $\phi(\zeta)$ son los polinomios de Hermite.

Así, las soluciones de la ecuación de onda para el oscilador armónico son de la forma

$$\psi_n(\zeta) = A_n e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta), \quad (9.82)$$

con $H_n(\zeta)$ el polinomio de Hermite de grado n .

9.7. Oscilador en campo eléctrico constante

Ahora veamos como se resuelve el problema de un oscilador armónico en un campo eléctrico constante.

El operador Hamiltoniano para un oscilador en un campo magnético constante, \mathcal{E} , es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x}, \quad (9.83)$$

note que este operador se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 - \frac{2q\mathcal{E}}{m\omega^2}\hat{x}\right), \\ &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 - 2\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\hat{x} + \left(\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x} - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \end{aligned} \quad (9.84)$$

Por lo que, con el cambio de variable $\eta = x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$, se tiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\eta}^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \quad (9.85)$$

Entonces, la ecuación de valores propios

$$\hat{H}\psi(x) = \left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - q\mathcal{E}x \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (9.86)$$

se puede escribir como

$$\hat{H}\psi(\eta) = \left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\eta}^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \right) \psi(\eta) = E\psi(\eta), \quad (9.87)$$

de donde

$$\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\eta}^2 \right) \psi(\eta) = \left(E + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \right) \psi(\eta). \quad (9.88)$$

Esta última ecuación es la ecuación del oscilador armónico, por lo que

$$E + \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (9.89)$$

es decir los únicos valores de la energía permitidos son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \quad (9.90)$$

mientras que las funciones de onda son

$$\psi_n(\zeta) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^n}{\sqrt{n!2^n}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta), \quad \zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right). \quad (9.91)$$

9.8. Suma de osciladores y el oscilador en D dimensiones

Supongamos que tenemos un sistema que consiste en dos osciladores des-
acoplados. En este caso el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}\hat{x}_1^2 + \frac{m_2\omega_2^2}{2}\hat{x}_2^2, \quad (9.92)$$

con

$$\hat{p}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{p}_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Como los osciladores son independientes, estos operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0, \quad [\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2. \quad (9.93)$$

Para obtener los valores y funciones propias de H definamos los Hamiltonianos

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2}{2}\hat{x}_1^2, \quad \hat{H}_2 = \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\omega_2^2}{2}\hat{x}_2^2.$$

También definamos los operadores

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m_1\omega_1\hbar}}(\hat{p}_1 - im_1\omega_1\hat{x}_1), & \hat{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m_2\omega_2\hbar}}(\hat{p}_2 - im_2\omega_2\hat{x}_2) \\ \hat{a}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m_1\omega_1\hbar}}(\hat{p}_1 + im_1\omega_1\hat{x}_1), & \hat{a}_2^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m_2\omega_2\hbar}}(\hat{p}_2 + im_2\omega_2\hat{x}_2), \end{aligned}$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = 1$$

y cero en cualquier otro caso. También tenemos que

$$H_1 = \hbar\omega_1 \left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right), \quad H_2 = \hbar\omega_2 \left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right),$$

así, el Hamiltoniano Eq. (9.92) es

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right). \quad (9.94)$$

Ahora, recordemos que para los Hamiltonianos \hat{H}_1 y \hat{H}_2 se tiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_k \psi_{n_k}(x_k) &= E_{n_k} \psi_{n_k}(x_k), \quad E_{n_k} = \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 1, 2, \\ \psi_{n_k}(x_k) &= \psi_{n_k}(\zeta_k) = \left(\frac{m_k\omega_k}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^{n_k}}{\sqrt{n_k! 2^{n_k}}} e^{-\frac{\zeta_k^2}{2}} H_{n_k}(\zeta_k), \\ \zeta_k &= \sqrt{\frac{m_k\omega_k}{\hbar}} x_k, \\ \langle \psi_{n_k} | \psi_{l_k} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \psi_{n_k}^*(x_k) \psi_{l_k}(x_k) = \delta_{n_k l_k}. \end{aligned}$$

Entonces, definiremos

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2), \quad (9.95)$$

que satisfice

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) &= \left(\hat{H}_1 + \hat{H}_2 \right) \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \\ &= \hat{H}_1\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) + \hat{H}_2\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \\ &= \psi_{n_2}(x_2)\hat{H}_1\psi_{n_1}(x_1) + \psi_{n_1}(x_1)\hat{H}_2\psi_{n_2}(x_2) \\ &= E_{n_1}\psi_{n_2}(x_2)\psi_{n_1}(x_1) + E_{n_2}\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \\ &= (E_{n_1} + E_{n_2})\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) \\ &= \left(\hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \right) \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Por lo que, las funciones propias de \hat{H} son Eq. (9.95) y sus valores propios son

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (9.96)$$

Las funciones propias Eq. (9.95) son ortonormales, pues

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n_1 n_2} | \psi_{l_1 l_2} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2))^* \psi_{l_1}(x_1)\psi_{l_2}(x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \psi_{n_1}(x_1)^* \psi_{l_1}(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \psi_{n_2}(x_2)^* \psi_{l_2}(x_2) \\ &= \delta_{n_1 l_1} \delta_{n_2 l_2}. \end{aligned} \quad (9.97)$$

9.8.1. Cadena de osciladores

El resultado anterior se puede generalizar para un número N de osciladores desacoplados. En efecto, consideremos el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} \hat{x}_k^2 \right), \quad \hat{p}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (9.98)$$

Como los osciladores son independientes, estos operadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0, \quad [\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, N. \quad (9.99)$$

Para obtener los valores y funciones propias de H definamos los Hamiltonianos

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{m_k\omega_k^2}{2}\hat{x}_k^2$$

y los operadores

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2m_k\omega_k\hbar}}(\hat{p}_k - im_k\omega_k\hat{x}_k), \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m_k\omega_k\hbar}}(\hat{p}_k + im_k\omega_k\hat{x}_k),$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (9.100)$$

y cero en cualquier otro caso. También tenemos que

$$\hat{H}_k = \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right),$$

así el Hamiltoniano Eq. (9.102) es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (9.101)$$

Ahora, recordando de nuevo que para cada \hat{H}_k se tiene

$$\hat{H}_k \psi_{n_k}(x_k) = E_{n_k} \psi_{n_k}(x_k), \quad E_{n_k} = \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\psi_{n_k}(x_k) = \psi_{n_k}(\zeta_k) = \left(\frac{m_k\omega_k}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{(i)^{n_k}}{\sqrt{n_k! 2^{n_k}}} e^{-\frac{\zeta_k^2}{2}} H_{n_k}(\zeta_k),$$

$$\zeta_k = \sqrt{\frac{m_k\omega_k}{\hbar}} x_k,$$

$$\langle \psi_{n_k} | \psi_{l_k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \psi_{n_k}^*(x_k) \psi_{l_k}(x_k) = \delta_{n_k l_k},$$

definiremos

$$\psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \dots \psi_{n_N}(x_N). \quad (9.102)$$

Estas funciones satisfacen las relaciones de ortonormalidad

$$\langle \psi_{n_1 n_2 \dots n_N} | \psi_{l_1 l_2 \dots l_N} \rangle = \delta_{n_1 l_1} \delta_{n_2 l_2} \dots \delta_{n_N l_N}. \quad (9.103)$$

También cumplen que

$$H \psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = E_{n_1 n_2 \dots n_N} \psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

con

$$E_{n_1 n_2 \dots n_N} = \sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (9.104)$$

9.8.2. Oscilador en D dimensiones

El Hamiltoniano de un oscilador en D dimensiones es

$$H = \sum_{k=1}^D \left(\frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}_k^2 \right), \quad p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (9.105)$$

Matemáticamente este es un caso del problema de la subsección anterior, por lo que los valores propios son

$$E_{n_1 n_2 \dots n_D} = \sum_{k=1}^D \hbar\omega \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (9.106)$$

Para este sistema las funciones propias son un caso particular de Eq. (9.102).

En particular para tres dimensiones se tiene

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right), \quad (9.107)$$

con las funciones de onda

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \frac{(i)^{n_1+n_2+n_3}}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! 2^{n_1+n_2+n_3}}} e^{-\frac{m\omega(x^2+y^2+z^2)}{2\hbar}} H_{n_1} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_{n_2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y \right) H_{n_3} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z \right).$$

9.9. Niveles de Landau, partícula en un campo magnético constante

Ahora veamos como obtener los estados propios de una partícula cargada en un campo magnético constante. Este problema primero fue resuelto por Landau, por lo que algunos autores los llaman el problema de los niveles de Landau.

El Hamiltoniano para una partícula de carga e en un campo magnético \vec{B} es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - e\vec{A} \right)^2, \quad (9.108)$$

donde

$$\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (9.109)$$

Antes de obtener el espectro de este sistema es conveniente obtener algunos resultados previos. Perimero note que ocupando el tensor de Levi-Civita Eq. (1.47), se tiene

$$B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x^k}, \quad (9.110)$$

además con la propiedad Eq. (1.107) se llega a

$$\epsilon_{ijk} B_k = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}. \quad (9.111)$$

También es conveniente definir la derivada covariante

$$D_i = P_i - eA_i, \quad (9.112)$$

este operador satisface

$$[D_i, D_j] = ie\hbar\epsilon_{ijk}B_k. \quad (9.113)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [D_i, D_j] &= [P_i - eA_i, P_j - eA_j] = [P_i, P_j] - e[P_i, A_j] - e[A_i, P_j] + e^2[A_i, A_j], \\ &= e([A_j, P_i] - [A_i, P_j]) = ie\hbar \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right), \end{aligned} \quad (9.114)$$

por lo tanto, ocupando Eq. (9.111) se obtiene Eq. (9.113).

Con la derivada covariante el Hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \vec{D}^2 = \frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \quad (9.115)$$

Note que, sin perdida de generalidad, si el campo magnético es constante se puede escribir como

$$\vec{B} = (0, 0, B_3), \quad B_3 = \text{constante}. \quad (9.116)$$

En este caso las reglas de conmutación Eq. (9.113) implican

$$[D_i, D_3] = 0, \quad (9.117)$$

de donde

$$[\hat{H}, D_3] = 0. \quad (9.118)$$

Por lo tanto, D_3 es un operador constante y comparte funciones propias con el Hamiltoniano. Es decir, existe ψ_{E_γ} tal que

$$\hat{H}\psi_{E_\gamma} = E\psi_{E_\gamma}, \quad D_3\psi_{E_\gamma} = \gamma\psi_{E_\gamma}. \quad (9.119)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{E_\gamma} &= \left(\frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \right) \psi_{E_\gamma} = \frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2) \psi_{E_\gamma} + D_3^2 \psi_{E_\gamma} \\ &= \frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2) \psi_{E_\gamma} + \gamma^2 \psi_{E_\gamma} = E\psi_{E_\gamma}, \end{aligned} \quad (9.120)$$

entonces

$$\frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2) \psi_{E_\gamma} = (E - \gamma^2) \psi_{E_\gamma}. \quad (9.121)$$

Adicionalmente, definamos los operadores

$$D_\pm = \frac{1}{\sqrt{|e|\hbar 2B}} (D_1 \mp i\hat{e}D_2), \quad (9.122)$$

con \hat{e} el signo de e , es decir $\hat{e}|e| = e$. Estos operadores actúan como operadores de ascenso y descenso, en efecto usando las relaciones de conmutación Eq. (9.113) se encuentra que

$$\begin{aligned} D_+D_- &= \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1 - i\hat{e}D_2)(D_1 + i\hat{e}D_2) \\ &= \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2 + i\hat{e}(D_1D_2 - D_2D_1)) \\ &= \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2 + i\hat{e}[D_1, D_2]) \\ &= \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2 + i\hat{e}ei\hbar B) = \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2) - \frac{\hat{e}e}{2|e|} \\ &= \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2) - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (9.123)$$

de la misma forma se obtiene

$$D_-D_+ = \frac{1}{|e|\hbar 2B} (D_1^2 + D_2^2) + \frac{1}{2}, \quad (9.124)$$

de donde

$$[D_-, D_+] = 1. \quad (9.125)$$

Además, de Eq. (9.123) se obtiene

$$\frac{1}{2m} (D_1^2 + D_2^2) = \frac{|e|\hbar B}{m} \left(D_+ D_- + \frac{1}{2} \right). \quad (9.126)$$

Así, los operadores D_1, D_2 tienen la misma álgebra que los operadores de ascenso y descenso del oscilador armónico. Esto implica que definiendo

$$\omega = \frac{|e|B}{m} \quad (9.127)$$

se tiene que

$$\hbar\omega \left(D_+ D_- + \frac{1}{2} \right) \psi_{E_\gamma} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \psi_{E_\gamma}. \quad (9.128)$$

Entonces, usando este resultado y Eq. (9.121), Eq. (9.126) se encuentra

$$E = E_{n\gamma} = \frac{\gamma^2}{2m} + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (9.129)$$

estos son los niveles de energía, los cuales se llaman niveles de Landau.

9.10. Ecuación de Fokker-Planck, caso libre y homogéneo

La ecuación de Fokker-Planck es

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t, \nu)}{\partial t} &= -\nu \frac{\partial P(x, t, \nu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\left(\frac{\gamma\nu}{m} - \frac{F(x)}{m} \right) P(x, t, \nu) \right) \\ &+ \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 P(x, t, \nu)}{\partial \nu^2} \end{aligned} \quad (9.130)$$

donde γ es una constante de fricción, m es la masa y $F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ es la fuerza.

Para el caso libre $V(x) = 0$ y homogéneo, $\frac{\partial P(x, \nu, \tau)}{\partial x} = 0$, la ecuación de Fokker-Planck (9.130) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial t} &= \frac{\gamma}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} (\nu P(t, \nu)) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 P(t, \nu)}{\partial \nu^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} \right). \end{aligned} \quad (9.131)$$

Esta ecuación no está en términos de operadores hermíticos, para expresarla con operadores hermíticos usaremos la transformación

$$P(\nu, t) = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \psi(\nu, t). \quad (9.132)$$

De donde

$$\frac{\partial P(\nu, t)}{\partial \nu} = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left(-\frac{m\gamma\nu}{g} \psi(\nu, t) + \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right), \quad (9.133)$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} = \\ & = \frac{\gamma\nu}{m} e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left(-\frac{m\gamma\nu}{g} \psi(\nu, t) + \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left(\frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\gamma}{m} \nu P(t, \nu) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial P(t, \nu)}{\partial \nu} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left(\frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right) \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[-\frac{m\gamma\nu}{g} \left(\frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\gamma\nu}{2m} \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} \right) \right] \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[-\frac{\gamma^2\nu^2}{2g} \psi(\nu, t) - \frac{\gamma\nu}{2m} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} + \frac{\gamma}{2m} \psi(\nu, t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma\nu}{2m} \frac{\partial \psi(\nu, t)}{\partial \nu} + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 \psi(\nu, t)}{\partial \nu^2} \right] \\ & = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \left[\left(\frac{\gamma}{2m} - \frac{\gamma^2\nu^2}{2g} \right) \psi(\nu, t) + \frac{g}{2m^2} \frac{\partial^2 \psi(\nu, t)}{\partial \nu^2} \right] \\ & = -e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} \hat{H} \psi(\nu, t) \end{aligned} \quad (9.134)$$

con

$$\hat{H} = \frac{g}{2m^2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^2\nu^2}{g} - \frac{\gamma}{m} \right), \quad \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (9.135)$$

claramente \hat{H} es un operador hermítico. Considerando este resultado en (9.131) se llega a

$$-\frac{\partial\psi(\nu, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\nu, t). \quad (9.136)$$

Si se propone como solución a $\psi(\nu, \tau) = e^{-\lambda\tau}\phi(\nu)$, se encuentra

$$\hat{H}\phi(\nu) = \lambda\phi(\nu), \quad (9.137)$$

es decir se tiene la ecuación de valores propios

$$\left(\frac{g}{2m^2}\hat{p}^2 + \frac{\gamma^2}{2g}\nu^2 - \frac{\gamma}{m} \right) \phi(\nu) = \lambda\phi(\nu). \quad (9.138)$$

Note que renombrando

$$\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{g}{2m^2}, \quad m\omega^2 = \frac{\gamma^2}{g}, \quad E = \lambda + \frac{\gamma}{m} \quad (9.139)$$

la ecuación (9.138) toma la forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \frac{m\omega^2}{2}\nu^2 \right) \phi(\nu) = E\phi(\nu). \quad (9.140)$$

que es la ecuación del oscilador armónico. Por lo tanto, las soluciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet, $\phi(\pm\infty) = 0$, implican

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) = \lambda + \frac{\gamma}{m}, \quad (9.141)$$

es decir

$$\lambda_n = \frac{\gamma}{m} \left(n - \frac{1}{2} \right). \quad (9.142)$$

Además, definiendo

$$\zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\nu = \sqrt{\frac{m\gamma}{g}}\nu \quad (9.143)$$

se tienen las soluciones

$$\phi_n(\zeta) = \frac{(i)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\gamma}{\pi g} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} H_n(\zeta). \quad (9.144)$$

Por lo tanto,

$$P_n(\nu, t) = e^{-\frac{m\gamma\nu^2}{2g}} e^{-\lambda_n t} \phi_n(\nu) = \frac{(i)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\gamma}{\pi g} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta^2} H_n(\zeta). \quad (9.145)$$

Capítulo 10

El Grupo de Rotaciones y los Armónicos Esféricos

En este capítulo estudiaremos los polinomios de Legendre, los polinomios asociados de Legendre y los Armónicos esféricos, quienes son importantes para resolver la ecuación de Laplace y diversos problemas de electrodinámica y mecánica cuántica. Normalmente estas funciones se obtienen resolviendo ecuaciones diferenciales. Sin embargo, también es posible obtenerlas usando el grupo de rotaciones. Usaremos este último método debido a que nos introduce a las aplicaciones de la teoría de grupos en la física. Este capítulo se puede ver como una invitación al estudio de las aplicaciones de la teoría de grupos.

10.1. Transformaciones de coordenadas lineales

Sea f una función de la variable x , con el cambio de variable

$$x' = \alpha x, \quad \text{con } \alpha = \text{constante}, \quad (10.1)$$

se encuentra

$$\frac{df}{dx'} = \frac{dx}{dx'} \frac{df}{dx} = \frac{1}{\alpha} \frac{df}{dx}. \quad (10.2)$$

Entonces, si la variable x transforma con α , el operador derivada transforma con $1/\alpha$, es decir,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \alpha x, \\ \frac{d}{dx} &\rightarrow \frac{d}{dx'} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Veamos ahora que pasa en dos dimensiones. Consideremos la matriz de 2×2 con entradas constantes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

cuya inversa es

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad |\Lambda| = a_1 a_4 - a_2 a_3. \quad (10.5)$$

También definamos los vectores columna

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Entonces, podemos hacer una transformación lineal de coordenadas de la forma $X' = \Lambda X$, es decir

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

La cual tiene la transformación inversa, $X = \Lambda^{-1} X'$,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

es decir,

$$x^1 = \frac{a_4 x'^1 - a_2 x'^2}{|\Lambda|}, \quad (10.9)$$

$$x^2 = \frac{-a_3 x'^1 + a_1 x'^2}{|\Lambda|}. \quad (10.10)$$

Además, por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^1} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

De la regla de transformación Eq. (10.10) se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^1} &= \frac{1}{|\Lambda|} \left(a_4 \frac{\partial}{\partial x^1} - a_3 \frac{\partial}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} &= \frac{1}{|\Lambda|} \left(-a_2 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (10.12)$$

que se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Lambda|} \begin{pmatrix} a_4 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

De esta ecuación podemos ver que la matriz involucrada en la transformación de las derivadas parciales es la transpuesta de la matriz inversa de Λ , es decir $(\Lambda^{-1})^T$. Otra forma de escribir esta ecuación es

$$\nabla' = (\Lambda^{-1})^T \nabla, \quad (10.14)$$

por lo que

$$\nabla = (\Lambda)^T \nabla'. \quad (10.15)$$

Este resultado se puede generalizar a más dimensiones. En efecto, en general una transformación de coordenadas se escribe como

$$x'^i = \Lambda_{ij} x^j, \quad x^i = (\Lambda^{-1})_{ij} x'^j. \quad (10.16)$$

De donde, por la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial (\Lambda^{-1})_{jk} x'^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\Lambda^{-1})_{jk} \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= (\Lambda^{-1})_{jk} \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\Lambda^{-1})_{ji} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left((\Lambda^{-1})^T \right)_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Por lo tanto, para cualquier dimensión se cumple

$$\nabla' = (\Lambda^{-1})^T \nabla. \quad (10.18)$$

Esta ley de transformación será de gran utilidad para obtener las simetrías de la ecuación de Laplace.

10.2. Laplaciano y elemento de línea

Supongamos que la matriz $\tilde{\eta}$, de $n \times n$, satisface

$$\tilde{\eta}\tilde{\eta} = I, \quad (10.19)$$

con I la matriz identidad de $n \times n$. Entonces, podemos definir un elemento de línea como

$$ds^2 = dX^T \tilde{\eta} dX, \quad dX = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}. \quad (10.20)$$

A la matriz $\tilde{\eta}$ se le llama métrica, en dos dimensiones un ejemplo de estas matrices son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Con la matriz $\tilde{\eta}$ el "Laplaciano" se define como

$$\nabla^2 = \nabla^T \tilde{\eta} \nabla. \quad (10.22)$$

Notablemente, el elemento de línea está íntimamente relacionado con el Laplaciano, en particular tienen las mismas simetrías. Esta relación es importante y se da también para espacios no euclidianos. Veamos como se da esta relación.

Bajo una transformación lineal de coordenadas se tiene

$$ds'^2 = dX'^T \tilde{\eta} dX' = (\Lambda dX)^T \tilde{\eta} \Lambda dX = dX^T (\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda) dX. \quad (10.23)$$

Las transformaciones, Λ , que dejan invariante al elemento de línea deben cumplir $ds^2 = ds'^2$. Igualando Eq. (10.20) con Eq. (10.23) se llega a la condición

$$\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda = \tilde{\eta}. \quad (10.24)$$

Además, considerando que bajo una transformación lineal de coordenadas el gradiente transforma como Eq. (10.18), se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla'^2 &= \nabla'^T \tilde{\eta} \nabla' = \left((\Lambda^{-1})^T \nabla \right)^T \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \nabla \\ &= \nabla^T \left(\left((\Lambda^{-1})^T \right)^T \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right) \nabla = \nabla^T \left(\Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right) \nabla. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Las transformaciones que dejan invariante al Laplaciano deben cumplir

$$\nabla'^2 = \nabla'^2,$$

entonces igualando Eq. (10.22) con Eq. (10.25) se tiene la condición

$$\Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T = \tilde{\eta}. \quad (10.26)$$

Como $(\tilde{\eta})^{-1} = \tilde{\eta}$, la condición Eq. (10.26) tiene la forma

$$\tilde{\eta} = (\tilde{\eta})^{-1} = \left(\Lambda^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^T \right)^{-1} = \left((\Lambda^{-1})^T \right)^{-1} \tilde{\eta} (\Lambda^{-1})^{-1} = \Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda, \quad (10.27)$$

que coincide con Eq. (10.24). Por lo tanto, las transformaciones lineales, Λ , que dejan invariante al elemento de línea Eq. (10.20) también dejan invariante al Laplaciano Eq. (10.22), claramente la afirmación inversa también es correcta.

10.3. Grupo de transformaciones

Antes de continuar recordemos lo que es un grupo. Sea G un conjunto con una operación $\cdot : G \times G \rightarrow G$. El par (G, \cdot) es un grupo si cumple

1) Axioma de cerradura:

$$g_1 \in G, g_2 \in G \implies g_1 \cdot g_2 \in G \quad (10.28)$$

2) Axioma de asociatividad:

$$g_1 \in G, g_2 \in G, g_3 \in G, \implies g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3. \quad (10.29)$$

3) Axioma del neutro:

$$\exists e \in G, \quad g_1 \in G \implies g_1 \cdot e = e \cdot g_1 = g_1. \quad (10.30)$$

4) Axioma del inverso:

$$\forall g_1 \in G, \exists g_1^{-1} \in G, \quad g_1 \cdot g_1^{-1} = g_1^{-1} \cdot g_1 = e. \quad (10.31)$$

Definamos a T como el conjunto de transformaciones Λ que dejan invariante al Laplaciano. Estas transformaciones cumplen

$$\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda = \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta}^2 = I. \quad (10.32)$$

Probaremos que T es un grupo.

Supongamos que $\Lambda_1 \in T$ y $\Lambda_2 \in T$, entonces cumplen

$$\Lambda_1^T \tilde{\eta} \Lambda_1 = \tilde{\eta}, \quad \Lambda_2^T \tilde{\eta} \Lambda_2 = \tilde{\eta}, \quad (10.33)$$

de donde

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \tilde{\eta} (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \tilde{\eta} \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \tilde{\eta} \Lambda_2 = \tilde{\eta}, \quad (10.34)$$

esto implica $\Lambda_1 \Lambda_2 \in T$, es decir

$$\Lambda_1 \in T, \Lambda_2 \in T \implies \Lambda_1 \Lambda_2 \in T. \quad (10.35)$$

Por lo tanto, se cumple el axioma la cerradura.

El producto de matrices es asociativo, en particular el producto de las matrices que satisfacen Eq. (10.32). Además, la identidad I satisface Eq. (10.32),

es decir, $I \in T$. Así se cumplen el axioma de la asociatividad y el del elemento neutro.

Ahora, como $\tilde{\eta}^2 = I$, si Λ está en T entonces se cumple $\Lambda^T \tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta} = I$. De donde,

$$\tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta} = (\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T. \quad (10.36)$$

Por lo tanto,

$$(\Lambda^{-1})^T \tilde{\eta} \Lambda^{-1} = (\tilde{\eta} \Lambda \tilde{\eta}) \tilde{\eta} \Lambda^{-1} = \tilde{\eta} \Lambda \Lambda^{-1} = \tilde{\eta}. \quad (10.37)$$

Así, cuando Λ está en T , también Λ^{-1} está en T . Esto nos indica que se cumple el axioma del inverso.

En consecuencia el conjunto de matrices que satisface Eq. (10.32) es un grupo. Es decir, el conjunto de transformaciones que dejan invariante al elemento de línea Eq. (10.20) forma un grupo, que es el mismo grupo que deja invariante al Laplaciano Eq. (10.22).

10.4. El grupo de rotaciones

Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector en \mathbf{R}^n y definamos la forma cuadrática $l^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, la cual representa la distancia de \vec{x} al origen. Note que si definimos la matriz columna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

y la matriz renglón

$$X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n), \quad (10.39)$$

la distancia se puede escribir como

$$l^2 = X^T X = X^T I X. \quad (10.40)$$

Ahora, si Λ es una matriz de $n \times n$ y se hace la transformación de coordenadas

$$X' = \Lambda X, \quad (10.41)$$

se tiene la distancia

$$l'^2 = X'^T I X' = X^T (\Lambda^T I \Lambda) X. \quad (10.42)$$

Por lo tanto, si Λ es tal que deja la distancia invariante, es decir que $l'^2 = l^2$, debe cumplir

$$\Lambda^T I \Lambda = I. \quad (10.43)$$

Otra forma de expresar esta igualdad es $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$. Claramente las matrices que cumplen (10.43) forman un grupo, a este grupo de matrices se le llama $O(n)$.

Recordemos que para cualquier matriz A se cumple $\det A = \det A^T$. Entonces, las matrices que satisfacen Eq. (10.43) deben cumplir $(\det \Lambda)^2 = 1$, es decir $\det \Lambda = \pm 1$. El subconjunto de matrices Λ que cumplen $\det \Lambda = -1$ no forman un grupo, por ejemplo, la identidad no está en ese subconjunto. Sin embargo, las matrices Λ que cumplen $\det \Lambda = 1$ sí forman un grupo, este es el grupo $SO(n)$.

Note que la matriz de $n \times n$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

se pueden formar con los vectores columna

$$\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} \\ \Lambda_{21} \\ \vdots \\ \Lambda_{n1} \end{pmatrix}, \vec{C}_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_{12} \\ \Lambda_{22} \\ \vdots \\ \Lambda_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{C}_n = \begin{pmatrix} \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{2n} \\ \vdots \\ \Lambda_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10.45)$$

Claramente, para la matriz traspuesta, Λ^T , estos vectores representan los renglones. Por lo tanto, la condición Eq. (10.43) se puede escribir como

$$\Lambda^T \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \cdots & \Lambda_{n1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{1n} & \Lambda_{2n} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_n \\ \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_2 \cdot \vec{C}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{C}_n \cdot \vec{C}_1 & \vec{C}_n \cdot \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \cdot \vec{C}_n \end{pmatrix} = I. \quad (10.46)$$

Otra forma de expresar esta igualdad es

$$\vec{C}_i \cdot \vec{C}_j = \delta_{ij}, \quad (10.47)$$

es decir si una matriz satisface Eq. (10.43), tiene sus columnas ortonormales. Ahora, si Λ satisface la condición (10.43), entonces Λ^{-1} también la satisface. Por lo tanto, Λ^{-1} tiene sus columnas ortonormales entre si. Pero se debe cumplir $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$, entonces las columnas de Λ^T son ortonormales entre si. Considerando que las columnas de Λ^T son los renglones de Λ , podemos ver que los renglones de Λ son ortonormales entre si. En conclusión, si Λ satisface Eq. (10.43) sus columnas y renglones son ortonormales entre si.

