Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

NOTAS PARA EL CURSO

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

AUTOR:
Dr. Adolfo Zamora Ramos

Departamento de Matemáticas
Aplicadas y Sistemas

ISBN: 978-607-477-663-8

Octubre 2011

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

UNIDAD CUAJIMALPA

NOTAS PARA EL CURSO

Por
Dr. Adolfo Zamora Ramos
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
División de Ciencias Naturales e Ingeniería
Octubre 2011

Typeset in $\LaTeX$

Contenido

Prefacio

El presente manuscrito es una compilación de las notas del curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales para estudiantes del séptimo trimestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas que el autor ha impartido durante los últimos años en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa. El contenido está basado en gran medida en el programa de la UEA respectiva; haciendo énfasis en la ecuación de segundo orden lineal para funciones de dos o más variables. Se presenta la clasificación de éstas empleando su analogía con las formas cuadráticas y se estudian los ejemplos clásicos de la Ecuación de Calor (tipo parabólico), la Ecuación de Onda (tipo hiperbólico) y la Ecuación de Laplace (tipo elíptico). El tratamiento de cada problema se presenta, en los distintos capítulos, para varios conjuntos de condiciones e inclusive se encuentran soluciones generales en ausencia de condiciones. En particular, se consideran condiciones de frontera tipo Dirichlet, Neumann, Robin y mixtas; y en el caso de ecuaciones dependientes del tiempo también se considera el problema de valores iniciales o problema de Cauchy. Además de estos problemas clásicos, se ha incluido la ecuación de onda de Schrödinger y se ha resuelto el problema de la partícula cuántica dentro de una caja.

Hasta donde ha sido posible se ha discutido la interpretación física de los problemas y sus soluciones. Por ejemplo, la ecuación de onda unidimensional se ha interpretado en términos de la cuerda vibrante. Las condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas en este caso corresponden a la cuerda con extremos fijos mientras que las condiciones de frontera tipo Neumann homogéneas corresponden a extremos libres. Además de las soluciones generales, se han considerado ejemplos particulares que involucran no sólo las funciones usuales del cálculo sino también funciones generalizadas como la delta de Dirac. Al respecto, se incluye una sección dedicada a discutir las propiedades fundamentales de la delta y algunas formas en las que se le encuentra. Más tópicos preliminares se introducen en el primer capítulo; entre ellos un método para calcular integrales empleando derivadas de funciones definidas como integrales que dependen de un parámetro, series de Fourier en una y más dimensiones, y operadores lineales.

Entre los capítulos segundo y cuarto se proponen y resuelven un número considerable de problemas utilizando dos métodos generales: uno es el método de separación de variables y el otro es la técnica de transformadas integrales. Esta última se introduce de manera general, pero se hace especial énfasis en la transformada de Fourier. El otro método, igualmente general, lo designamos método de cambio de variables. En este contexto lo empleamos tanto para simplificar ecuaciones como para reducir problemas a otros conocidos, y motivamos la utilización tanto de transformaciones lineales como no lineales. Un problema de interés que se resuelve fácilmente por este método es la propagación de ondas esféricas. Otra simplificación útil se obtiene en la ecuación de segundo orden lineal con coeficientes constantes cuando se aplica una rotación; y esta ecuación se reduce aún más mediante transformaciones no lineales. En el capítulo quinto se abordan problemas más generales como aquellos en geometrías no rectangulares, problemas con condiciones de frontera generales, y ecuaciones no homogéneas. En este último apartado se prefiere explotar el método de la transformada de Fourier para determinar las funciones de Green y a partir de ellas determinar la solución de las ecuaciones de onda y calor no homogéneas, así como la solución de la ecuación de Poisson. El último problema que se considera es el de mostrar que las ecuaciones de la electrodinámica clásica de Maxwell conducen a ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético, así como para el potencial vectorial; y a ecuaciones de Poisson o de onda para el potencial escalar, dependiendo de la elección de norma.

Con la finalidad de fijar ideas, al término de varios problemas relevantes se han incluido ejemplos y sugerido ejercicios de práctica. Más aún, como último capítulo de estas notas se ha propuesto una lista de problemas que van desde ejercicios simples de trigonometría y cálculo hasta problemas de valores iniciales y en la frontera del mismo grado de dificultad que varios de los estudiados a lo largo de las notas. Algunos de ellos sugieren utilizar otro método para encontrar un resultado ya obtenido o bien para estudiar otros problemas de interés. Otros ejercicios sirven de complemento para los desarrollos intermedios de algunos problemas incluidos, así que se recomienda ampliamente resolverlos. Para finalizar, se incluye una lista de referencias que contiene varios textos en el área de las Ecuaciones en Derivadas Parciales con enfoques que van desde el más operativo hasta el otro extremo riguroso y formal.

Estas notas no estarían completas sin un sincero agradecimiento a todos los estudiantes que han leído las versiones preliminares de este manuscrito y que me han hecho comentarios respecto a su contenido. Su invaluable ayuda ha hecho que podamos tener en mano esta versión terminada.

Capítulo 1

Preliminares

De manera análoga a la que se define una ecuación diferencial ordinaria, una ecuación diferencial parcial es una ecuación que involucra una función escalar $u = u(x,t)$ y sus derivadas parciales. Esto es, una *ecuación diferencial parcial* (EDP) se define como

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},\ldots) = 0 \tag{1.1}$$

donde F es una función escalar con dominio en $\mathbb{R}^N$. El *orden de la ecuación* es el de la derivada parcial de máximo orden que aparece. En general puede tenerse una función escalar $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ de tal modo que en la ecuación (1.1) aparecen tanto las variables independientes x_i como derivadas parciales de u con respecto a cualesquiera de ellas.

Llamamos solución de la ecuación (1.1) a cada función $u(x,t)$ que al ser sustituida en la ecuación convierta ésta en una identidad para toda (x,t) en alguna región del plano x-t. Las ecuaciones diferenciales parciales (1.1), al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias, pueden tener soluciones generales $u(x,t)$. Sin embargo, las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales parciales dependen de funciones arbitrarias, y no pueden depender sólo de constantes arbitrarias. Soluciones particulares se encuentran imponiendo condiciones. Para las ecuaciones diferenciales parciales del tipo (1.1) se requieren tanto *condiciones iniciales* como *condiciones de frontera*. Una ecuación diferencial parcial definida para ciertas condiciones iniciales (generalmente al tiempo $t = 0$) y para condiciones de frontera dadas (generalmente en los extremos de algún intervalo $0 \leq x \leq \ell$) se denomina el *problema de valores iniciales y valores en la frontera* para dicha ecuación.

1.1 La Ecuación de Segundo Orden

1.1.1 Forma General

Para una función escalar[1] $u(x,t)$ de clase C^2, la forma general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden es

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{1.2}$$

En más variables se tiene

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \ldots, u_{x_n x_n}) = 0 \tag{1.3}$$

donde la función incógnita $u(x_1, \ldots, x_n)$ es también escalar de clase C^2.

1.1.2 Ecuación Lineal

Para una función escalar $u(x,t)$ de clase C^2, la ecuación diferencial parcial de segundo orden lineal más general es de la forma

$$a\, u_{xx} + 2b\, u_{xt} + c\, u_{tt} + d\, u_x + e\, u_t + f\, u = g \tag{1.4}$$

donde a, b, c, d, e, f y g son funciones de (x,t).

Forma Matricial

En analogía a las formas cuadráticas en dos variables que se estudian en geometría, se observa que la ecuación (1.4) puede escribirse como

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{\partial} + f \right) u = g \tag{1.5}$$

[1] Una función escalar (de dos o más variables) u se denomina de clase C^2 si ella misma y todas sus derivadas parciales hasta el segundo orden son continuas respecto a todos sus argumentos. Un resultado importante es que para funciones escalares de clase C^2 el orden de la derivación parcial en todas sus segundas derivadas es irrelevante.

donde $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es la matriz simétrica asociada a la parte cuadrática (i.e. de segundo orden en las derivadas de u) y $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -a_x - b_t + d & -b_x - c_t + e \end{pmatrix}$ la matriz renglón asociada a la parte lineal (i.e. de primer orden en las derivadas de u). Estamos empleando además $\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix}$ con la notación usual de derivada parcial, $\partial_x = \partial/\partial x$, y el superíndice T denotando la matriz transpuesta; i.e. $\boldsymbol{\partial}^T = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_t \end{pmatrix}$.

Clasificación

Usando la representación (1.5) y por analogía con la ecuación cuadrática general se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1. *La EDP de segundo orden lineal*

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{\partial} + f \right) u = g$$

es de tipo

(i) *Elíptico si* $\det(\boldsymbol{Q}) > 0$

(ii) *Hiperbólico si* $\det(\boldsymbol{Q}) < 0$

(iii) *Parabólico si* $\det(\boldsymbol{Q}) = 0$

Nótese que los coeficientes a, b y c que forman $\boldsymbol{Q}$ son, en general, funciones de (x, t). De este modo, el tipo de la ecuación puede ser diferente en distintas regiones del plano x-t.

Ejemplo 1. *Determine el tipo de las siguientes EDP de segundo orden lineales*

(i) *Ecuación de calor*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad \alpha^2 > 0$$

(ii) *Ecuación de onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad c^2 > 0$$

(iii) *Ecuación de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(iv) *Ecuación Lineal*

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Solución. La ecuación de calor en (i) puede reescribirse como

$$\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0$$

lo que hace evidente que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es en este caso:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego entonces, $\det(\boldsymbol{Q}) = 0$ y por lo tanto la ecuación de calor es de *tipo parabólico*.

La ecuación de onda en (ii), análogamente, puede reescribirse en la forma

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

de donde se sigue que la matriz $\boldsymbol{Q}$ para esta ecuación es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que $\det(\boldsymbol{Q}) = -c^2 < 0$ y por lo tanto la ecuación de onda es de *tipo hiperbólico*.

La ecuación de Laplace en (iii) ya está escrita en la forma

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Se tiene entonces que la matriz $\boldsymbol{Q}$ para esta ecuación es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde claramente $\det(\boldsymbol{Q}) = 1 > 0$ y por lo tanto la ecuación de Laplace es de *tipo elíptico*.

Finalmente, para la ecuación lineal en (iv)

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$$

se tiene la matriz

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

de donde $\det(\boldsymbol{Q}) = xy$. Se sigue entonces que dicha ecuación es de *tipo parabólico* para $xy = 0$ (i.e. a lo largo de los ejes coordenados), es de *tipo elíptico* para $xy > 0$ (i.e. en el primero y tercer cuadrantes), y es de *tipo hiperbólico* para $xy < 0$ (i.e. en el segundo y cuarto cuadrantes).

1.1.3 Problemas Asociados

Llamamos problema a la ecuación diferencial parcial junto con un conjunto de condiciones dadas. Suponiendo una ecuación de la forma:

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{1.6}$$

i.e. una EDP de segundo orden en dos variables, se definen los distintos problemas.

Problema de Cauchy

Este problema se conoce también como *problema de valores iniciales*. Dado el carácter de segundo orden en las derivadas respecto al *tiempo* t de (1.6), son necesarias dos condiciones sobre la solución $u(x, t)$. Estas son

$$u(x, 0) = \phi(x) \tag{1.7}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \tag{1.8}$$

donde ϕ y ψ son funciones dadas en el intervalo de interés, y se ha elegido el tiempo inicial $t = 0$.

Nótese que si en la EDP el orden mayor de la derivada respecto a t fuese N, entonces serían necesarias las derivadas parciales de u respecto a t desde el orden 0 hasta el $N - 1$ evaluadas al tiempo $t = 0$ como condiciones.

Problema de Dirichlet

Este es un tipo de problema conocido como *de valores en la frontera*. Dado el carácter de segundo orden en las derivadas respecto a la *posición* x de (1.6), se necesitan dos condiciones sobre la solución $u(x,t)$. Suponiendo que se busca la solución para $a \leq x \leq b, \;\; t \geq 0$, éstas son

$$u(a,t) = f(t) \tag{1.9}$$
$$u(b,t) = g(t) \tag{1.10}$$

donde f y g son funciones dadas, definidas para $t \geq 0$.

Observe que si en la EDP el orden mayor de la derivada respecto a x fuese N, entonces serían necesarios los valores de u en N distintos $x = a_i$ como condiciones. De manera general, el problema de Dirichlet *prescribe* el valor de la función incógnita, u, en toda la *frontera* de la región de interés.

Problema de Neumann

Este es otro tipo de problema *de valores en la frontera*. Suponiendo que se busca la solución para $a \leq x \leq b, \;\; t \geq 0$, las condiciones son en este caso

$$u_x(a,t) = f(t) \tag{1.11}$$
$$u_x(b,t) = g(t) \tag{1.12}$$

donde f y g son funciones dadas, definidas para $t \geq 0$.

Note que si en la EDP el orden mayor de la derivada respecto a x fuese N, entonces serían necesarios los valores de u_x en N distintos $x = a_i$ como condiciones. De manera general, el problema de Neumann *prescribe* el valor de la derivada normal de la función incógnita, $\partial u/\partial n$, en toda la *frontera* de la región de interés.