Una matriz de $n \times n$ tiene n^2 parámetros libres, pero si satisface (10.46) no todos sus parámetros son libres. De (10.46) se puede ver que $\Lambda^T \Lambda$ es una matriz simétrica, por lo que (10.46) sólo tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones independientes. Así, los parámetros libres de una matriz que satisface (10.46) son

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Para el caso $n = 3$ hay tres parámetros libres, para esta dimensión cualquier matriz se puede escribir como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

Si esta matriz satisface (10.46), debe cumplir

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad (10.49)$$

esto nos dice que la punta de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ están en una esfera y que son ortonormales entre si. Un ejemplo de estas matrices son

$$\Lambda_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (10.50)$$

$$\Lambda_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (10.51)$$

$$\Lambda_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.52)$$

La matriz $\Lambda_x(\theta)$ representa una rotación sobre el eje x , $\Lambda_y(\psi)$ representa una rotación sobre el eje y , mientras que $\Lambda_z(\phi)$ representa una rotación sobre el eje z . Por lo tanto, las rotaciones dejan invariante la distancia y al Laplaciano. Note que estas tres matrices son linealmente independientes.

Existen otras formas de reparametrizar una matriz de rotación, por ejemplo la base unitaria en coordenadas esféricas Eqs. (2.16)-(2.17) satisfacen la condición Eq. (10.49), pero no son la solución más general, pues solo dependen de dos parámetros mientras que la solución general de Eq. (10.49) depende de tres. Pero estos vectores nos sirven para obtener la solución general. Propondremos a \vec{c} como

$$\vec{c} = (\sin \psi \sin \theta, \cos \psi \sin \theta, \cos \theta). \quad (10.53)$$

Los vectores \vec{b} y \vec{a} deben ser tales que si $\phi = 0$ se cumple

$$\vec{b}|_{\phi=0} = \hat{e}_\theta = (\sin \psi \cos \theta, \cos \psi \cos \theta, -\sin \theta), \quad (10.54)$$

$$\vec{c}|_{\phi=0} = \hat{e}_\psi = (\cos \psi, -\sin \psi, 0). \quad (10.55)$$

Un par de vectores que satisfacen estas condiciones son:

$$\vec{a} = (\sin \phi \sin \psi \cos \theta + \cos \phi \cos \psi, -\sin \phi \cos \psi \cos \theta - \cos \phi \sin \psi, \sin \phi \sin \theta),$$

$$\vec{b} = (\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta, -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta, -\cos \phi \sin \theta).$$

Se puede probar que los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} cumplen Eq. (10.49). Así Λ se puede escribir como

$$\Lambda(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi s\psi c\theta & s\phi c\psi + c\phi s\psi c\theta & s\psi s\theta \\ -c\phi s\psi - s\phi c\psi c\theta & -s\phi s\psi + c\phi c\psi c\theta & c\psi s\theta \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{pmatrix} \quad (10.56)$$

Claramente aún hay cierta arbitrariedad, pues podemos cambiar el lugar de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , también podemos cambiar renglones por columnas y se seguirá cumpliendo Eq. (10.43). La ventaja de escribir Λ de la forma (10.56) es que se puede expresar como el producto de tres matrices

$$\Lambda(\phi, \theta, \psi) = \Lambda_1(\phi)\Lambda_2(\theta)\Lambda_3(\psi), \quad (10.57)$$

con

$$\Lambda_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.58)$$

$$\Lambda_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (10.59)$$

$$\Lambda_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.60)$$

Esta descomposición es muy útil para el estudio del movimiento del cuerpo rígido. A los parámetros θ, ψ, ϕ se les llama ángulos de Euler.

Las rotaciones no son la únicas transformaciones de $O(3)$. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.61)$$

cumplen Eq. (10.49) pero no son de rotación, tampoco son de $SO(3)$. Las rotaciones representan las transformaciones de $O(3)$ que se pueden conectar con la matriz unidad I . Pues al hacer $\phi = 0, \theta = 0, \psi = 0$ se obtiene la unidad I .

10.4.1. Transformaciones infinitesimales

Las transformaciones de $SO(n)$ que están infinitesimalmente cercanas a la unidad, es decir que cumplen

$$\Lambda \approx I + \epsilon M \quad \epsilon \ll 1, \quad (10.62)$$

son particularmente importantes. Para este tipo de transformaciones la condición Eq. (10.43) implica

$$I = \Lambda^T \Lambda \approx (I + \epsilon M)^T (I + \epsilon M) \quad (10.63)$$

$$= (I + \epsilon M^T) (I + \epsilon M) \approx I + \epsilon (M^T + M). \quad (10.64)$$

Por lo tanto,

$$M = -M^T, \quad (10.65)$$

es decir, M debe ser antisimétrica. Note que una matriz antisimétrica de $n \times n$ sólo puede tener

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

parámetros libres, este número de grados de libertad coincide con los parámetros libres del grupo $SO(n)$. Para el caso particular $n = 3$, cualquier matriz antisimétrica se puede escribir como

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

Definamos los vectores $\vec{r} = (x, y, z)$, $\delta\vec{\alpha} = \epsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta X &= \epsilon M X = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \alpha_2 z - \alpha_3 y \\ \alpha_3 x - \alpha_1 z \\ \alpha_1 x - \alpha_2 y \end{pmatrix} \\ &= \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Por lo tanto, una rotación infinitesimal está dada por

$$X' = \Lambda X \approx (I + \epsilon M) X = (IX + \epsilon MX), \quad (10.68)$$

es decir

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}. \quad (10.69)$$

Estas rotaciones son importantes porque definen al resto de las transformaciones de $SO(3)$, para ver esto primero notemos que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \alpha_3 m_3 = \vec{\alpha} \cdot \vec{m}, \quad (10.70)$$

con

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que la matriz (10.70) no se modifica si hacemos el cambio $\vec{\alpha} \rightarrow -i\vec{\alpha}$ y $\vec{m} \rightarrow i\vec{m} = \vec{M}$, es decir

$$M_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ventaja de ocupar la matrices M_i es que son Hermíticas, es decir $M_i^\dagger = M_i$. Esto implica que sus valores propios son reales, por lo tanto las matrices $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$ pueden representar cantidades físicas.

Una transformación finita se debe hacer como producto infinito de transformaciones infinitesimales. Por ejemplo, ocupando

$$X' \approx (\Lambda(\vec{\alpha}/N))^N X = (I - i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{M})^N x = \left(I - i\frac{1}{N}\vec{\alpha} \cdot \vec{M} \right)^N X \quad (10.71)$$

y considerando el resultado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\beta x}{N} \right)^N = e^{\beta x}, \quad (10.72)$$

se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - i\frac{1}{N}\vec{\alpha} \cdot \vec{M} \right)^N = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}}. \quad (10.73)$$

Por lo tanto, una transformación finita está dada por

$$X' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}} X. \quad (10.74)$$

Así, cualquier transformación infinitesimal conectada con la identidad tiene la forma

$$\Lambda(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{M}}. \quad (10.75)$$

En este sentido se dice que M_1, M_2, M_3 son los generadores del grupo $SO(3)$.

Ahora veamos de forma explícita la expresión (10.75) para algunos caso particulares. Primero notemos que si $n \geq 1$, se tiene

$$M_1^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_1, \quad M_1^{2n+1} = M_1, \quad (10.76)$$

$$M_2^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_2, \quad M_2^{2n+1} = M_2, \quad (10.77)$$

$$M_3^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_3, \quad M_3^{2n+1} = M_2. \quad (10.78)$$

Entonces, considerando estos resultados, juntos con las series de $\cos \beta$ y $\sin \beta$, se tiene

$$\begin{aligned}
e^{-i\beta M_i} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-i\beta M_i)^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} (-i\beta)^{2n} (M_i)^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} (-i\beta)^{2n+1} (M_i)^{2n+1} \\
&= I + T_i \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} (-i\beta)^{2n} + M_i \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} (-i\beta)^{2n+1} \\
&= I - T_i + T_i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \beta^{2n} - iM_i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \\
&= I - T_i + T_i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{(2n)!} - iM_i \sin \beta \\
&= I - T_i + T_i \cos \beta - iM_i \sin \beta. \tag{10.79}
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
e^{-i\alpha_1 M_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, & e^{-i\alpha_2 M_2} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \\
e^{-i\alpha_3 M_3} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.80}
\end{aligned}$$

Así, $e^{-i\alpha_1 M_1}$ representa una rotación sobre el eje x , $e^{-i\alpha_2 M_2}$ representa una rotación sobre el eje y , mientras que $e^{-i\alpha_3 M_3}$ representa una rotación sobre el eje z .

Veamos que reglas de conmutación cumplen los generadores de las rotaciones M_1, M_2, M_3 . Primero notemos que

$$\begin{aligned}
M_1 M_2 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 M_1 &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_1 M_3 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 M_1 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
M_2 M_3 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 M_2 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.81}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$[M_1, M_2] = iM_3, \quad [M_3, M_1] = iM_2, \quad [M_2, M_3] = iM_1. \quad (10.82)$$

Estas reglas de conmutación se pueden escribir como

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k. \quad (10.83)$$

Por el hecho de que el conmutador de dos generadores de rotación nos da otro generador de rotación se dice que estos generadores forman un álgebra de Lie, el álgebra de Lie de $SO(3)$. Note que, como el conmutador entre dos generadores no es cero, dos generadores no se pueden diagonalizar simultáneamente. Ahora, definamos

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \quad (10.84)$$

de donde

$$M^2 = 2I, \quad (10.85)$$

por lo tanto

$$[M^2, M_i] = 0. \quad (10.86)$$

Así, los valores propios de M^2 se pueden obtener al mismo tiempo que cualquiera de los generadores M_i .

Los valores propios de los generadores M_i se pueden calcular directamente y están dados por

$$M_1V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (10.87)$$

$$M_2V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (10.88)$$

$$M_3V = \lambda V \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad V = a\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.89)$$

Si $a = 1$, en cada caso se tienen vectores propios ortonormales. Estos resultados no son difíciles de obtener, posteriormente veremos que los generadores de las rotaciones en el espacio de las funciones de \vec{x} están relacionados con

operadores diferenciales.

Con el símbolo ϵ_{ijk} las matrices $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$ se pueden escribir de forma más económica. En efecto, en componentes tenemos

$$(M_1)_{ij} = i\epsilon_{i1j}, \quad (M_2)_{ij} = i\epsilon_{i2j}, \quad (M_3)_{ij} = i\epsilon_{i3j}. \quad (10.90)$$

Por ejemplo,

$$(M_1)_{ij} = i\epsilon_{i1j} = i \begin{pmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{112} & \epsilon_{113} \\ \epsilon_{211} & \epsilon_{212} & \epsilon_{213} \\ \epsilon_{311} & \epsilon_{312} & \epsilon_{313} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.91)$$

se puede probar que las demás igualdades se cumplen.

Así, las componentes de cualquier matriz antisimétrica se pueden escribir como

$$M_{ik} = -i\alpha_j(M_j)_{ik} = \alpha_j\epsilon_{ijk}. \quad (10.92)$$

Ahora, si α_i es infinitesimal, por ejemplo $\delta\alpha_i = \alpha_i/N$ con N grande, una transformación infinitesimal en el espacio de \vec{x} está dada por

$$X' = \Lambda X = (I - i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{M})X. \quad (10.93)$$

En componentes se tiene

$$\begin{aligned} x'_i &\approx \Lambda_{ik}x_k = (I - i\delta\alpha_j M_j)_{ik}x_k = (\delta_{ik} - i\delta\alpha_j(M_j)_{ik})x_k \\ &= (\delta_{ik} + \delta\alpha_j\epsilon_{ijk})x_k = x_i + \epsilon_{ijk}\delta\alpha_jx_k = x_i + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{x})_i, \end{aligned} \quad (10.94)$$

es decir

$$x'_i \approx x_i + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{x})_i. \quad (10.95)$$

10.5. Armónicos esféricos

Hasta el momento nos hemos enfocado en las transformaciones que pasan del espacio \vec{r} al \vec{r}' . Ahora veamos que pasa con las funciones que actúan en estos espacios. Supongamos que tenemos una función, F , de \mathbf{R}^3 a \mathbf{R} . Entonces, al evaluar esta función en un punto \vec{r}' y ocupando la transformación infinitesimal Eq. (10.69), se encuentra

$$F(\vec{r}') \approx F(\vec{r} + \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) = F(\vec{r}) + (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}). \quad (10.96)$$

Además usando la propiedad cíclica del triple producto escalar, se tiene

$$(\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = (\vec{\nabla} F(\vec{r}) \times \delta\vec{\alpha}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{\nabla} F(\vec{r})) \cdot \delta\vec{\alpha} = i (\vec{\delta\alpha} \cdot \vec{L}) F(\vec{r})$$

con

$$\vec{L} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}. \quad (10.97)$$

Así,

$$F(\vec{r}') \approx \left(1 + i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{L}\right) F(\vec{r}). \quad (10.98)$$

Por lo tanto, el operador \vec{L} es el generador de las rotaciones en el espacio de las funciones. Anteriormente vimos que este operador es Hermítico, por lo que sus valores propios son reales.

Veamos que forma tiene una rotación finita. Al igual que en caso del espacio \vec{r} , tomaremos $\delta\vec{\alpha} = \vec{\alpha}/N$ y consideraremos que para tener una transformación finita debemos hacer el producto de un número infinito de transformaciones infinitesimales. Entonces,

$$F(\vec{r}') \approx \left(1 + i\frac{\vec{\alpha}}{N} \cdot \vec{L}\right)^N F(\vec{r}). \quad (10.99)$$

Así, ocupando el resultado (10.72), se encuentra

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + i\frac{1}{N}\vec{\alpha} \cdot \vec{L}\right)^N = U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}. \quad (10.100)$$

Por lo tanto, una transformación finita está dada por

$$F(\vec{r}') = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}} F(\vec{r}). \quad (10.101)$$

Note que el operador $U(\vec{\alpha})$ satisface

$$U(\vec{\alpha})^\dagger = U(-\vec{\alpha}) = U^{-1}(\vec{\alpha}). \quad (10.102)$$

Cuando un operador, A , cumple

$$A^\dagger = A^{-1}$$

se dice que es un operador unitario. Así, $U(\vec{\alpha})$ es unitario.

10.6. Reglas de conmutación del momento angular

Anteriormente vimos que los generadores M_i satisfacen las reglas de conmutación Eq. (10.83). Veamos que reglas de conmutación cumplen los operadores L_i . Primero notemos que definiendo $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ se tiene $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. En componentes se encuentra $L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$. De donde

$$\begin{aligned}
 [L_i, L_j] &= [\epsilon_{ilm}x_l p_m, \epsilon_{jrs}x_r p_s] = \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}[x_l p_m, x_r p_s] \\
 &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}(x_l[p_m, x_r]p_s + x_r[x_l, p_s]p_m) \\
 &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}(-ix_l p_s \delta_{mr} + ix_r p_m \delta_{ls}) \\
 &= i(-\epsilon_{ilr}\epsilon_{jrs}x_l p_s + \epsilon_{ism}\epsilon_{jrs}x_r p_m) \\
 &= i(\epsilon_{ilr}\epsilon_{rjs}x_l p_s - \epsilon_{ims}\epsilon_{sjr}x_r p_m) \\
 &= i(\epsilon_{iar}\epsilon_{rjb}x_a p_b - \epsilon_{ibs}\epsilon_{sja}x_r p_b) \\
 &= i(\epsilon_{iar}\epsilon_{rjb} - \epsilon_{ibs}\epsilon_{sja})x_a p_b,
 \end{aligned} \tag{10.103}$$

ahora, note que

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{iar}\epsilon_{rjb} - \epsilon_{ibs}\epsilon_{sja} &= (\delta_{ij}\delta_{ab} - \delta_{ib}\delta_{aj}) - (\delta_{ij}\delta_{ba} - \delta_{ia}\delta_{bj}) \\
 &= \delta_{ia}\delta_{bj} - \delta_{ib}\delta_{aj} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kab}.
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

Ocupando este resultado se encuentra

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}\epsilon_{kab}x_a p_b,$$

es decir

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \tag{10.105}$$

Se puede observar que son las mismas reglas de conmutación que cumple M_i Eq. (10.83). A estas reglas de conmutación se les llama el álgebra de Lie de $SO(3)$.

Anteriormente vimos que la matriz $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ conmuta con todas las matrices M_i . Para los operadores L_i el operador equivalente a M^2 es

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_j L_j. \tag{10.106}$$

El cual cumple

$$\begin{aligned}
 [L^2, L_i] &= [L_j L_j, L_i] = L_j [L_j, L_i] + [L_j, L_i] L_j \\
 &= i\epsilon_{jil}L_j L_l + i\epsilon_{jil}L_l L_j = -i(\epsilon_{ijl}L_j L_l + \epsilon_{ijl}L_l L_j),
 \end{aligned} \tag{10.107}$$

ahora, renombrando índices se encuentra

$$\epsilon_{ijl}L_jL_l = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ijl}L_jL_l = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ilj}L_lL_j = \epsilon_{ilj}L_lL_j, \quad (10.108)$$

introduciendo esta igualdad en Eq. (10.107) se tiene

$$[L^2, L_i] = -i(\epsilon_{ilj}L_lL_j + \epsilon_{ijl}L_lL_j) = -i(-\epsilon_{ijl}L_lL_l + \epsilon_{ijl}L_lL_j) = 0. \quad (10.109)$$

Por lo tanto, L^2 conmuta con cualquier L_i . A L^2 se le llama el Casimir del álgebra de Lie de $SO(3)$. Como L^2 conmuta con cualquier L_i , este operador comparte vectores propios con estos tres operadores.

10.7. Ecuación de valores propios de L^2

Para obtener los vectores y valores propios de M_i y M^2 resolvimos un problema de álgebra lineal, mas para obtener los vectores propios de L^2 y los de, por ejemplo, L_z se deben plantear las ecuaciones

$$L^2Y_{lm} = \lambda Y_{lm}, \quad L_zY_{lm} = mY_{lm}. \quad (10.110)$$

Estas son dos ecuaciones diferenciales. En efecto, considerando las expresiones de L^2 y L_z en coordenadas esféricas, Eq. (2.99) y Eq. (2.93), se encuentra

$$\begin{aligned} L^2Y_{lm}(\theta, \varphi) &= - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= \lambda Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (10.111)$$

$$L_zY_{lm}(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = mY_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.112)$$

De la segunda ecuación es claro que $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ es de la forma

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \alpha_{\lambda m} e^{im\varphi} P_{\lambda}^m(\theta). \quad (10.113)$$

Si queremos que la función $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ no sea multivaluada debemos pedir $Y_{lm}(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Esto implica $e^{im\phi} = e^{im(\phi+2\pi)}$, lo cual se cumple sólo si

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.114)$$

Por lo tanto, m debe ser un entero. Posteriormente veremos los posibles valores de λ .

Sustituyendo Eq. (10.113) en Eq. (10.111) se encuentra

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_\lambda^m(\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_\lambda^m(\theta) = -\lambda P_\lambda^m(\theta). \quad (10.115)$$

Con el cambio de variable $u = \cos \theta$, tenemos

$$\sin \theta = \sqrt{1 - u^2}, \quad \partial_\theta = -\sqrt{1 - u^2} \partial_u. \quad (10.116)$$

De donde, Eq. (10.115) toma la forma

$$\frac{d}{du} \left((1 - u^2) \frac{dP_\lambda^m(u)}{du} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - u^2} \right) P_\lambda^m(u) = 0. \quad (10.117)$$

Esta es la llamada ecuación asociada de Legendre. Para el caso $m = 0$ se define $P_\lambda^0(u) = P_\lambda(u)$, que debe satisfacer

$$\frac{d}{du} \left((1 - u^2) \frac{dP_\lambda(u)}{du} \right) + \lambda P_\lambda(u) = 0, \quad (10.118)$$

que es la llamada ecuación de Legendre. En lo que sigue, estudiando la estructura del grupo de rotaciones, obtendremos las soluciones de estas ecuaciones. Primero veremos la ortormalidad de las soluciones de la ecuación (10.115).

10.8. Relaciones de ortonormalidad

Supongamos que m y m' son enteros y que $m \neq m'$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} &= \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} \\ &= \frac{e^{i(m-m')\varphi}}{i(m-m')} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i(m-m')2\pi} - 1}{i(m-m')} = 0. \end{aligned} \quad (10.119)$$

Si $m = m'$, se encuentra

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} e^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \quad (10.120)$$

De donde, si m y m' son enteros se tiene

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(e^{im'\varphi} \right)^* e^{im\varphi} = 2\pi \delta_{mm'}. \quad (10.121)$$

Por lo tanto las funciones $e^{im\varphi}$ son ortogonales en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Note que la ecuación (10.115) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{\lambda}^m(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda \operatorname{sen} \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) P_{\lambda}^m(\theta) = 0. \quad (10.122)$$

Como se puede observar, esta ecuación es tipo Sturm-Liouville. En este caso $p(\theta) = \sin \theta$, $r(\theta) = \frac{-m^2}{\sin \theta}$. Considerando los resultados para las ecuaciones tipo Sturm-Liouville, como $p(0) = p(\pi) = 0$, se llega a

$$(\lambda' - \lambda) \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_{\lambda}^m(\theta) = 0.$$

En particular si $\lambda' \neq \lambda$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_{\lambda}^m(\theta) = 0. \quad (10.123)$$

En general se tiene

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\theta) P_{\lambda}^m(\theta) = \delta_{\lambda\lambda'} \beta_{\lambda m}, \quad \beta_{\lambda m} = \text{constante} > 0. \quad (10.124)$$

Por lo tanto, las funciones $P_{\lambda}^m(\theta)$ son ortogonales.

Empleando la ortogonalidad de las funciones $e^{im\varphi}$ y $P_{\lambda}^m(\theta)$, se puede escoger $\alpha_{\lambda m}$ de tal forma que los armónicos esféricos sean ortonormales. En efecto, como los armónicos esféricos tienen la forma Eq. (10.113), se encuentra

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{\lambda' m'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \left(\sin \theta \alpha_{\lambda' m'}^* e^{-im'\varphi} P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) \alpha_{\lambda m} e^{im\varphi} P_{\lambda}^m(\cos \theta) \right) \\ & = \alpha_{\lambda' m'}^* \alpha_{\lambda m} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m'-m)\varphi} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_{\lambda}^m(\cos \theta) \\ & = \alpha_{\lambda' m'}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^{m'}(\cos \theta) P_{\lambda}^m(\cos \theta) \\ & = \alpha_{\lambda' m}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_{\lambda'}^m(\cos \theta) P_{\lambda}^m(\cos \theta) \\ & = \alpha_{\lambda' m}^* \alpha_{\lambda m} 2\pi \delta_{mm'} \beta_{\lambda m} \delta_{\lambda'\lambda} \\ & = |\alpha_{\lambda' m}|^2 2\pi \beta_{\lambda m} \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Entonces, si

$$|\alpha_{\lambda'm}|^2 = \frac{1}{2\pi\beta_{\lambda m}}, \quad (10.126)$$

se cumple

$$\langle Y_{\lambda'm'}(\theta, \varphi) | Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \rangle = \int d\Omega Y_{\lambda'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) = \delta_{mm'} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (10.127)$$

Así los armónicos esféricos son ortonormales.

10.9. Operadores escalera y espectro de L^2

Antes de resolver la ecuación diferencial (10.111) veamos algunas propiedades de las funciones propias $Y_{\lambda m}$ y sus valores propios λ, m . Primero notemos que para cualquier función f se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle L_x f | L_x f \rangle = \langle f | L_x^\dagger L_x f \rangle = \langle f | L_x^2 f \rangle \\ 0 &\leq \langle L_y f | L_y f \rangle = \langle f | L_y^\dagger L_y f \rangle = \langle f | L_y^2 f \rangle, \end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \langle f | (L_x^2 + L_y^2) f \rangle = \langle f | (L^2 - L_z^2) f \rangle.$$

En particular si $f = Y_{\lambda m}$, se llega a

$$(L^2 - L_z^2) Y_{\lambda m} = (\lambda - m^2) Y_{\lambda m}, \quad (10.128)$$

entonces

$$0 \leq (\lambda - m^2) \langle Y_{\lambda m} | Y_{\lambda m} \rangle. \quad (10.129)$$

Note que la única forma de que se cumpla la desigualdad $(\lambda - m^2) < 0$ es que $\langle Y_{\lambda m} | Y_{\lambda m} \rangle = 0$, es decir $Y_{\lambda m} = 0$. Si $Y_{\lambda m} \neq 0$ se tiene $(\lambda - m^2) \geq 0$, entonces

$$-\sqrt{\lambda} \leq m \leq \sqrt{\lambda}. \quad (10.130)$$

Esta restricción nos permitirá encontrar los valores de λ .

En el estudio del oscilador armónico fueron de gran utilidad los operadores de ascenso y descenso. En el caso que ahora estudiamos hay dos operadores equivalentes, los cuales son

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y. \quad (10.131)$$

Note que

$$\begin{aligned} L_{\mp}L_{\pm} &= (L_x \mp iL_y)(L_x \pm iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \pm i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 \mp L_z = L^2 - L_z^2 \mp L_z = L^2 - (L_z^2 \pm L_z), \end{aligned}$$

es decir,

$$L_{\mp}L_{\pm} = L^2 - (L_z^2 \pm L_z). \quad (10.132)$$

Claramente L_{\pm} conmuta con L^2 :

$$[L^2, L_{\pm}] = 0. \quad (10.133)$$

Esto indica que L_{\pm} tiene funciones propias comunes con L^2 . Además

$$[L_z, L_x \pm iL_y] = [L_z, L_x] \pm [L_z, L_y] = iL_y \pm L_x = \pm (L_x \pm iL_y), \quad (10.134)$$

es decir

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}. \quad (10.135)$$

Por lo que, L_{\pm} no tiene funciones propias comunes con L_z .

Veamos que efecto tiene el operador L_{\pm} sobre las funciones propias de L_z . Definamos la función

$$\tilde{Y} = L_{\pm}Y_{\lambda m}, \quad (10.136)$$

entonces tomando en cuenta que L^2 y L_{\pm} conmutan, se tiene

$$L^2\tilde{Y} = L^2L_{\pm}Y_{\lambda m} = L_{\pm}L^2Y_{\lambda m} = \lambda L_{\pm}Y_{\lambda m} = \lambda\tilde{Y}. \quad (10.137)$$

Por lo tanto, $L_{\pm}Y_{\lambda m}$ también es función propia de L^2 con el mismo valor propio, λ , que $Y_{\lambda m}$. Además, considerando el conmutador Eq. (10.135) tenemos

$$\begin{aligned} L_z\tilde{Y} &= L_zL_{\pm}Y_{\lambda m} = (L_{\pm}L_z \pm L_{\pm})Y_{\lambda m} = (L_{\pm}L_zY_{\lambda m} \pm L_{\pm}Y_{\lambda m}) \\ &= (mL_{\pm}Y_{\lambda m} \pm L_{\pm}Y_{\lambda m}) = (m \pm 1)L_{\pm}Y_{\lambda m} = (m \pm 1)\tilde{Y}, \end{aligned} \quad (10.138)$$

es decir,

$$L_zL_{\pm}Y_{\lambda m} = (m \pm 1)L_{\pm}Y_{\lambda m}. \quad (10.139)$$

Por lo tanto, $\tilde{Y} = L_{\pm}Y_{\lambda m}$ es vector propio de L_z , pero no con el valor propio de $Y_{\lambda m}$ si no con el de $Y_{\lambda m \pm 1}$. De donde, como L_z tiene un espectro no degenerado, se debe cumplir

$$L_{\pm}Y_{\lambda m} = \alpha(\lambda, m)Y_{\lambda m \pm 1}, \quad \alpha(\lambda, m) = \text{constante}. \quad (10.140)$$

El valor de $\alpha(\lambda, m)$ lo obtendremos posteriormente.

Como podemos ver, el operador L_{\pm} es muy útil, pues nos permite pasar de una función propia $Y_{\lambda m}$ a otra $Y_{\lambda m \pm 1}$. Ahora si aplicamos n veces este operador obtenemos

$$(L_{\pm})^n Y_{\lambda m} = \tilde{\alpha}(\lambda, m) Y_{\lambda m \pm n}, \quad (10.141)$$

con

$$L_z Y_{\lambda m \pm n} = (m \pm n) Y_{\lambda m \pm n}. \quad (10.142)$$

Así, $Y_{\lambda m \pm n}$ es vector propio de L_z con valor propio $(m \pm n)$, sin importar el valor de n . Ahora, es claro que dado cualquier dos números λ y m existen otros dos números, n_a y n_b , tales que

$$\sqrt{\lambda} < (m + n_a), \quad (m - n_b) < -\sqrt{\lambda},$$

En estos casos no se cumple la restricción Eq. (10.130), por lo que $Y_{\lambda m + n_a} = 0$ y $Y_{\lambda m - n_b} = 0$. Esto quiere decir que

$$(L_+)^{n_a} Y_{\lambda m} = 0, \quad (L_-)^{n_b} Y_{\lambda m} = 0. \quad (10.143)$$

Definamos el conjunto

$$A_+ = \{n | (L_+)^n Y_{\lambda m} = 0\} \quad (10.144)$$

y sea N_+ el mínimo de A_+ . Note que

$$(L_+)^{N_+ - 1} Y_{\lambda m} \neq 0, \quad (10.145)$$

esto es cierto, pues de lo contrario N_+ no sería el mínimo de A_+ . También definamos $l = N_+ - 1 + m$, es decir $l - m = N_+ - 1$, se puede observar que

$$(L_+)^{N_+ - 1} Y_{\lambda m} = (L_+)^{l - m} Y_{\lambda m} = \gamma Y_{\lambda l} \neq 0, \quad \gamma = \text{constante.}$$

Por lo tanto, existe l tal que $Y_{\lambda l} \neq 0$ y

$$L_+ Y_{\lambda l} = 0,$$

note que l es el máximo valor que puede tomar m de tal forma que $Y_{\lambda m} \neq 0$.

Ahora, definamos

$$A_- = \{n | (L_-)^n Y_{\lambda m} = 0\} \quad (10.146)$$

y sea N_- el mínimo de A_- . Se puede observar que

$$(L_-)^{N_- - 1} Y_{\lambda m} \neq 0, \quad (10.147)$$

pues de lo contrario N_- no sería el mínimo de A_- . También definamos

$$l' = m - (N_- - 1)$$

es decir

$$N_1 - 1 = l' - m,$$

se puede observar que

$$(L_+)^{N_- - 1} Y_{\lambda m} = (L_+)^{l' - m} Y_{\lambda m} = \gamma' Y_{\lambda l'} \neq 0, \quad \gamma' = \text{constante.}$$

Por lo tanto, existe l' tal que $Y_{\lambda l'} \neq 0$ y

$$L_- Y_{\lambda l'} = 0,$$

note que l' es el mínimo valor que puede tomar m de tal forma que $Y_{\lambda m} \neq 0$. De estos resultados tenemos que si $Y_{\lambda m} \neq 0$, entonces se cumplen $l' \leq m \leq l$.

Ahora, como l es el valor propio máximo que puede tener L_z , entonces considerando Eq. (10.132), se tiene

$$L_- L_+ Y_{\lambda l} = (L^2 - (L_z^2 + L_z)) Y_{\lambda l} = [\lambda - l(l+1)] Y_{\lambda l} = 0,$$

esto implica que

$$\lambda = l(l+1).$$

Además, como l' es el valor propio mínimo que puede tener L_z , se tiene

$$L_+(L_- Y_{\lambda l'}) = (L^2 - (L_z^2 - L_z)) Y_{\lambda l'} = [l(l+1) - l'(l'-1)] Y_{\lambda l'} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} l(l+1) - l'(l'-1) &= l^2 - l'^2 + l + l' = (l+l')(l-l') + l + l' \\ &= (l+l')(l+1-l') = 0. \end{aligned} \quad (10.148)$$

Entonces,

$$l'_+ = (l+1) \quad \text{o} \quad l'_- = -l, \quad (10.149)$$

claramente el único valor permitido es $l'_- = -l$ y el mínimo valor que puede tomar m es $-l$. Así los valores propios de L_z deben cumplir

$$-l \leq m \leq l \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (10.150)$$

Note que hay $(2l + 1)$ funciones propias con el mismo valor propio $l(l + 1)$. Es decir, para cada propio $l(l + 1)$ hay $2l + 1$ funciones que satisfacen

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l + 1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (10.151)$$

con valores propios de L_z que cumplen Eq. (10.150).

Un resultado importante de todo este desarrollo es que, dado un valor l , basta obtener un armónico esférico, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, para que, mediante los operadores L_{\pm} , obtener los $2l$ restantes. Por ejemplo podemos obtener el armónico esférico $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ y con el operador L_- obtener los restantes. De la misma forma si conocemos función Y_{l0} cualquier otro armónico esférico está dado por

$$(L_-)^m Y_{l0} = \alpha Y_{l,-m} \quad (10.152)$$

o por

$$(L_+)^m Y_{l0} = \alpha Y_{l,m}. \quad (10.153)$$

Posteriormente ocuparemos estos resultados para obtener de forma explícita los armónicos esféricos.

10.10. Resultados preliminares

Antes de continuar veremos dos resultados que nos permitirán obtener los armónicos esféricos.

10.10.1. Constante α y reglas de recurrencia

Determinemos α definida en Eq. (10.140). Ahora, sabemos que los armónicos esféricos son ortonormales y que se cumple $L_{\pm} Y_{lm} = \alpha_{\pm} Y_{lm\pm 1}$, entonces usando las propiedades del producto escalar se tiene

$$\begin{aligned} \langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle &= \langle \alpha_{\pm} Y_{lm\pm 1} | \alpha_{\pm} Y_{lm\pm 1} \rangle = \alpha_{\pm}^* \alpha_{\pm} \langle Y_{lm\pm 1} | Y_{lm\pm 1} \rangle \\ &= |\alpha_{\pm}|^2, \end{aligned} \quad (10.154)$$

además

$$\begin{aligned} \langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle &= \langle Y_{lm} | L_{\pm}^{\dagger} L_{\pm} Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | L_{\mp} L_{\pm} Y_{lm} \rangle \\ &= \langle Y_{lm} | [L^2 - (L_z^2 \pm L_z)] Y_{lm} \rangle \\ &= \langle Y_{lm} | [l(l + 1) - (m^2 \pm m)] Y_{lm} \rangle \\ &= (l^2 + l - m^2 \mp m) \langle Y_{lm} | Y_{lm} \rangle \\ &= (l^2 - m^2 + l \mp m) = (l \pm m)(l \mp m) + (l \mp m) \\ &= (l \mp m)(l \pm m + 1). \end{aligned} \quad (10.155)$$

Igualando Eq. (10.154) con Eq. (10.155) se encuentra

$$|\alpha_{\pm}|^2 = (l \mp m)(l \pm m + 1). \quad (10.156)$$

Por lo tanto,

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}. \quad (10.157)$$

Así, Eq. (10.140) tiene la forma

$$L_{\pm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{lm \pm 1}(\theta, \varphi). \quad (10.158)$$

10.10.2. Relaciones de recurrencia de L_{\pm}

Como aplicaremos varias veces el operador L_{\pm} , veremos algunas reglas de recurrencia de estos operadores.

Primero observemos que en coordenadas esféricas, Eqs. (2.91)-(2.93), se encuentra

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= L_x \pm iL_y \\ &= i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \pm i(-i) \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left((\pm \cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta (i \cos \varphi \mp \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left(\pm (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \left(\pm e^{\pm i\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + i e^{\pm i\varphi} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (10.159)$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) &= \mp k (\sin \theta)^{\mp k - 1} (\cos \theta) f(\theta) + (\sin \theta)^{\mp k} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \\ &= (\sin \theta)^{\mp k} \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k (\cot \theta) f(\theta) \right), \end{aligned}$$

así

$$(\sin \theta)^{\pm k} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) = \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k (\cot \theta) f(\theta) \right).$$

Entonces, usando que

$$(\sin \theta)^{1\pm k} = (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)}$$

y el cambio de variable $u = \cos \theta$, se llega a

$$-(\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) = \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k(\cot \theta) f(\theta) \right).$$

Ocupando este resultado se obtiene

$$\begin{aligned} L_{\pm} (f(\theta)e^{ik\varphi}) &= e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i(\cot \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (f(\theta)e^{ik\varphi}) \\ &= e^{i(k\pm 1)\varphi} \left(\pm \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - k(\cot \theta) f(\theta) \right) \\ &= \pm e^{i(k\pm 1)\varphi} \left(\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \mp k(\cot \theta) f(\theta) \right) \\ &= \mp e^{i(k\pm 1)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right). \end{aligned}$$

Adicionalmente, utilizando esta igualdad y definiendo

$$k' = k \pm 1, \quad g(\theta) = (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right),$$

se encuentra

$$\begin{aligned} L_{\pm}^2 (f(\theta)e^{ik\varphi}) &= (\mp) L_{\pm} \left(e^{ik'\varphi} g(\theta) \right) \\ &= (\mp)^2 e^{i(k'\pm 1)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k'\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp k'} g(\theta) \right) \\ &= (\mp)^2 e^{i(k\pm 2)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 2)} \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp(k\pm 1)} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right) \right) \\ &= (\mp)^2 e^{i(k\pm 2)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm 2)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right), \end{aligned}$$

en general se tiene

$$(L_{\pm})^n (f(\theta)e^{ik\varphi}) = (\mp)^n e^{i(k\pm n)\varphi} (\sin \theta)^{\pm(k\pm n)} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left((\sin \theta)^{\mp k} f(\theta) \right). \quad (10.160)$$

donde

$$u = \cos \theta.$$

10.11. El armónico esférico $Y_{ll}(\theta, \varphi)$

En esta sección obtendremos el armónico esférico $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ con el cual podemos construir el resto de los armónicos esféricos. De Eq. (10.113) sabemos que

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{\alpha_{ll} e^{il\varphi} \Theta_l^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \quad (10.161)$$

y de Eq. (10.158) tenemos que se debe cumplir $L_+ Y_{ll}(\theta, \varphi) = 0$, es decir

$$L_+ Y_{ll}(\theta, \varphi) = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\alpha_{ll} e^{il\varphi} \Theta_l^l(\theta)}{\sqrt{2\pi}} = 0. \quad (10.162)$$

Por lo que, $\Theta_l^l(\theta)$ debe satisfacer

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) \Theta_l^l(\theta) = 0, \quad (10.163)$$

así

$$\Theta_l^l(\theta) = \alpha \sin^l \theta, \quad \alpha = \text{constante}. \quad (10.164)$$

Esto quiere decir que

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{\alpha_{ll} e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}}. \quad (10.165)$$

La constante α_{ll} se determina pidiendo la condición $\langle Y_{ll} | Y_{ll} \rangle = 1$, que es

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{ll}^*(\theta, \varphi) Y_{ll}(\theta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{\alpha_{ll} e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}} \right)^* \frac{\alpha_{ll} e^{il\varphi} \sin^l \theta}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{|\alpha_{ll}|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta e^{i(l-l)\varphi} \\ &= |\alpha_{ll}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta = 1, \end{aligned}$$

entonces

$$|\alpha_{ll}|^2 = \frac{1}{\int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta}. \quad (10.166)$$

Para obtener esta constante, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\sin^{n-1} \theta \cos \theta) &= (n-1) \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta - \sin^{n-1} \theta \sin \theta \\ &= (n-1) \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^n \theta, \end{aligned}$$

de donde

$$\sin^n \theta = \frac{n-1}{n} \sin^{n-2} \theta - \frac{1}{n} \frac{d}{d\theta} (\sin^{n-1} \theta \cos \theta). \quad (10.167)$$

Así,

$$\int_0^\pi d\theta \sin^n \theta = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-2} \theta. \quad (10.168)$$

En particular

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta &= \frac{2l}{2l+1} \int_0^\pi d\theta \sin^{2l-1} \theta = \frac{2l}{2l+1} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-1)+1} \theta \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))}{(2l+1)(2(l-1)+1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-2)+1} \theta \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2))}{(2l+1)(2(l-1)+1)(2(l-2)+1)} \int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-3)+1} \theta \\ &\vdots \\ &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2)) \cdots (2(l-i))}{(2l+1)(2(l-1)+1)(2(l-2)+1) \cdots (2(l-i)+1)} \\ &\quad \left(\int_0^\pi d\theta \sin^{2(l-(i+1)+1} \theta \right). \end{aligned}$$

Este proceso se puede hacer hasta que $2(l-(i+1))+1 = 1$, que implica $l = i+1$, es decir $i = l-1$. En este caso

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta &= \frac{(2l)(2(l-1))(2(l-2)) \cdots 2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\ &= \frac{2^l (l)(l-1)(l-2) \cdots 1}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3} 2 \\ &= \frac{2^{l+1} l!}{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3}, \end{aligned}$$

considerando

$$\begin{aligned} (2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 3 &= \frac{(2l+1)(2l)(2l-1)(2(l-1))(2l-3) \cdots 3 \cdot 2}{(2l)(2(l-1)) \cdots 2} \\ &= \frac{(2l+1)!}{2^l l!} \end{aligned} \quad (10.169)$$

se llega a

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2l+1} \theta = \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!}. \quad (10.170)$$

Tomando en cuenta este resultado en Eq. (10.166), tenemos que

$$\alpha_u = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \frac{1}{2^l l!}, \quad (10.171)$$

entonces

$$Y_u(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{e^{il\varphi}}{2^l l!} \sin^l \theta. \quad (10.172)$$

10.12. Forma explícita de los armónicos esféricos

Una vez obtenido un armónico esférico, ocupando el operado escalera, L_{\pm} , podemos obtener los demás. Por ejemplo, supongamos que tenemos el armónico esférico Y_u . Entonces, usando reiteradamente Eq. (10.158) se tiene

$$\begin{aligned} L_- Y_u &= \sqrt{2l} Y_{u-1}, \\ L_-^2 Y_u &= \sqrt{2l} L_- Y_{u-1} = \sqrt{(2l)(2l-1)2} Y_{u-2} = \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} Y_{u-2}, \\ L_-^3 Y_u &= \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} L_- Y_{u-2} = \sqrt{\frac{(2l)!2!}{(2l-2)!}} \sqrt{(2l-2)3} Y_{u-3} \\ &= \sqrt{\frac{(2l)!3!}{(2l-3)!}} Y_{u-3}, \\ &\vdots \\ L_-^n Y_u &= \sqrt{\frac{(2l)!n!}{(2l-n)!}} Y_{u-n}. \end{aligned} \quad (10.173)$$

Por lo tanto, si $n = l - m$ se encuentra

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} Y_u(\theta, \varphi). \quad (10.174)$$

Se puede observar que considerando los resultados previos (10.172) y (10.160) para $k = l$ y $n = l - m$ se tiene

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} \left(\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{e^{il\varphi}}{2^l l!} \sin^l \theta \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} (L_-)^{l-m} (e^{il\varphi} \sin^l \theta) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} (+)^{l-m} e^{i(l-(l-m))\varphi} \\
&\quad \sin^{-[l-(l-m)]} \theta \frac{\partial^{l-m}}{\partial u^{l-m}} (\sin^l \theta \sin^l \theta) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{\partial^{l-m} (\sin \theta)^{2l}}{\partial u^{l-m}}.
\end{aligned}$$

Note que ninguna propiedad de estas funciones cambia si las multiplicamos por un factor de norma uno, es decir por una potencia de $\pm i$ o de ± 1 . En la literatura existen diferentes elecciones de este factor, por conveniencia tomaremos $(-)^l$. Entonces, los armónicos esféricos son

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} (\sin \theta)^{-m} \frac{\partial^{l-m} (\sin^2 \theta)^l}{\partial u^{l-m}}, \quad (10.175)$$

$$u = \cos \theta, \quad -l \leq m \leq l.$$

Esta expresión de los armónicos esféricos es común en mecánica cuántica, en la próxima sección veremos otra que es más usual en electrostática.

10.13. Polinomios de Legendre y polinomios asociados de Legendre

El caso $m = 0$ es de particular importancia para diferentes aplicaciones, veamos este caso. Tomando $m = 0$ en Eq. (10.175), se tiene

$$\begin{aligned}
Y_{l0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(-)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (\sin^{2l} \theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(-)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (1-u^2)^l \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2-1)^l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(u). \quad (10.176)
\end{aligned}$$

Donde

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2-1)^l, \quad (10.177)$$

a esta expresión se le llama fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre de grado l . Por lo que el armónico esférico de orden $m = 0$ es

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (10.178)$$

Con este armónico esférico se pueden obtener el resto. En efecto, de Eq. (10.158) se encuentra

$$\begin{aligned}
L_{\pm} Y_{l0} &= \sqrt{l(l+1)} Y_{l\pm 1} = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} Y_{l\pm 1}, \\
(L_{\pm})^2 Y_{l0} &= \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} L_{\pm} Y_{l\pm 1} = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \sqrt{(l-1)(l+2)} Y_{l\pm 2} \\
&= \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} Y_{l\pm 2}, \\
&\vdots \\
(L_{\pm})^m Y_{l0} &= \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} Y_{l(\pm m)}, \quad m \geq 0. \tag{10.179}
\end{aligned}$$

Entonces, tomando en cuenta Eq. (10.160) se llega a

$$\begin{aligned}
Y_{l(\pm m)}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (L_{\pm})^m Y_{l0}(\theta, \varphi), \\
&= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (\mp)^m e^{\pm im\varphi} \sin^m \theta \frac{d^m}{du^m} \left(\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \right) \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} (\pm)^m e^{\pm im\varphi} \left[(-)^m (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \right].
\end{aligned}$$

Definiremos los polinomios asociados de Legendre de grado positivo como

$$P_l^m(u) = (-)^m (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l(u), \tag{10.180}$$

así

$$Y_{l(\pm m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{\pm im\varphi} (\pm)^m P_l^m(\cos \theta), \quad m \geq 0, \tag{10.181}$$

es decir, si $m \geq 0$,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \tag{10.182}$$

$$Y_{l(-m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{-im\varphi} (-)^m P_l^m(\cos \theta). \tag{10.183}$$

Note que

$$Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-)^m Y_{l(-m)}(\theta, \varphi). \quad (10.184)$$

Ahora, definiendo los polinomios asociados de Legendre de grado negativo como

$$P_l^{-m}(u) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(u), \quad (10.185)$$

se tiene

$$Y_{l(-m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{-im\varphi} P_l^{-m}(\cos \theta). \quad (10.186)$$

Se puede observar que si definimos $k = -m$ esta expresión se escribe como

$$Y_{lk}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{4\pi(l+k)!}} e^{ik\varphi} P_l^k(\cos \theta), \quad (10.187)$$

que tiene la forma de Eq. (10.182). Por lo tanto, cualquier armónico esférico se escribe como

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad -l \leq m \leq l. \quad (10.188)$$

Además, de las relaciones de ortonormalidad Eq. (10.127) se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{l'l} &= \langle Y_{l'm} | Y_{lm} \rangle = \int d\Omega Y_{l'm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\sqrt{\frac{(2l'+1)(l'-m)!}{4\pi(l'+m)!}} e^{im\varphi} P_{l'}^m(\cos \theta) \right)^* \\ &\quad \left(\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right) \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta), \end{aligned}$$

es decir

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{l'}^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) = \left(\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \right) \delta_{l'l}. \quad (10.189)$$

Tomando el cambio de variable $u = \cos \theta$ se encuentra

$$\int_{-1}^1 du P_l^m(u) P_l^m(u) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}. \quad (10.190)$$

Estas son las relaciones de ortonormalidad de los polinomios asociados de Legendre. En particular, para los polinomios de Legendre, $m = 0$, se llega a

$$\int_{-1}^1 du P_l(u) P_l(u) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll}, \quad (10.191)$$

que son las relaciones de ortonormalidad de los polinomios de Legendre.

10.14. Propiedades de los polinomios de Legendre

Ahora veremos algunas propiedades de los Polinomios de Legendre. Primero recordemos que se cumple la llamada fórmula de Rodrigues

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l, \quad (10.192)$$

de esta fórmula se puede ver que los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(u) = 1. \quad (10.193)$$

$$P_1(u) = u, \quad (10.194)$$

$$P_2(u) = \frac{1}{2} (3u^2 - 1), \quad (10.195)$$

$$P_3(u) = \frac{1}{2} (5u^3 - 3u), \quad (10.196)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8} (35u^4 - 30u^2 + 3), \quad (10.197)$$

$$P_5(u) = \frac{1}{8} (63u^5 - 70u^3 + 15). \quad (10.198)$$

Para obtener la expresión general de los polinomios de Legendre notemos que si n y m son dos naturales tales que $n \leq m$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^n u^m}{du^n} &= \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \frac{du^m}{du} = m \frac{d^{n-1} u^{m-1}}{du^{n-1}} = \frac{m!}{(m-1)!} \frac{d^{n-1} u^{m-1}}{du^{n-1}} \\ &= \frac{m!}{(m-1)!} (m-1) \frac{d^{n-2} u^{m-2}}{du^{n-2}} = \frac{m!}{(m-2)!} \frac{d^{n-2} u^{m-2}}{du^{n-2}} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m!}{(m-n)!} \frac{d^{n-n} u^{m-n}}{du^{n-n}} \\
&= \frac{m!}{(m-n)!} u^{m-n},
\end{aligned}$$

mientras que para el caso $n > m$, se encuentra

$$\frac{d^n u^m}{du^n} = 0. \quad (10.199)$$

De donde

$$\frac{d^n u^m}{du^n} = \frac{m!}{(m-n)!} u^{m-n} \theta(m-n), \quad \theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}. \quad (10.200)$$

En particular, si l y k son naturales se llega a

$$\frac{d^l u^{2(l-k)}}{du^l} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} u^{l-2k} \theta(l-2k). \quad (10.201)$$

Así, Eq. (14.97) es diferente de cero sólo si $l - 2k \leq 0$. Esto quiere decir que el máximo valor que puede tomar k es $l/2$. Si l es par, es decir $l = 2r$ entonces el máximo valor que puede tomar k es r . De donde, k puede tomar los valores $(0, 1, 2, 3, \dots, r)$. Si l es impar $l = 2r + 1$, entonces el máximo valor que puede tomar k es $r + 1/2$, que no es un natural. Como k es natural, en este caso k sólo puede tomar los valores $(0, 1, 2, 3, \dots, r)$. Definiremos $[l/2]$ como el máximo entero menor o igual a $l/2$. Entonces, en ambos casos, k puede tomar los valores $(0, 1, 2, 3, \dots, [l/2])$. Considerando esta definición, Eq. (14.97) se puede escribir como

$$\frac{d^l u^{2(l-k)}}{du^l} = \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} u^{l-2k} \theta\left(\left[\frac{l}{2}\right] - k\right). \quad (10.202)$$

También recordemos el binomio de Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n A^{n-k} B^k, \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (10.203)$$

que implica

$$(u^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} u^{2(l-k)}. \quad (10.204)$$

Por lo que, de Eq. (10.204) y Eq. (10.202) se llega a

$$\begin{aligned} P_l(u) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (u^2 - 1)^l}{du^l} = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{2^l l! k! (l-k)!} \frac{d^l u^{2l-2k}}{du^l} \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} u^{l-2k} \theta \left(\left[\frac{l}{2} \right] - k \right). \end{aligned} \quad (10.205)$$

Así, la expresión general para los polinomios de Legendre es

$$P_l(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} u^{l-2k}. \quad (10.206)$$

De esta expresión se puede ver que

$$P_l(-u) = (-1)^l P_l(u). \quad (10.207)$$

Por lo tanto, si l es par, $P_l(u)$ es par y si l es impar, $P_l(u)$ es impar.

10.14.1. Función generadora

Ahora veremos la función generadora de los polinomios de Legendre. Probaremos que se cumple

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zu+z^2}} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u), \quad z < 1. \quad (10.208)$$

Primero note que $u = \cos \theta \leq 1$ y si $0 < z < 1$, entonces $z = 1 - \epsilon$, con $0 < \epsilon < 1$. Además recordemos que si $|\alpha| < 1$, entonces se cumplen las series

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n, \quad (10.209)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \alpha^n. \quad (10.210)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2u < 2 + \sum_{n \geq 2} \epsilon^n &= 1 - \epsilon + 1 + \epsilon + \sum_{n \geq 2} \epsilon^n = z + \sum_{n \geq 0} \epsilon^n = z + \frac{1}{1-\epsilon} \\ &= z + \frac{1}{z}, \end{aligned} \quad (10.211)$$

de donde,

$$2uz - z^2 = z(2u - z) < 1. \quad (10.212)$$

Por lo tanto, considerando Eq. (10.210) y el binomio de Newton Eq. (10.203) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zu + z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - z(2u - z)}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n (2u - z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n \sum_{k=0}^n C_k^n (2u)^{n-k} (-z)^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! (-)^k 2^{n-k} C_k^n u^{n-k}}{2^{2n}(n!)^2} z^{n+k}. \end{aligned} \quad (10.213)$$

Para simplificar los cálculos, definamos $l = n + k$, entonces $n = l - k$. Como n es el máximo valor que puede tener k , se cumple

$$k \leq n = (l - k),$$

esto implica $2k \leq l$. De donde, el máximo valor que puede tomar k es el mayor entero menor o igual a $l/2$, que es $[l/2]$. Con este cambio de variable se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2zu + z^2}} &= \sum_{l \geq 0} \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]! (-)^k 2^{l-2k} C_k^{l-k} u^{l-2k}}{2^{2(l-k)} [(l-k)!]^2} z^l \\ &= \sum_{l \geq 0} z^l \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]! (-)^k 2^{l-2k} (l-k)!}{k! (l-2k)! 2^{2(l-k)} [(l-k)!]^2} u^{l-2k} \\ &= \sum_{l \geq 0} z^l \left(\sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{[2(l-k)]! (-)^k}{2^l (l-k)! k! (l-2k)!} u^{l-2k} \right). \end{aligned} \quad (10.214)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta Eq. (10.206) se llega a la igualdad Eq. (10.208).

La igualdad (10.208) es importante pues permite probar varias propiedades de los Polinomios de Legendre. Por ejemplo, si $u = 0$, ocupando la serie Eq. (10.210), se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} = \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l)!}{2^{2l} l!^2} z^{2l} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(0), \quad (10.215)$$

por lo que

$$P_{2l}(0) = \frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}l!^2} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \quad P_{2l+1}(0) = 0. \quad (10.216)$$

Si $u = \pm 1$, utilizando la serie Eq. (10.209), se consigue

$$\frac{1}{\sqrt{1 \mp 2z + z^2}} = \frac{1}{1 \mp z} = \sum_{l \geq 0} (\pm 1)^l z^l = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(\pm 1), \quad (10.217)$$

de donde

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l. \quad (10.218)$$

10.14.2. Relaciones de recurrencia

Los polinomios de Legendre cumplen las siguientes reglas de recurrencia

$$(l+1)P_{l+1}(u) - (2l+1)uP_l(u) + lP_{l-1}(u) = 0, \quad (10.219)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \left(2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) + \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0, \quad (10.220)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - u \frac{dP_l(u)}{du} - (l+1)P_l(u) = 0, \quad (10.221)$$

$$\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \frac{dP_{l-1}(u)}{du} - (2l+1)P_l(u) = 0, \quad (10.222)$$

$$(u^2 - 1) \frac{dP_l(u)}{du} - luP_l(u) + lP_{l-1}(u) = 0. \quad (10.223)$$

Para probar la identidad (10.219) definamos

$$W(z, u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2uz + z^2}} = \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u), \quad (10.224)$$

de donde

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = \frac{-(-2u + 2z)}{2(1 - 2uz + z^2)^{3/2}} = \frac{(u - z)W(u, z)}{(1 - 2uz + z^2)},$$

es decir,

$$(1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = (u - z)W(u, z). \quad (10.225)$$

Además,

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial z} = \sum_{l \geq 0} lz^{l-1}P_l(u),$$

usando este resultado en Eq. (10.225) se obtiene

$$\begin{aligned} & (1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial z} - (u - z)W(u, z) \\ &= (1 - 2uz + z^2) \sum_{l \geq 0} lz^{l-1}P_l(u) - (u - z) \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} (lP_l(u)z^{l-1} - 2luP_l(u)z^l + lP_l(u)z^{l+1} - uP_l(u)z^l + P_l(u)z^{l+1}) \\ &= \sum_{l \geq 0} (lP_l(u)z^{l-1} - (2l + 1)uP_l(u)z^l + (l + 1)P_l(u)z^{l+1}) = 0. \end{aligned} \quad (10.226)$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 0} lP_l(u)z^{l-1} &= \sum_{l \geq 1} lP_l(u)z^{l-1} = \sum_{l \geq 0} (l + 1)P_{l+1}(u)z^l \\ &= P_1(u) + \sum_{l \geq 1} (l + 1)P_{l+1}(u)z^l, \\ \sum_{l \geq 0} (l + 1)P_l(u)z^{l+1} &= \sum_{l \geq 1} lP_{l-1}(u)z^l. \end{aligned} \quad (10.227)$$

Por lo que, introduciendo estos resultados en (10.226), se encuentra

$$P_1(u) - uP_0(u) + \sum_{l \geq 1} [(l + 1)P_{l+1}(u) - (2l + 1)uP_l(u) + lP_{l-1}(u)] z^l = 0.$$

Claramente esta igualdad implica Eq. (10.219).