Problema de Robin

Este problema *de valores en la frontera* generaliza los dos anteriores. Suponiendo que se busca la solución para $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, las condiciones son

$$A_1 u(a,t) + B_1 u_x(a,t) = f(t) \tag{1.13}$$
$$A_2 u(b,t) + B_2 u_x(b,t) = g(t) \tag{1.14}$$

donde f y g son funciones dadas, definidas para $t \geq 0$, y A_1, B_1, A_2 y B_2 son constantes dadas.

Vale la pena remarcar que si en la EDP el orden mayor de la derivada respecto a x fuese N, entonces serían necesarios los valores de u y u_x en N distintos $x = a_i$ como condiciones. De manera general, el problema de Robin *prescribe* el valor de una combinación lineal de la función incógnita u y su derivada normal $\partial u/\partial n$ en toda la *frontera* de la región de interés.

Problemas Mixtos

Son problemas *de valores en la frontera* y/o iniciales que mezclan condiciones de los anteriores. Suponiendo que se busca la solución para $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, un ejemplo sería

$$A_1 u(a,t) + B_1 u(b,t) = f(t) \tag{1.15}$$
$$A_2 u_x(a,t) + B_2 u_x(b,t) = g(t) \tag{1.16}$$

donde f y g son funciones dadas, definidas para $t \geq 0$, y A_1, B_1, A_2 y B_2 son constantes dadas.

Observe que si en la EDP el orden mayor de la derivada respecto a x fuese N, entonces serían necesarios los valores de u o u_x en N distintos $x = a_i$ como condiciones. De manera general, los problemas mixtos *prescriben* valores de combinaciones lineales de la función incógnita u (o de su derivada normal $\partial u/\partial n$) evaluada en distintas partes de la *frontera* de la región de interés.

1.1.4 Ecuación Lineal en Más Variables

La EDP lineal de segundo orden general en cualquier número de variables siempre puede escribirse en la forma

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{\partial} + \phi \right) u = \psi \tag{1.17}$$

con $\boldsymbol{Q}$ la matriz simétrica asociada a la parte cuadrática de la ecuación (i.e. de segundo orden en las derivadas de u) y $\boldsymbol{L}$ la matriz renglón asociada a la parte lineal de la ecuación (i.e. de primer orden en las derivadas de u). El operador $\boldsymbol{\partial}$ es un vector columna que contiene por renglón a la derivada parcial respecto a cada variable de la función incógnita u. ϕ y ψ son funciones dadas. Anteriormente vimos el caso de dos variables (x,t), i.e. $u = u(x,t)$. Puede verificarse fácilmente que la ecuación en tres variables

$$a\, u_{xx} + b\, u_{yy} + c\, u_{tt} + 2d\, u_{xy} + 2e\, u_{xt} + 2f\, u_{yt} + g\, u_x + h\, u_y + i\, u_t + j\, u = k \tag{1.18}$$

donde $a, b, \ldots, k$ son funciones de (x,y,t), se escribe en la forma (1.17) con

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -a_x - d_y - e_t + g \\ -d_x - b_y - f_t + h \\ -e_x - f_y - c_t + i \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_t \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Hemos utilizado la notación de la matriz transpuesta para reducir el tamaño de la matriz $\boldsymbol{L}$.

Análogamente, la ecuación en cuatro variables

$$\begin{aligned} &a\, u_{xx} + b\, u_{yy} + c\, u_{zz} + d\, u_{tt} + 2e\, u_{xy} + 2f\, u_{xz} + 2g\, u_{xt} \\ &\qquad + 2h\, u_{yz} + 2i\, u_{yt} + 2j\, u_{zt} + k\, u_x + l\, u_y + m\, u_z + n\, u_t + p\, u = q \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde $a, b, \ldots, q$ son funciones de (x,y,z,t), se escribe en la forma (1.17) con

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & e & f & g \\ e & b & h & i \\ f & h & c & j \\ g & i & j & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -a_x - e_y - f_z - g_t + k \\ -e_x - b_y - h_z - i_t + l \\ -f_x - h_y - c_z - j_t + m \\ -g_x - i_y - j_z - d_t + n \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_t \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

donde nuevamente utilizamos la notación de la matriz transpuesta en $\boldsymbol{L}$. Claramente se tiene una generalización para cualquier número de variables. Sin embargo, la clasificación en términos del determinante sólo se generaliza para el caso parabólico. Esto es, si $\det(\boldsymbol{Q}) = 0$ entonces la ecuación es de tipo parabólico. Los casos elíptico e hiperbólico se diferencian en el signo de los valores propios de $\boldsymbol{Q}$. La clasificación general es

Teorema 2. *La EDP de segundo orden lineal*

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{\partial} + \phi \right) u = \psi$$

es de tipo

(i) *Elíptico si todos los valores propios de* $\boldsymbol{Q}$ *tienen el mismo signo*

(ii) *Hiperbólico si al menos un valor propio de* $\boldsymbol{Q}$ *tiene signo opuesto al del resto*

(iii) *Parabólico si al menos un valor propio de* $\boldsymbol{Q}$ *es cero*

Nota: Dado que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Más aún, los casos elíptico e hiperbólico corresponden a todos los valores propios distintos de cero. Finalmente, cuando los coeficientes que forman $\boldsymbol{Q}$ son funciones, el tipo de la ecuación puede ser diferente en distintas regiones del espacio.

1.2 Delta de Dirac

1.2.1 Distribución Rectangular

La "función" delta de Dirac puede definirse en términos de la función

$$d_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } \; -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } \; x < -a, \;\; x > a \end{cases} \tag{1.22}$$

Nótese que para cada $a > 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_a(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx = \frac{1}{2a}\,(2a) = 1 \tag{1.23}$$

Si se toma el límite de $d_a(x)$ cuando $a \to 0$ y se define ésta como la delta de Dirac, es decir

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} d_a(x) \tag{1.24}$$

entonces puede decirse de manera informal que

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

y además que se tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \tag{1.26}$$

De manera más general, si se aplica una traslación $x \to x - x_0$, se tiene

$$d_a(x - x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & \text{si } x < x_0 - a,\ x > x_0 + a \end{cases} \tag{1.27}$$

esto es, la función $d_a(x - x_0)$ está centrada en x_0. De esta forma puede definirse

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a\to 0} d_a(x - x_0) \tag{1.28}$$

que de manera informal es

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases} \tag{1.29}$$

y que claramente preserva la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\,dx = 1 \tag{1.30}$$

Un resultado importante, que generaliza el anterior es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0) \tag{1.31}$$

siempre que f sea una función continua en x_0 y acotada en todo $\mathbb{R}$. La prueba de esta propiedad puede darse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\lim_{a\to 0} d_a(x-x_0)\right] dx \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d_a(x-x_0)\,dx \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\,\frac{1}{2a}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a} \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{F(x_0+a)-F(x_0-a)}{2a}, \qquad \text{donde} \quad F' = f \\
&= F'(x_0) \\
&= f(x_0)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

donde se ha supuesto que $\int \lim(\cdots) = \lim \int(\cdots)$. Es decir, que pueden conmutarse el límite con la integral. Esto está justificado siempre que la función $f(x)$ sea acotada en todo $\mathbb{R}$ y continua en el punto x_0.

Otra propiedad, no encontrada muy seguido en la literatura, pero muy útil para funciones continuas f definidas sólo en un intervalo (a,b) es

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x_0 \notin (a,b) \end{cases} \tag{1.33}$$

la cual se sigue directamente de la propiedad (1.31) y del hecho que $\delta(x-x_0) = 0$ para toda $x \neq x_0$.

1.2.2 Otras Representaciones

Si se considera como propiedad fundamental para definir *la* delta de Dirac a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0) \tag{1.34}$$

además de $\delta(x - x_0) = 0 \; \forall \; x \neq x_0$, se encuentra que hay *una infinidad* de representaciones para esta función. En particular, cualquier *densidad de probabilidad unimodal* (i.e. con un solo máximo) en el límite en que la *varianza* tiende a cero dará una representación *legítima*. Por ejemplo

$$(i) \qquad \delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{[Gaussiana]}$$

$$(ii) \qquad \delta(x - x_0) = \lim_{b \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x - x_0)^2 + b^2} \qquad \text{[Lorentziana]}$$

son representaciones alternativas. Pueden darse otras formas en términos de funciones como la exponencial:

$$(iii) \qquad \delta(x - x_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2a}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x-x_0|}{a}}$$

Veremos posteriormente que a partir de la *transformada de Fourier* puede encontrarse la representación integral

$$(iv) \qquad \delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ik(x-x_0)} dk$$

la cual se obtiene al transformar $\delta(x - x_0)$ (usando la propiedad fundamental) y luego invertir la transformada. Originalmente se encuentra el exponente con signo contrario, pero el cambio de variable $k \to -k$ la pone en la presente forma.

Otras representaciones, con las cuales concluimos esta sección, pueden darse en términos de *series de Fourier*. Por ejemplo

$$(v) \qquad \delta(x - x_0) = \begin{cases} \dfrac{2}{\ell} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x_0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) & \text{si } \; 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{si } \; x < 0, \;\; x > \ell \end{cases}$$

[Serie de Senos]

$$(vi) \qquad \delta(x - x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{2}{\ell} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x_0\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) & \text{si } \; 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{si } \; x < 0, \;\; x > \ell \end{cases}$$

[Serie de Cosenos]

$$(vii) \qquad \delta(x-x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\ell} + \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x-x_0)\Big) & \text{si } \ 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{si } \ x < 0, \ \ x > \ell \end{cases}$$

[Serie de Cosenos y Senos]

donde $x_0 \in (0, \ell)$. O bien

$$(viii) \qquad \delta(x-x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{\ell}(x-x_0)} & \text{si } \ 0 \le x \le \ell \\ 0 & \text{si } \ x < 0, \ \ x > \ell \end{cases}$$

[Serie de Exponenciales Complejas]

Reordenando esta última expresión se ve que se reduce a (vii).

1.3 Integrales Dependientes de un Parámetro

Consideremos un par de integrales útiles, las cuales interpretamos como funciones que dependen de un parámetro (incluido en el integrando). La primera es

$$I(a) = \int \cos(ax)\, dx \tag{1.35}$$

Podemos evaluar directamente la integral para obtener

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) \tag{1.36}$$

donde se ha omitido la constante arbitraria de integración. De hecho, dado que estaremos calculando derivadas de estas funciones, no habrá cambio alguno por esta omisión. Aplicaremos el mismo criterio en lo que resta de esta sección.

El hecho interesante es que como $\cos(ax)$ y $\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$ son funciones de clase C^∞ para toda $a \neq 0$ (independientemente del valor de x), entonces podemos evaluar integrales del tipo $\displaystyle\int x^{2n}\cos(ax)\, dx$ y $\displaystyle\int x^{2n-1}\operatorname{sen}(ax)\, dx$ por simple derivación de la ecuación (1.36). Derivando ambos lados (respecto a a); usando el hecho que $\frac{d}{da}\int(\cdots)dx = \int\frac{d}{da}(\cdots)dx$, se tiene

$$\int -x\operatorname{sen}(ax)\, dx = -\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax) + \frac{x}{a}\cos(ax) \tag{1.37}$$

se sigue entonces que

$$\int x \operatorname{sen}(ax)\, dx = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen}(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) \tag{1.38}$$

Derivando ahora esta ecuación (respecto a a); introduciendo la derivada directamente en el integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos(ax)\, dx &= -\frac{2}{a^3} \operatorname{sen}(ax) + \frac{x}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a^2} \cos(ax) + \frac{x^2}{a} \operatorname{sen}(ax) \\
&= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

De ésta se concluye que

$$\int x^2 \cos(ax)\, dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax) \tag{1.40}$$

Iterando el procedimiento se obtienen más integrales. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
\int \cos(ax)\, dx &= \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax) \\
\int x \operatorname{sen}(ax)\, dx &= \frac{1}{a^2} \operatorname{sen}(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) \\
\int x^2 \cos(ax)\, dx &= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2} \cos(ax) \\
\int x^3 \operatorname{sen}(ax)\, dx &= \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right) \operatorname{sen}(ax) - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right) \cos(ax) \\
\int x^4 \cos(ax)\, dx &= \left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5}\right) \operatorname{sen}(ax) + \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4}\right) \cos(ax) \\
\int x^5 \operatorname{sen}(ax)\, dx &= \left(\frac{5x^4}{a^2} - \frac{60x^2}{a^4} + \frac{120}{a^6}\right) \operatorname{sen}(ax) - \left(\frac{x^5}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{120x}{a^5}\right) \cos(ax)
\end{aligned}$$

De manera análoga, podemos considerar

$$J(a) = \int \operatorname{sen}(ax)\, dx \tag{1.41}$$

a partir de la cual es posible obtener $\int x^{2n-1}\cos(ax)\,dx$ y $\int x^{2n}\operatorname{sen}(ax)\,dx$. Evaluación directa de esta integral da como resultado

$$\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \tag{1.42}$$

donde nuevamente se omite la constante arbitraria.