Para probar la identidad Eq. (10.220) derivaremos $W(z, u)$ con respecto a u , en ese caso se tiene

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial u} = \frac{-(-2z)}{2(1 - 2uz + z^2)^{3/2}} = \frac{zW(u, z)}{(1 - 2uz + z^2)},$$

es decir,

$$(1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial u} - zW(u, z) = 0. \quad (10.228)$$

Además

$$\frac{\partial W(z, u)}{\partial u} = \sum_{l \geq 0} z^l \frac{dP_l(u)}{du},$$

por lo que

$$\begin{aligned} & (1 - 2uz + z^2) \frac{\partial W(z, u)}{\partial u} - zW(u, z) \\ &= (1 - 2uz + z^2) \sum_{l \geq 0} z^l \frac{dP_l(u)}{du} - z \sum_{l \geq 0} z^l P_l(u) \\ &= \sum_{l \geq 0} \left(\frac{dP_l(u)}{du} z^l - \left(2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) z^{l+1} + \frac{dP_l(u)}{du} z^{l+2} \right) \quad (10.229) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $P_0(u) = 1$ y $P_1(u) = u$ se encuentra

$$\sum_{l \geq 0} \frac{dP_l(u)}{du} z^l = \sum_{l \geq 1} \frac{dP_l(u)}{du} z^l = \sum_{l \geq 0} \frac{dP_{l+1}(u)}{du} z^{l+1} = z + \sum_{l \geq 1} \frac{dP_{l+1}(u)}{du} z^{l+1},$$

además

$$\sum_{l \geq 0} \frac{dP_l(u)}{du} z^{l+2} = \sum_{l \geq 1} \frac{dP_{l-1}(u)}{du} z^{l+1}. \quad (10.230)$$

Sustituyendo esto dos resultados en Eq. (10.229) se llega a

$$(1 - 1)z + \sum_{l \geq 1} \left[\frac{dP_{l+1}(u)}{du} - \left(2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) + \frac{dP_{l-1}(u)}{du} \right] z^{l+1} = 0,$$

que implica Eq. (10.220).

Para probar la tercera identidad Eq. (10.221) derivaremos con respecto a u a Eq. (10.219), que induce

$$(l + 1) \frac{dP_{l+1}(u)}{du} - (2l + 1)P_l(u) - (2l + 1)u \frac{dP_l(u)}{du} + l \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (10.231)$$

Multiplicando por l a Eq. (10.220) se encuentra

$$l \frac{dP_{l+1}(u)}{du} - l \left(2u \frac{dP_l(u)}{du} + P_l(u) \right) + l \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (10.232)$$

Además, restando Eq. (10.231) con Eq. (10.232), se consigue Eq. (10.221).

Ahora, restando a Eq. (10.231) el producto de $(l + 1)$ con Eq. (10.220), se obtiene

$$u \frac{dP_l(u)}{du} - lP_l(u) - \frac{dP_{l-1}(u)}{du} = 0. \quad (10.233)$$

Sumando este resultado con Eq. (10.221) se llega a la identidad Eq. (10.222).

Si en Eq. (10.221) cambiamos l por $l - 1$ se encuentra

$$\frac{dP_l(u)}{du} - u \frac{dP_{l-1}(u)}{du} - lP_{l-1}(u) = 0. \quad (10.234)$$

Además, de Eq. (10.233) tenemos

$$\frac{dP_{l-1}(u)}{du} = u \frac{dP_l(u)}{du} - lP_l(u). \quad (10.235)$$

Sustituyendo este resultado en Eq. (10.234) se obtiene la identidad Eq. (10.223).

Todas estas identidades son de gran utilidad para resolver diversos problemas de electromagnetismo, en capítulos posteriores las ocuparemos.

10.15. Relación de completez de los armónicos esféricos

Hemos demostrado que las funciones propias de los operadores L_z y L^2 son los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ y que estas funciones son una base ortonormal. Por lo tanto cualquier otra función $F(\theta, \varphi)$ se puede escribir como combinación lineal de esa base, es decir

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.236)$$

Ocupando las relaciones de ortonormalidad Eq. (10.127) se encuentra

$$C_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) F(\theta, \varphi). \quad (10.237)$$

Note que sustituyendo C_{lm} en Eq. (10.236) y haciendo el cambio de variable $u' = \cos \theta'$, $u = \cos \theta$ se llega a

$$\begin{aligned}
F(\theta, \varphi) &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \left(\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') F(\theta', \varphi') \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
&= \int d\Omega' F(\theta', \varphi') \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' F(\theta', \varphi') \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 du' F(u', \varphi') \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(u', \varphi') Y_{lm}(u, \varphi) \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, lo que está dentro del paréntesis debe ser igual a $\delta(\varphi - \varphi') \delta(u - u')$, es decir

$$\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (10.238)$$

A esta igualdad se le llama relación de completez.

10.16. Teorema de adición de los armónicos esféricos

Ahora veremos el teorema de adición de los armónicos esféricos, el cual tiene diferentes aplicaciones. Este teorema nos dice que si se tiene un vector en los ángulos (θ, φ) y otro en los ángulos (θ', φ') y además α es el ángulo entre estos dos vectores, entonces se cumple

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.239)$$

Para mostrar este teorema primero recordemos que las funciones rotan con el operador $U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$, donde $\vec{\alpha}$ es un vector constante. Por lo que si tenemos una función $f(\vec{r})$, la función rotada es

$$f(\vec{r}') = U(\vec{\alpha})f(\vec{r}).$$

Ahora, si tenemos el operador lineal \hat{A} tal que

$$\hat{A}f(\vec{r}) = g(\vec{r}), \quad (10.240)$$

con $g(\vec{r})$ una función, como

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})f(\vec{r}) = U(-\vec{\alpha})f(\vec{r}'), \\ g(\vec{r}) &= U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})g(\vec{r}) = U(-\vec{\alpha})g(\vec{r}'), \end{aligned}$$

se encuentra

$$\hat{A}f(\vec{r}) = \hat{A}U(-\vec{\alpha})f(\vec{r}') = U(-\vec{\alpha})g(\vec{r}') \quad (10.241)$$

que implica

$$\hat{A}'f(\vec{r}') = g(\vec{r}'), \quad \hat{A}' = U(\vec{\alpha})\hat{A}U(-\vec{\alpha}), \quad (10.242)$$

al operador \hat{A}' le llamaremos operador rotado.

Considerando que L^2 conmuta con \vec{L} , se tiene

$$\begin{aligned} L'^2 &= U(\vec{\alpha})L^2U(-\vec{\alpha}) = U(\vec{\alpha})U(-\vec{\alpha})L^2 = L^2, \\ L'_z &= U(\vec{\alpha})L_zU(-\vec{\alpha}). \end{aligned}$$

Es claro que en términos de los ángulos una rotación hace la transformación

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (\theta', \varphi'). \quad (10.243)$$

En particular para los armónicos esféricos se tiene $Y_{lm}(\theta', \varphi') = U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Además una rotación no cambia las reglas de ortonormalidad en el sistema de referencia de las variables (θ', φ') , pues ocupando las propiedades del producto escalar y las reglas de ortonormalidad Eq. (10.127) se tiene

$$\begin{aligned} &< Y_{lm}(\theta', \varphi') | Y_{l'm'}(\theta', \varphi') \rangle = \langle U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) | U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= \langle Y_{lm}(\theta, \varphi) | U^\dagger(\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= \langle Y_{lm}(\theta, \varphi) | U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= \langle Y_{lm}(\theta, \varphi) | Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \rangle = \delta_{mm'}\delta_{ll'}. \end{aligned} \quad (10.244)$$

Adicionalmete, se cumple que

$$\begin{aligned} L'^2 Y_{lm}(\theta', \varphi') &= U(\vec{\alpha})L^2U(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(\vec{\alpha})L^2Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= U(\vec{\alpha})l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta', \varphi'), \quad (10.245) \\ L'_z Y_{lm}(\theta', \varphi') &= U(\vec{\alpha})L_zU(-\vec{\alpha})U(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(\vec{\alpha})L_zY_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= mU(\vec{\alpha})Y_{lm}(\theta, \varphi) = mY_{lm}(\theta', \varphi'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones $Y_{lm}(\theta', \varphi')$ forman una base de funciones ortonormales y cualquier función $G(\theta', \varphi')$ se puede escribir en términos de ellas

$$G(\theta', \varphi') = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (10.246)$$

Tomando en cuenta que $\vec{\alpha}$ es un vector constante, la función

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') = U(\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

se puede ver como una función que depende de las variables (θ, φ) , por lo que se puede expresar como una serie de armónicos esféricos que dependen de (θ, φ)

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{l' \geq 0} \sum_{m'=-l'}^{m'=l'} C_{lm'l'm'} Y_{l'm'}(\theta, \varphi). \quad (10.247)$$

Pero como se debe cumplir Eq. (10.245) en esta serie sólo contribuyen los términos que tienen $l' = l$, por lo que

$$Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} Y_{lm'}(\theta, \varphi), \quad (10.248)$$

con

$$C_{lmm'} = \langle Y_{lm'}(\theta, \varphi) | Y_{lm}(\theta', \varphi') \rangle = \int d\Omega Y_{lm'}(\theta, \varphi) U(\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.249)$$

De forma analoga, como $\vec{\alpha}$ es un vector constante, la función

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = U(-\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta', \varphi')$$

se puede ver como una función que depende de las variables (θ', φ') por lo que se puede expresar como una serie de armónicos esféricos que dependen de (θ', φ') . Considerando que se debe cumplir

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

se tiene

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} D_{lmm'} Y_{lm'}(\theta', \varphi'), \quad (10.250)$$

con

$$D_{lmm'} = \langle Y_{lm'}(\theta', \varphi') | Y_{lm}(\theta, \varphi) \rangle. \quad (10.251)$$

Apelando a las propiedades del producto escalar se encuentra

$$\begin{aligned} C_{lmm'}^* &= (\langle Y_{lm'}(\theta, \varphi) | Y_{lm}(\theta', \varphi') \rangle)^* = \langle Y_{lm}(\theta', \varphi') | Y_{lm'}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= D_{lm'm}, \end{aligned} \quad (10.252)$$

que se puede escribir como

$$D_{lmm'} = C_{lm'm}^*. \quad (10.253)$$

Por lo tanto,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lm'm}^* Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \quad (10.254)$$

Ahora, note que por su definición (10.249) las constantes $C_{lm'm}$ no pueden depender de (θ, φ) , solamente pueden depender del ángulo $\vec{\alpha}$. Por esta razón, tomaremos el caso más simple. Supongamos que \vec{r} está en el eje z , es decir $\theta = 0$, y que se hace una rotación con el ángulo $\vec{\alpha} = (\theta', \varphi')$, claramente el ángulo final es mismo ángulo $\vec{\alpha}$.

Además, considerando Eq. (10.188) se encuentra que

$$Y_{lm}(\theta = 0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (10.255)$$

Por lo que, tomando $\theta = 0$ en Eq. (10.248), se obtiene

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\vec{\alpha}) &= Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} Y_{lm'}(\theta = 0, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lmm'} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m'0} \\ &= C_{lm0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \end{aligned}$$

es decir

$$C_{lm0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\vec{\alpha}). \quad (10.256)$$

Esta relación debe ser cierta para cualquier otros ángulos (θ, φ) y (θ', φ') .

Ahora, considerando el caso $m = 0$ en Eq. (10.254), se llega a

$$\begin{aligned} Y_{l0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) = \sum_{m'=-l}^{m'=l} C_{lm'0}^* Y_{lm'}(\theta', \varphi') \\ &= \sum_{m'=-l}^{m'=l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm'}^*(\vec{\alpha}) Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (10.257)$$

De donde

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vec{\alpha}) Y_{lm}(\theta', \varphi'). \quad (10.258)$$

Note que pasar del vector de ángulos (θ, φ) a otro de ángulos (θ', φ') se está haciendo una rotación con el ángulo $\vec{\alpha}$ que hacen los dos vectores. En el resultado (10.258) hemos ocupado tres vectores: el eje z , el vector de ángulos $P_1 : (\theta, \varphi)$ y el vector de ángulos $P_2 : (\theta', \varphi')$. Claramente se está suponiendo que esos tres vectores están en un sistema S .

Veamos el resultado (10.258) en otro sistema de referencia. Consideremos el sistema \tilde{S} el cual tiene como eje \tilde{z} el vector que está en P_1 . En este sistema definiremos al vector \tilde{P}_1 como el vector P_2 , el cual tiene ángulos $\vec{\alpha}$ con el eje $\tilde{z} = P_1$. Mientras que definiremos como \tilde{P}_2 al eje z que está en los ángulos (θ, φ) del eje \tilde{z} . Aquí el ángulo que hacen los vectores \tilde{P}_1 y \tilde{P}_2 es (θ', φ') . En este sistema de referencia el resultado Eq. (10.258) toma la forma del teorema de adición de los armónicos esféricos (10.239).

El ángulo α puede ser bastante complicado, por ejemplo supongamos que tenemos los vectores

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= r_1(\cos \varphi_1 \sin \theta_1, \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \cos \theta_1), \\ \vec{r}_2 &= r_2(\cos \varphi_2 \sin \theta_2, \sin \varphi_2 \sin \theta_2, \cos \theta_2). \end{aligned} \quad (10.259)$$

Entonces el ángulo que forman está dado por

$$\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \cos \alpha = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2. \quad (10.260)$$

De donde, el teorema de adición de los armónicos esféricos nos dice que se cumple

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1). \quad (10.261)$$

10.16.1. Implicaciones del teorema de adición

El teorema de adición de los armónicos esféricos tiene bastantes aplicaciones, por ejemplo si $\theta = \theta_1 = \theta_2$ y $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, entonces la ecuación (10.261) toma la forma

$$\sum_{m=-l}^{m=l} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (10.262)$$

que se le llama regla de suma de los armónicos esféricos.

Note que introduciendo Eq. (10.261) en la relación de completitud se encuentra

$$\delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l \geq 0} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos \alpha). \quad (10.263)$$

Además, considerando que la delta de Dirac en coordenadas esféricas es

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \quad (10.264)$$

se llega al resultado

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l \geq 0} \frac{\delta(r - r')}{r^2} P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'). \quad (10.265)$$

Para ver otra aplicación consideremos la función

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha + r_2^2}} \quad (10.266)$$

con α el ángulo entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2 que satisface (10.260). Ahora, si $r_1 \neq r_2$ definamos $r_{<} = \min\{r_1, r_2\}$ y $r_{>} = \max\{r_1, r_2\}$, es claro que

$$\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) < 1. \quad (10.267)$$

Entonces, usando estas definiciones y la función generatriz Eq. (10.208) con

$$z = \frac{r_{<}}{r_{>}}, \quad u = \cos \alpha, \quad (10.268)$$

se tiene

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2}} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l P_l(\cos \alpha).$$

Así, utilizando el teorema de adición de los armónicos esféricos Eq. (10.261), tenemos

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1), \quad (10.269)$$

que es la función de Green de la ecuación de Poisson en términos de los armónicos esféricos.

10.17. L^2 y el Laplaciano

El espectro de L^2 es de vital importancia para la mecánica cuántica y la electrostática, pues este operador está relacionado con el Laplaciano. En efecto, ocupando las propiedades del tensor de Levi-Civita se tiene

$$\begin{aligned} L^2 &= L_i L_i = (\epsilon_{ijk} x_j p_k) (\epsilon_{ilm} x_l p_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} x_j p_k x_l p_m \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm} x_j (x_l p_k - i \delta_{lk}) p_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (x_j x_l p_k p_m - i x_j \delta_{lk} p_m) \\ &= \delta_{jl} \delta_{km} x_j x_l p_k p_m - \delta_{jm} \delta_{kl} x_j x_l p_k p_m - i \delta_{jl} \delta_{km} x_j \delta_{lk} p_m + \delta_{jm} \delta_{kl} x_j \delta_{lk} p_m \\ &= x_j x_j p_k p_k - x_m x_l p_l p_m - i x_k p_k + i \delta_{kk} x_l p_l \\ &= (\vec{r})^2 (\vec{p})^2 - x_m \vec{r} \cdot \vec{p} p_m - i \vec{r} \cdot \vec{p} + 3i \vec{r} \cdot \vec{p}. \end{aligned} \quad (10.270)$$

Además, como

$$\begin{aligned} x_m \vec{r} \cdot \vec{p} p_m &= x_m x_l p_l p_m = x_m x_l p_m p_l = x_m (p_m x_l + i \delta_{ml}) p_l \\ &= x_m p_m x_l p_l + i x_m \delta_{ml} p_l = (\vec{r} \cdot \vec{p}) (\vec{r} \cdot \vec{p}) + i (\vec{r} \cdot \vec{p}), \end{aligned}$$

se encuentra

$$L^2 = (\vec{r})^2 (\vec{p})^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 + i \vec{r} \cdot \vec{p}, \quad (10.271)$$

de donde

$$(\vec{p})^2 = \frac{1}{r^2} ((\vec{r} \cdot \vec{p})^2 - i \vec{r} \cdot \vec{p} + L^2). \quad (10.272)$$

Considerando que $\vec{p} = -i \vec{\nabla}$, se tiene

$$\begin{aligned} (\vec{p})^2 &= -\nabla^2 = \frac{1}{r^2} ((\vec{r} \cdot \vec{p})^2 - i \vec{r} \cdot \vec{p} + L^2) \\ &= \frac{1}{r^2} \left((-i \vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 - i (-i \vec{r} \cdot \vec{\nabla}) + L^2 \right), \end{aligned} \quad (10.273)$$

es decir

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 + \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) - L^2 \right). \quad (10.274)$$

En particular, tomando $\vec{\nabla}$ en coordenadas esféricas, se encuentra

$$\frac{1}{r^2} \left(\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 + \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \right) = \frac{1}{r^2} \left(\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Por lo tanto,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2. \quad (10.275)$$

Posteriormente ocuparemos este resultado para atacar problemas de electrostática y mecánica cuántica.

10.18. Paridad

La transformación de paridad está definida por

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z). \quad (10.276)$$

Ahora, en coordenadas esféricas se tiene

$$\begin{aligned} -x &= -r \sin \theta \cos \varphi = r \sin(\pi - \theta) \cos(\pi + \varphi), \\ -y &= -r \sin \theta \sin \varphi = r \sin(\pi - \theta) \sin(\pi + \varphi), \\ -z &= -r \cos \theta = r \cos(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación de paridad en coordenadas esféricas toma la forma

$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \varphi). \quad (10.277)$$

Ahora, veamos como transforman los polinomios asociados de Legendre bajo paridad. Primero notemos que bajo paridad se tiene

$$u = \cos \theta \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -u. \quad (10.278)$$

También se tiene

$$\begin{aligned} P_l(\cos(\pi - \theta)) &= P_l(-\cos \theta) = (-)^l P_l(\cos \theta) \\ P_l^m(\cos(\pi - \theta)) &= (-)^m (1 - (-u)^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(-u)^m} P_l(-u) \\ &= (-)^{l+m} (-)^m (1 - u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \\ &= (-)^{l+m} P_l^m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (10.279)$$

Otra identidad de utilidad es

$$e^{i(\pi+\varphi)m} = e^{i\pi m} e^{i\varphi m} = (\cos \pi + i \sin \pi)^m e^{i\varphi m} = (-)^m e^{i\varphi m}. \quad (10.280)$$

Por lo tanto, ocupando la definición de los armónicos esféricos (10.188) se encuentra

$$Y_{lm}(r, \pi - \theta, \pi + \varphi) = (-)^l Y_{lm}(r, \theta, \varphi). \quad (10.281)$$

Capítulo 11

Ecuación de Laplace en Coordenadas esféricas

En este capítulo estudiaremos la ecuación de Laplace y resolveremos varios problemas de electrostática y magnetostática.

11.1. Solución general

Como vimos en el capítulo anterior la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas Eq. (10.275) tiene la forma

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{L^2 \phi}{r^2} = 0. \quad (11.1)$$

Propondremos como solución a $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, de donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r) L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r) l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \\ &= \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - R(r) l(l+1) \right) = 0, \quad (11.2) \end{aligned}$$

por lo que $R(r)$ debe satisfacer

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - R(r) l(l+1) = 0. \quad (11.3)$$

Para resolver esta ecuación haremos la propuesta $R(r) = a_\alpha r^\alpha$, con α una constante, entonces

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dr^\alpha}{dr} \right) = \alpha \frac{d}{dr} (r^2 r^{\alpha-1}) = \alpha \frac{d}{dr} (r^{\alpha+1}) = \alpha(\alpha+1)r^\alpha, \quad (11.4)$$

sustituyendo este resultado en Eq. (11.3) se encuentra

$$r^\alpha(\alpha(\alpha+1) - l(l+1)) = 0, \quad (11.5)$$

es decir

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+1) - l(l+1) &= \alpha^2 - l^2 + \alpha - l = (\alpha+l)(\alpha-l) + (\alpha-l) \\ &= (\alpha+l+1)(\alpha-l) = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

entonces, las soluciones para $R(r)$ son r^l y $r^{-(l+1)}$. En general las soluciones radiales son

$$R(r) = A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}, \quad A_{lm}, B_{lm} = \text{constante}. \quad (11.7)$$

Así, las soluciones completas son de la forma

$$\phi_{lm}(r, \theta, \varphi) = \left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (11.8)$$

y la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (11.9)$$

Este resultado tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, las leyes de la electrostática nos dicen que el campo eléctrico, \vec{E} , satisface las leyes

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= 4\pi\rho(\vec{r}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

La primera ley es la llamada ley de Gauss y establece la relación entre el campo eléctrico y la densidad de carga ρ . La segunda ley establece que existe una función ϕ tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, por lo que la ley de Gauss toma la forma

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad (11.11)$$

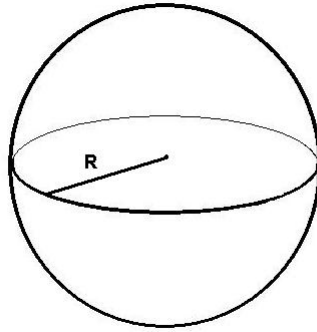
que es la llamada ecuación de Poisson. Note que $\rho(\vec{r})$ solo es diferente de cero donde hay carga, fuera de la región donde hay carga se tiene $\rho(\vec{r}) = 0$. Por lo tanto la ecuación de Poisson Eq. (11.11) se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0, \quad (11.12)$$

cuya solución en coordenadas esféricas es Eq. (11.9).

11.1.1. Problema de la esfera

Supongamos que tenemos un sistema que consta de una esfera de radio R que está al potencial $V(\theta, \varphi)$ en su frontera y que el potencial es finito en cualquier punto del espacio. El problema consiste en calcular el potencial en todo el espacio, tanto dentro como fuera de la esfera.



En el interior de la esfera el potencial Eq. (11.9) debe ser finito, esto implica que si $r < R$ los coeficientes B_{lm} deben ser nulos, de lo contrario el potencial diverge en el origen. Si $r > R$ los coeficientes A_{lm} deben ser nulos, de lo contrario el potencial diverge en infinito. Dividiremos el potencial en dos partes, en el interior, $r < R$,

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

y en el exterior, $r > R$,

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l B_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

En la frontera se debe cumplir que $\phi_{int}(R, \theta, \varphi) = \phi_{ext}(R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi)$, de donde

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (11.13)$$

es decir $A_{lm} = B_{lm}$ y

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (11.14)$$

por lo que

$$A_{lm} = \langle Y_{lm}(\theta, \varphi) | V(\theta, \varphi) \rangle = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) V(\theta, \varphi). \quad (11.15)$$

Así, el potencial del problema es

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R}\right)^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (11.16)$$

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (11.17)$$

con A_{lm} dado por (11.15).

11.1.2. Fórmula de Poisson

Por otros métodos se puede mostrar que la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con la condición de borde

$$\phi(r = R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi), \quad (11.18)$$

es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mp \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \quad (11.19)$$

esta es la llamada fórmula de Poisson en tres dimensiones. Donde α es el ángulo entre los vectores \vec{r} y $\vec{r}' = R\hat{e}_{r'}$, además

$$\begin{aligned} \int d\Omega' &= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta', \\ \cos \alpha &= \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta' \cos \theta, \end{aligned}$$

el signo superior (−) corresponde al caso $r > R$ y el signo (+) corresponde al caso $r < R$.

Mostraremos que esta solución es consistente con las soluciones Eq. (11.16) y Eq. (11.17).

Note que

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta, \varphi) &= \mp \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\
&= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \frac{R(R - r \cos \alpha) - r(r - R \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\
&= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \left(\frac{R(R - r \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r(r - R \cos \alpha)}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= (\mp) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') (-) \left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right. \\
&\quad \left. - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \right) \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}}.
\end{aligned}$$

Definiendo $r_> = \text{menor}\{r, R\}$, $r_< = \text{mayor}\{r, R\}$ y considerando la función generatriz de los polinomios de Legendre, junto con el teorema de adición de los armónico esféricos se llega a

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta, \varphi) &= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{\sqrt{r_<^2 + r_>^2 - 2r_<r_> \cos \alpha}} \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' \frac{V(\theta', \varphi')}{r_> \sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right) \cos \alpha}} \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \frac{1}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \alpha) \\
&= (\pm) \frac{R}{4\pi} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int d\Omega' V(\theta', \varphi') \\
&\quad \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
&= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{(\pm)R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\
&\quad \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') V(\theta', \varphi')
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{(\pm)R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \right) A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (11.20)$$

con

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) V(\theta, \varphi).$$

Ahora, si $r < R$ se debe tomar el signo $(-)$ en Eq. (11.20), en ese caso

$$\begin{aligned} \frac{(-)R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \right) &= \frac{(-)R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{r^l}{R^{l+1}} \right) \\ &= \frac{(-)R}{2l+1} \frac{(-)(2l+1)r^l}{R^{l+1}} = \left(\frac{r}{R} \right)^l, \end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en Eq. (11.20) se llega a

$$\phi_{int}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R} \right)^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

que coincide con Eq. (11.16).

Para $R < r$ se debe tomar el signo $(+)$ en Eq. (11.20), en cuyo caso

$$\begin{aligned} \frac{R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \right) &= \frac{R}{2l+1} \left(R \frac{\partial}{\partial R} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{R^l}{r^{l+1}} \right) \\ &= \frac{R}{2l+1} \frac{(2l+1)R^l}{r^{l+1}} = \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1}, \end{aligned}$$

usando este resultado en Eq. (11.20) se obtiene

$$\phi_{ext}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r}{R} \right)^{l+1} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

que coincide con Eq. (11.17).

Por lo tanto, la fórmula de Poisson (11.19) es la solución de la ecuación de Laplace con la condición de borde (11.18)

11.1.3. Esfera partida

Supongamos que tenemos una esfera de radio R cuyo potencial en su frontera es

$$V(\theta) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (11.21)$$

y es finito en todo el espacio. Determinaremos el potencial en todo el espacio.

En este caso los potenciales están dados por Eq. (11.16) y Eq. (11.17), solo basta determinar los coeficientes A_{lm} .

Claramente, el sistema es invariante bajo rotaciones sobre el eje z , por lo que el potencial no puede depender de φ . Esto implica que si $m \neq 0$ los coeficientes A_{lm} son nulos. Los coeficientes no nulos son

$$\begin{aligned} A_{l0} = A_l &= \langle Y_{l0}(\theta, \varphi) | V(\theta) \rangle = \int d\Omega Y_{l0}^*(\theta, \varphi) V(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta Y_{l0}^*(\theta, \varphi) V(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) V(\theta) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Con el cambio de variable $u = \cos \theta$ se tiene

$$V(u) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq u \leq 1 \\ -V_0 & -1 < u \leq 0 \end{cases} \quad (11.23)$$

y

$$A_l = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^1 du P_l(u) V(u). \quad (11.24)$$

Como $V(u)$ es impar, $A_{2l} = 0$. Para el caso impar se tiene

$$\begin{aligned} A_{2l+1} &= \sqrt{\pi(2(2l+1)+1)} 2 \int_0^1 du P_{2l+1}(u) V(u) \\ &= 2V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} \int_0^1 du P_{2l+1}(u). \end{aligned}$$

Considerando la identidad

$$P_{2l+1}(u) = \frac{1}{4l+3} \frac{d}{du} (P_{2(l+1)}(u) - P_{2l}(u)) \quad (11.25)$$

y los valores de los polinomios de Legendre en ± 1 y en cero se llega a

$$\begin{aligned} \int_0^1 du P_{2l+1}(u) &= \frac{1}{4l+3} (P_{2(l+1)}(u) - P_{2l}(u)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-1}{4l+3} (P_{2(l+1)}(0) - P_{2l}(0)) \\ &= \frac{-1}{4l+3} \left(\frac{(-)^{l+1}(2(l+1))!}{2^{2(l+1)}((l+1)!)^2} - \frac{(-)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \left(\frac{(2l+2)(2l+1)}{2^2(l+1)^2} \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} + \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{(2l+2)(2l+1)}{2^2(l+1)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{2(l+1)(2l+1)}{2^2(l+1)(l+1)} + 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^l}{4l+3} \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{4l+3}{2(l+1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2 2(l+1)}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Entonces

$$A_{2l+1} = \frac{V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} (-1)^l (2l)!}{2^{2l}(l!)^2 (l+1)}, \quad (11.27)$$

que implica

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{l \geq 0} A_{2l+1} Y_{2l+10}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{V_0 \sqrt{\pi(4l+3)} (-1)^l (2l)!}{2^{2l}(l!)^2 (l+1)} \sqrt{\frac{(4l+3)}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3)(2l)!}{2^{2l+1}(l!)^2 (l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (11.28)$$

de donde

$$\begin{aligned}\phi_{int}(r, \theta) &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3)(2l)!}{2^{2l+1} (l!)^2 (l+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta), \\ \phi_{ext}(r, \theta) &= V_0 \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l (4l+3)(2l)!}{2^{2l+1} (l!)^2 (l+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta),\end{aligned}\quad (11.29)$$

es el potencial en todo el espacio.

11.2. Esfera a potencial cero

Supongamos que tenemos un esfera de radio R cuya superficie está a potencial cero y queremos calcular el potencial eléctrico en todo el espacio. Note que debemos buscar las soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen $\phi(R, \theta, \varphi) = 0$. Por conveniencia tomaremos la solución general de la forma

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l + b_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (11.30)$$

Por lo que

$$\phi(R, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} + b_{lm}) Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

como los armónicos esféricos son un conjunto de funciones ortonormales, se debe cumplir

$$a_{lm} = -b_{lm}. \quad (11.31)$$

Por lo tanto, la solución general a este problema es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^l - \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (11.32)$$

11.2.1. Plano con protuberancia esférica

Como una aplicación del problema anterior, supongamos que tenemos un plano infinito que tiene una protuberancia esférica de radio R y que todo el sistema está a potencial cero, además si $r \gg R$ el potencial tiene la forma

$\phi_\infty(r) = -E_0z = -E_0r \cos \theta$. Para este sistema queremos encontrar el potencial eléctrico.

Por simplicidad pondremos el plano en el plano $x - y$ de tal forma que el casquete de la protuberancia esté sobre el eje z . Claramente este sistema es invariante bajo rotaciones del eje z , por lo que el potencial no depende de φ . Además, como el potencial se debe anular sobre el casquete esférico, éste debe ser de la forma Eq. (11.32) donde los términos con $m \neq 0$ no contribuyen. Así el potencial debe ser de la forma

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_l \left(\left(\frac{r}{R} \right)^l - \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta). \quad (11.33)$$

Ahora, el potencial se debe anular sobre el plano $x - y$ para cualquier r . Esto equivale a pedir que el potencial se anule en $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir en $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ para cualquier r . Entonces,

$$\phi \left(r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{l \geq 0} a_l \left(\left(\frac{r}{R} \right)^l - \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(0) = 0. \quad (11.34)$$

Considerando que $P_{2l+1}(0) = 0$, se encuentra $a_{2l} = 0$, que implica

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_{2l+1} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^{2l+1} - \left(\frac{R}{r} \right)^{2(l+1)} \right) P_{2l+1}(\cos \theta). \quad (11.35)$$

Además, para el caso $r \gg R$, se debe cumplir

$$\phi_\infty(r) = -E_0r \cos \theta = \phi(r \gg R, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_{2l+1} \left(\frac{r}{R} \right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta),$$

como $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, se llega $a_{2l+1} = 0$ si $l > 0$ y

$$-E_0r \cos \theta = a_1 \frac{r}{R} \cos \theta, \quad (11.36)$$

es decir

$$a_1 = -E_0R. \quad (11.37)$$

En consecuencia la solución al problema es

$$\phi(r, \theta) = -E_0r \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \cos \theta. \quad (11.38)$$

11.3. Problemas con simetría azimutal

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas de problemas que tienen simetría rotacional ante el eje z , es decir que no dependen de φ , es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta). \quad (11.39)$$

En principio se deben calcular cada uno de los coeficientes A_l y B_l , sin embargo en algunos casos se pueden ocupar las simetrías del problema para obtenerlos.

11.3.1. Esfera con condiciones especiales

Supongamos que tenemos una esfera de radio R cuyo potencial en su superficie es

$$V(\theta) = V_0 (1 + \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta), \quad V_0 = \text{constante} \quad (11.40)$$

y el potencial es finito en todo el espacio. Este problema no depende de φ , por lo que debemos buscar soluciones de la ecuación de Laplace de la forma Eq. (11.39) que satisfagan la condición de borde Eq. (11.40). Como el potencial es finito en todo el espacio, si $r < R$ el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta). \quad (11.41)$$

Por la misma razón, si $r > R$ el potencial debe escribirse como

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} b_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta). \quad (11.42)$$

Antes de continuar escribamos el potencial Eq. (11.40) de una forma más sugerente, como $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, entonces

$$V(\theta) = V_0 (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta). \quad (11.43)$$

Considerando que

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u, \quad P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \quad (11.44)$$

se encuentra

$$u^2 = \frac{2}{3}P_2(u) + \frac{1}{3}P_1(u), \quad (11.45)$$

así,

$$V(\theta) = V_0 (P_0(\cos \theta) + P_1(\cos \theta) + 2P_2(\cos \theta)). \quad (11.46)$$

Entonces, como $V(\theta) = \phi_{int}(R, \theta) = \phi_{ext}(R, \theta)$ y los polinomios de Legendre son linealmente independientes, los únicos coeficientes diferentes de cero son

$$a_0 = V_0, \quad a_1 = V_0, \quad a_2 = 2V_0. \quad (11.47)$$

De donde la solución al problema es

$$\begin{aligned} \phi_{int}(r, \theta) &= V_0 \left(P_0(\cos \theta) + \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right), \\ \phi_{ext}(r, \theta) &= V_0 \left(\frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta) \right). \end{aligned}$$

11.3.2. Potencial de un anillo circular

Supongamos que tenemos un anillo circular de radio R con densidad de carga constante λ , paralelo al plano $x - y$ y que está a una altura h del origen. Además el origen del anillo está sobre el eje z .

Este sistema es invariante bajo rotaciones del eje z , por lo que no depende de φ y su potencial debe ser de la forma Eq. (11.39). Note que los coeficientes A_l y B_l no depende de la posición, por lo que si los calculamos en un punto o sobre un eje los habremos calculado para todo el espacio.

Primero calculemos el potencial para un punto que esté sobre el eje z , es decir $\theta = 0$, note que esto implica que $r = z$. Ahora, un elemento de carga del anillo, $dq = \lambda R d\varphi$ que está en la posición $\vec{r}_q = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h)$ contribuye con el potencial

$$d\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{dq}{|z\hat{k} - \vec{r}_q|} = \frac{\lambda R d\varphi}{\sqrt{R^2 + (z - h)^2}} = \frac{\lambda R d\varphi}{\sqrt{R^2 + h^2 + z^2 - 2hz}}$$

de donde

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{R^2 + h^2 + z^2 - 2hz}}.$$

Este potencial se puede poner de forma más sugerente. En efecto, si α es el ángulo que hace el eje z con un vector que une el origen del sistema coordenado

y un punto del anillo, entonces $R = c \sin \alpha$ y $h = c \cos \alpha$, con $c = \sqrt{R^2 + h^2}$. Por lo que,

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{c^2 + z^2 - 2cz \cos \alpha}}.$$

Si definimos a $r_< = \text{menor}\{r, c\}$ y $r_> = \text{mayor}\{r, c\}$ se llega a

$$\begin{aligned} \phi(r = z, \theta = 0) &= \frac{2\pi\lambda R}{r_> \sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\left(\frac{r_<}{r_>}\right) \cos \alpha}} \\ &= \frac{2\pi\lambda R}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Si $r < c$, se tiene

$$\phi_{int}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{r^l}{c^{l+1}}, \quad (11.49)$$

para el caso $r > c$ se llega a

$$\phi_{ext}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} 2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha) \frac{c^l}{r^{l+1}}. \quad (11.50)$$

Para obtener el potencial en todo el espacio consideremos la solución general Eq. (11.39). Si $r \rightarrow \infty$, entonces r^l diverge por lo que en ese caso, que corresponde a $r > c$, se debe cumplir que $A_l = 0$. En particular sobre el eje z , es decir $\theta = 0$, como $P_l(1) = 1$, se tiene

$$\phi_{ext}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} B_l r^{-(l+1)}. \quad (11.51)$$

Igualando esta solución con Eq. (11.50) se llega a $B_l = 2\pi\lambda R c^l P_l(\cos \alpha)$. Por lo que, si $r > c$, la solución es

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\lambda R c^l P_l(\cos \alpha)}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (11.52)$$

Para el caso $r < c$, si $r \rightarrow 0$, entonces $r^{-(l+1)}$ diverge y se debe tomar $B_l = 0$. En particular sobre el eje z , es decir $\theta = 0$, se consigue

$$\phi_{int}(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l. \quad (11.53)$$

Igualando esta solución con Eq. (11.49) se encuentra $A_l = \frac{2\pi\lambda R}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha)$. De donde, si $r > c$, la solución es

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\lambda R P_l(\cos \alpha)}{c^{l+1}} r^l P_l(\cos \theta). \quad (11.54)$$

Claramente la solución en todo el espacio es

$$\phi(r, \theta) = 2\pi\lambda R \sum_{l \geq 0} \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta). \quad (11.55)$$

11.3.3. Esfera con hueco

Veamos otro problema que se puede resolver con el método empleado en el ejemplo anterior. Supongamos que tenemos una esfera conductora de radio R con un hueco definido por el cono $\theta = \alpha$ y que tiene densidad superficial de carga constante σ . Queremos calcular el potencial eléctrico del sistema.

Pondremos el origen de coordenadas en el centro de la esfera de tal forma que el eje del cono coincida con el eje z . Este problema no depende de φ , por lo que el potencial es de la forma Eq. (11.39). Como en el caso del anillo, primero calcularemos el potencial sobre el eje z . Un elemento de carga está dado por

$$dq = \sigma da = \sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

y si tiene la posición $\vec{r}' = R\hat{e}_{r'}$, entonces contribuye con el potencial

$$\begin{aligned} d\phi(r = z, \theta = 0) &= \frac{dq}{|z\hat{k} - R\hat{e}_{r'}|} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz\hat{k} \cdot \hat{e}_{r'}}} \\ &= \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{r_{>} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)^2 - \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right) \cos \theta'}} \end{aligned}$$

donde $r_{>} = \text{mayor}\{r, R\}$ y $r_{\leq} = \text{menor}\{r, R\}$. Por lo que

$$d\phi(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta') \sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (11.56)$$

así el potencial total sobre un punto en el eje z es

$$\begin{aligned}
 \phi(r = z, \theta = 0) &= \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\pi d\phi(r = z, \theta = 0) \\
 &= \sigma R^2 \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_\alpha^\pi P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \\
 &= 2\pi\sigma R^2 \sum_{l \geq 0} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_\alpha^\pi P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'.
 \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $x = \cos \theta'$ y considerando que se cumple

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} (P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)), \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad (11.57)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_\alpha^\pi P_l(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' &= - \int_{\cos \alpha}^{-1} P_l(x) dx \\
 &= \int_{-1}^{\cos \alpha} \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} (P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)) dx \\
 &= \frac{1}{2l+1} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)),
 \end{aligned}$$

de donde

$$\phi(r = z, \theta = 0) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\sigma R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)) \quad (11.58)$$

Ahora, tomando en cuenta la solución general Eq. (11.39), el potencial en todo el espacio es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi\sigma R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} (P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)) P_l(\cos \theta). \quad (11.59)$$

11.4. Disco a potencial constante

Supongamos que tenemos un disco de radio R que está en el plano $x - y$ centrado en el origen y que tiene potencial constante V . Con la información de que en el disco el campo eléctrico es proporcional a

$$\frac{4\pi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad (11.60)$$

calcular el potencial si $R < r$.

Como el sistema es invariante bajo rotaciones en el eje z , el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \theta). \quad (11.61)$$

Antes de calcular A_l note que, como el potencial es constante en el disco, el campo eléctrico, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, debe ser perpendicular a este. Ahora, si α es una constante de proporcionalidad, ocupando la función generatriz de los polinomios de Legendre se llega a que el campo eléctrico en el disco es

$$E = \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{4\pi\alpha}{R\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}} = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2l} P_{2l}(0). \quad (11.62)$$

En el borde del disco, se tiene

$$\vec{E} = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho, \quad \hat{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (11.63)$$

con \hat{e}_ρ el vector normal al borde del disco.

Ocupando de la función generatriz de los polinomios de Legendre Eq. (10.208) se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sum_{l \geq 0} (-)^l \beta^{2l} P_{2l}(0). \quad (11.64)$$

Además es claro que con el cambio de variable $\beta = \cos \gamma$ se encuentra

$$\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad (11.65)$$

por lo que

$$\int_0^1 d\beta \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int_0^1 d\beta \sum_{l \geq 0} (-)^l \beta^{2l} P_{2l}(0) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l + 1} P_{2l}(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (11.66)$$

Ahora, de Eq. (11.61) se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= -\vec{\nabla}\phi(r, \theta) = - \sum_{l \geq 0} \left(\frac{-A_l(l+1)R^{l+1}}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) \hat{e}_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} A_l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \hat{e}_\theta \right). \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $u = \cos \theta$ se tiene

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP_l(u)}{du} = -\sin \theta \left(u \frac{dP_{l-1}(u)}{du} + lP_{l-1}(u) \right), \quad (11.67)$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) = & \sum_{l \geq 0} \frac{A_l}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \left[(l+1)P_l(\cos \theta) \hat{e}_r \right. \\ & \left. + \sin \theta \left(u \frac{dP_{l-1}(u)}{du} + lP_{l-1}(u) \right) \hat{e}_\theta \right]. \end{aligned} \quad (11.68)$$

En el plano $x - y$, es decir $\theta = \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{e}_r \Big|_{\frac{\pi}{2}} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \hat{e}_\rho, \\ \hat{e}_\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}} &= (0, 0, -1) = -\hat{k}. \end{aligned}$$

Note que el borde del disco se encuentra en $\theta = \frac{\pi}{2}, r = R$ y en ese caso se debe cumplir Eq. (11.63). Entonces, evaluado en $(\theta = \frac{\pi}{2}, r = R)$ a Eq. (11.68) e igualando el resultado con Eq. (11.63), se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{E} \left(R, \theta = \frac{\pi}{2} \right) &= \sum_{l \geq 0} \frac{A_l}{R} \left[(l+1)P_l(0) \hat{e}_\rho - lP_{l-1}(0) \hat{k} \right] \\ &= \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho, \end{aligned} \quad (11.69)$$

que implica

$$\sum_{l \geq 0} -\frac{A_l}{R} lP_{l-1}(0) \hat{k} = 0, \quad (11.70)$$

de donde

$$A_{2l+1} = 0. \quad (11.71)$$

Entonces la igualdad Eq. (11.69) toma la forma

$$\vec{E} \left(R, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{l \geq 0} \frac{A_{2l}}{R} (2l+1)P_{2l}(0) \hat{e}_\rho = \frac{4\pi\alpha}{R} \sum_{l \geq 0} (-)^l P_{2l}(0) \hat{e}_\rho,$$

que induce

$$A_{2l} = \frac{(-)^l 4\pi\alpha}{2l+1}. \quad (11.72)$$

Así el potencial exterior tiene la forma

$$\phi_{ext}(r, \theta) = 4\pi\alpha \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta), \quad (11.73)$$

este potencial debe satisfacer la condición de borde

$$\phi\left(R, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi\alpha \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} P_{2l}(0) = V, \quad (11.74)$$

usando Eq. (11.66) se llega a

$$\alpha = \frac{V}{2\pi^2}. \quad (11.75)$$

Por lo tanto, el potencial es

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \frac{2V}{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos \theta). \quad (11.76)$$

11.5. Distribución de carga continua

Supongamos que se tiene una partícula puntual de carga q en la posición \vec{r}' , entonces según las leyes de la electrostática el potencial eléctrico en el punto \vec{r} está dado por

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.77)$$

Ahora, si se tiene una densidad de carga $\rho(\vec{r}')$ en un volumen, V , cada elemento de carga $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')d\vec{r}'$ contribuye al potencial en el punto \vec{r} con

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11.78)$$

por lo tanto, el potencial total en el punto \vec{r} es

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.79)$$

Sea α el ángulo entre los vectores

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \vec{r}' = r'(\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta')$$

también definamos $r_{<} = \text{menor}\{r, r'\}$, $r_{>} = \text{mayor}\{r, r'\}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{r_{>}^2 + r_{<}^2 - 2r_{<}r_{>} \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{r_{<} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right) \cos \alpha}} = \frac{1}{r_{<}} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l P_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\ &= \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} \int d\vec{r}' \frac{1}{r_{<}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (11.80) \end{aligned}$$

En particular para el potencial exterior, $R < r$, se tiene

$$\phi_{ext}(\vec{r}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

con

$$Q_{lm} = \int d\vec{r}' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (11.81)$$

Si $r < r'$, se llega a

$$\phi_{ext}(\vec{r}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} r^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

con

$$q_{lm} = \int d\vec{r}' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}'). \quad (11.82)$$

Entonces, el potencial de cualquier distribución de carga continua se puede expresar en términos de armónicos esféricos.

11.5.1. Esfera cargada

Ahora veamos un problema sencillo que involucre calcular los coeficientes Q_{lm} y q_{lm} .

En cuente el potencial eléctrico de una esfera de radio R que en la superficie tiene la distribución de carga

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta, \quad \sigma_0 = \text{constante.} \quad (11.83)$$

Como solo hay carga en el radio R , la distribución de carga se puede escribir como

$$\rho(\vec{r}) = \delta(r - R)\sigma_0 \cos \theta. \quad (11.84)$$

Además considerando

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1(\cos \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (11.85)$$

se encuentra

$$\rho(\vec{r}) = \delta(r - R)\sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi). \quad (11.86)$$

Introduciendo este resultado en Eq. (11.81) y Eq. (11.82), se encuentra

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int d\vec{r}' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta(r' - R) \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') \\ &= \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int dr' r'^2 r'^l \delta(r' - R) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{10}(\theta, \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^{l+2} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^3 \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0}, \\ q_{lm} &= \int d\vec{r}' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') \\ &= \int dr' r'^2 \int d\Omega' \frac{1}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta(r' - R) \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{R^{l-1}} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma_0 \delta_{l1} \delta_{m0}. \end{aligned}$$

Es decir, los únicos coeficientes Q_{lm} y q_{lm} diferentes de cero son

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R^3 \sigma_0, \quad q_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma_0.$$

Por lo que los potenciales son

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \frac{4\pi}{3} \frac{Q_{10} Y_{10}(\theta, \varphi)}{r^2}, \quad \phi_{int}(r, \theta) = \frac{4\pi}{3} r q_{10} Y_{10}(\theta, \varphi),$$

es decir

$$\begin{aligned} \phi_{ext}(r, \theta) &= \frac{4\pi R^3 \sigma_0 \cos \theta}{3 r^2}, \\ \phi_{int}(r, \theta) &= \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos \theta = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 z. \end{aligned} \quad (11.87)$$

11.6. Problemas en magnetismo

Las leyes de la magnetostática nos dicen que si tenemos una densidad de corriente, \vec{J} , se produce un campo magnético \vec{B} que satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (11.88)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (11.89)$$

La densidad de corrientes se define como $\vec{J} = \rho(\vec{r})\vec{V}(\vec{r})$. Donde $\rho(\vec{r})$ es la densidad de carga y $\vec{V}(\vec{r})$ es la velocidad de las partículas cargadas.

La ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implica que existe una función \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Se puede mostrar que en términos de la corriente \vec{A} está dada por [1]

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.90)$$

En las siguientes secciones veremos dos ejercicios relacionados con este tema.

11.6.1. Esfera rotante

Supongamos que tenemos una esfera de radio R con densidad de carga superficial constante σ_0 . Si la esfera rota con velocidad constante ω , encuentre el potencial vectorial y el campo magnético.

Como solo hay carga en la superficie de la esfera, la densidad de carga es

$$\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \delta(r - R). \quad (11.91)$$

Supongamos que el eje de rotación está en el eje z , entonces la velocidad de un punto de la esfera es

$$\vec{V} = R \sin \theta \omega \hat{e}_\varphi. \quad (11.92)$$

Además, sabemos que cualquier vector en dos dimensiones (x, y) se puede escribir como el número complejo $z = x + iy$, en particular $\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ se puede escribir como

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ie^{i\varphi}, \quad (11.93)$$

entonces

$$\vec{V} = iR\omega \sin \theta e^{i\varphi}. \quad (11.94)$$

Ahora, de la definición de los armónicos esféricos se tiene

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = (-) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad (11.95)$$

de donde

$$\vec{V} = -iR\omega \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11}(\theta, \varphi). \quad (11.96)$$

Así, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \rho \vec{V} = -iR\omega \sigma_0 \delta(r - R) \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11}(\theta, \varphi), \quad (11.97)$$

entonces, si $r_> = \text{mayor}\{R, r\}$, $r_< = \text{menor}\{R, r\}$, el potencial vectorial magnético es

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{iR\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int dr' r'^2 \int d\Omega' \delta(r' - R) \frac{Y_{11}(\theta', \varphi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int d\Omega' Y_{11}(\theta', \varphi') \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{11}(\theta', \varphi') \\ &= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \delta_{l1} \delta_{m1} \\ &= -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} \frac{r_<}{r_>^2} Y_{11}(\theta, \varphi) = -\frac{iR^3\omega\sigma_0}{c} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{4\pi}{3} \frac{r_<}{r_>^2} (-) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ &= \frac{R^3\omega\sigma_0}{c} \frac{4\pi}{3} \frac{r_<}{r_>^2} \sin \theta i e^{i\varphi} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3 \omega r_<}{3c r_>^2} \sin \theta \hat{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (11.98)$$

de donde

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi \hat{e}_\varphi, \quad A_\varphi = \frac{4\pi\sigma_0 R^3 \omega}{3c} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \sin \theta. \quad (11.99)$$

Ocupando la expresión del rotacional en coordenadas esféricas Eq. (2.86), se obtiene el campo magnético

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ B_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (11.100)$$

Por lo tanto,

$$B_r = \frac{8\pi\sigma_0 R^3 \omega}{3c} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (11.101)$$

Si $r < R$, se tiene

$$B_{\theta(int)} = -\frac{8\pi\sigma_0 R \omega}{3c} \sin \theta, \quad (11.102)$$

mientras que si $r > R$, se llega a

$$B_{\theta(ext)} = \frac{4\pi\sigma_0 R^4 \omega}{3cr^3} \sin \theta. \quad (11.103)$$

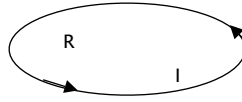
Note que

$$\vec{B}_{int} = B_{r(int)} \hat{e}_r + B_{\theta(int)} \hat{e}_\theta = \frac{8\pi\sigma_0 R \omega}{3c} \hat{k}, \quad (11.104)$$

es decir el campo magnético en el interior de la esfera es constante y apunta en la dirección del eje de la rotación de la esfera.

Cabe señalar que el núcleo de la tierra es metálico y tiene cierta carga, por lo que al girar produce un campo magnético. En este sentido la esfera cargada rotante es un modelo simplificado para explicar el campo magnético terrestre.

11.6.2. Anillo de corriente I



Anillo de corriente

Ahora veamos el problema de un anillo circular de radio R por el cual circula una corriente constante I . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el anillo está en el plano $x - y$ y que su centro está en el origen del sistema coordenado. Para este sistema la densidad de corriente es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{R} \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{e}_\varphi. \quad (11.105)$$

Ahora, recordemos que cualquier vector en dos dimensiones, (x, y) , se puede escribir como un número complejo, $z = x + iy$. En particular $\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ se puede representar como $\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ie^{i\varphi}$, por lo que

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{R} \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) ie^{i\varphi}. \quad (11.106)$$

Definamos $r_> = \text{mayor}\{R, r\}$, $r_< = \text{menor}\{R, r\}$, entonces el potencial vectorial es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{iI}{cR} \int \frac{\delta(r' - R) \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 dr' d\Omega'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{iI}{cR} \int \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \right. \\
&\quad \left. \delta(r' - R) \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} r'^2 dr' d\Omega' \right) \\
&= \frac{iI}{cR} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} R^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} d\Omega'.
\end{aligned}$$

Ocupando la definición de elemento de ángulo sólido y de los armónicos esféricos se tiene

$$\begin{aligned}
&\int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi'} d\Omega' = \int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right) e^{i\varphi'} \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-im\varphi'} e^{i\varphi'} \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(0) 2\pi\delta_{m1} \\
&= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(0) 2\pi\delta_{m1} \\
&= Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) 2\pi\delta_{m1}. \tag{11.107}
\end{aligned}$$

Como m debe cumplir que $m \leq l$, entonces $l \geq 1$. Así, ocupando de nuevo las definiciones de los armónicos esféricos Eq. (10.188) y de los polinomios asociados de Legendre Eq. (10.180), se encuentra

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{8\pi^2 iIR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l1}(\theta, \varphi) Y_{l1}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \\
&= \frac{8\pi^2 IR}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \left(\sqrt{\frac{(2l+1)(l-1)!}{4\pi(l+1)!}} \right)^2 P_l^1(\cos\theta) P_l^1(0) i e^{i\varphi} \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l^1(\cos\theta) P_l^1(0) \hat{e}_\varphi \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(2l)!}{(2l+2)!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos\theta) \frac{(-)^{l+1} (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \hat{e}_\varphi \\
&= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1} (2l)!}{2^{2l+1} (l+1)! l!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos\theta) \hat{e}_\varphi. \tag{11.108}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el potencial vectorial solo tiene dirección \hat{e}_φ , cuya componente es

$$A_\varphi = \frac{\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1}(2l)!}{2^{2l}(l+1)!!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos \theta). \quad (11.109)$$

Ocupando el rotacional en coordenadas esféricas Eq. (2.86), se encuentra que el campo magnético es

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ B_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (11.110)$$

Con el cambio de variable $u = \cos \theta$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial u} ((1-u^2)^{\frac{1}{2}} A_\varphi) \quad (11.111)$$

Además, como

$$P_l^1(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{du}, \quad \frac{d}{du} \left((1-u^2) \frac{dP_l(u)}{du} \right) + l(l+1)P_l(u) = 0,$$

se llega a

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \\ &= \frac{\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1}(2l)!}{2^{2l}(l+1)!!} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} (2l+1)(2l+2) P_l^{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{c} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{r_{<}^{2l}}{r_{>}^{2l+2}} P_l^{2l+1}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (11.112)$$

Para la componente B_θ , tenemos que si $R < r$,

$$B_{\theta(ext)} = \frac{\pi I}{cr} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^{l+1}(2l+1)!}{2^{2l}(l+1)!!} \left(\frac{R}{r} \right)^{2l+2} P_l^{2l+1}(\cos \theta), \quad (11.113)$$

mientras que si $r < R$,

$$B_{\theta(int)} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 1} \frac{(-)^l (2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2l+1} P_l^{2l+1}(\cos \theta). \quad (11.114)$$

11.6.3. Anillo de corriente II

Ahora veremos otra forma de resolver el problema de la sección anterior.

Fuera de la región donde hay corriente eléctrica, las ecuaciones de la magnetostática son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \quad (11.115)$$

De la segunda ecuación se deduce que existe una función, que llamaremos potencial escalar magnético, $\phi_m(\vec{r})$, tal que

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m(\vec{r}). \quad (11.116)$$

Al introducir esta ecuación en $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ se llega a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_m(\vec{r}) = 0, \quad (11.117)$$

cuya solución en coordenadas esféricas es Eq. (11.9).

Además, se puede mostrar que si la corriente circula por una curva cerrada el potencial escalar magnético es [2]

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_a \frac{\hat{n}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da'. \quad (11.118)$$

Donde a es el área de la superficie que encierra la curva de corriente y \hat{n} la normal a esta superficie.

En algunos caso es más conveniente ocupar el potencial escalar magnético que el potencial vectorial. Por ejemplo, supongamos que tenemos un anillo de radio R por el cual circula una corriente constante I .