Derivación iterada (respecto a a) de cada uno de los lados de esta ecuación conduce a

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\frac{1}{a}\cos(ax)\\
\int x\cos(ax)\,dx &= \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax)\\
\int x^2\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos(ax) + \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen}(ax)\\
\int x^3\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos(ax) + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\operatorname{sen}(ax)\\
\int x^4\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5}\right)\cos(ax) + \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4}\right)\operatorname{sen}(ax)\\
\int x^5\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{5x^4}{a^2} - \frac{60x^2}{a^4} + \frac{120}{a^6}\right)\cos(ax) + \left(\frac{x^5}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{120x}{a^5}\right)\operatorname{sen}(ax)
\end{aligned}
$$

Podemos unir ambos resultados para obtener, por una parte

$$
\begin{aligned}
\int \cos(ax)\,dx &= \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) \\
\int x\cos(ax)\,dx &= \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) \\
\int x^2\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2}\cos(ax) \\
\int x^3\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\operatorname{sen}(ax) + \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos(ax) \\
\int x^4\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5}\right)\operatorname{sen}(ax) + \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4}\right)\cos(ax) \\
\int x^5\cos(ax)\,dx &= \left(\frac{x^5}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{120x}{a^5}\right)\operatorname{sen}(ax) + \left(\frac{5x^4}{a^2} - \frac{60x^2}{a^4} + \frac{120}{a^6}\right)\cos(ax)
\end{aligned}
$$

y por la otra

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\frac{1}{a}\cos(ax) \\
\int x\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(ax) \\
\int x^2\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos(ax) + \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen}(ax) \\
\int x^3\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos(ax) + \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen}(ax) \\
\int x^4\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5}\right)\cos(ax) + \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4}\right)\operatorname{sen}(ax) \\
\int x^5\operatorname{sen}(ax)\,dx &= -\left(\frac{x^5}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{120x}{a^5}\right)\cos(ax) + \left(\frac{5x^4}{a^2} - \frac{60x^2}{a^4} + \frac{120}{a^6}\right)\operatorname{sen}(ax)
\end{aligned}
$$

Finalmente, por inducción se encuentra una fórmula para cada una de estas integrales. Si definimos la función[2]

$$p_n(x;a) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k-1}\, n!}{(n-(2k-1))!} \frac{x^{n-(2k-1)}}{a^{2k}} \tag{1.43}$$

donde $[\,m\,]$ denota el mayor entero menor o igual que m y la notación "$p_n(x;a)$" significa que p_n es función de la variable x y del parámetro a (de tal forma que p_n' es la derivada respecto a x), se verifica fácilmente que

$$\int x^n \cos(ax)\, dx \;=\; \frac{1}{a}\left(x^n - p_n'\right) \operatorname{sen}(ax) + p_n \cos(ax) \tag{1.44}$$

$$\int x^n \operatorname{sen}(ax)\, dx \;=\; -\frac{1}{a}\left(x^n - p_n'\right) \cos(ax) + p_n \operatorname{sen}(ax) \tag{1.45}$$

Nota: Se sigue (y se verifica) que el polinomio $p_n(x;a)$ satisface la ecuación

$$p_n'' + a^2 p_n - n x^{n-1} = 0 \tag{1.46}$$

para toda $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esto es, $p_n(x;a)$ es la solución particular a la ecuación no homogénea

$$y''(x) + a^2 y(x) = n x^{n-1} \tag{1.47}$$

Ejercicio 1. *Determine fórmulas para las siguientes integrales:*

(i) $\displaystyle\int x^n\, \mathrm{e}^{ax}\, dx$

(ii) $\displaystyle\int x^n\, \mathrm{e}^{iax}\, dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx$

puede suponerse $a > 0$, *y para la última integral es útil el resultado*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1.48}$$

[2] En forma desarrollada esta función se escribe como

$$p_n(x;a) = n\frac{x^{n-1}}{a^2} - n(n-1)(n-2)\frac{x^{n-3}}{a^4} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\frac{x^{n-5}}{a^6} + \cdots + U$$

donde el último término U es una constante cuando n es impar, y es proporcional a x cuando n es par.

1.4 Series de Fourier

Una función f que satisface $f(x+L)=f(x)$ para toda $x\in\mathbb{R}$ se conoce como función periódica (de periodo L en este caso). Ejemplos conocidos de este tipo de funciones son $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, ambas periódicas (de periodo 2π) ya que $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ para toda $x\in\mathbb{R}$. Nótese que si una función es periódica de periodo L, automáticamente es periódica de periodo $2L$, $3L$, $4L$, etc. Podemos mostrar esto por inducción. Supongamos f periódica (de periodo L) y $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x+nL) &= f(x+(n-1)L+L) \\ &= f(x+(n-1)L) \\ &= f(x+(n-2)L+L) \\ &= f(x+(n-2)L) \\ &\vdots \\ &= f(x+L) \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Al número menor L para el cual se satisface $f(x+L)=f(x)$ para toda $x\in\mathbb{R}$ se le conoce como periodo fundamental. Por ejemplo, el periodo fundamental de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ es 2π, pero para las funciones $\operatorname{sen}(4x)$ y $\cos(4x)$ es $\pi/2$. Geométricamente, el periodo fundamental es la longitud del intervalo más pequeño en el cual la función periódica toma todos sus valores. En este sentido, las funciones constantes pueden considerarse funciones periódicas de periodo fundamental 0.

Las funciones periódicas (digamos de periodo L) pueden ser continuas o tener discontinuidades en cualquier intervalo de longitud L. Si el número de discontinuidades es finito y todas ellas son *removibles* o *de salto*, a esta función se le llama *seccionalmente continua*. El teorema de Fourier hace uso de esta hipótesis.

Teorema 3. *Supóngase que tanto f como f' son seccionalmente continuas en el intervalo $-\ell\le x<\ell$. Supóngase además que f está definida fuera del intervalo $-\ell\le x<\ell$, de modo que es periódica de periodo 2ℓ sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces f tiene* *una representación en serie de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right] \tag{1.50}$$

con los coeficientes dados por las fórmulas de Euler-Fourier

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{1.51}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{1.52}$$

para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$ *La serie de Fourier converge a* $f(x)$ *en todos los puntos donde* f *es continua y a* $[\, f(x+) + f(x-)\,]/2$ *en todos los puntos en los que* f *es discontinua.*

Notas:

(i) Usamos la notación usual: $f(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $f(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

(ii) De la definición, el coeficiente $b_0 = 0$, pero de hecho no aparece en la serie.

(iii) El término constante $a_0/2$ se calcula también con la fórmula de Euler-Fourier y corresponde al valor promedio de la función f sobre el intervalo $[-\ell, \ell\,)$.

(iv) El teorema puede utilizarse también para definir una función periódica en todo $\mathbb{R}$ a partir de una función f seccionalmente continua en $[-\ell, \ell\,)$.

Ejercicio 1. *Muestre que si* f *es una función par en* $[-\ell, \ell\,)$*, entonces su serie de Fourier es de la forma*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{1.53}$$

llamada serie de Fourier de cosenos. Sin embargo, si f *es una función impar en* $[-\ell, \ell\,)$*, entonces su serie de Fourier es de la forma*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{1.54}$$

llamada serie de Fourier de senos; con los coeficientes a_n *y* b_n *dados por las fórmulas de Euler-Fourier.*

Ejercicio 2. *Encuentre la serie de Fourier de las siguientes funciones:*

(i) $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } -\ell \leq x < 0 \\ B & \text{si } \quad 0 \leq x < \ell \end{cases}$ *para* A, B *constantes*

(ii) $g(x) = x$

(iii) $h(x) = \delta(x - x_0)$ *con* $x_0 \in [\,-\ell, \ell\,)$

que se definen como tales en el intervalo $[\,-\ell, \ell\,)$ *y son periódicas en todo* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. *Se tiene la función* f *seccionalmente continua en el intervalo* (a, b), *donde* $a > 0$. *Determine una serie de Fourier que converja a* $[f(x+) + (f(x-)]/2$ *para toda* x *en* (a, b)*:*

(i) *que sólo contenga funciones seno.*

(ii) *que sólo contenga funciones coseno y constante.*

(iii) *que contenga tanto funciones seno como coseno y constante.*

Ejercicio 4. *Encuentre la serie de Fourier de la función definida como*

$$f(x) = \begin{cases} x\,(2a - x) & \text{si } \; 0 \leq x < a \\ a\,(2a - x) & \text{si } \; a \leq x < 2a \end{cases}$$

y que se extiende periódicamente, con periodo $2a$*, fuera del intervalo* $[\,0, 2a)$.

1.4.1 Representación Compleja

Podemos reescribir la serie de Fourier de la función f dada en las ecuaciones (1.50), (1.51) y (1.52) en términos de exponenciales complejas. Usando la relación de Euler

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{1.55}$$

se encuentra directamente que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\,\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right) \tag{1.56}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left(\,\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}\right) \tag{1.57}$$

Introduciendo éstas en (1.50) se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} + \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} - \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \right) \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} + \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \right) - i\frac{b_n}{2} \left(\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} - \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \right) \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \right) \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} + \left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\, \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)\, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \qquad (1.58)
\end{aligned}$$

La primera de estas sumas puede reescribirse (en términos del nuevo índice $m = -n$) como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\, \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x} &= \sum_{m=-\infty}^{-1} (a_{-m} - ib_{-m})\, \mathrm{e}^{-\frac{im\pi}{\ell}x} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-1} (a_m + ib_m)\, \mathrm{e}^{-\frac{im\pi}{\ell}x} \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

donde las igualdades $a_{-m} = a_m$ y $b_{-m} = -b_m$ se siguen directamente de las fórmulas de Euler-Fourier y del hecho que el coseno es par y el seno es impar.

Usando este resultado en (1.58) se obtiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n)\, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} - \frac{1}{2}(a_0 + ib_0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n)\, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \qquad (1.60)
\end{aligned}$$

donde inicialmente hemos usado el hecho que $b_0 = 0$ y para finalizar hemos definido los coeficientes complejos $c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. A partir de las expresiones (1.51) y (1.52) se encuentra

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,dx + i\,\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\Big[\,\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) + i\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,\Big]\,dx \\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x}dx \qquad (1.61)
\end{aligned}$$

De esta forma, la función periódica f definida para $-\ell \leq x < \ell$ puede escribirse también como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{\ell}x} \qquad (1.62)$$

con los coeficientes c_n dados por

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{\ell}x}dx \qquad (1.63)$$

1.4.2 Series Multidimensionales

Funciones periódicas de dos variables; i.e. tales que $f(x+2a,y) = f(x,y+2b) = f(x,y)$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pueden describirse mediante series de Fourier bidimensionales de la forma

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm}\,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{a}x}\,\mathrm{e}^{-\frac{im\pi}{b}y} \qquad (1.64)$$

con los coeficientes c_{nm} dados por

$$c_{nm} = \frac{1}{4ab}\int_{-a}^{a} dx\int_{-b}^{b} dy\, f(x,y)\,\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{a}x}\,\mathrm{e}^{\frac{im\pi}{b}y} \qquad (1.65)$$

Análogamente, funciones periódicas de tres variables; i.e. tales que $f(x+2a,y,z) = f(x,y+2b,z) = f(x,y,z+2c) = f(x,y,z)$ para toda $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pueden describirse mediante series de Fourier tridimensionales de la forma

$$f(x,y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{nml}\,\mathrm{e}^{-\frac{in\pi}{a}x}\,\mathrm{e}^{-\frac{im\pi}{b}y}\,\mathrm{e}^{-\frac{il\pi}{c}z} \qquad (1.66)$$

con los coeficientes c_{nml} dados por

$$c_{nml} = \frac{1}{8abc} \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz\, f(x,y,z)\, \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{a}x}\, \mathrm{e}^{\frac{im\pi}{b}y}\, \mathrm{e}^{\frac{il\pi}{c}z} \tag{1.67}$$

y así sucesivamente. Las representaciones en términos de funciones seno y coseno se encuentran separando las sumas.

Ejercicio 1. *Determine la representación en serie de Fourier de cosenos y senos, análoga al caso unidimensional, para la función $f(x,y)$ definida en el rectángulo $[\,-a,a\,) \times [\,-b,b\,)$ partiendo del desarrollo en exponenciales (1.64)–(1.65).*

1.5 Operadores Lineales

De manera general puede definirse un *operador* como una transformación entre dos espacios. El operador actúa sobre un elemento del dominio y regresa un elemento de la imagen. Para espacios vectoriales; que por lo general son espacios de funciones, un operador lineal $\hat{\mathcal{L}}$ satisface

$$\hat{\mathcal{L}}\,(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1\,\hat{\mathcal{L}}\,(f_1) + c_2\,\hat{\mathcal{L}}\,(f_2) \tag{1.68}$$

para constantes c_1 y c_2, y funciones f_1 y f_2.

Dado que las derivadas e integrales claramente satisfacen la propiedad (1.68), ellas constituyen los ejemplos fundamentales de operadores lineales.

En particular, puede escribirse de manera general

$$\hat{\mathcal{L}}\,\psi = \lambda\,\psi \tag{1.69}$$

que es el *problema de valores propios* para el operador lineal $\hat{\mathcal{L}}$. Resolverlo significa determinar todos los valores constantes λ (valores propios) y funciones ψ (funciones propias) que satisfacen la ecuación (1.69); la cual además puede estar sujeta a condiciones dadas.

1.5.1 Operadores Diferenciales

Para funciones escalares de una variable f_1 y f_2, y constantes c_1 y c_2, se tiene

$$\frac{d}{dx}\,(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1\,\frac{d}{dx} f_1(x) + c_2\,\frac{d}{dx} f_2(x) \tag{1.70}$$

Más generalmente, si

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{1.71}$$

es un polinomio de grado n con $a_i = a_i(x)\ \forall\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\hat{P} := P\left(\frac{d}{dx}\right) = a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n} \tag{1.72}$$

es un operador diferencial lineal pues

$$\begin{aligned}
\hat{P}\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) &= \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n}\right)\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) \\
&= \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n}\right) c_1 f_1(x) \\
&+ \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n}\right) c_2 f_2(x) \\
&= a_0 c_1 f_1(x) + a_1 \frac{d}{dx} c_1 f_1(x) + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n} c_1 f_1(x) \\
&+ a_0 c_2 f_2(x) + a_1 \frac{d}{dx} c_2 f_2(x) + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n} c_2 f_2(x) \\
&= c_1 \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n}\right) f_1(x) \\
&+ c_2 \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n}\right) f_2(x) \\
&= c_1 \hat{P} f_1(x) + c_2 \hat{P} f_2(x)
\end{aligned} \tag{1.73}$$

El uso de la serie de Taylor, en el límite $n \to \infty$, permite definir el operador diferencial lineal asociado a cualquier función suave ya sea algebraica o trascendente.[3] Por ejemplo, dada la función algebraica

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sqrt{1 + x^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 + \cdots
\end{aligned} \tag{1.74}$$

[3] Una función suave es aquella que es infinitamente diferenciable (i.e. de clase C^∞). Las funciones algebraicas son las definidas en términos de un número finito de operaciones algebraicas (suma, producto, potencias y raíces). Funciones trascendentes son las que no son algebraicas.

entonces

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \sqrt{1 + \frac{d^2}{dx^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{8}\frac{d^4}{dx^4} + \frac{1}{16}\frac{d^6}{dx^6} + \cdots \end{aligned} \tag{1.75}$$

es un operador diferencial lineal. Análogamente, si se tiene la función trascendente

$$\begin{aligned} P(x) &= \mathrm{e}^x \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{1.76}$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \mathrm{e}^{d/dx} \\ &= 1 + \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3} + \cdots \end{aligned} \tag{1.77}$$

define otro operador diferencial lineal.

Para funciones de varias variables se definen operadores diferenciales lineales a partir del operador ∇. Por ejemplo, si las funciones son escalares de la forma $f(x, y, z)$ se tiene

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.78}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.79}$$

El primero de ellos es el *gradiente* y el segundo es el *Laplaciano* u operador de Laplace. La generalización para funciones de n variables x_i es directa.

En el caso de funciones vectoriales (campos vectoriales específicamente) de la forma $\vec{F}(x, y, z)$ se tienen

$$\nabla\cdot = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot \tag{1.80}$$

$$\nabla\times = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times \tag{1.81}$$

que corresponden a la *divergencia* y el *rotacional*. Nótese que al aplicar estos operadores directamente a (1.78) se obtiene $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ y $\nabla \times \nabla = \vec{0}$. Es decir, la divergencia del gradiente (de cualquier función escalar) es igual al Laplaciano (de esa función escalar). Análogamente, el rotacional del gradiente (de cualquier función escalar) es siempre el vector cero.

Una generalización del operador de Laplace para funciones $f(x, y, z, t)$ es el operador de D'Alembert (o *D'Alembertiano*)

$$\begin{aligned} \Box &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.82}$$

En la *Mecánica Cuántica* se definen diversos operadores diferenciales lineales, de los cuales los más representativos son el *operador de momento*

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{1.83}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π, y el *operador de energía* (total) o *Hamiltoniano* que para una *partícula* es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \tag{1.84}$$

con m la masa de la partícula y $V(\vec{r}, t)$ su energía potencial.

1.5.2 Transformadas Integrales

En general

$$\mathcal{T}\left\{f(t)\right\} = \int_a^b K(\omega, t) f(t) dt \tag{1.85}$$

es llamada la *transformada integral* de la función f mediante el núcleo K (sobre el intervalo (a,b)). Claramente una transformada integral $\mathcal{T}$ es lineal pues

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\left\{c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\right\} &= \int_a^b K(\omega,t)\left[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\right]dt \\
&= \int_a^b K(\omega,t)c_1 f_1(t)dt+\int_a^b K(\omega,t)c_2 f_2(t)dt \\
&= c_1\int_a^b K(\omega,t)f_1(t)dt+c_2\int_a^b K(\omega,t)f_2(t)dt \\
&= c_1\,\mathcal{T}\left\{f_1(t)\right\}+c_2\,\mathcal{T}\left\{f_2(t)\right\} \qquad (1.86)
\end{aligned}$$

para constantes arbitrarias c_1 y c_2.

Más generalmente, si la función escalar depende de más de una variable, por ejemplo $f(x,t)$, pueden definirse transformadas integrales respecto a las diferentes variables

$$\mathcal{T}_1\left\{f(x,t)\right\} = \int_a^b K_1(\omega,t)f(x,t)dt \qquad (1.87)$$

$$\mathcal{T}_2\left\{f(x,t)\right\} = \int_c^d K_2(k,x)f(x,t)dx \qquad (1.88)$$

donde el sentido de las integraciones es como *integrales parciales*. Ejemplos de estas transformadas integrales serán utilzadas para resolver ecuaciones diferenciales parciales en un capítulo posterior.

Capítulo 2

Método de Separación de Variables

Para resolver problemas de valores iniciales y en la frontera definidos por EDP de segundo orden lineales, quiza la técnica más común es la separación de variables. La idea inicial es suponer que la solución de la EDP se descompone como producto de funciones de las distintas variables independientes. Esto reduce el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, más un conjunto de condiciones de frontera. La solución de estos sistemas está dada, en general, por un número infinito de funciones de tal forma que la solución al problema original resulta ser una expansión de estas funciones (comúnmente llamado *principio de superposición*). Finalmente, partiendo de esta solución superpuesta, se determinan los coeficientes de la expansión de tal manera que se satisfaga la o las condiciones iniciales. En este capítulo se estudian diversos problemas utilizando el método de separación de variables. Se comienza con el problema de difusión de calor unidimensional para distintas condiciones de frontera y luego se generaliza a dimensiones superiores en la geometría rectangular. Se observa que esencialmente las mismas separaciones son válidas para la ecuación de onda, ecuación de Laplace y ecuación de Schrödinger. También se considera la separación de variables para la ecuación de calor en coordenadas cilíndricas y esféricas; que de forma análoga aplica a la ecuación de onda y ecuación de Laplace. Se concluye este capítulo encontrando condiciones fuertes para la separación de variables de la ecuación de segundo orden lineal general y de coeficientes constantes.

2.1 La Ecuación de Calor

2.1.1 Línea con Extremos a Temperatura Cero

Consideremos el problema de valores iniciales y de valores homogéneos en la frontera para la *ecuación de calor en una dimensión*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.1}$$
$$u(0,t) = 0 \tag{2.2}$$
$$u(\ell,t) = 0 \tag{2.3}$$
$$u(x,0) = f(x) \tag{2.4}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$. Físicamente este problema puede interpretarse como la difusión de calor a través de los extremos de una barra lineal que se encuentra aislada en toda su longitud ℓ. El parámetro $\alpha > 0$ está relacionado con la *difusividad térmica* de la línea y depende exclusivamente de las propiedades del material que la conforma. En este contexto α es una constante y la función incógnita $u(x,t)$ representa la temperatura en cada punto x de la línea y en cada tiempo t. En este sentido las condiciones de frontera (2.2)–(2.3), siendo de tipo Dirichlet homogéneas, fijan temperatura cero en los extremos de la línea durante todo el tiempo. La condición inicial (2.4) describe la distribución de temperatura con la que parte la línea al tiempo $t = 0$. A partir de entonces, la dinámica queda gobernada por la EDP (2.1) y las condiciones de frontera (2.2)–(2.3).

Iniciamos proponiendo como solución una función que sea un producto de una función que sólo depende de x y otra que sólo depende de t. Esto es

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.5}$$

Calculamos sus derivadas parciales

$$u_t = X(x)T'(t) \tag{2.6}$$

$$u_x = X'(x)T(t) \tag{2.7}$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t) \tag{2.8}$$

y las sustituimos en (2.1) para obtener

$$XT' = \alpha^2 X''T \tag{2.9}$$

Si dividimos ésta por XT se encuentra

$$\frac{T'}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X} \tag{2.10}$$

Es decir, del lado izquierdo se tiene una función que sólo depende de t y del lado derecho una función que sólo depende de x. Dado que x y t son variables independientes, esta igualdad sólo puede ser posible si ambas funciones son iguales a la misma función constante. Esto es

$$\frac{T'}{T} = \alpha^2 \frac{X''}{X} = A \tag{2.11}$$

donde A es una constante (compleja en general) por determinar. Tomando cada una de las igualdades por separado se tienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias a resolver

$$\frac{X''}{X} = \frac{A}{\alpha^2} = B \tag{2.12}$$

$$\frac{T'}{T} = A \tag{2.13}$$

Ahora, usando la propuesta (2.5) en las condiciones de frontera (2.2) y (2.3), buscando soluciones no triviales $X(x) \not\equiv 0$ y $T(t) \not\equiv 0$, se tiene

$$X(0) = 0 \tag{2.14}$$

$$X(\ell) = 0 \tag{2.15}$$

Comencemos por resolver el problema de valores en la frontera para $X(x)$, ecuaciones (2.12), (2.14) y (2.15). De (2.12) se tiene

$$X'' - BX = 0 \tag{2.16}$$

En el caso más general la constante B puede ser compleja ya que A puede ser compleja. Se tiene un comportamiento distinto en (2.16) sólo en los casos $B = 0$ y $B \neq 0$.

Caso (i) $B = 0$. La ecuación (2.16) se escribe como

$$X'' = 0 \tag{2.17}$$

Integrándola dos veces se obtiene su solución general

$$X(x) = c_1 x + c_2 \tag{2.18}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias que pueden ser complejas. Usando las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) se encuentra

$$0 = X(0) = c_2 \tag{2.19}$$

$$0 = X(\ell) = c_1 \ell + c_2 \tag{2.20}$$

Dado que $\ell > 0$, la única solución a este sistema es

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{2.21}$$

Esto es, la única solución posible para $B = 0$ es la solución trivial $X(x) \equiv 0$.

Caso (ii) $B \neq 0$. Las soluciones fundamentales de la ecuación (2.16) son

$$X_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \tag{2.22}$$

$$X_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

donde λ_1 y λ_2 denotan las dos raíces cuadradas distintas del complejo B. Esto es, λ_1 y λ_2 son números complejos distintos que satisfacen $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = B$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

La solución general de (2.16) es en este caso

$$X(x) = c_1 X_1 + c_2 X_2 \tag{2.24}$$

$$= c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{2.25}$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias (complejas en general).