Para resolver este problema pondremos al anillo en el plano $x - y$ y el centro del anillo en el origen del sistema de referencia coordinado. Claramente el sistema es invariante bajo rotaciones en el eje z , por lo que el potencial no depende de φ , es decir es de la forma

$$\phi_m(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \left(A_l \left(\frac{r}{R} \right)^l + B_l \left(\frac{R}{r} \right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta). \quad (11.119)$$

Adicionalmente, los puntos del disco que encierra el anillo de corriente son de la forma

$$\vec{r}' = r'(\cos \varphi', \sin \varphi', 0) \quad (11.120)$$

mientras que el vector normal es $\hat{n}' = \hat{k}$ y el elemento de área es $da' = r' dr' d\varphi'$. De donde, para un punto $\vec{r} = (x, y, z) = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, el potencial escalar magnético Eq. (11.118) es

$$\begin{aligned}\phi_m(\vec{r}) &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R r' dr' \frac{\hat{k} \cdot ((x, y, z) - r'(\cos \varphi', \sin \varphi', 0))}{\left(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}\right)^3}, \\ &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R dr' \frac{zr'}{\left(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}\right)^3}.\end{aligned}$$

Si $\theta = 0$, es decir, si el punto de observación está sobre el eje z , la integral se simplifica notablemente y se encuentra

$$\begin{aligned}\phi_m(0, 0, z = r) &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R dr' \frac{rr'}{(\sqrt{r^2 + r'^2})^3} \\ &= \frac{2\pi I r}{c} \int_0^R dr' \frac{r'}{(\sqrt{r^2 + r'^2})^3} = \frac{2\pi I r}{c} \int_0^R dr' \frac{d}{dr'} \left(\frac{-1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) \\ &= \frac{2\pi I r}{c} \left(\frac{-1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) \Big|_0^R = -\frac{2\pi I r}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{2\pi I}{c} + \frac{-2\pi I}{c} \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}.\end{aligned}\tag{11.121}$$

Ahora, definamos $r_< = \text{menor}\{r, R\}$ y $r_> = \text{mayor}\{r, R\}$, entonces ocupando las propiedades de los polinomios de Legendre, se encuentra

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{r}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} = \frac{r}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(0) = \frac{r}{r_>} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{2l} P_{2l}(0).$$

Por lo tanto,

$$\phi_m(0, 0, r) = \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \frac{r}{r_>} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{2l} P_{2l}(0).\tag{11.122}$$

Para el caso $r < R$ se tiene

$$\begin{aligned}\phi_{m(int)}(0, 0, r) &= \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \frac{r}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l} P_{2l}(0) + \frac{2\pi I}{c} \\ &= \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 0} \left(-\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0) \right) r^{2l+1}.\end{aligned}\tag{11.123}$$

Mientras que si $R < r$ se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_{m(ext)}(0, 0, r) &= \frac{2\pi I}{c} - \sum_{l \geq 0} \frac{2\pi I}{c} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(0) \\
&= \frac{2\pi I}{c} - \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 1} \left(-\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0)\right) \frac{1}{r^{2l}} \\
&= \sum_{l \geq 1} \left(-\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0)\right) \frac{1}{r^{2l}}. \tag{11.124}
\end{aligned}$$

Ahora, según la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, si $r < R$ el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{m(int)}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(\cos \theta). \tag{11.125}$$

Cuando $\theta = 0$ esta última ecuación debe ser igual a Eq. (11.123), por lo tanto considerando que $P_l(1) = 1$, se llega a

$$\begin{aligned}
\phi_m(r, \theta = 0) &= \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(1) = \sum_{l \geq 0} A_{2l} r^{2l} P_{2l}(1) + \sum_{l \geq 0} A_{2l+1} r^{2l+1} P_{2l+1}(1) \\
&= \frac{2\pi I}{c} + \sum_{l \geq 0} \left(-\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0)\right) r^{2l+1}. \tag{11.126}
\end{aligned}$$

Así, los únicos coeficientes diferentes de cero son

$$A_0 = \frac{2\pi I}{c}, \quad A_{2l+1} = -\frac{2\pi I}{c R^{2l+1}} P_{2l}(0). \tag{11.127}$$

entonces, si $r < R$ se tiene el potencial

$$\phi_{m(int)}(r, \theta) = \frac{2\pi I}{c} - \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0) \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta). \tag{11.128}$$

Ahora, según la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, si $R < r$ el potencial debe ser de la forma

$$\phi_{m(ext)}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \tag{11.129}$$

Cuando $\theta = 0$ el potencial Eq. (11.124) debe ser igual a Eq. (11.129), es decir,

$$\begin{aligned}
\phi_{m(ext)}(r, \theta = 0) &= \sum_{l \geq 0} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(1) = \sum_{l \geq 0} \frac{C_{2l}}{r^{2l+1}} + \sum_{l \geq 1} \frac{C_{2l-1}}{r^{2l}} \\
&= \sum_{l \geq 1} \left(-\frac{2\pi I R^{2l}}{c} P_{2l}(0)\right) \frac{1}{r^{2l}}. \tag{11.130}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_{2l} = 0, \quad C_{2l-1} = -\frac{2\pi IR^{2l}}{c} P_{2l}(0). \quad (11.131)$$

Entonces, si $R < r$ se tiene el potencial

$$\begin{aligned} \phi_{m(ext)}(r, \theta) &= -\frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 1} P_{2l}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l-1}(\cos \theta) \\ &= -\frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2(l+1)}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (11.132)$$

Además, el campo magnético es

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_m(r, \theta) = -\left(\frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \right), \quad (11.133)$$

es decir

$$B_r = -\frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial r}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad B_\varphi = 0. \quad (11.134)$$

De donde, considerando el valor de $P_{2l}(0)$ y reorganizando términos, se llega a

$$\begin{aligned} B_{r(int)} &= -\frac{\partial \phi_{m(int)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0)(2l+1) \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{r^{2l+1}}{R^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} B_{r(ext)} &= -\frac{\partial \phi_{m(ext)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{2\pi I}{c} \sum_{l \geq 0} P_{2(l+1)}(0)(-)^{2(l+1)} \frac{R^{2l+2}}{r^{2l+3}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)!}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2l+2}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)! (-)^{2(l+1)}}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)! 2(l+1) 2(l+1)}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{R^{2l+1}}{r^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Note que ambas componentes se pueden escribir como

$$B_r = \frac{2\pi IR}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l+1)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{r_{<}^{2l+1}}{r_{>}^{2(l+1)}} P_{2l+1}(\cos \theta),$$

que coincide con Eq. (11.112).

Adicionalmente, consideremos el cambio de variable $u = \cos \theta$ en la ecuación

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP_l(u)}{du} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_l(u)}{du} = P_l^1(u) = P_l^1(\cos \theta),$$

por lo que se encuentra

$$\begin{aligned} B_{\theta(int)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m(int)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} P_{2l}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (11.135)$$

y

$$\begin{aligned} B_{\theta(ext)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m(ext)}(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} P_{2l+2}(0) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+2}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+2)!}{2^{2l+2} (l+1)!^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{2\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+1)! 2(l+1)}{2^{2l+2} (l+1)! (l+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta) \\ &= \frac{\pi I}{cr} \sum_{l \geq 0} \frac{(-)^{l+1} (2l+1)!}{2^{2l} (l+1)! l!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(l+1)} P_{2l+1}^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (11.136)$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos en la sección anterior, es decir con Eqs. (11.113)-(11.114)

Capítulo 12

Los Polinomio de Laguerre y el átomo de hidrógeno

En este capítulo estudiaremos el átomo de hidrógeno. Para este problema son importantes los resultados de capítulo 10.

12.1. Átomo de hidrógeno

La ecuación de Schrödinger para una partícula en un campo central es

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(r), \quad \hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad (12.1)$$

es decir

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi = E\psi. \quad (12.2)$$

Anteriormente vimos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger con sentido físico forman un conjunto ortonormal. Es decir, si

$$\hat{H}\psi_a = E_a\psi_a, \quad \text{y} \quad \hat{H}\psi_b = E_b\psi_b, \quad (12.3)$$

entonces

$$\langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}, \quad (12.4)$$

esta propiedad es importante para el desarrollo que haremos posteriormente.

En coordenadas esféricas el operador Laplaciano es Eq. (10.275)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2}, \quad (12.5)$$

con

$$L^2 = - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (12.6)$$

donde se cumple

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (12.7)$$

Por lo que, para resolver Eq. (12.2) propondremos $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$. Como la función $R(r)$ solo depende de r , mientras que L^2 y $Y_{lm}(\theta, \phi)$ solo dependen de los ángulos, se encuentra

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) &= \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - R(r) \frac{L^2 Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \\ &= \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{R(r) l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^2} \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1) R(r)}{r^2} \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi(r, \theta, \varphi) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + V(r) \psi(r, \theta, \varphi) \\ &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1) R(r)}{r^2} \right] + V(r) R(r) \right) \\ &= E \psi(r, \theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \phi) E R(r). \end{aligned}$$

Así, la ecuación a resolver es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1) R(r)}{r^2} \right) + V(r) R(r) = E R(r), \quad (12.8)$$

como solo hay dependencia en la variable r tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) R(r) + \frac{2mE}{\hbar^2} R(r) = 0.$$

Para facilitar los cálculos haremos el cambio de variable

$$\rho = \alpha r, \quad \frac{d}{dr} = \alpha \frac{d}{d\rho}, \quad \alpha = 2 \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}, \quad (12.9)$$

de donde

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R(\rho) - \frac{2m}{\hbar^2 \alpha^2} V(\rho) R(\rho) - \frac{1}{4} R(\rho) = 0. \quad (12.10)$$

Supongamos que tenemos un potencial que cerca del origen a lo más diverge como $V(\rho) \approx \rho^{-1}$ y en infinito tiende a cero. Entonces cerca del origen Eq. (12.10) tiene la forma asintótica

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R(\rho) \approx 0. \quad (12.11)$$

Para resolver esta ecuación proponemos $R(\rho) = A\rho^\gamma$, con A una constante. Al sustituir esta propuesta en Eq. (12.11) se encuentra

$$(\gamma(\gamma+1) - l(l+1)) \rho^\gamma = 0,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} (\gamma(\gamma+1) - l(l+1)) &= \gamma^2 - l^2 + \gamma - l = (\gamma+l)(\gamma-l) + \gamma - l \\ &= (\gamma-l)(\gamma+l+1) = 0. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Así, los posibles valores de γ son l y $-(l+1)$, es decir

$$R(\rho) \approx A\rho^l \quad \text{o} \quad R(\rho) \approx A\rho^{-(l+1)}. \quad (12.13)$$

La función de onda debe ser finita, de lo contrario no puede ser normalizada, por lo que si $r \ll 1$, la única solución aceptable es

$$R(\rho) \approx A\rho^l, \quad \rho \ll 1. \quad (12.14)$$

Si $V(\rho)$ es tal que $V(\rho) \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$, en esta caso la ecuación asintótica es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{1}{4} R(\rho) &= \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{1}{4} R(\rho) \\ &\approx \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{4} R(\rho) \approx 0, \end{aligned}$$

que tiene las soluciones,

$$R(\rho) \approx B e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad R(\rho) \approx C e^{\frac{\rho}{2}}, \quad B, C = \text{constante.}$$

Debido a que la función de onda debe ser normalizada, la única solución con sentido es

$$R(\rho) \approx B e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \rho \gg 1. \quad (12.15)$$

Entonces proponemos como solución

$$R(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho). \quad (12.16)$$

Note que $u(\rho)$ debe ser una función tal que $R(\rho \ll 1) \approx A\rho^l$, esto implica que $u(0) = a_0 \neq 0$. Además, si $\rho \rightarrow \infty$ debe ocurrir que $e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho) \rightarrow 0$, por lo tanto en infinito la función $u(\rho)$ debe ser dominada por $e^{-\frac{\rho}{2}}$.

Para el caso particular del potencial de Coulomb

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r} = -\frac{e^2 Z \alpha}{\rho}, \quad (12.17)$$

definiendo

$$\lambda = \frac{2me^2 Z}{\hbar^2 \alpha} = \frac{e^2 Z}{\hbar} \sqrt{\frac{-m}{2E}} \quad (12.18)$$

Eq. (12.10) toma la forma

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right) R(\rho) = 0. \quad (12.19)$$

Antes de ocupar la propuesta de solución Eq. (12.16) notemos que

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) = l\rho^{l-1} e^{-\frac{\rho}{2}} - \frac{1}{2} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) &= \frac{d}{d\rho} \left(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \right) \right] \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(-\frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 - \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{l}{\rho^2} \right) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Entonces, considerando que $(fg)' = f'g + fg'$ y $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ se llega a

$$\begin{aligned}\frac{dR(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} \left((\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}}) u(\rho) \right) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \frac{d}{d\rho} (\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}}) u(\rho) \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} &= \frac{d^2(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}})}{d\rho^2} u(\rho) + 2 \frac{d(\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}})}{d\rho} \frac{du(\rho)}{d\rho} + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) + 2\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\ &\quad + \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} \\ &= \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) \right).\end{aligned}$$

Introduciendo estos resultados en Eq. (12.19) se obtiene

$$\begin{aligned}\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} &\left(\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{l^2 - l}{\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{1}{4} \right) u(\rho) \right) \\ &+ \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{2}{\rho} \left(\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{l}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u(\rho) \right) \\ &+ \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right) u(\rho) = 0,\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} &+ 2 \left(\frac{l+1}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\ &+ \left(\frac{l^2 + l}{\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda - (l+1)}{\rho} \right) u(\rho) = 0,\end{aligned}$$

es decir la ecuación que debe satisfacer $u(\rho)$ es

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2(l+1)}{\rho} - 1 \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\lambda - (l+1)}{\rho} \right) u(\rho) = 0. \quad (12.20)$$

Para resolver esta ecuación propondremos la serie

$$u(\rho) = \sum_{n \geq 0} a_n \rho^n, \quad u(0) = a_0 \neq 0,$$

que debe cumplir $u(0) = a_0 \neq 0$ y si $\rho \rightarrow \infty$, entonces $u(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}} \rightarrow 0$.

Para la propuesta de solución se tiene

$$\begin{aligned}\frac{u(\rho)}{\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n \rho^{n-1}, & \frac{du(\rho)}{d\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n \rho^{n-1}, \\ \frac{d^2 u(\rho)}{d^2 \rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \rho^{n-2},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2(l+1)}{\rho} \frac{du(\rho)}{d\rho} &= \sum_{n \geq 0} a_n n(n-1+2l+2) \rho^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n n(n+2l+1) \rho^{n-2} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) \rho^{n-1}, \\ -\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{\lambda - (l+1)}{\rho}\right) u(\rho) &= \sum_{n \geq 0} a_n (\lambda - (n+l+1)) \rho^{n-1}.\end{aligned}$$

Considerando estos resultados en Eq. (12.20) se encuentra

$$\sum_{n \geq 0} \left(a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) + a_n(\lambda - (n+l+1)) \right) \rho^{n-1} = 0,$$

así

$$a_{n+1}(n+1)(n+2l+2) + a_n(\lambda - (n+l+1)) = 0,$$

que implica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+l+1-\lambda}{(n+1)(n+2l+2)}. \quad (12.21)$$

Si $\rho \rightarrow \infty$ los términos que contribuyen son los más grandes, es decir los que cumplen $n \gg 1$, en este caso se encuentra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{n}{nn} = \frac{1}{n}.$$

Note que cuando n es muy grande la serie exponencial

$$e^\rho = \sum_{n \geq 0} b_n \rho^n, \quad b_n = \frac{1}{n!},$$

tiene un comportamiento similar

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}.$$

Por lo que si $\rho \rightarrow \infty$, entonces $u(\rho) \rightarrow e^\rho$. Este comportamiento no es permitido pues si $\rho \rightarrow \infty$, entonces $u(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}} \rightarrow \infty$. Para que $u(\rho)$ no tenga ese comportamiento, no dejaremos que su serie pueda tomar valores grandes de n . Esto quiere decir que $u(\rho)$ no puede ser una serie, sino un polinomio. Así, después de cierto número todos los coeficientes de la serie deben ser nulos. De la relación Eq. (12.21) es claro que esto se logra si después de cierto número $a_{n+1} = 0$, que se cumple solo si

$$n + l + 1 - \lambda = 0. \quad (12.22)$$

Considerando la definición de λ dada en Eq. (12.18), se encuentra

$$E_{nl} = - \left(\frac{Zme^2}{2\hbar^2} \right) \frac{Ze^2}{(n+l+1)^2}. \quad (12.23)$$

Además, introduciendo Eq. (12.22) en Eq. (12.20) se llega a

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2(l+1)}{\rho} - 1 \right) \frac{du(\rho)}{d\rho} + \frac{n}{\rho}u(\rho) = 0. \quad (12.24)$$

Definamos $\rho = x, \beta = 2l+1, u(x) = L_n^\beta(x)$, entonces Eq. (12.24) toma la forma

$$\frac{d^2L_n^\beta(x)}{dx^2} + \left(\frac{\beta+1}{x} - 1 \right) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + \frac{n}{x}L_n^\beta(x) = 0, \quad (12.25)$$

esta es la llamada ecuación de Laguerre, que también se puede escribir como

$$x \frac{d^2L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta+1-x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + nL_n^\beta(x) = 0. \quad (12.26)$$

Supongamos que tenemos una solución, $L_n^\beta(x)$, de Eq. (12.25) y definamos la función

$$f_n^\beta(x) = \frac{1}{n+1} \left(x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+\beta+1-x) L_n^\beta(x) \right). \quad (12.27)$$

Considerando Eq. (12.26) se tiene

$$\frac{df_n^\beta(x)}{dx} = \frac{1}{n+1} \left[x \frac{d^2L_n^\beta(x)}{dx^2} + \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) + (n+\beta+1-x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \left[x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta+1-x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+1) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (n+1) L_n^\beta(x) \right] = \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x), \\
\frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} &= \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} - \frac{dL_n^\beta(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
&x \frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta+1-x) \frac{df_n^\beta(x)}{dx} \\
&= x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (\beta+1-x) \left(\frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - L_n^\beta(x) \right) \\
&= x \frac{d^2 L_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta+1-x) \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (\beta+1-x) L_n^\beta(x) \\
&= -n L_n^\beta(x) - x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} - (\beta+1-x) L_n^\beta(x) \\
&= - \left(x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (\beta+n+1-x) L_n^\beta(x) \right) \\
&= -(n+1) f_n^\beta(x),
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d^2 f_n^\beta(x)}{dx^2} + (\beta+1-x) \frac{df_n^\beta(x)}{dx} + (n+1) f_n^\beta(x) = 0.$$

Esto nos indica que si $L_n^\beta(x)$ es solución de la ecuación de Laguerre, entonces $f_n^\beta(x)$ también es solución de la ecuación de Laguerre donde se ha cambiado n por $n+1$. Así podemos llamar $L_{n+1}^\beta(x)$ a $f_n^\beta(x)$, es decir

$$L_{n+1}^\beta(x) = \frac{1}{n+1} \left(x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+\beta+1-x) L_n^\beta(x) \right). \quad (12.28)$$

Esta relación es muy útil, pues nos dice que basta resolver un caso para obtener todos los demás.

Claramente el caso más sencillo de la ecuación de Laguerre es cuando $n=0$, donde Eq. (12.25) toma la forma

$$\frac{d^2 L_0^\beta(x)}{dx^2} + \left(\frac{\beta+1}{x} - 1 \right) \frac{dL_0^\beta(x)}{dx} = 0. \quad (12.29)$$

Definiendo $U(x) = \frac{dL_0^\beta(x)}{dx}$ se tiene la ecuación

$$\frac{dU(x)}{dx} + \left(\frac{\beta + 1}{x} - 1 \right) U(x) = 0, \quad (12.30)$$

cuya solución es

$$U(x) = A \frac{e^x}{x^{\beta+1}}, \quad A = \text{constante}. \quad (12.31)$$

Si $A \neq 0$, esta solución no es un polinomio, por lo que no nos ayuda a resolver el problema del átomo de Hidrógeno. Así el único caso que podemos tomar es $U(x) = 0$, que implica $L_0^\beta(x) = \text{constante}$, tomaremos

$$L_0^\beta(x) = 1. \quad (12.32)$$

En general los polinomios de Laguerre tienen la forma

$$L_n^\beta(x) = \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}). \quad (12.33)$$

Probaremos esta afirmación por inducción, es claro que se cumple la igualdad para el caso $n = 0$. Para el paso inductivo supondremos Eq. (12.33) y mostraremos que se cumple

$$\frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{(n+1)+\beta}) = L_{n+1}^\beta(x), \quad (12.34)$$

en esta demostración ocuparemos la igualdad

$$\frac{d^n}{dx^n} (AB) = \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{d^{n-k} A}{dx^{n-k}} \right) \left(\frac{d^k B}{dx^k} \right), \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (12.35)$$

Tomando en cuenta Eq. (12.35) y Eq. (12.28) se encuentra

$$\begin{aligned} & \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{n+1+\beta}) = \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x e^{-x} x^{n+\beta}) \\ &= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)n!} \left(x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x} x^{n+\beta}) C_0^{n+1} + \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) C_1^{n+1} \right) \\ &= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \frac{d}{dx} \left(e^{-x} x^\beta \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) \right) + \\ & \frac{1}{n+1} \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) \frac{(n+1)!}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \frac{d}{dx} (e^{-x} x^\beta L_n^\beta(x)) + L_n^\beta(x) \\
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{(n+1)} x \left((-) e^{-x} x^\beta L_n^\beta(x) + \beta x^{\beta-1} e^{-x} L_n^\beta(x) + x^\beta e^{-x} \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} \right) \\
&\quad + L_n^\beta(x) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(x \frac{dL_n^\beta(x)}{dx} + (n+1+\beta-x) L_n^\beta(x) \right) \\
&= L_{n+1}^\beta(x),
\end{aligned}$$

en el último paso se usó la igualdad Eq. (12.28). Por lo tanto, Eq. (12.33) se cumple para cualquier n .

Ahora veamos la forma explícita de los polinomio de Laguerre, para ello recordemos que, si $n < m$,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \quad (12.36)$$

Ocupando esta igualdad y Eq. (12.35) se llega a

$$\begin{aligned}
L_n^\beta(x) &= \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\beta}) = \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{d^{n-k} x^{n+\beta}}{dx^{n-k}} \right) \left(\frac{d^k e^{-x}}{dx^k} \right) \\
&= \frac{e^x x^{-\beta}}{n!} \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{(n+\beta)!}{[(n+\beta)-(n-k)]!} (-)^k x^{n+\beta-(n-k)} e^{-x} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(n+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\beta)!} (-x)^k, \quad (12.37)
\end{aligned}$$

es decir,

$$L_n^\beta(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+\beta)!}{k!(n-k)!(k+\beta)!} (-x)^k. \quad (12.38)$$

12.2. Función de onda

Reuniendo los resultados de la sección anterior, encontramos que la función de onda del átomo de hidrógeno es

$$\begin{aligned}
\psi_{nlm}(\rho, \theta, \varphi) &= A \rho^l L_n^{2l+1}(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \\
E_{nl} &= -\frac{Z e^2}{a_{RB}(n+l+1)^2}, \quad a_{RB} = \frac{2\hbar^2}{Z m e^2}, \quad (12.39)
\end{aligned}$$

con A una constante de normalización. Definiendo $N = n + l + 1$, la función de onda toma la forma

$$\begin{aligned}\psi_{Nlm}(\rho, \theta, \varphi) &= A\rho^l L_{N-(l+1)}^{2l+1}(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad A = \text{constante}, \\ E_N &= -\frac{Ze^2}{a_{RB}N^2}, \quad N = n + l + 1.\end{aligned}$$

Note que el valor mínimo que puede tomar l es cero y el máximo valor que puede tomar es $N - 1$. Ahora, como por cada valor de l hay $(2l + 1)$ valores de m que dan el mismo valor propio l , el número de funciones propias que dan el mismo valor N es

$$\sum_{l=0}^{N-1} (2l + 1) = N^2. \quad (12.40)$$

Este es el grado de degeneración del átomo de hidrógeno.

Capítulo 13

Ecuación de Helmholtz

En este capítulo estudiaremos la ecuación de Helmholtz y sus soluciones en coordenadas esféricas.

13.1. El origen de la ecuación Helmholtz

La ecuación de Helmholtz es

$$(\nabla^2 + k^2) \phi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (13.1)$$

con k una constante real. Esta ecuación surge en diferentes contextos, por ejemplo la ecuación de Schrödinger libre es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z), \quad (13.2)$$

que se puede escribir como

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(x, y, z) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (13.3)$$

Además, la ecuación de onda es

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = 0, \quad (13.4)$$

si proponemos soluciones de la forma $\Psi(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \psi(x, y, z)$, se obtiene

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(x, y, z) = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (13.5)$$

Primero estudiaremos el caso de dos dimensiones en coordenadas polares y posteriormente estudiaremos el caso en tres dimensiones con coordenadas esféricas.

13.2. Ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

La ecuación de Helmholtz en dos dimensiones en coordenadas polares es

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial \theta^2} + k^2 \psi(r, \theta) = 0. \quad (13.6)$$

Para resolver esta ecuación supongamos que $\psi(r, \theta)$ es de la forma

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

de donde

$$(\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta) = \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 R(r)\Theta(\theta) = 0,$$

por lo que

$$\frac{r^2 (\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta)}{R(r)\Theta(\theta)} = \frac{r^2}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 r^2 = 0. \quad (13.7)$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 (\nabla_{2D}^2 + k^2) \phi(r, \theta)}{R(r)\Theta(\theta)} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

entonces se debe cumplir la ecuación

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -\nu^2, \quad \nu = \text{constante}, \quad (13.8)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = -\nu^2 \Theta(\theta), \quad (13.9)$$

cuya solución es

$$\Theta(\theta) = a_\nu e^{i\nu\theta} + b_\nu e^{-i\nu\theta}. \quad (13.10)$$

Ahora, sustituyendo Eq. (13.8) en Eq. (13.7) se encuentra

$$\frac{r^2}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \nu^2 + k^2 r^2 = 0, \quad (13.11)$$

que se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R(r) = 0. \quad (13.12)$$

Con el cambio de variable $\zeta = kr$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 R(\zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial R(\zeta)}{\partial \zeta} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2} \right) R(\zeta) = 0, \quad (13.13)$$

que es la ecuación de Bessel, así,

$$R(r) = A_{\nu k} J_{\nu}(kr) + B_{\nu k} J_{-\nu}(kr). \quad (13.14)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones son de la forma

$$\psi(r, \theta) = (A_{\nu k} J_{\nu}(kr) + B_{\nu k} J_{-\nu}(kr)) (a_{\nu} e^{i\nu\theta} + b_{\nu} e^{-i\nu\theta}). \quad (13.15)$$

Los coeficientes $A_{\nu k}, B_{\nu k}, a_{\nu}, b_{\nu}$ dependen de las condiciones de borde del problema. Por ejemplo, si $\psi(r, \theta)$ debe ser finito en el $r = 0$, se tiene que $B_{\nu k} = 0$. En ese caso las soluciones toman la forma

$$\psi(r, \theta) = J_{\nu}(kr) (C_{\nu k} e^{i\nu\theta} + D_{\nu k} e^{-i\nu\theta}). \quad (13.16)$$

Para muchos problemas es importante que $\psi(r, \theta)$ sea una función univaluada. Así, como (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ representan el mismo punto, se debe cumplir

$$\psi(r, \theta + 2\pi) = \psi(r, \theta), \quad (13.17)$$

de donde

$$\Theta(\theta + 2\pi) = A_{\nu} e^{i\nu(\theta+2\pi)} + B_{\nu} e^{-i\nu(\theta+2\pi)} = \Theta(\theta) = A_{\nu} e^{i\nu\theta} + B_{\nu} e^{-i\nu\theta}, \quad (13.18)$$

que induce

$$e^{i2\pi\nu} = 1. \quad (13.19)$$

Por lo tanto, ν debe ser un número natural n . Por lo que, en este caso las soluciones son de la forma

$$\psi_{kn}(r, \theta) = J_n(kr) (C_{nk} e^{in\theta} + D_{nk} e^{-in\theta}). \quad (13.20)$$

Si el sistema está restringido a un disco de radio \tilde{R} , se deben poner la condición de borde

$$\psi(\tilde{R}, \theta) = 0, \quad (13.21)$$

que implica

$$J_n(k\tilde{R}) = 0. \quad (13.22)$$

Así, $k\tilde{R}$ debe ser una raíz de Bessel, $\lambda_{nm} = k\tilde{R}$, es decir,

$$k = \frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}} \quad (13.23)$$

y las soluciones son de la forma

$$\psi_{nm}(r, \theta) = J_n\left(\frac{\lambda_{nm}r}{\tilde{R}}\right) (C_{nm}e^{in\theta} + D_{nm}e^{-in\theta}). \quad (13.24)$$

La solución más general es

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} J_n\left(\frac{\lambda_{nm}r}{\tilde{R}}\right) (C_{nm}e^{in\theta} + D_{nm}e^{-in\theta}). \quad (13.25)$$

Note que para la ecuación de onda en dos dimensiones Eq. (13.5) la restricción Eq. (13.23) implica que las únicas frecuencias permitidas son

$$\omega_{nm} = \frac{c\lambda_{nm}}{\tilde{R}}. \quad (13.26)$$

Mientras que para la ecuación de Schrödinger en dos dimensiones Eq. (13.3) la restricción Eq. (13.23) implica que las únicas energías permitidas son

$$E_{nm} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\lambda_{nm}}{\tilde{R}}\right)^2. \quad (13.27)$$

13.3. Ecuación de Helmholtz en tres dimensiones

Ocupando coordenadas esféricas la ecuación de Helmholtz Eq. (13.1) toma la forma

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}\right) - \frac{L^2 \phi(r, \theta, \varphi)}{r^2} + k^2 \phi(r, \theta, \varphi)\right) = 0,$$

$$L^2 = - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right),$$

con $L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Por lo que, para resolver Eq. (13.1) pondremos la función $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Como la función $R(r)$ solo

depende de r mientras que L^2 y $Y_{lm}(\theta, \phi)$ solo dependen de los ángulos, la ecuación de Helmholtz toma la forma

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k^2) \phi(r, \theta, \varphi) \\ = & Y_{lm}(\theta, \phi) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} + k^2 R(r) \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir se debe resolver la ecuación

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)R(r)}{r^2} + k^2 R(r) \right) = 0. \quad (13.28)$$

Tomaremos la propuesta $R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{dR(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{2r\sqrt{r}} u(r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{2r} u(r) \right), \\ r^2 \frac{dR(r)}{dr} &= r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(r^2 \frac{du(r)}{dr} - \frac{r}{2} u(r) \right), \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{u(r)}{\sqrt{r}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left(r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{4} u(r) \right). \end{aligned}$$

Considerando estos resultados en Eq. (13.28) se llega a

$$\frac{1}{r^2 \sqrt{r}} \left(r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} - \frac{1}{4} u(r) \right) - \frac{1}{r^2 \sqrt{r}} l(l+1)u(r) + \frac{1}{\sqrt{r}} k^2 u(r) = 0,$$

que se puede escribir como

$$r^2 \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + r \frac{du(r)}{dr} + \left(k^2 r^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) u(r) = 0$$

con los cambios de variable $z = kr$ y $\nu = l + \frac{1}{2}$ se tiene

$$z^2 \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + z \frac{du(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) u(z) = 0, \quad \nu = l + \frac{1}{2} \quad (13.29)$$

que es la ecuación de Bessel Eq. (5.2) de orden $\nu = l + \frac{1}{2}$. Por lo que las soluciones son combinaciones lineales de las funciones

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \quad J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr). \quad (13.30)$$

En lugar de $J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr)$ podemos tomar las funciones de Neumann $N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$. Además, usando la definición de $R(r)$ y de las funciones esféricas de Bessel Eqs. (5.46)- (5.47) se tiene

$$R_l(r) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr). \quad (13.31)$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Helmholtz son de la forma

$$\phi_{lm}(r, \theta, \varphi) = (a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (13.32)$$

y la solución general es

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} (a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (13.33)$$

13.4. Aplicaciones

Una partícula cuántica está encerrada en una esfera de radio R , encuentre la función de onda del sistema.

En este caso la función de onda es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi, \quad (13.34)$$

de donde

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (13.35)$$

que es la ecuación de Helmholtz. Como la probabilidad de encontrar la partícula dentro de la esfera debe ser finita y las funciones de Neumann divergen en el origen, las soluciones aceptables son de la forma $j_l(kr)$. Además, la función de onda se debe anular en la frontera, por lo que

$$j_l(kR) = 0, \quad (13.36)$$

de donde $kR = \lambda_{ln}$, con λ_{ln} una raíz de la función esférica de Bessel de orden l . Considerando la definición de k , las energías permitidas son

$$E_{ln} = \frac{\hbar^2 \lambda_{ln}^2}{2mR^2}, \quad (13.37)$$

mientras que las funciones de onda son

$$\psi_{lmn}(r, \theta, \varphi) = j_l \left(\frac{\lambda_{ln} r}{R} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (13.38)$$

13.5. Desarrollo en ondas parciales

Claramente la función $\phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ es solución a la ecuación de Helmholtz Eq. (13.1). Por lo que esta función se debe poder expresar en términos de las funciones esféricas de Bessel y los armónicos esféricos. Para probar esta afirmación el resultado fundamental es la integral

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} (i)^l J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha). \quad (13.39)$$

Antes de mostrar esta igualdad es conveniente considerar las identidades

$$\frac{dJ_\nu(dz)}{z} = \frac{1}{2} (J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)), \quad (13.40)$$

$$\frac{J_\nu(z)}{z} = \frac{1}{2\nu} (J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)) \quad (13.41)$$

las cuales se deducen de Eqs. (5.36)-(5.37). Otro resultado de utilidad es

$$(2l+1) \left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) = \left((l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right), \quad (13.42)$$

que se obtiene de Eqs. (13.40)-(13.41), en efecto

$$\begin{aligned} & (2l+1) \left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \\ &= (2l+1) \left(\frac{1}{2 \cdot 2(l+\frac{1}{2})} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - \frac{1}{2} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right) \\ &= \frac{(2l+1)}{2} \left[\frac{1}{(2l+1)} (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - (J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right] \\ &= \frac{(2l+1)}{2(2l+1)} \left[(J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) - (2l+1)(J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(2(l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - 2lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right) = \left((l+1)J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha) - lJ_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Primero, mostremos la igualdad Eq. (13.39) para $l=0$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_0(z) &= \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\alpha} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \\
&= \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha),
\end{aligned} \tag{13.43}$$

es decir

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_0(z) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha). \tag{13.44}$$

Para el caso $l = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_1(z) &= \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} z = (-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} \right) \\
&= (-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) \right) \\
&= (-i) \left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(-)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) + \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right] \\
&= (-i) \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} + \frac{\partial J_{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right],
\end{aligned} \tag{13.45}$$

considerando Eqs. (13.40)-(13.41) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_1(z) &= (-i) \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \left(J_{-\frac{1}{2}}(\alpha) + J_{\frac{3}{2}}(\alpha) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(J_{-\frac{1}{2}}(\alpha) - J_{\frac{3}{2}}(\alpha) \right) \right] \\
&= (i) \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\alpha)
\end{aligned} \tag{13.46}$$

Para probar que Eq. (13.39) es válida para cualquier l ocuparemos el principio de inducción fuerte. Es decir, supondremos que la igualdad Eq. (13.39) es válida para l y también para todos los valores menores que l , entonces probaremos que se cumple

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l+1}(z) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha). \tag{13.47}$$

Antes de iniciar la prueba, notemos que la identidad Eq. (10.219) se puede escribir como

$$P_{l+1}(z) = \frac{1}{l+1} [(2l+1)zP_l(z) - lP_{l-1}(z)]. \quad (13.48)$$

Entonces, recurriendo a la identidad Eq. (13.42) y tomando en cuenta que $-(i)^{l-1} = (i)^{l+1}$, se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l+1}(z) &= \frac{1}{l+1} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} [(2l+1)P_l(z) - lP_{l-1}(z)] \\ &= \frac{1}{l+1} \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} [(2l+1)zP_l(z) - lP_{l-1}(z)] \\ &= \frac{1}{l+1} \left[(2l+1) \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} zP_l(z) - l \int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_{l-1}(z) \right] \\ &= \frac{1}{l+1} \left[(2l+1)(-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) \right) - l \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l-1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{l+1} \left[(2l+1)(-i) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^l J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha) \right) + l \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\ &= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left[(2l+1)(-) \left((2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{(-)}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha) + \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + l \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\ &= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left[(2l+1) \left(\left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + l \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right] \\ &= \frac{(i)^{l+1}}{l+1} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(2l+1) \left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{2\alpha} - \frac{\partial J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha)}{\partial \alpha} \right) + l J_{l-\frac{1}{2}}(\alpha) \right], \\ &= \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (i)^{l+1} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha), \end{aligned} \quad (13.49)$$

que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, la igualdad Eq. (13.39) es correcta para cualquier l natural. Considerando la definición de las funciones esféricas de Bessel, la ecuación Eq. (13.39) toma la forma

$$\int_{-1}^1 dz e^{i\alpha z} P_l(z) = 2(i)^l j_l(\alpha). \quad (13.50)$$

Ahora, como los polinomios de Legendre son un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $(-1, 1)$, cualquier función se puede expresar como una serie de Polinomios de Legendre. En particular la función exponencial, e^{iaz} , es decir

$$e^{iaz} = \sum_{m \geq 0} a_m P_m(z), \quad (13.51)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{iaz} P_l(z) dz &= \int_{-1}^1 dz P_l(z) \left(\sum_{m \geq 0} a_m P_m(z) \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \int_{-1}^1 dz P_l(z) P_m(z) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_m \frac{2\delta_{lm}}{2l+1} = \frac{2a_l}{2l+1}. \end{aligned} \quad (13.52)$$

Por lo tanto, tomando en cuenta Eq. (13.50), se encuentra

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 e^{iaz} P_l(z) dz = (i)^l (2l+1) j_l(\alpha), \quad (13.53)$$

que implica

$$e^{iaz} = \sum_{l \geq 0} (i)^l (2l+1) j_l(\alpha) P_l(z). \quad (13.54)$$

Supongamos que γ es el ángulo que hay entre los vectores

$$\vec{k} = k(\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'), \quad \vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Entonces, como $\cos \gamma \leq 1$, se encuentra

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{l \geq 0} (2l+1) (i)^l j_l(kr) P_l(\cos \gamma). \quad (13.55)$$

Ocupando el teorema de adición de los armónicos esféricos se llega a

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l (i)^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (13.56)$$

A esta expresión se le llama desarrollo en ondas parciales y tiene diferentes aplicaciones en electromagnetismo y óptica [1].

Capítulo 14

Transformada de Fourier

En este capítulo estudiaremos la transformada integral de Fourier y veremos algunas de sus aplicaciones

14.1. Definición de transformada de Fourier

Dada una función f definida en el eje real, definiremos su transformada de Fourier como

$$\tilde{f}(k) = F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (14.1)$$

Antes de ver algunos ejemplos, recordemos que si $\alpha > 0$ se cumple la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\alpha z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (14.2)$$

note que esta integral implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha z^2} = 1, \quad (14.3)$$

aún cuando $\alpha \rightarrow 0$ o si $\alpha \rightarrow \infty$.

14.2. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de transformada de Fourier.

14.2.1. Función Gaussiana

Para la función Gaussiana, $e^{-\alpha x^2}$, tenemos

$$F[e^{-\alpha x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\alpha x^2 + ikx)}, \quad (14.4)$$

como

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + ikx &= \alpha \left(x^2 + 2 \left(\frac{ik}{2\alpha} \right) x + \left(\frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{ik}{2\alpha} \right)^2 \right) \\ &= \alpha \left(x + \left(\frac{ik}{2\alpha} \right) \right)^2 + \frac{k^2}{4\alpha}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

entonces

$$F[e^{-\alpha x^2}] = \frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha \left(x + \left(\frac{ik}{2\alpha} \right) \right)^2}. \quad (14.6)$$

Por lo tanto, usando la integral (14.2) y el cambio de variable $u = x + \frac{ik}{2\alpha}$ se encuentra

$$F[e^{-\alpha x^2}] = \frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (14.7)$$

14.2.2. Función $e^{-\alpha|x|}$

La transformada de la función $e^{-\alpha|x|}$ es

$$\begin{aligned} F[e^{-\alpha|x|}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\alpha|x|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 dx e^{x(\alpha-ik)} + \int_0^{\infty} dx e^{-x(\alpha+ik)} \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{x(\alpha-ik)}}{(\alpha-ik)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-x(\alpha+ik)}}{(\alpha+ik)} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{(\alpha-ik)} + \frac{1}{(\alpha+ik)} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$F[e^{-\alpha|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}. \quad (14.8)$$

14.3. Teorema de la convolución

Definiremos la convolución entre dos funciones f y g como

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(x - \zeta)g(\zeta). \quad (14.9)$$

La transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es

$$\begin{aligned} F[(f \star g)(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} (f \star g)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(x - \zeta)g(\zeta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-ik\zeta} g(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x-\zeta)} f(x - \zeta), \end{aligned}$$

con el cambio de variable $u = x - \zeta$ se tiene

$$\begin{aligned} F[(f \star g)(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-ik\zeta} g(\zeta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-iku} f(u) \\ &= \tilde{g}(k) \tilde{f}(k). \end{aligned} \quad (14.10)$$

A este resultado se le llama teorema de la convolución.

14.4. Transformada inversa de Fourier

En esta sección estudiaremos la transformada inversa de Fourier de una función f . Primero veamos la función

$$g(k) = F[e^{-\epsilon z^2} \tilde{f}(-z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} e^{-\epsilon z^2} \tilde{f}(-z), \quad (14.11)$$

usando la definición de transformada de Fourier Eq. (14.1) es claro que

$$\tilde{f}(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ikt} f(t), \quad (14.12)$$

de donde

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} e^{-\epsilon z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{izt} f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-[\epsilon z^2 + iz(k-t)]}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Para escribir esta integral de forma más sugerente notemos que

$$\begin{aligned}\epsilon z^2 + iz(k-t) &= \epsilon \left[z^2 + 2 \left(\frac{i(k-t)}{2\epsilon} \right) + \left(\frac{i(k-t)}{2\epsilon} \right)^2 - \left(\frac{i(k-t)}{2\epsilon} \right)^2 \right] \\ &= \epsilon \left(z + \frac{i(k-t)}{2\epsilon} \right)^2 + \frac{(k-t)^2}{4\epsilon},\end{aligned}\quad (14.14)$$

además, con el cambio de variable $u = z + i\frac{(k-t)}{2\epsilon}$, se tiene

$$\epsilon z^2 + iz(k-t) = \epsilon u^2 + \frac{(k-t)^2}{4\epsilon}.\quad (14.15)$$

Así, usando el cambio de variable propuesto y el resultado Eq. (14.2), llegamos a

$$\begin{aligned}g(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\epsilon u^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} f(t) e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} f(t).\end{aligned}\quad (14.16)$$

Se puede observar que tomando $\alpha = 1/(4\epsilon)$ en Eq. (14.3) se consigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} = 1,\quad (14.17)$$

por lo que

$$\begin{aligned}g(k) - f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} f(t) - f(k) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt (f(t) - f(k)) \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}},\end{aligned}\quad (14.18)$$

esta igualdad implica

$$\begin{aligned}|g(k) - f(k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt (f(t) - f(k)) \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t) - f(k)| \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}}.\end{aligned}$$

Recordemos que, por el teorema del valor intermedio [17], podemos asegurar la existencia de ζ tal que

$$\frac{f(t) - f(k)}{t - k} = f'(\zeta), \quad (14.19)$$

con f' la primera derivada de f . Por lo tanto,

$$\left| \frac{f(t) - f(k)}{t - k} \right| \leq \max |f'(\zeta)|, \quad (14.20)$$

es decir

$$|f(t) - f(k)| \leq |t - k| \max |f'(\zeta)|. \quad (14.21)$$

De donde

$$\begin{aligned} |g(k) - f(k)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dt |t - k| \max |f'(\zeta)| \frac{e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \\ &= \frac{\max |f'(\zeta)|}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dt |t - k| e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}}. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $w = \frac{t-k}{\sqrt{4\epsilon}}$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dt |t - k| e^{-\frac{(k-t)^2}{4\epsilon}} = \frac{4\epsilon}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dw |w| e^{-w^2} = 2\sqrt{\frac{4\epsilon}{\pi}} \int_0^{\infty} dw w e^{-w^2},$$

así

$$|g(k) - f(k)| \leq \max |f'(\zeta)| 2\sqrt{\frac{4\epsilon}{\pi}} \int_0^{\infty} dw w e^{-w^2}. \quad (14.22)$$

Este resultado induce

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |g(k) - f(k)| = 0. \quad (14.23)$$

Por lo tanto,

$$f(x) = g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F \left[e^{-\epsilon k^2} \tilde{f}(-k) \right] = F \left[\tilde{f}(-k) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{f}(-k).$$

usando el cambio de variable $k' = -k$ se encuentra

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F[f(x)]. \quad (14.24)$$

Entonces definiremos la transformada inversa de Fourier como

$$F^{-1} [\tilde{f}(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k), \quad (14.25)$$

esta definición es consistente pues

$$f(x) = F^{-1} [\tilde{f}(k)] = F^{-1} [F[f(x)]]. \quad (14.26)$$

14.5. Ejemplos de la transformada inversa de Fourier

Se puede observar que ocupando la integral Eq. (14.24) y tomando en cuenta los resultados Eqs. (14.7)-(14.8) y Eq. (14.10), se obtiene

$$e^{-\alpha|x|} = F^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2}, \quad (14.27)$$

$$e^{-\alpha x^2} = F^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{\sqrt{4\pi\alpha}}, \quad (14.28)$$

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(x - \zeta) g(\zeta) = F^{-1} [\tilde{f}(k) \tilde{g}(k)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k). \end{aligned} \quad (14.29)$$

También note que

$$F^{-1} [e^{-y|k|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-y|k|}. \quad (14.30)$$

Así, con los cambios de variable $k = -x'$, $x = k'$ y usando Eq. (14.8) se encuentra

$$F^{-1} [e^{-y|k|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ik'x'} e^{-y|x'|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + k'^2}, \quad (14.31)$$

es decir

$$F^{-1} [e^{-y|k|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + x^2}. \quad (14.32)$$

Posteriormente ocuparemos estos resultados para resolver ecuaciones diferenciales.

14.6. Transformada de Fourier de la derivada

Para funciones tales que $f(\pm\infty) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
 F\left[\frac{df(x)}{dx}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{df(x)}{dx} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} [e^{-ikx} f(x)] + ik e^{-ikx} f(x) \right) \\
 &= ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\
 &= ik F[f(x)] = ik \tilde{f}(k).
 \end{aligned} \tag{14.33}$$

Por lo tanto,

$$F\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right] = ik F\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = (ik)^2 F[f(x)] = (ik)^2 \tilde{f}(k). \tag{14.34}$$

En general se cumple

$$F\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n \tilde{f}(k). \tag{14.35}$$

Este resultado nos permitirá resolver algunas ecuaciones diferenciales empleando la transformada de Fourier.

14.7. Ecuación de calor y ecuación de Schrödinger libre

Se quiere resolver la ecuación de calor

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad \sigma = \text{constante}, \tag{14.36}$$

con la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

De la condición inicial tenemos $F[u(x, 0)] = F[f(x)]$, es decir $\tilde{u}(k, 0) = \tilde{f}(k)$. Ahora, al hacer la transformada de Fourier en la variable x a la ecuación de calor Eq. (14.36) tenemos

$$F\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right] = \sigma F\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right], \tag{14.37}$$

que es equivalente a

$$\frac{\partial \tilde{u}(k, t)}{\partial t} = -\sigma k^2 \tilde{u}(k, t). \quad (14.38)$$

La solución de esta ecuación es

$$\tilde{u}(k, t) = A(k)e^{-\sigma k^2 t}, \quad (14.39)$$

considerando la condición inicial tenemos que $A(k) = \tilde{f}(k)$. Así,

$$\tilde{u}(k, t) = \tilde{f}(k)e^{-\sigma k^2 t}, \quad (14.40)$$

por lo que, usando la transformada inversa de Fourier y la transformada de Fourier de la función Gaussiana Eq. (14.7), con $\alpha = 1/(4\sigma t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1}[\tilde{u}(k, t)] = F^{-1}[\tilde{f}(k)e^{-\sigma k^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2\sigma t}} F^{-1}[\tilde{f}(k)e^{-\sigma k^2 t} \sqrt{2\sigma t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4\sigma t}}, \end{aligned}$$

es decir

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) \frac{e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4\sigma t}}}{\sqrt{4\pi\sigma t}}. \quad (14.41)$$

Note que, por la condición inicial, se tiene

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4\sigma t}}}{\sqrt{4\pi\sigma t}} \right), \quad (14.42)$$

por lo tanto

$$\delta(x - \zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4\sigma t}}}{\sqrt{4\pi\sigma t}}. \quad (14.43)$$

14.7.1. Ecuación de Schrödinger libre

La ecuación de Schrödinger libre es

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (14.44)$$

que se puede escribir como la ecuación de calor Eq. (14.36)

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}, \quad \sigma = \frac{i\hbar}{2m}. \quad (14.45)$$

Por lo tanto, si se impone la condición inicial $\psi(x,0) = \phi(x)$, la función de onda para cualquier tiempo mayor que cero es

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta G(x-\zeta,t) \phi(\zeta), \quad (14.46)$$

con

$$G(x-\zeta,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} e^{\frac{im(x-\zeta)^2}{2\hbar t}}.$$

Debido a que esta última función nos da información de como la partícula pasa del estado inicial $\psi(x,0)$ al estado $\psi(x,t)$ se le llama propagador.

14.8. Ecuación ordinaria de segundo orden

La transformada de Fourier puede ser útil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, por ejemplo

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a^2u(x) = f(x). \quad (14.47)$$

Para esta ecuación tenemos

$$-F \left[\frac{d^2u(x)}{dx^2} \right] + a^2F[u(x)] = F[f(x)], \quad (14.48)$$

es decir

$$k^2\tilde{u}(k) + a^2\tilde{u}(k) = \tilde{f}(k), \quad (14.49)$$

de donde

$$\tilde{u}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{k^2 + a^2}. \quad (14.50)$$

Por lo tanto,

$$u(x) = F^{-1}[\tilde{u}(k)] = F^{-1} \left[\frac{\tilde{f}(k)}{k^2 + a^2} \right] = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} F^{-1} \left[\tilde{f}(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2} \right],$$

usando Eq. (14.32) y el teorema de la convolución, se llega a

$$u(x) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) e^{-a|x-\zeta|}, \quad (14.51)$$

es decir

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) \frac{e^{-a|x-\zeta|}}{2a}. \quad (14.52)$$

14.8.1. Ecuación de Laplace en dos dimensiones

Ahora resolveremos la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0 \quad (14.53)$$

con las condiciones de borde $u(x, 0) = f(x)$ y $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$.

Usando la transformada de Fourier en la variable x se consigue

$$F \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) \right] = -k^2 \tilde{u}(k, y) + \frac{\partial^2 \tilde{u}(k, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (14.54)$$

Además las condiciones de borde toman la forma

$$F[u(x, 0)] = F[f(x)], \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F[u(x, y)] = 0,$$

es decir

$$\tilde{u}(k, 0) = \tilde{f}(k) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(k, y) = 0. \quad (14.55)$$

La solución de Eq. (14.54) es

$$\tilde{u}(k, y) = A(k) e^{\pm \sqrt{k^2} y}, \quad (14.56)$$

tomando en cuenta las condiciones de borde se obtiene

$$\tilde{u}(k, y) = \tilde{f}(k) e^{-|k|y}. \quad (14.57)$$

Por lo tanto, usando Eq. (14.32), se llega a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= F^{-1}[\tilde{u}(k, y)] = F^{-1}[\tilde{f}(k) e^{-|k|y}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2 + (x - \zeta)^2}, \end{aligned} \quad (14.58)$$

entonces

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta f(\zeta) \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \zeta)^2}. \quad (14.59)$$

Note que de la condición de borde $u(x, 0) = f(x)$ se infiere que

$$\delta(x - \zeta) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \zeta)^2}. \quad (14.60)$$

14.9. Ecuación de Black-Scholes

Uno de los problemas más interesantes en Finanzas es determinar el precio de un contrato el cual se desea ejercer a un tiempo T . Si σ es la volatilidad, r es la tasa de interés y S el precio de una acción, el precio del contrato $C(S, t)$ está determinado por la ecuación de Black-Scholes [24, 25]

$$\frac{\partial C(S, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C(S, t)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C(S, t)}{\partial S} + rC(S, t), \quad (14.61)$$

la cual se debe resolver con la condición

$$C(S, T) = (S - K)\theta(S - K). \quad (14.62)$$

Note que esta condición nos indica que el mínimo valor que puede tomar S es K , de lo contrario no vale la pena ejercer el contrato. Más detalles sobre esta ecuación se puede ver en [26].

La ecuación de Black-Scholes es equivalente a la ecuación de Schrödinger libre en una dimensión (14.44). Para probar esta afirmación primero notemos que usando el cambio de variable

$$S = e^x \quad (14.63)$$

se obtiene

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + rC(x, t). \quad (14.64)$$

Entonces, con la propuesta

$$C(x, t) = e^{\left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)x + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)^2 t\right]} \psi(x, t), \quad (14.65)$$

se llega a la ecuación de onda

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (14.66)$$

la cual tiene la misma forma que la ecuación de Schrödinger libre en una dimensión (14.44). Esta equivalencia ha dado origen una nueva disciplina, las llamadas finanzas cuánticas [15].

Como el contrato se desea ejercer al tiempo T , para resolver la ecuación (14.66) realizaremos el cambio de variable

$$\tau = T - t, \quad (14.67)$$

de donde la ecuación (14.66) toma la forma

$$\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (14.68)$$

Además, con la variable τ el precio (14.65) toma la forma

$$C(x, \tau) = e^{\left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) x + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r \right)^2 (T - \tau) \right]} \psi(x, \tau). \quad (14.69)$$

Ahora, como el mínimo valor que puede tomar S es K , entonces el mínimo valor que puede tomar x es $\ln K$. Por lo tanto, la condición inicial (14.62) toma la forma

$$C(x, 0) = (e^x - K) \theta(x - \ln K). \quad (14.70)$$

Usando esta condición inicial y la ecuación (14.69), se obtiene la condición inicial para $\psi(x, \tau)$:

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) = e^{-\left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) x + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + r \right)^2 T \right]} (e^x - K) \theta(x - \ln K). \quad (14.71)$$

Por lo tanto, el problema de obtener la solución de la ecuación de Black-Scholes se reduce a resolver la ecuación diferencial (14.68) con la condición inicial (14.71).

De la ecuación de calor (14.36) se puede observar que, haciendo el cambio $\sigma \rightarrow \sigma^2/2$, se obtienen la solución

$$\psi(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_0(x') \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}, \quad (14.72)$$

es decir

$$\psi(x, \tau) = \frac{e^{-\frac{(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2 T}}{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} dx' \left(e^{(\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2})x'} - Ke^{(-\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2})x'} \right) e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}}. \quad (14.73)$$

Antes de obtener $\psi(x, \tau)$, estudiemos la integral

$$I_{\pm} = \int_{\ln K}^{\infty} dx' e^{(\pm\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2})x'} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}}, \quad (14.74)$$

la cual, completando cuadrados, se puede escribir como

$$I_{\pm} = e^{\left[\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)x + \frac{\sigma^2\tau}{2}\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]} \int_{\ln K}^{\infty} dx' e^{-\frac{\left((x-x') + \sigma^2\tau\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)\right)^2}{2\sigma^2\tau}}. \quad (14.75)$$

Además con el cambio de variable

$$u = \frac{(x-x') + \sigma^2\tau\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \quad (14.76)$$

se obtiene

$$I_{\pm} = \sqrt{2\pi\sigma^2\tau} e^{\left[\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)x + \frac{\sigma^2\tau}{2}\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]} N(d_{\pm}) \quad (14.77)$$

con

$$N(z) = \int_{-\infty}^z du \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (14.78)$$

$$d_{\pm} = \frac{x - \ln K + \sigma^2\tau\left(\frac{r}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Usando la integral I_{\pm} en (14.73) se encuentra

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= e^{-\frac{(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2 T}}{2\sigma^2} e^{\left[\left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\sigma^2\tau}{2}\left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)^2\right]} N(d_+) \\ &\quad - Ke^{-\frac{(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2 T}}{2\sigma^2} e^{\left[\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{\sigma^2\tau}{2}\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2\right]} N(d_-). \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (14.69) se llega a

$$C(s, t) = SN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-). \quad (14.79)$$

Este resultado es la llamada fórmula de Black-Scholes, la cual es una de las expresiones matemáticas más usadas.

14.10. Delta de Dirac

Se puede observar que al sustituir la definición de la transformada de Fourier en Eq. (14.24) se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x-x')}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (14.80)$$

Por lo tanto, en este caso la delta de Dirac la definiremos como

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}, \quad (14.81)$$

de donde

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x - x'). \quad (14.82)$$

La delta de Dirac tiene varias propiedades interesantes. Primero mostraremos que

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (14.83)$$

Esta afirmación es correcta, pues con el cambio de variable $k' = -k$ se encuentra que

$$\delta(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} = \frac{-1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} dk' e^{ik'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'x} = \delta(x),$$

que es lo que se quería demostrar.

De (14.82) se puede ver que si $x = 0$, se tiene

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x'). \quad (14.84)$$

Por lo tanto, usando la función constante $f(x) = 1$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (14.85)$$

Note que la transformada de Fourier de la delta de Dirac es

$$F[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (14.86)$$

La delta de Dirac también cumple

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}. \quad (14.87)$$

Para probar esta afirmación primero tomemos el caso $a > 0$. Con el cambio de variable $k' = ak$ se obtiene

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iakx} = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'x} = \frac{\delta(x)}{a},$$

por lo que se cumple Eq. (14.87). Para caso $a < 0$ también usaremos el cambio de variable $k' = ak$, de donde

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iakx} = \frac{1}{a} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} dk' e^{ik'x} = \frac{1}{-a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'x} = \frac{\delta(x)}{-a},$$

así se cumple Eq. (14.87). Por lo tanto, la identidad Eq. (14.87) es correcta.

En estricto sentido la delta de Dirac solo tiene sentido dentro de una integral. Sin embargo es conveniente manipularla por si sola. Usando la analogía de la delta de Kronecker y la propiedad Eq. (14.84), se dice que $\delta(x)$ es cero si $x \neq 0$ y, considerando la definición Eq. (14.101), se toma el valor $\delta(0) = \infty$.