Usando las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) se obtiene respectivamente

$$0 = X(0) = c_1 \mathrm{e}^0 + c_2 \mathrm{e}^0 = c_1 + c_2 \tag{2.26}$$

$$0 = X(\ell) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \ell} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \ell} \tag{2.27}$$

De (2.26) se tiene que $c_2 = -c_1$. Al sustituir ésto en (2.27) se encuentra

$$c_1 \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 \ell} - \mathrm{e}^{\lambda_2 \ell} \right) = 0 \tag{2.28}$$

Luego, dado que $\ell > 0$, las únicas soluciones posibles a esta ecuación son $c_1 = 0$ (y por lo tanto $c_2 = 0$) o bien $\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{2n\pi}{\ell} i$ para algún entero n. Si $c_1 = c_2 = 0$ entonces de (2.24) se tiene que $X(x) \equiv 0$ (i.e. la solución trivial). En el otro caso, dado que λ_1 y λ_2 son las raíces cuadradas de B, de $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ se sigue que $\lambda_1 = -\lambda_2$. Al introducir esta restricción en $\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{2n\pi}{\ell} i$ se obtiene $\lambda_2 = \frac{n\pi}{\ell} i$ y $\lambda_1 = -\frac{n\pi}{\ell} i$. Finalmente, utilizando $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = B$ se llega a que los únicos valores complejos de B compatibles con la ecuación (2.16) para $B \neq 0$ son

$$B = -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \tag{2.29}$$

con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Regresando a las soluciones fundamentales (2.22) y (2.23), utilizando $\lambda_2 = \frac{n\pi}{\ell} i$ y $\lambda_1 = -\frac{n\pi}{\ell} i$, se tiene

$$X_1 = \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{\ell} ix} \tag{2.30}$$

$$X_2 = \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{\ell} ix} \tag{2.31}$$

las cuales pueden reemplazarse por las funciones reales

$$\tilde{X}_1 = \frac{1}{2}(X_2 + X_1) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \tag{2.32}$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{1}{2i}(X_2 - X_1) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \tag{2.33}$$

y por lo tanto su solución general es

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \tilde{X}_1 + c_2 \tilde{X}_2 \\ &= c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Usando las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) se obtiene

$$0 = X(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1 \tag{2.35}$$

$$0 = X(\ell) = c_1 \cos(n\pi) + c_2 \operatorname{sen}(n\pi) = (-1)^n c_1 \tag{2.36}$$

De ambas se tiene $c_1 = 0$ y c_2 arbitraria. Al introducirlas en (2.34) se encuentra que la única solución no trivial a la ecuación (2.16) que satisface las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) es cualquier múltiplo escalar de la función

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.37}$$

Queda por determinar la función $T(t)$ que satisface (2.13). Esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden puede escribirse como

$$T' - AT = 0 \tag{2.38}$$

con $A = B\alpha^2 = -n^2\pi^2\alpha^2/\ell^2$, fijado por la solución $X(x)$, para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ La solución general de (2.38) es cualquier múltiplo escalar de la función

$$T(t) = \mathrm{e}^{At} \tag{2.39}$$

(se excluye la función constante del caso $A = 0$). Utilizando $A = -n^2\pi^2\alpha^2/\ell^2$ se encuentra la solución

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.40}$$

Puede verificarse sin mayor complicación que el producto $X(x)T(t)$ de las funciones (2.37) y (2.40) es solución de la ecuación (2.1). Como se tiene un producto diferente para cada valor del entero (no cero) n, podemos denotar

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.41}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.42}$$

cada una de las cuales satisface (2.1). Además, como todas ellas satisfacen las condiciones de frontera homogéneas (2.2) y (2.3), entonces la combinación lineal general

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, u_n(x,t) \tag{2.43}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.44}$$

satisface tanto la ecuación diferencial parcial (2.1) como las condiciones de frontera (2.2)–(2.3) para constantes arbitrarias a_n. Nótese que, para simplificar la notación, hemos agregado el término de la suma correspondiente a $n = 0$, pero éste es cero pues $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = 0$.

Podemos simplificar la forma de esta solución. Primero separamos las sumas

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.45}$$

Ahora, en la primera cambiamos el índice $m = -n$ con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} \operatorname{sen}\left(\frac{-m\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{(-m)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} && (2.46)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-a_{-m}) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{m^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} && (2.47) \end{aligned}$$

que al combinar con la segunda produce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{-n}) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.48}$$

Usando el hecho que los coeficientes a_n son arbitrarios, podemos renombrar $a_n - a_{-n}$ como nuevos coeficientes b_n (también arbitrarios), con lo cual se obtiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.49}$$

Falta solamente incluir la condición inicial (2.4). Evaluando (2.49) en $t = 0$ se tiene

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \tag{2.50}$$

donde hemos hecho el cambio de índice mudo $n = m$. Multiplicando esta ecuación por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ e integrando ambos lados sobre $[0,\ell]$ se obtiene

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.51}$$

donde ahora estamos suponiendo que la suma converge[1] y por lo tanto que podemos usar $\int \sum^{\infty} = \sum^{\infty} \int$. Usando el hecho que

$$\int_0^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell}{2}\,\delta_{mn} \tag{2.52}$$

con δ_{mn} la delta de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{2.53}$$

que mostraremos en un ejercicio posterior, se encuentra de (2.51) que

$$\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, \frac{\ell}{2}\,\delta_{mn} \tag{2.54}$$

Llevando a cabo la suma, con ayuda de (2.53), se encuentra

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.55}$$

Esto es, los coeficientes b_n del desarrollo (2.50), llamado *serie de Fourier de senos* de la función $f(x)$, están dados por (2.55) para toda $n = 1, 2, \ldots$

Concluimos entonces que la solución al problema de valores iniciales y valores homogéneos en la frontera para la ecuación de calor definido en las ecuaciones (2.1)–(2.4) es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.56}$$

con los coeficientes b_n dados en (2.55).

Ejemplo 1. *Demuestre que la función $u(x,t)$ dada por (2.56) con los coeficientes b_n definidos en (2.55) es solución al problema de valores iniciales y valores homogéneos en la frontera para la ecuación de calor definido en las ecuaciones (2.1)–(2.4).*

Solución. Primero mostremos que (2.56) satisface la ecuación de calor (2.1) para coeficientes arbitrarios b_n. Para ello simplemente calculamos las derivadas

[1] Por el teorema de Fourier; enunciado en la Sección 1.4, sabemos que la suma infinita en (2.50) converge siempre que f sea seccionalmente continua en $[0, \ell]$.

parciales u_t y u_{xx}. Esto es[2]

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.57}$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) b_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.58}$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.59}$$

De (2.57) y (2.59) se observa que $\alpha^2 u_{xx} = u_t$. Es decir, la función (2.56) satisface la ecuación de calor (2.1) independientemente de los valores de los coeficientes b_n.

Ahora mostremos que (2.56) satisface las condiciones de frontera homogéneas (2.2) y (2.3) independientemente de los coeficientes b_n. Para ver esto evaluamos $u(x,t)$ respectivamente en $x = 0$ y en $x = \ell$. Se tiene

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(0)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} = 0 \tag{2.60}$$

$$u(\ell,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} = 0 \tag{2.61}$$

Finalmente, mostremos que (2.56), con los coeficientes b_n dados por (2.55), satisface la condición inicial (2.4). Para esto simplemente evaluamos $u(x,t)$ en $t = 0$. Se tiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.62}$$

y como los coeficientes b_n están dados por

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.63}$$

[2] La primera derivación dentro de la suma infinita en (2.56) está justificada siempre que ésta converja a una función continua de los argumentos (x,t) en todo el semiplano $t > 0$. Esto se tendrá siempre que la distribución inicial de temperatura f sea continua en $[0,\ell]$. Aparentemente, sería necesario además que $f(0) = f(\ell) = 0$, pero en realidad las condiciones de frontera $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ proveen esta condición. Para la segunda derivación se requiere continuidad de la primera derivada; lo cual se tiene siempre que f' sea continua en $[0,\ell]$ o, equivalentemente, que f sea diferenciable en $[0,\ell]$.

para toda $n = 1, 2, \ldots$, entonces la suma en (2.62) es precisamente el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[0, \ell]$. Es decir

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.64}$$

con lo cual mostramos que esta $u(x,t)$ es solución al problema en cuestión.

Ejemplo 2. *Determine la solución al problema de valores iniciales y de valores homogéneos en la frontera para la ecuación de calor unidimensional*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\ell,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

para $0 < x < \ell$ *y* $t > 0$, *si la condición inicial está dada respectivamente por las funciones*

(i) $f(x) = A, \quad A = \text{constante}$

(ii) $f(x) = \ell x - x^2$

(iii) $f(x) = A\, \mathrm{e}^{\sigma x}$

(iv) $f(x) = h(x)\delta(x-a), \quad a \in (0, \ell)$

Solución. La solución a este problema para $f(x)$ arbitraria está dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.65}$$

con los coeficientes b_n

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.66}$$

Calculemos los coeficientes para cada función particular.

En el caso (i) $f(x) = A$ es una función constante. Por lo tanto los coeficientes b_n son

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\
&= \frac{2A}{\ell}\int_0^\ell \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \\
&= -\frac{2A}{\ell}\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell \\
&= -\left(\frac{2A}{n\pi}\right)[\cos(n\pi) - \cos(0)] \\
&= \left(\frac{2A}{n\pi}\right)[1-(-1)^n] \\
&= \begin{cases} \dfrac{4A}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Esto es

$$b_{2k-1} = \frac{4A}{(2k-1)\pi} \tag{2.68}$$

$$b_{2k} = 0 \tag{2.69}$$

para $k = 1, 2, \ldots,$ de tal forma que la solución en este caso es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4A}{(2k-1)\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\
&= \left(\frac{4A}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

En el caso (ii) $f(x) = \ell x - x^2$. Por lo tanto los coeficientes b_n son

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \left(\ell x - x^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{2.71}$$

separando las integrales y llevando a cabo la integración por partes se obtiene

$$\int_0^\ell x \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx = \frac{\ell^2}{n\pi}\,(-1)^{n+1} \tag{2.72}$$

$$\int_0^\ell x^2 \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx = 2\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^3 [\,(-1)^n - 1\,] + \left(\frac{\ell^3}{n\pi}\right)(-1)^{n+1} \tag{2.73}$$

de donde

$$b_n = \frac{4\ell^2}{(n\pi)^3}\,[\,1-(-1)^n\,] \tag{2.74}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8\ell^2}{(n\pi)^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{2.75}$$

Esto es

$$b_{2k-1} = \left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)^3 \ell^2 \tag{2.76}$$

$$b_{2k} = 0 \tag{2.77}$$

para $k = 1, 2, \ldots,$ de tal forma que la solución en este caso es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)^3 \ell^2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\ &= \left(\frac{8\ell^2}{\pi^3}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k-1)^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \end{aligned} \tag{2.78}$$

En el caso (iii) $f(x) = A\,\mathrm{e}^{\sigma x}$. Por lo tanto los coeficientes b_n son

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell A\,\mathrm{e}^{\sigma x} \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx \tag{2.79}$$

Usando integración por partes podemos calcular la integral indefinida general para obtener

$$\int \mathrm{e}^{\sigma x} \operatorname{sen}(\kappa x)\, dx = \left(\frac{\kappa}{\sigma^2+\kappa^2}\right)\Big[\,\frac{\sigma}{\kappa}\operatorname{sen}(\kappa x) - \cos(\kappa x)\Big]\,\mathrm{e}^{\sigma x} + C \tag{2.80}$$

que al evaluar en $x = \ell$ y $x = 0$ para $\kappa = (n\pi/\ell)$ da el resultado

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \mathrm{e}^{\sigma x} \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,dx &= \left(\frac{n\pi\ell}{\sigma^2\ell^2 + n^2\pi^2}\right)\Big[\cos(0)\,\mathrm{e}^0 - \cos(n\pi)\,\mathrm{e}^{\sigma\ell}\Big] \\
&= \left(\frac{n\pi\ell}{\sigma^2\ell^2 + n^2\pi^2}\right)\Big[1 + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\sigma\ell}\Big] \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

Se sigue que los coeficientes b_n son

$$b_n = \left(\frac{2n\pi A}{\sigma^2\ell^2 + n^2\pi^2}\right)\Big[1 + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\sigma\ell}\Big] \qquad (2.82)$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, la solución en este caso es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi A}{\sigma^2\ell^2 + n^2\pi^2}\right)\Big[1 + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\sigma\ell}\Big]\ \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\
&= 2\pi A\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sigma^2\ell^2 + n^2\pi^2}\right)\Big[1 + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\sigma\ell}\Big]\ \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t}
\end{aligned} \qquad (2.83)$$

Finalmente, en el caso (iv) $f(x) = h(x)\,\delta(x-a)$, con $a \in (0,\ell)$, δ la delta de Dirac y h una función acotada en $(0,\ell)$ y continua en a. Los coeficientes b_n son en este caso

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(x)\,\delta(x-a)\,\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,dx \qquad (2.84)$$

La integral puede calcularse sin esfuerzo alguno usando la propiedad

$$\int_0^\ell F(x)\,\delta(x-a)\,dx = \begin{cases} F(a) & \text{si } a \in (0,\ell) \\ 0 & \text{si } a \notin (0,\ell) \end{cases} \qquad (2.85)$$

Se obtiene entonces

$$b_n = \frac{2}{\ell}\,h(a)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}a\Big) \qquad (2.86)$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, la solución para esta condición inicial es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell}\, h(a) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \\ &= \frac{2}{\ell}\, h(a) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \end{aligned} \tag{2.87}$$

2.1.2 Línea con Extremos a Temperaturas Constantes T_1 y T_2

Consideremos ahora el problema de valores iniciales y de valores constantes T_1 y T_2 en los extremos de la línea para la *ecuación de calor en una dimensión*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.88}$$

$$u(0,t) = T_1 \tag{2.89}$$

$$u(\ell,t) = T_2 \tag{2.90}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.91}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$. Nuevamente suponemos la constante $\alpha > 0$.

De la interpretación física del problema como una línea (aislada en toda su longitud ℓ) que disipa o absorbe calor por sus extremos, los cuales se encuentran a temperatura constante T_1 y T_2 respectivamente, esperamos que después de un tiempo suficientemente largo τ la línea tenga una distribución de temperatura en equilibrio la cual ya no depende del tiempo. Esto es, esperamos que

$$u(x,t) \to v(x) \quad \text{para} \quad t > \tau \tag{2.92}$$

En este régimen la ecuación (2.88) se traduce en

$$v''(x) = 0 \tag{2.93}$$

y las condiciones de frontera (2.89) y (2.90) en

$$T_1 = u(0,t) = v(0) \tag{2.94}$$

$$T_2 = u(\ell,t) = v(\ell) \tag{2.95}$$

La solución general a la ecuación (2.93) es

$$v(x) = c_1\, x + c_2 \tag{2.96}$$

al imponer las condiciones (2.94)–(2.95) se obtiene

$$T_1 = v(0) = c_2 \tag{2.97}$$
$$T_2 = v(\ell) = c_1\, \ell + c_2 \tag{2.98}$$

de donde

$$c_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ell} \tag{2.99}$$
$$c_2 = T_1 \tag{2.100}$$

y por lo tanto la solución de equilibrio es

$$v(x) = \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x + T_1 \tag{2.101}$$

Ahora, para tiempos cercanos a $t = 0$, la temperatura $u(x,t)$ en la línea realmente será una función tanto de x como de t. La forma más sencilla que podemos proponer como solución para toda $x \in (0, \ell)$ y toda $t > 0$ es

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x) \tag{2.102}$$

donde $w(x,t) \to 0$ para $t > \tau$. Al calcular las derivadas parciales de ésta e introducirlas en la ecuación de calor (2.88) se obtiene

$$w_t = \alpha^2 \left(w_{xx} + v''\right) \tag{2.103}$$

usando la forma (2.101), que obtuvimos para la distribución de temperaturas en equilibrio, se sigue que $v''(x) \equiv 0$ para todo $t > 0$ de tal manera que la ecuación anterior se reduce a

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} \tag{2.104}$$

para todo $t > 0$. Esto es, si la función (2.102) es solución de la ecuación (2.88), entonces la función $w(x,t)$ debe satisfacer la ecuación de calor.

Empleando la propuesta (2.102) en las condiciones de frontera (2.89) y (2.90) se obtiene respectivamente

$$T_1 = u(0,t) = w(0,t) + v(0) \tag{2.105}$$

$$T_2 = u(\ell,t) = w(\ell,t) + v(\ell) \tag{2.106}$$

pero de (2.101) se tiene que $v(0) = T_1$ y $v(\ell) = T_2$, así que las ecuaciones anteriores se traducen en

$$w(0,t) = 0 \tag{2.107}$$

$$w(\ell,t) = 0 \tag{2.108}$$

Con esto se tiene que la función $u(x,t)$ en (2.102) satisface las condiciones de frontera (2.89)–(2.90) siempre que $w(x,t)$ satisfaga las condiciones de frontera homogéneas (2.107)–(2.108).

Ahora, el problema de valores homogéneos en la frontera para la ecuación de calor es precisamente el que resolvimos en la sección anterior. En consecuencia, podemos escribir directamente la solución

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.109}$$

A partir de (2.102) y (2.101) se tiene entonces que la solución al problema original es

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.110}$$

falta solamente fijar los coeficientes b_n de tal forma que esta función satisfaga (2.91). Imponiendo tal condición en (2.110) se encuentra

$$f(x) = u(x,0) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.111}$$

Escrito de otra forma

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.112}$$

lo cual nos dice que en este caso b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos para la función a la izquierda de (2.112). Es decir

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell} \right) x \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) dx \tag{2.113}$$

En conclusión, se tiene la solución al problema de valores iniciales y valores constantes en la frontera para la ecuación de calor definido en las ecuaciones (2.88)–(2.91):

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell} \right) x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2} \right) t} \tag{2.114}$$

con los coeficientes b_n dados en (2.113).

Ejemplo 1. *Demuestre que la función $u(x,t)$ dada por (2.114) con los coeficientes b_n definidos en (2.113) es solución al problema de valores iniciales y de valores constantes T_1 y T_2 en los extremos de la línea para la ecuación de calor definido en las ecuaciones (2.88)–(2.91).*

Solución. Que la función $u(x,t)$ satisface la ecuación de calor (2.88) se ve directamente calculando las derivadas parciales. La justificación para derivar dentro de la suma infinita se encuentra en la nota al pie de página número 2 de este capítulo (la nota se aplica en este caso a la solución $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ con la condición inicial $w(x,0) = f(x) - v(x)$). Se tiene

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2} \right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2} \right) t} \tag{2.115}$$

$$u_x = \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) b_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2} \right) t} \tag{2.116}$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2} \right) t} \tag{2.117}$$

De (2.115) y (2.117) se concluye que $\alpha^2 u_{xx} = u_t$.

Las condiciones de frontera se verifican por evaluación directa:

$$u(0,t) = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(0)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} = T_1 \tag{2.118}$$

$$u(\ell,t) = T_2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} = T_2 \tag{2.119}$$

Finalmente, la condición inicial se encuentra evaluando u en $t = 0$. Es decir

$$u(x,0) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.120}$$

ahora como los coeficientes b_n están dados por

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.121}$$

para toda $n = 1, 2, \ldots,$ entonces la suma en (2.120) es precisamente el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{\ell}\right) x$ definida en el intervalo $(0, \ell)$. Es decir

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.122}$$

Se sigue entonces que $u(x,t)$ es solución al problema en cuestión.

Ejemplo 2. *Use el método de separación de variables directamente para determinar la solución al problema de valores iniciales y de valores constantes T_1 y T_2 en los extremos de la línea para la ecuación de calor en una dimensión*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.123}$$

$$u(0,t) = T_1 \tag{2.124}$$

$$u(\ell,t) = T_2 \tag{2.125}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.126}$$

definido para $0 < x < \ell$ *y* $t > 0$.

Solución. La propuesta para separación de variables es la misma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.127}$$

al introducirla en la ecuación (2.123) produce el sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'' - BX = 0 \tag{2.128}$$

$$T' - AT = 0 \tag{2.129}$$

con A la constante de separación de variables (aún por determinar) y $B = A/\alpha^2$. Si se imponen ahora las condiciones de frontera (2.124)–(2.125) se encuentra

$$X(0)\,T(t) = T_1 \tag{2.130}$$

$$X(\ell)\,T(t) = T_2 \tag{2.131}$$

las cuales son posibles sólo para $T(t)$ una función constante. Ahora, para tener compatibilidad con (2.129) se requiere que $T(t) \equiv 0$ cuando $A \neq 0$ (esto conduce a la solución trivial $u(x,t) \equiv 0$) o bien $T(t)$ cualquier constante cuando $A = 0$. Podemos fijar, sin pérdida de la generalidad,[3] $T(t) \equiv 1$ para $A = 0$ con lo cual (2.130) y (2.131) se convierten en

$$X(0) = T_1 \tag{2.132}$$

$$X(\ell) = T_2 \tag{2.133}$$

y, como $B = A/\alpha^2$, la ecuación (2.128) se simplifica a

$$X'' = 0 \tag{2.134}$$

La solución a este problema de valores en la frontera es

$$X(x) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x \tag{2.135}$$

válida para $A = 0$ y $T(t) \equiv 1$. Esto es, para la constante de separación $A = 0$ se tiene la solución independiente del tiempo

$$u_0(x,t) = X(x)T(t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x \tag{2.136}$$

[3] Nótese que si tomamos $T(t) \equiv C$, con $C \neq 0$, tanto las condiciones de frontera como la solución para $X(x)$ se ven alteradas por un factor $1/C$. Sin embargo, este factor se cancela al multiplicar por $T(t) \equiv C$ de tal modo que se obtiene el mismo resultado (2.136) para $u_0(x,t)$.

Falta determinar todas las posibles soluciones para $A \neq 0$. Antes de hacer esto notemos que como la ecuación de calor es lineal, entonces cualquier combinación lineal de todas esas soluciones nuevamente será solución. Si denotamos $v(x,t)$ a la solución que resulta de la combinación lineal de todas las demás soluciones (que por consecuencia satisface la ecuación de calor), entonces la solución completa a este problema será

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t) \tag{2.137}$$

Imponiendo las condiciones de frontera (2.124)–(2.125), notando que

$$u_0(0,t) = T_1 \tag{2.138}$$

$$u_0(\ell,t) = T_2 \tag{2.139}$$

se encuentra que $v(x,t)$ satisface las condiciones de frontera homogéneas

$$v(0,t) = 0 \tag{2.140}$$

$$v(\ell,t) = 0 \tag{2.141}$$

Dado que $v(x,t)$ satisface la ecuación de calor y las condiciones de frontera (2.140)–(2.141), podemos escribir directamente su forma

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.142}$$

con los coeficientes b_n aún por ser determinados. Imponiendo la condición inicial (2.126) directamente en (2.137), usando la forma de $u_0(x,t)$ y $v(x,t)$, se obtiene

$$f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.143}$$

lo cual nos dice que b_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos para la función $f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2-T_1}{\ell}\right) x$, y por lo tanto

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left[f(x) - T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.144}$$

Con todo esto, obtenemos nuevamente la solución

$$u(x,t) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell}\right) x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.145}$$

con los coeficientes b_n dados por (2.144) para toda $n = 1, 2, \ldots$

2.1.3 Línea con Extremos Aislados

Consideremos ahora el problema de valores iniciales y de valores homogéneos para u_x (i.e. la razón de cambio de la temperatura respecto a x) en los extremos de la línea para la *ecuación de calor en una dimensión*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.146}$$

$$u_x(0,t) = 0 \tag{2.147}$$

$$u_x(\ell,t) = 0 \tag{2.148}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.149}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$. Nuevamente suponemos la constante $\alpha > 0$. Este problema puede interpretarse físicamente como la difusión de calor en el interior de en una línea de longitud ℓ que se encuentra completamente aislada, y que parte con una distribución inicial de temperatura $f(x)$.

Usando el método de separación de variables y haciendo un análisis análogo al de la Sección 2.1 se encuentra la solución

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.150}$$

con los coeficientes a_n dados por

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.151}$$

para toda $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ En particular, el término constante es

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\, dx \tag{2.152}$$

es decir, el valor promedio de la distribución inicial de temperatura $f(x)$ sobre toda la longitud de la línea. Nótese que, de la solución (2.150) se encuentra

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} \tag{2.153}$$

esto es, la distribución de temperatura de equilibrio de la línea completamente aislada es el valor promedio de su distribución inicial.

2.1.4 Línea con Flujo de Calor Constante a Través de los Extremos

Consideremos ahora el problema de valores iniciales y de valores constantes para u_x (i.e. la razón de cambio de la temperatura respecto a x) en los extremos de la línea para la *ecuación de calor en una dimensión*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.154}$$

$$u_x(0,t) = F_1 \tag{2.155}$$

$$u_x(\ell,t) = F_2 \tag{2.156}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.157}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$. Nuevamente suponemos la constante $\alpha > 0$. Este problema puede interpretarse físicamente como la difusión de calor en una línea de longitud ℓ, la cual está recibiendo un flujo constante de calor F_1 a través del punto $x = 0$, pero también está disipando un flujo de calor constante F_2 a través del punto $x = \ell$.

Un análisis similar al del Ejemplo 2 de la Sección 2.1.2 muestra que puede encontrarse una solución sólo cuando $F_1 = F_2 = F$ (cualquier otro caso no es compatible con las condiciones de frontera). La solución de equilibrio u_0 que se encuentra es

$$u_0(x,t) = Fx + K \tag{2.158}$$

con K una constante arbitraria. De la propuesta de solución $u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$ se sigue que $v(x,t)$ satisface tanto la ecuación de calor como las condiciones de frontera homogéneas para v_x en los extremos $x = 0$ y $x = \ell$. Usando el resultado de la sección anterior podemos escribir directamente

$$v(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.159}$$

de tal forma que la solución completa es

$$u(x,t) = Fx + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.160}$$

con $a_0 = c_0 + 2K$. Imponiendo la condición inicial se encuentra

$$f(x) - Fx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.161}$$

de donde deducimos que los coeficientes a_n son los del desarrollo en serie de Fourier de cosenos de la función $f(x) - F\,x$, y por lo tanto están dados como

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} [\,f(x) - F\,x\,]\,\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,dx \tag{2.162}$$

para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$ De esta forma la solución a este problema es

$$u(x,t) = F\,x + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.163}$$

con los coeficientes a_n dados por (2.162) y la restricción $F_1 = F_2 = F$.

2.1.5 Línea con Condiciones de Frontera Periódicas: Problema del Círculo

Como último problema unidimensional para la ecuación de calor, consideremos el problema de conducción de calor para la línea que se encuentra aislada térmicamente en toda su longitud 2ℓ, y que satisface

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.164}$$
$$u(-\ell,t) = u(\ell,t) \tag{2.165}$$
$$u_x(-\ell,t) = u_x(\ell,t) \tag{2.166}$$
$$u(x,0) = f(x) \tag{2.167}$$

para $-\ell < x < \ell$ y $t > 0$. De la interpretación que tenemos para la función $u(x,t)$ (como la temperatura en la posición x al tiempo t) se tiene que la condición de frontera (2.165) especifica la misma temperatura en ambos extremos de la línea en todo tiempo. También, dado que en este contexto la derivada u_x representa el flujo de calor, la condición de frontera (2.166) indica que el flujo de calor que sale de un extremo es igual al que entra en el otro extremo. Estas condiciones de frontera se conocen como *contacto térmico perfecto* y *flujo de calor continuo* respectivamente cuando se hacen coincidir los dos extremos, $x = -\ell$ y $x = \ell$, de la línea. En ese sentido, este problema puede interpretarse también como la conducción de calor dentro del círculo de radio ℓ/π que se encuentra aislado térmicamente en todo su perímetro (sólo debe notarse que en este caso x denota la posición a lo largo del círculo y que se considera $-\ell < x < \ell$).