Sea $f(x)$ una función, veamos que significa $\delta(f(x))$. Note que si no existe x tal que $f(x) = 0$, entonces $\delta(f(x)) = 0$. Supongamos que $f(x)$ tiene un solo cero, x_0 , y que la función es creciente o decreciente. Si $f(x)$ es creciente, se tiene que $\frac{df}{dx} > 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dY \frac{g(f^{-1}(Y))}{\frac{df}{dx}} \delta(Y).$$

Si la función $f(x)$ es decreciente, entonces $\frac{df}{dx} < 0$ y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(f(x)) &= \int_{\infty}^{-\infty} dY \frac{g(f^{-1}(Y))}{\frac{df}{dx}} \delta(Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dY \frac{g(f^{-1}(Y))}{-\frac{df}{dx}} \delta(Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dY \frac{g(f^{-1}(Y))}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(Y) = \frac{g(f^{-1}(Y)) \Big|_{Y=0}}{\left| \frac{df}{dx} \Big|_{Y=0}}, \quad (14.88)$$

como $Y = 0$ sólo si $x = x_0$, llega a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(f(x)) = \frac{g(x_0)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}}. \quad (14.89)$$

Además, note que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{df}{dx} \right|} = \frac{g(x_0)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}}, \quad (14.90)$$

como este resultado es válido para cualquier función $g(x)$, podemos tomar

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{df}{dx} \right|}. \quad (14.91)$$

Ahora, supongamos que $f(x)$ tiene un número finito de ceros $\{x_i\}_{i=1}^n$ tales que

$$f(x_i) = 0, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \neq 0. \quad (14.92)$$

Entonces definiremos n vecindades de radio ϵ , cada una centrada en un cero x_i . Estas vecindades, $V_{i\epsilon}(x_i)$, las tomaremos de tal forma que si $x \in V_{i\epsilon}(x_i)$ y $f(x) = 0$, entonces $x = x_i$. Note que debido a que se cumple Eq. (14.92), en cada cero podemos elegir la vecindad de tal forma que en ella la función f solo sea creciente ó decreciente. Sobre estas vecindades definiremos las funciones

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & x \in V_{i\epsilon}(x_i), \\ h_i(x) & x \notin V_{i\epsilon}(x_i), \end{cases} \quad (14.93)$$

donde $h_i(x)$ es una función de tal forma que $f_i(x)$ es creciente ó decreciente en todo el eje real. Entonces, como la delta de Dirac sólo es diferente de cero cuando su argumento es cero, se tiene

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \delta(f_i(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df_i}{dx} \right|}, \quad (14.94)$$

es decir

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|}, \quad f(x_i) = 0. \quad (14.95)$$

Por ejemplo,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|a|}. \quad (14.96)$$

14.10.1. La función de Heaviside

La función de Heaviside se define como

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (14.97)$$

Esta función se puede ver como la primitiva de la delta de Dirac. En efecto, supongamos que f es una función tal que $f(\pm\infty) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{d\theta(x'-x)}{dx'} f(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{d}{dx'} [\theta(x'-x) f(x')] - \theta(x'-x) \frac{df(x')}{dx'} \right] \\ &= \theta(x'-x) f(x') \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \theta(x'-x) \frac{df(x')}{dx'} \\ &= - \int_x^{\infty} dx' \frac{df(x')}{dx'} = f(x), \end{aligned} \quad (14.98)$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{d\theta(x'-x)}{dx'} f(x') = f(x). \quad (14.99)$$

Como este resultado es válido para cualquier función f , podemos tomar

$$\frac{d\theta(x'-x)}{dx'} = \delta(x'-x). \quad (14.100)$$

Integrando la definición de delta de Dirac Eq. (14.101), se puede ver que

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{k}. \quad (14.101)$$

14.11. Norma de una función

Ahora, usando la definición de la transformada inversa de Fourier podemos ver que la norma de una función es

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \right)^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'x} \tilde{f}(k') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' \tilde{f}^*(k) \tilde{f}(k') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' \tilde{f}^*(k) \tilde{f}(k') \delta(k' - k) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) \tilde{f}(k) = \|\tilde{f}(k)\|^2.
\end{aligned} \tag{14.102}$$

Por lo tanto, la norma de una función $f(x)$ tiene el mismo valor que su transformada de Fourier $\tilde{f}(k)$.

14.12. Transformada de Fourier en d dimensiones

Hasta ahora hemos trabajado con funciones de una sola variable. Si f es una función real de d variables, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$, la transformada de Fourier se define como

$$\tilde{f}(\vec{k}) = F[f(\vec{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \dots \frac{dx_d}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}), \quad \vec{k} = (k_1, \dots, k_d). \tag{14.103}$$

De esta definición es claro que la transformada inversa de Fourier es

$$F^{-1}[\tilde{f}(\vec{k})] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} \dots \frac{dk_d}{\sqrt{2\pi}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}). \tag{14.104}$$

La delta de Dirac la denotaremos como

$$\begin{aligned}
\delta^{(d)}(\vec{x}) &= \delta(x_1) \dots \delta(x_d) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1 e^{ix_1 k_1}}{\sqrt{2\pi}} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_d e^{ix_d k_d}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.
\end{aligned} \tag{14.105}$$

14.13. Función de Green

Supongamos que $A(\partial_x)$ es un operador lineal, con este operador se puede plantear una ecuación homogénea

$$A(\partial_x)\phi_0(x) = 0 \tag{14.106}$$

y una ecuación inhomogénea

$$A(\partial_x)\phi(x) = -4\pi\rho(x). \tag{14.107}$$

Para resolver la ecuación inhomogénea es importante la función de Green. Se dice que $G(x, x')$ es una función de Green de $A(\partial_x)$ si satisface la ecuación de Green

$$A(\partial_x)G(x, x') = -4\pi\delta(x - x'). \quad (14.108)$$

Empleando una función de Green $G(x, x')$ y una solución a la ecuación homogénea, $\phi_0(x)$, se puede construir una solución de la ecuación inhomogénea. En efecto, la función

$$\phi(x) = \int dx' G(x, x') \rho(x') + \phi_0(x), \quad (14.109)$$

satisface

$$\begin{aligned} A(\partial_x)\phi(x) &= \int dx' A(\partial_x)G(x, x') \rho(x') + A(\partial_x)\phi_0(x) \\ &= -4\pi \int dx' \delta(x - x') \rho(x') = -4\pi\rho(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Eq. (14.109) es solución de Eq. (14.107). La función de Green y la solución a la ecuación de homogénea se elijen dependiendo de las condiciones de borde de la ecuación inhomogénea.

14.13.1. Función de Green y funciones propias

Las funciones de Green del operador $A(\partial_x)$ están relacionadas con sus funciones de propias. En efecto, supongamos que tenemos las funciones propias de $A(\partial_x)$, es decir

$$A(\partial_x)\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x). \quad (14.110)$$

También supongamos que las funciones propias forman un conjunto $\{\psi_\lambda(x)\}$ ortonormal con el producto escalar

$$\langle \psi_\lambda(x) | \psi_{\lambda'}(x) \rangle = \int dx \psi_\lambda^*(x) \psi_{\lambda'}(x) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (14.111)$$

Por lo tanto, para cualquier función bien portada se puede hacer el desarrollo de Fourier

$$f(x) = \sum_\lambda a_\lambda \psi_\lambda(x), \quad (14.112)$$

con los coeficientes de Fourier dados por

$$a_\lambda = \langle \psi_\lambda(x) | f(x) \rangle = \int dx \psi_\lambda^*(x) f(x). \quad (14.113)$$

Note que substituyendo los coeficientes de Fourier en Eq. (14.112) se llega a

$$f(x) = \sum_\lambda \int dx' \psi_\lambda^*(x') f(x') \psi_\lambda(x) = \int dx' f(x') \sum_\lambda \psi_\lambda^*(x') \psi_\lambda(x), \quad (14.114)$$

como este resultado es válido para cualquier función, tenemos

$$\delta(x - x') = \sum_\lambda \psi_\lambda^*(x') \psi_\lambda(x). \quad (14.115)$$

Por lo tanto, para este caso la función de Green está dada por

$$G(x - x') = -4\pi \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda^*(x') \psi_\lambda(x)}{\lambda}. \quad (14.116)$$

Esta afirmación es correcta pues

$$\begin{aligned} A(\partial_x)G(x - x') &= -4\pi \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda^*(x') A(\partial_x) \psi_\lambda(x)}{\lambda} = -4\pi \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda^*(x') \lambda \psi_\lambda(x)}{\lambda} \\ &= -4\pi \sum_\lambda \psi_\lambda^*(x') \psi_\lambda(x) = -4\pi \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (14.117)$$

De Eq. (14.116) se puede ver que las condiciones de borde que satisface la función de Green son las mismas que satisfacen las funciones propias.

14.14. Ecuación de Laplace en dos dimensiones

Hora veremos un ejemplo de función de Green. Calcularemos la función de Green del Laplaciano en dos dimensiones

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \vec{x} = (x, y). \quad (14.118)$$

Pediremos que la función de Green se anule en $(x, y) = (0, 0)$ y en $(x, y) = (L_1, L_2)$. Entonces debemos buscar las funciones propias

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) = \lambda \psi(x, y). \quad (14.119)$$

que se anulen en $(x, y) = (0, 0)$ y en $(x, y) = (L_1, L_2)$.

Propondremos $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$, sustituyendo esta propuesta en (14.119) se obtiene

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \lambda X(x)Y(y), \quad (14.120)$$

de donde

$$\lambda = \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}. \quad (14.121)$$

Derivando esta ecuación respecto a x y y se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (14.122)$$

de donde

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -\beta^2, \quad \alpha, \beta = \text{constante.} \quad (14.123)$$

Note que esto implica que $\lambda = -\alpha^2 - \beta^2$, también note que las ecuaciones (14.123) son equivalentes a

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2 X(x), \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -\beta^2 Y(y),$$

cuyas soluciones son

$$X_\alpha(x) = a_\alpha \cos \alpha x + b_\alpha \sin \alpha x, \quad Y_\beta(y) = A_\beta \cos \beta y + B_\beta \sin \beta y,$$

donde $a_\alpha, b_\alpha, A_\beta, B_\beta$ son constantes. Empleando las condiciones de borde se llega a

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin \frac{n\pi}{L_1} x, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin \frac{m\pi}{L_2} y, \quad \lambda = - \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]$$

Por lo tanto, las funciones propias y valores propios son

$$\psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin \frac{n\pi}{L_1} x \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin \frac{m\pi}{L_2} y, \quad \lambda_{nm} = - \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]$$

y la función de Green del sistema es

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{16}{\pi L_1 L_2} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin \frac{n\pi}{L_1} x' \sin \frac{m\pi}{L_2} y' \sin \frac{n\pi}{L_1} x \sin \frac{m\pi}{L_2} y}{\left(\frac{n}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_2} \right)^2}. \quad (14.124)$$

14.15. Resultados de variable compleja

Antes de continuar recordemos dos resultados de variable compleja.

Si z_0 es un polo de $f(z)$ entonces el residuo de $f(z)$ se define como

$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (14.125)$$

El teorema de Cauchy nos dice que si C es una curva cerrada en el plano complejo entonces

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k} f(z). \quad (14.126)$$

Además, si $g(x)$ es una función de variable real con un polo simple en a y $\delta > 0$, entonces el valor principal de Cauchy se define como

$$P.P \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{a-\delta} g(x) dx + \int_{a+\delta}^{\infty} g(x) dx \right]. \quad (14.127)$$

Otro resultado es que si $R(z)$ es una función que no tiene polos en el eje real ni en el plano complejo superior y que $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, entonces si a es un número real, se cumple

$$R(a) = \frac{1}{i\pi} P.P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)}{x-a} dx = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)}{x-a} dx. \quad (14.128)$$

En particular

$$P.P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi, \quad (14.129)$$

que implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (14.130)$$

Este resultado lo ocuparemos posteriormente.

14.16. Ecuación de Poisson

Ahora estudiaremos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}), \quad (14.131)$$

que tiene asociada la ecuación de Green

$$\nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (14.132)$$

Tomando la transformadas de Fourier de esta ecuación obtenemos

$$F[\nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}')] = -4\pi F[\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')], \quad (14.133)$$

es decir

$$-\vec{k}^2 \tilde{G}(\vec{k}^2) = -4\pi \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}, \quad (14.134)$$

por lo que

$$\tilde{G}(\vec{k}^2) = 4\pi \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\vec{k}^2}, \quad (14.135)$$

de donde,

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{\vec{k}^2}. \quad (14.136)$$

Usando coordenadas esféricas y definiendo $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$, se tiene

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{2\pi^2} \int d\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{\vec{k}^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2} \\ &= \frac{2\pi}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikR\cos\theta}, \end{aligned} \quad (14.137)$$

además con el cambio de variable $u = \cos\theta$ se encuentra

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikR\cos\theta} &= - \int_1^{-1} du e^{ikRu} = \int_{-1}^1 du e^{ikRu} = \frac{1}{ikR} e^{ikRu} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{ikR} = 2 \frac{\sin kR}{kR}. \end{aligned} \quad (14.138)$$

Por lo que

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\sin kR}{kR}, \quad (14.139)$$

tomamos $w = kR$ y considerando la integral Eq. (14.130) se llega a

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{2}{R\pi} \int_0^\infty dw \frac{\sin w}{w} = \frac{1}{R\pi} \int_{-\infty}^\infty dw \frac{\sin w}{w} = \frac{\pi}{R\pi} = \frac{1}{R},$$

es decir

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (14.140)$$

Que implica

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (14.141)$$

Por lo tanto, una solución a la ecuación de Poisson es

$$\phi(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \phi_0(\vec{x}), \quad (14.142)$$

con $\phi_0(\vec{x})$ una solución a la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi_0(\vec{x}) = 0$.

Para muchos sistemas físicos se puede tomar $\phi_0(\vec{x}) = 0$, en esos casos la solución a la ecuación de Poisson es

$$\phi(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (14.143)$$

Ahora, note que

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xx' \cos \alpha + x'^2}} \quad (14.144)$$

con α el ángulo entre \vec{x} y \vec{x}' . Ahora, si $|\vec{x}| \neq |\vec{x}'|$ definamos $r_< = \min\{|\vec{x}|, |\vec{x}'|\}$ y $r_> = \max\{|\vec{x}|, |\vec{x}'|\}$, es claro que

$$\left(\frac{r_<}{r_>} \right) < 1. \quad (14.145)$$

Entonces, ocupando estas definiciones y la función generatriz de los polinomios de Legendre Eq. (10.208) con

$$z = \frac{r_<}{r_>}, \quad u = \cos \alpha, \quad (14.146)$$

se tiene

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)^2}} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)^l P_l(\cos \alpha).$$

Así, usando el teorema de adición de los armónicos esféricos Eq. (10.261), tenemos

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}}\right) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (14.147)$$

Fuera de la región donde está definida la fuente $\rho(\vec{x}')$ se tiene $r_{<} = |\vec{x}'|$ y $r_{>} = |\vec{x}|$. Por lo tanto, en esta región se tiene

$$\phi(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r_{>}^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \int d\vec{x}' r_{<}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}').$$

Definiremos los momentos multipolares como

$$q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int d\vec{x}' r_{<}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}') \quad (14.148)$$

por lo que

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{q_{lm}}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (14.149)$$

Además, usando la norma de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, las ecuaciones de la magnetostática se reducen a

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{x}) = -4\pi \vec{J}(\vec{x}), \quad (14.150)$$

que son tres ecuaciones de Poisson. Por lo tanto,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int d\vec{x}' \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (14.151)$$

Claramente este potencial también se puede escribir en términos de los armónicos esféricos.

14.17. Función de Green de la ecuación Helmholtz

La ecuación de Helmholtz inhomogénea es

$$(\nabla^2 + k^2) \phi(\vec{x}) = -4\pi\phi(\vec{x}), \quad (14.152)$$

la cual tiene asociada la ecuación de Green

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (14.153)$$

Para resolver esta última ecuación veamos la función

$$f(r) = \frac{e^{\alpha r}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (14.154)$$

la cual tiene una divergencia en $r = 0$. Esta divergencia se puede aislar, en efecto

$$f(r) = \frac{e^{\alpha r} - 1 + 1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{e^{\alpha r} - 1}{r}, \quad (14.155)$$

note que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha r} - 1}{r} = \alpha. \quad (14.156)$$

Por lo tanto, la divergencia de la función Eq. (14.154) está en término $1/r$. Ahora, observemos

$$\nabla^2 \left(\frac{e^{\alpha r}}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{e^{\alpha r} - 1}{r} \right) = \nabla^2 \frac{1}{r} + \nabla^2 \left(\frac{e^{\alpha r} - 1}{r} \right), \quad (14.157)$$

empleando la ecuación Eq. (14.141) y el Laplaciano en coordenadas esférica Eqs. (2.77)-(2.78) se llega a

$$\nabla^2 \left(\frac{e^{\alpha r}}{r} \right) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{e^{\alpha r}}{r} \right) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) + \alpha^2 \frac{e^{\alpha r}}{r},$$

es decir

$$(\nabla^2 - \alpha^2) \frac{e^{\alpha r}}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}). \quad (14.158)$$

Este resultado lo hemos obtenido con las coordenadas x, y, z . Claramente el resultado no cambia si se consideran las coordenadas $x - x', y - y', z - z'$. Por lo tanto,

$$(\nabla^2 - \alpha^2) \frac{e^{\alpha|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'). \quad (14.159)$$

Si tomamos $\alpha = \pm ik$, entonces se obtiene

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'), \quad (14.160)$$

que es la ecuación de Green para la ecuación de Helmholtz inhomogénea. Así, la función de Green para la ecuación de Helmholtz inhomogénea es

$$G(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (14.161)$$

Entonces una solución a la ecuación de Helmholtz inhomogénea es

$$\phi(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}) + \int d\vec{x}' \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rho(\vec{x}'), \quad (14.162)$$

con $\phi_0(\vec{x})$ una solución a la ecuación de Helmholtz libre. Estas soluciones se ocupan para estudiar radiación y difracción de onda electromagnéticas, el signo se elige dependiendo si las ondas que se estudian son ondas entrantes o salientes.

14.17.1. Ecuación de Lippman-Schwinger

La ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (14.163)$$

se puede escribir como una ecuación de Helmholtz inhomogénea. En efecto, definiendo

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar}, \quad \rho(\vec{x}) = \frac{-m}{2\pi\hbar}V(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

y realizando operaciones elementales la ecuación (14.163) toma la forma

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}).$$

Por lo tanto,

$$\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) - \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right) \int d\vec{x}' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} V(\vec{x}')\psi(\vec{x}'), \quad (14.164)$$

donde $\psi_0(\vec{x})$ es una solución a la ecuación de Helmholtz homogénea. A Eq. (14.164) se le llama ecuación de Lippman-Schwinger y es muy útil para estudiar dispersión de partículas en mecánica cuántica.

14.18. Función de Green de la ecuación de onda

Ahora estudiaremos la ecuación de onda inhomogénea

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t). \quad (14.165)$$

la cual tiene asociada la ecuación de Green

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \quad (14.166)$$

La ecuación de onda es invariante relativista, para respetar esta invariancia en el sector temporal tomaremos las definiciones

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} g(t), \quad (14.167)$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega), \quad (14.168)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}. \quad (14.169)$$

Por lo que,

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4}} \int d\vec{k} d\omega e^{-i(\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))} \tilde{G}(\vec{k}, \omega),$$

$$\delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^4}} \int d\vec{k} d\omega e^{-i(\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}.$$

Por lo tanto, al hacer la transformada de Fourier de Eq. (14.166) se encuentra

$$F \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \right] = -4\pi F \left[\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \right],$$

es decir

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{-4\pi}{\sqrt{(2\pi)^4}},$$

de donde

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi)^4}} \frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Por lo tanto,

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi^3} \int d\vec{k} d\omega \frac{e^{-i(\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (14.170)$$

Para hacer esta integral definiremos $\tau = t - t'$, $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$ y tomaremos coordenadas esféricas, por lo que

$$d\vec{k} = dk d\theta d\varphi k^2 \sin \theta, \quad \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') = kR \cos \theta. \quad (14.171)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{e^{-i(\omega\tau - kR \cos \theta)}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ &= \frac{2\pi}{4\pi^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{ikR \cos \theta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (14.172)$$

Además, con el cambio de variable $u = \cos \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{ikR \cos \theta} &= - \int_1^{-1} du e^{iuRk} = \int_{-1}^1 du e^{iuRk} \\ &= \frac{1}{ikR} e^{iuRk} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{ikR} (e^{iRk} - e^{-iRk}) = \frac{2}{kR} \sin kR, \end{aligned}$$

entonces

$$G(\vec{R}, \tau) = -\frac{c^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{1}{kR} \sin kR \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2 c^2}. \quad (14.173)$$

Ahora estudiaremos la integral

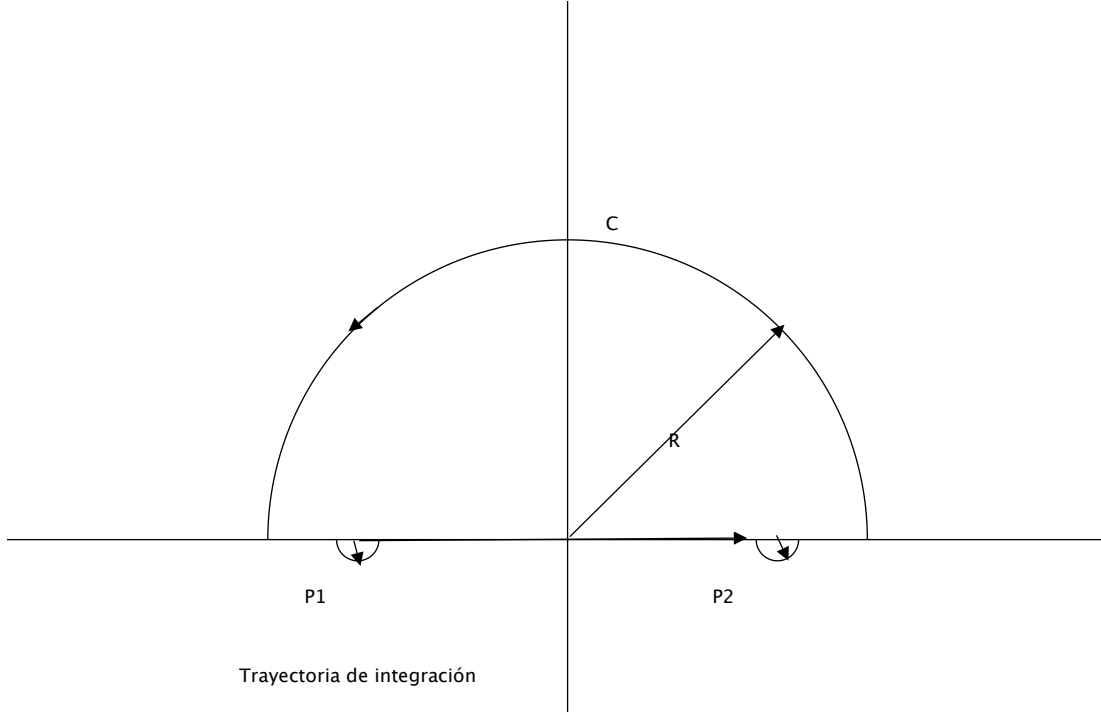
$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2 c^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - kc)(\omega + kc)}, \quad (14.174)$$

para facilitar algunos cálculos definiremos

$$\omega_a = c(k - i\epsilon), \quad \omega_b = -c(k + i\epsilon), \quad (14.175)$$

por lo que,

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2 c^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)}. \quad (14.176)$$



Pasaremos esta integral al plano complejo, donde $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, note que

$$e^{-i\omega\tau} = e^{i\omega_1\tau} e^{\omega_2\tau}. \quad (14.177)$$

Si tomamos $\tau > 0$, entonces $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} e^{-i\omega\tau} = 0$. Ahora, sea C la trayectoria semicircular de radio A en el semi plano complejo inferior. Dicha trayectoria inicia en punto A del eje real y termina en el punto $-A$ del mismo eje. Claramente esta trayectoria se recorre en sentido de las manecillas del reloj. Ocupando la trayectoria C , se tiene

$$I(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} + \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} - \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)}. \quad (14.178)$$

Note que si $A \rightarrow \infty$ las trayectorias de las dos primeras integrales forman una trayectoria cerrada, Γ , que se recorre en el sentido de las manecillas del reloj y que encierra los dos polos ω_a, ω_b , es decir

$$I(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\oint_{\Gamma} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} - \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} \right).$$

Podemos ver que si A es muy grande

$$\left| \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} \right| \leq \left| \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega_1\tau} e^{\omega_2\tau}}{\omega^2} \right| A \leq \frac{e^{\omega_2\tau} A}{A^2} \quad (14.179)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left| \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} \right| = 0, \quad (14.180)$$

de donde

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} = 0. \quad (14.181)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I(k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} \\ &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{\omega \rightarrow \omega_a} \frac{(\omega - \omega_a)e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} + \lim_{\omega \rightarrow \omega_b} \frac{(\omega - \omega_b)e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)} \right] \\ &= -2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-i\omega_a\tau}}{\omega_a - \omega_b} + \frac{e^{-i\omega_b\tau}}{\omega_b - \omega_a} \right] \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi i}{\omega_a - \omega_b} (e^{-i\omega_a\tau} - e^{-i\omega_b\tau}) = -\frac{2\pi i}{2ck} (e^{-ick\tau} - e^{ick\tau}) \\ &= -\frac{2\pi}{ck} \frac{(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau})}{2i} = -2\pi \frac{\sin ck\tau}{ck}. \end{aligned} \quad (14.182)$$

Ocupando este resultado en Eq. (14.173) se obtiene

$$\begin{aligned} G(\vec{R}, \tau) &= -\frac{c^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \left(k^2 \frac{1}{kR} \sin kR \right) \left(-2\pi \frac{\sin ck\tau}{ck} \right) \\ &= \frac{2c}{R\pi} \int_0^\infty dk \sin kR \sin ck\tau = \frac{c}{R\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \sin kR \sin ck\tau \\ &= \frac{c}{R\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{1}{2} (\cos k(R - c\tau) - \cos k(R + c\tau)) \\ &= \frac{c}{4R\pi} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ik(R-c\tau)} + e^{-ik(R-c\tau)} - e^{ik(R+c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) \\ &= \frac{c}{2R} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(R-c\tau)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(R+c\tau)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-ik(R+c\tau)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-ik(R-c\tau)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{2R} (\delta(R - c\tau) + \delta(R - c\tau) - \delta(R + c\tau) - \delta(R + c\tau)) \\
&= \frac{c}{R} (\delta(R - c\tau) - \delta(R + c\tau)). \tag{14.183}
\end{aligned}$$

Además, como $(R + c\tau) > 0$, se encuentra

$$G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{R} \delta(R - c\tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\frac{R}{c} - \tau\right), \tag{14.184}$$

es decir

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{\delta\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - (t - t')\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{14.185}$$

Definiendo el tiempo de retardo como

$$t_{Ret} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \tag{14.186}$$

la función de Green se puede escribir de la forma

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{\delta(t' - t_{Ret})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{14.187}$$

Por lo tanto, si $\phi_0(\vec{x}, t)$ una solución a la ecuación de onda homogénea, la solución a la ecuación de onda inhomogénea Eq. (14.165) es

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}, t) &= \int d\vec{x}' dt' \rho(\vec{x}', t') \frac{\delta(t' - t_{Ret})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \phi_0(\vec{x}, t) \\
&= \int d\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}', t_{Ret})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \phi_0(\vec{x}, t),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d\vec{x}' \frac{\rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \phi_0(\vec{x}, t). \tag{14.188}$$

Referencias

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Tercera Edición, John Wiley and Sons (1999).
- [2] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Física Teórica Vol. 8, Electrodinámica de Los Medios Continuos*, Editorial Reverté, Madrid (1981).
- [3] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press Inc, New York (1972).
- [4] A. N. Kolmogorov, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir Moscú (1975).
- [5] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Nonrelativistic Theory)*, (segunda edición) Addison-Wesley, E.U (1965).
- [6] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (S. F. Tuan, Editor), Addison-Wesley, E.U (1994).
- [7] L. Debnath y D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, Segunda edición, Chapman y Hall/CRC, Londres (2007).
- [8] E. T. Whittaker y G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press (1996).
- [9] P. M. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol I y II McGraw-Hill, (1953)
- [10] A. N. Tikhonov y A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Dover, New York (1990).
- [11] L. Infeld y T. E. Hull, *The Factorization Method*, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [12] O. L. de Lange y R.E. Raab, *Operator Methods in Quantum Mechanics*, Clarendo Press, Oxford (1991).

- [13] N. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, American Mathematical Society (1968).
- [14] B. G. Adams, *Algebraic Approach to Simple Quantum Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [15] B. E. Baaquie, *Quantum Finance*, Cambridge University Press (2004).
- [16] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, USA (1992).
- [17] R. Courant y F. John, *Introducción al cálculo y al análisis matemático, Volumen I y II*, Editorial Limusa (1990).
- [18] F. Simmons y J. S. Robertson, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, Segunda edición, McGraw-Hill (1993).
- [19] F. J. Dyson, *Feynman's proof of the Maxwell equations*, Am. J. Phys. **58** No.3 209 (1990).
- [20] R. Jackiw, *Introducing Scale Symmetry*, Phys. Today **25** (1), 23 (1972).
- [21] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Conformal Invariance in Quantum Mechanics*, Nuovo Cimento A **34**, 569 (1976).
- [22] M. Jacobs, *Diffusion Processes*, Springer, New York, (1967).
- [23] R. P. Feynman y A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965).
- [24] F. Black and M. Scholes, *The pricing options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81** (1973), 637-659.
- [25] R. C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, Bell J. Econ. and Management Sci. **4** (1973) 141-183.
- [26] F. Venegas, *Riesgos financieros y económicos*, Cengage Learning Editores (2008).