La solución se encuentra empleando la propuesta usual para separación de variables
$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.168}$$
que al introducirse en la ecuación (2.164) conduce al sistema de ecuaciones ordinarias
$$X'' - BX = 0 \tag{2.169}$$
$$T' - AT = 0 \tag{2.170}$$
con A la constante de separación de variables (aún por determinar) y $B = A/\alpha^2$. Imponiendo las condiciones de frontera (2.165)–(2.166) se obtiene
$$X(-\ell) = X(\ell) \tag{2.171}$$
$$X'(-\ell) = X'(\ell) \tag{2.172}$$
donde hemos cancelado $T(t)$ en ambos lados de las ecuaciones suponiendo $T(t) \not\equiv 0$. La posibilidad $T(t) \equiv 0$ claramente conduce a la solución trivial $u(x,t) \equiv 0$. Ahora resolvemos la ecuación (2.169) con las condiciones de frontera (2.171)–(2.172). Consideramos los casos relevantes, $B = 0$ y $B \neq 0$ (complejo):

(i) Caso $B = 0$. La solución general de (2.169) es
$$X(x) = c_1 x + c_2 \tag{2.173}$$
con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Imponiendo las condiciones (2.171)–(2.172) directamente en ésta se concluye que $c_1 = 0$ y c_2 es arbitraria. Por simplicidad elegimos $c_2 = 1$, con lo cual
$$X(x) \equiv 1 \tag{2.174}$$
Ahora $B = 0$ implica $A = B\alpha^2 = 0$. Al introducir esto en la ecuación (2.170) se tiene $T' = 0$, cuya solución también es una constante arbitraria. Elegimos nuevamente
$$T(t) \equiv 1 \tag{2.175}$$
De esta forma, en el caso $B = 0$ se tiene la solución
$$u_0(x,t) = X(x)T(t) \equiv 1 \tag{2.176}$$

(ii) Caso $B \neq 0$. La solución general de (2.169) es

$$X(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{2.177}$$

con $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = B$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, y c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Imponiendo las condiciones (2.171)–(2.172) directamente en ésta se tiene que ya sea que $c_1 = c_2 = 0$ o bien $\lambda_1 = -\lambda_2 = n\pi i/\ell$ para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ El caso $c_1 = c_2 = 0$ conduce a la solución trivial $u(x,t) \equiv 0$ por lo cual se tiene

$$X(x) = c_1 \mathrm{e}^{i\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)} + c_2 \mathrm{e}^{-i\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)} \tag{2.178}$$

o bien, en términos de funciones reales

$$\tilde{X}_n(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \tag{2.179}$$

donde el subíndice n indica que hay una solución para cada entero excepto el cero. Dado que $\lambda_1 = -\lambda_2 = n\pi i/\ell$, se sigue que $B = -n^2\pi^2/\ell^2$. Luego entonces $A = B\alpha^2 = -n^2\pi^2\alpha^2/\ell^2$. Al introducir esto en la ecuación (2.170) se tiene $T' + (n^2\pi^2\alpha^2/\ell^2)T = 0$, cuya solución fundamental es

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.180}$$

De esta forma, en el caso $B \neq 0$ se tiene la solución

$$u_n(x,t) = \tilde{X}_n(x)T_n(t) = \left[\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right] \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.181}$$

para cada $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Con todo esto, la solución general al problema (2.164)–(2.166) es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, u_n(x,t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right] \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \end{aligned} \tag{2.182}$$

con los coeficientes c_0, $a_n = c_n\alpha_n + c_{-n}\alpha_{-n}$ y $b_n = c_n\beta_n - c_{-n}\beta_{-n}$ aún por ser determinados. Imponiendo la condición inicial (2.167) directamente en (2.182), se obtiene

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right] \tag{2.183}$$

lo cual nos dice que a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$, con $c_0 = a_0/2$. Esto es

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.184}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{2.185}$$

En conclusión, se tiene la solución

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right] \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\right)t} \tag{2.186}$$

con los coeficientes a_n y b_n dados por (2.184)–(2.185) para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.1.6 Lámina Rectangular

Consideremos ahora el problema de *conducción de calor en dos dimensiones*:

$$u_t = \alpha^2 \Delta u \tag{2.187}$$

$$u(0,y,t) = 0 \tag{2.188}$$

$$u(a,y,t) = 0 \tag{2.189}$$

$$u(x,0,t) = 0 \tag{2.190}$$

$$u(x,b,t) = 0 \tag{2.191}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) \tag{2.192}$$

definido para $0 < x < a$, $0 < y < b$ y $t > 0$. Hemos introducido aquí la definición del operador de Laplace (o Laplaciano) en dos dimensiones:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \tag{2.193}$$

Nótese que, a pesar que u es función tanto de (x,y) como de t, el Laplaciano sólo actúa en las coordenadas espaciales.

Podemos interpretar este problema como la difusión de calor a través de la frontera de la lámina rectangular $[0, a] \times [0, b]$ cuando esta lámina se encuentra aislada térmicamente tanto en su área superior como en su área inferior (i.e., ¡como una rebanada de jamón en un *sandwich*!). Las condiciones de frontera (2.188)-(2.191) para este problema especifican temperatura constante cero en todo el perímetro del rectángulo.

La propuesta de separación de variables es en este caso

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \tag{2.194}$$

que al sustituir en (2.187) conduce al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T' - AT = 0 \tag{2.195}$$

$$X'' - CX = 0 \tag{2.196}$$

$$Y'' - DY = 0 \tag{2.197}$$

con A, B, C y D constantes que satisfacen $B = C + D$ y $B = A/\alpha^2$, y a las condiciones de frontera

$$X(0) = 0 \tag{2.198}$$

$$X(a) = 0 \tag{2.199}$$

$$Y(0) = 0 \tag{2.200}$$

$$Y(b) = 0 \tag{2.201}$$

Las soluciones de los problemas para X y Y son

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{2.202}$$

$$Y(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{2.203}$$

para toda $n, m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto es, $C = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ y $D = -\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}$ son constantes negativas. Nótese que el caso $C = 0$ (o $D = 0$) no es posible ya que la solución sería $X(x) = c_1x + c_2$ (o $Y(y) = c_1y + c_2$) que produciría $X(x) \equiv 0$ (o $Y(y) \equiv 0$) al imponer las condiciones de frontera.

Se sigue entonces que $B = -\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2$ y como $B = A/\alpha^2$ se tiene

$$A = -\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2\alpha^2 \tag{2.204}$$

con lo cual la solución de (2.195) es

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.205}$$

Con todo esto, se tienen las soluciones

$$u_{nm}(x,y,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.206}$$

de donde, tomando la combinación lineal más general e intercambiando la suma sobre los enteros negativos por una sobre positivos, análogamente al caso unidimensional, se encuentra

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}\, u_{nm}(x,y,t) \tag{2.207}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.208}$$

con los coeficientes b_{nm} aún por ser determinados por la condición inicial (2.192). Evaluando esta $u(x,y,t)$ en $t = 0$ y usando (2.192) se obtiene

$$f(x,y) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} b_{pq}\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right) \tag{2.209}$$

donde hicimos un cambio de índices mudos. Multiplicando ambos lados por el producto $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ e integrando sobre el rectángulo $[0,a]\times[0,b]$ se encuentra

$$\int_0^a dx\int_0^b dy\, f(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \left(\frac{ab}{4}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} b_{pq}\,\delta_{pn}\,\delta_{qm} \tag{2.210}$$

donde hemos usado

$$\int_0^a dx\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{a}{2}\,\delta_{pn} \tag{2.211}$$

$$\int_0^b dy\operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \frac{b}{2}\,\delta_{qm} \tag{2.212}$$

Llevando a cabo las sumas en (2.210) finalmente se encuentra

$$b_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a dx \int_0^b dy\, f(x,y)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{2.213}$$

De esta forma, la solución completa a este problema está dada por la función $u(x,y,t)$ de (2.208) con los coeficientes b_{nm} dados por (2.213), válida para toda $(x,y) \in [0,a] \times [0,b]$ y toda $t \geq 0$.

2.1.7 Bloque Sólido

Consideremos el problema de *conducción de calor en tres dimensiones*:

$$u_t = \alpha^2 \Delta u \tag{2.214}$$
$$u(0,y,z,t) = 0 \tag{2.215}$$
$$u(a,y,z,t) = 0 \tag{2.216}$$
$$u(x,0,z,t) = 0 \tag{2.217}$$
$$u(x,b,z,t) = 0 \tag{2.218}$$
$$u(x,y,0,t) = 0 \tag{2.219}$$
$$u(x,y,c,t) = 0 \tag{2.220}$$
$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z) \tag{2.221}$$

definido para $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$ y $t > 0$. En este caso usamos la definición del operador de Laplace en tres dimensiones:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{2.222}$$

Nuevamente enfatizamos que el Laplaciano actúa solamente en las coordenadas espaciales.

Como está definido, este problema puede interpretarse como la difusión de calor a través de las caras del bloque $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ desde su interior. Las condiciones de frontera (2.215)–(2.220) para este problema son de temperatura constante cero en cada una de las caras del bloque. Esto es, para este caso no se tiene ninguna cara aislada térmicamente. Si se quisiera aislar la cara $x_i =$ constante, habría que imponer la condición $u_{x_i} = 0$ en dicha cara.

Si se usa la propuesta de separación de variables

$$u(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \tag{2.223}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T' - AT = 0 \tag{2.224}$$
$$X'' - CX = 0 \tag{2.225}$$
$$Y'' - DY = 0 \tag{2.226}$$
$$Z'' - EZ = 0 \tag{2.227}$$

con A, B, C y D constantes que satisfacen $B = C + D + E$ y $B = A/\alpha^2$. Las condiciones de frontera que se obtienen son

$$X(0) = 0 \tag{2.228}$$
$$X(a) = 0 \tag{2.229}$$
$$Y(0) = 0 \tag{2.230}$$
$$Y(b) = 0 \tag{2.231}$$
$$Z(0) = 0 \tag{2.232}$$
$$Z(c) = 0 \tag{2.233}$$

Las soluciones de los problemas para X, Y y Z son

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{2.234}$$
$$Y(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{2.235}$$
$$Z(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{c}z\right) \tag{2.236}$$

para toda $n, m, l = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto es, las tres constantes de separación $C = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$, $D = -\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}$ y $E = -\dfrac{l^2\pi^2}{c^2}$ son todas negativas.

Se tiene entonces que $B = -\left(\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2} + \dfrac{l^2}{c^2}\right)\pi^2$ y como $B = A/\alpha^2$, entonces

$$A = -\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}\right)\pi^2\alpha^2 \tag{2.237}$$

con lo cual la solución fundamental de (2.224) es

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.238}$$

En resumen, se tienen las soluciones

$$u_{nml}(x,y,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{c}z\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.239}$$

de donde, tomando la combinación lineal más general e intercambiando la suma sobre los enteros negativos por una sobre positivos, análogamente al caso unidimensional, se encuentra

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{nml}\, u_{nml}(x,y,z,t) \tag{2.240}$$

$$= \sum_{n,m,l} b_{nml}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{c}z\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \tag{2.241}$$

Los coeficientes b_{nml} quedan determinados por la condición inicial (2.221). Esto es

$$f(x,y,z) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} b_{pqr}\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{c}z\right) \tag{2.242}$$

Al multiplicar ésta por las funciones seno, llevar a cabo la integración sobre $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ y luego calcular las sumas, se encuentra

$$b_{nml} = \frac{8}{abc}\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c dz\, f(x,y,z)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{c}z\right) \tag{2.243}$$

De esta forma, la solución completa a este problema está dada por la función $u(x,y,z,t)$ de (2.241) con los coeficientes b_{nml} dados por (2.243), válida para toda $(x,y,z)\in[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ y toda $t\geq 0$.

2.1.8 Hiperbloque Sólido N-dimensional

Finalmente consideremos el problema general, *conducción de calor en el bloque N-dimensional*:

$$u_t = \alpha^2 \Delta u \tag{2.244}$$
$$u(0, x_2, \ldots, x_N, t) = 0 \tag{2.245}$$
$$u(a_1, x_2, \ldots, x_N, t) = 0 \tag{2.246}$$
$$u(x_1, 0, \ldots, x_N, t) = 0 \tag{2.247}$$
$$u(x_1, a_2, \ldots, x_N, t) = 0 \tag{2.248}$$
$$\vdots$$
$$u(x_1, x_2, \ldots, 0, t) = 0 \tag{2.249}$$
$$u(x_1, x_2, \ldots, a_N, t) = 0 \tag{2.250}$$
$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{2.251}$$

definido para $0 < x_1 < a_1$, $0 < x_2 < a_2$, $\ldots$, $0 < x_N < a_N$ y $t > 0$. En este caso usamos la definición del operador de Laplace en N dimensiones:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_N x_N} \tag{2.252}$$

el cual, como hemos puntualizado, actúa únicamente en las coordenadas espaciales.

Como está definido, este problema puede interpretarse como la difusión de calor a través de las caras del hiperbloque $[\,0, a_1\,] \times [\,0, a_2\,] \times \cdots \times [\,0, a_N\,]$ desde su interior. Las condiciones de frontera (2.245)–(2.250) para este problema son de temperatura constante cero en cada una de las caras del hiperbloque. Esto es, para este caso no se tiene ninguna cara aislada térmicamente. Si se quisiera aislar la cara $x_i =$ constante, habría que imponer la condición $u_{x_i} = 0$ en dicha cara.

Si se usa la propuesta de separación de variables

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = X_1(x_1) X_2(x_2) \cdots X_N(x_N) T(t) \tag{2.253}$$
$$= \prod_{i=1}^{N} X_i(x_i) T(t) \tag{2.254}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T' - AT = 0 \tag{2.255}$$

$$X_i'' - C_i X_i = 0 \tag{2.256}$$

con A, B y C_i constantes que satisfacen $B = \sum_{i=1}^{N} C_i$ y $B = A/\alpha^2$. Las condiciones de frontera que se obtienen son

$$X_i(0) = 0 \tag{2.257}$$

$$X_i(a_i) = 0 \tag{2.258}$$

Las soluciones de los problemas para X_i son

$$X_i(x_i) = \operatorname{sen}\left(\frac{n_i \pi}{a_i} x_i\right) \tag{2.259}$$

para toda $n_i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto es, las constantes de separación espaciales son $C_i = -\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i^2}$ y por lo tanto $B = -\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i^2}$. Luego como $B = A/\alpha^2$, se tiene

$$A = -\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{a_i^2}\right) \pi^2 \alpha^2 \tag{2.260}$$

con lo cual la solución fundamental de (2.255) es

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{a_i^2}\right) \pi^2 \alpha^2 t} \tag{2.261}$$

Con todo esto, se tienen las soluciones

$$u_{n_1 \cdots n_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = \prod_{k=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{n_k \pi}{a_k} x_k\right) \mathrm{e}^{-\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{a_i^2}\right) \pi^2 \alpha^2 t} \tag{2.262}$$

de donde, tomando la combinación lineal más general e intercambiando la suma sobre los enteros negativos por una sobre positivos, análogamente al caso unidimensional, se encuentra

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=1}^{\infty} b_{n_1 \cdots n_N}\, u_{n_1 \cdots n_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) \\ &= \sum_{n_1, \ldots, n_N} b_{n_1 \cdots n_N} \prod_{k=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{n_k \pi}{a_k} x_k\right) \mathrm{e}^{-\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i^2}{a_i^2}\right) \pi^2 \alpha^2 t} \end{aligned} \tag{2.263}$$

Los coeficientes $b_{n_1\cdots n_N}$ quedan determinados por la condición inicial (2.251). Esto es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{m_1,\ldots,m_N} b_{m_1\cdots m_N} \prod_{k=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{m_k\pi}{a_k} x_k\right) \tag{2.264}$$

Al multiplicar ésta por las funciones seno, llevar a cabo la integración sobre $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \cdots \times [0, a_N]$ y luego calcular las sumas, se encuentra

$$b_{n_1\cdots n_N} = \frac{2^N}{\prod_{i=1}^N a_i} \int_0^{a_1} dx_1 \cdots \int_0^{a_N} dx_N\, f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \prod_{k=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{n_k\pi}{a_k} x_k\right) \tag{2.265}$$

De esta forma, la solución completa a este problema está dada por la función $u(x_1, x_2, \ldots, x_N, t)$ de (2.263) con los coeficientes $b_{n_1\cdots n_N}$ dados por (2.265), válida para toda $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in [0, a_1] \times [0, a_2] \times \cdots \times [0, a_N]$ y toda $t \geq 0$.

2.1.9 Ecuación de Calor en Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) el operador de Laplace se escribe como

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \left(\rho u_\rho\right)_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + u_{zz} \tag{2.266}$$

de tal modo que la ecuación de calor escrita en estas coordenadas es

$$u_t = \alpha^2 \left[\frac{1}{\rho} \left(\rho u_\rho\right)_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + u_{zz} \right] \tag{2.267}$$

La propuesta de separación de variables

$$u(\rho, \phi, z, t) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)T(t) \tag{2.268}$$

produce

$$u_t = R\Phi Z T' \tag{2.269}$$

$$\Delta u = \frac{\Phi Z T}{\rho} \left(\rho R'\right)' + \frac{RZT}{\rho^2} \Phi'' + R\Phi T Z'' \tag{2.270}$$

de tal modo que al sustituir en la ecuación de calor (2.267) y dividir ambos lados por (2.268) conduce a la primera separación

$$\frac{T'}{T} = \alpha^2 \left[\frac{1}{\rho R} \left(\rho R'\right)' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} \right] = A \tag{2.271}$$

esto es

$$T' - AT = 0 \tag{2.272}$$

$$\frac{1}{\rho R}\left(\rho R'\right)' + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = B \tag{2.273}$$

con $B = A/\alpha^2$. Reescribiendo esta última se tiene la segunda separación

$$\frac{Z''}{Z} = B - \frac{1}{\rho R}\left(\rho R'\right)' - \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = C \tag{2.274}$$

es decir

$$Z'' - CZ = 0 \tag{2.275}$$

$$\frac{1}{\rho R}\left(\rho R'\right)' + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = B - C \tag{2.276}$$

multiplicando por ρ^2 esta última y reagrupando se tiene la separación final

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = (B-C)\rho^2 - \frac{\rho}{R}\left(\rho R'\right)' = D \tag{2.277}$$

esto es

$$\Phi'' - D\Phi = 0 \tag{2.278}$$

$$(B-C)\rho^2 - \frac{\rho}{R}\left(\rho R'\right)' = D \tag{2.279}$$

Al multiplicar esta última por R y calcular la derivada puede reescribirse como

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left[(C-B)\rho^2 + D\right] R = 0 \tag{2.280}$$

En resumen, el método de separación de variables funciona para la ecuación de calor escrita en coordenadas cilíndricas y conduce al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T' - AT = 0 \tag{2.281}$$

$$Z'' - CZ = 0 \tag{2.282}$$

$$\Phi'' - D\Phi = 0 \tag{2.283}$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left[(C-B)\rho^2 + D\right] R = 0 \tag{2.284}$$

con A, B, C y D constantes de separación (que en el caso más general pueden ser complejas). La ecuación para R es una forma de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \qquad y = y(x) \tag{2.285}$$

con $D = -n^2$, $\sqrt{C-B}\,\rho = x$, y $R = y$.

2.1.10 Ecuación de Calor en Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) el operador de Laplace es

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\left(r^2 u_r\right)_r + (\operatorname{sen}\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, u_{\phi\phi}\right] \tag{2.286}$$

de tal modo que la ecuación de calor escrita en estas coordenadas es

$$u_t = \frac{\alpha^2}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\left(r^2 u_r\right)_r + (\operatorname{sen}\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, u_{\phi\phi}\right] \tag{2.287}$$

La propuesta de separación de variables

$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t) \tag{2.288}$$

produce en este caso

$$u_t = R\Theta\Phi T' \tag{2.289}$$

$$\Delta u = \frac{\Theta\Phi T}{r^2}\left(r^2 R'\right)' + \frac{R\Phi T}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' + \frac{R\Theta T}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,\Phi'' \tag{2.290}$$

de tal modo que al sustituir en la ecuación de calor (2.287) y dividir ambos lados por (2.288) conduce a la primera separación

$$\frac{T'}{T} = \alpha^2\left[\frac{1}{r^2 R}\left(r^2 R'\right)' + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta\,\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\Phi}\,\Phi''\right] = A \tag{2.291}$$

esto es

$$T' - AT = 0 \tag{2.292}$$

$$\frac{1}{r^2 R}\left(r^2 R'\right)' + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta\,\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\Phi}\,\Phi'' = B \tag{2.293}$$

con $B = A/\alpha^2$. Multiplicando esta última por r^2 y reescribiéndola se tiene la segunda separación

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)' - Br^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\,\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\,\Phi}\Phi'' = C \tag{2.294}$$

es decir

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)' - Br^2 - C = 0 \tag{2.295}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\,\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\,\Phi}\Phi'' = -C \tag{2.296}$$

multiplicando por $\operatorname{sen}^2\theta$ esta última y reagrupando se tiene la separación final

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' - C\operatorname{sen}^2\theta = D \tag{2.297}$$

esto es

$$\Phi'' - D\Phi = 0 \tag{2.298}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\right)' + C\operatorname{sen}^2\theta + D = 0 \tag{2.299}$$

Después de calcularse las derivadas indicadas y simplificar las ecuaciones ordinarias se obtiene el sistema

$$T' - AT = 0 \tag{2.300}$$

$$r^2R'' + 2rR' - \left(Br^2 + C\right)R = 0 \tag{2.301}$$

$$\Phi'' - D\Phi = 0 \tag{2.302}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta\,\Theta'' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Theta' + \left(C\operatorname{sen}^2\theta + D\right)\Theta = 0 \tag{2.303}$$

con A, B, C y D constantes de separación (que en el caso más general pueden ser complejas). La ecuación para R puede reducirse a una ecuación de Bessel de la forma

$$x^2y'' + xy' + \left[x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]y = 0, \qquad y = y(x) \tag{2.304}$$

con $B = -k^2$, $C = n(n+1)$, $kr = x$, y $R = y/x^{1/2}$. Por otra parte, la ecuación para Θ es una forma de la ecuación asociada de Legendre

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0, \qquad z = z(x) \tag{2.305}$$

con $C = \lambda$, $D = -m^2$, $\cos\theta = x$, y $\Theta = z$. Concluimos nuevamente que el método de separación de variables funciona también para la ecuación de calor escrita en coordenadas esféricas. Notamos, sin embargo, que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es considerablemente más complicado que en el caso de las coordenadas cilíndricas (el cual, a su vez es más complicado que para coordenadas cartesianas).

2.2 La Ecuación de Onda

Consideremos la ecuación de onda en tres dimensiones

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \tag{2.306}$$

con $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ el Laplaciano en coordenadas cartesianas. La propuesta de separación de variables

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t) \tag{2.307}$$

produce

$$u_{tt} = UT'' \tag{2.308}$$
$$\Delta u = T\Delta U \tag{2.309}$$

de tal modo que al sustituir en la ecuación de onda (2.306) y dividir ambos lados por (2.307) conduce a la primera separación

$$\frac{T''}{T} = c^2\frac{\Delta U}{U} = A \tag{2.310}$$

esto es

$$T'' - AT = 0 \tag{2.311}$$
$$\Delta U - BU = 0 \tag{2.312}$$

con $B = A/c^2$. En realidad ésta es la separación general de la ecuación de onda independientemente de si las coordenadas son cartesianas o curvilíneas. La ecuación (2.312) se conoce generalmente como *ecuación de Helmholtz* o en ocasiones también es llamada *ecuación de onda independiente del tiempo*.

A partir de aquí se supone una nueva separación de variables de la forma

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.313}$$

que conduce a la misma separación que la ecuación de calor en tres dimensiones. De este modo, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T'' - AT = 0 \tag{2.314}$$

$$X'' - CX = 0 \tag{2.315}$$

$$Y'' - DY = 0 \tag{2.316}$$

$$Z'' - EZ = 0 \tag{2.317}$$

con A, B, C y D constantes (complejas en el caso más general) que satisfacen $B = C + D + E$ y $B = A/c^2$. Conociendo las condiciones de frontera e iniciales podría resolverse el problema de propagación de ondas en esta geometría rectangular.

Claramente, dado que la única diferencia en la separación de variables entre la ecuación de calor y la ecuación de onda está en la ecuación para el tiempo, se sigue que las mismas separaciones para las variables espaciales en coordenadas cilíndricas y esféricas de la ecuación de calor aplican a la ecuación de onda en tres dimensiones.

2.3 La Ecuación de Laplace

Consideremos la ecuación de Laplace en tres dimensiones

$$\Delta u = 0 \tag{2.318}$$

con $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ el Laplaciano en coordenadas cartesianas. Puede verse la correspondencia de este problema con la parte espacial de la ecuación de onda (2.312) para el valor $B = 0$. La propuesta de separación de variables

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.319}$$

conduce al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' - AX = 0 \tag{2.320}$$

$$Y'' - BY = 0 \tag{2.321}$$

$$Z'' - CZ = 0 \tag{2.322}$$

con A, B y C constantes (complejas en el caso más general) que satisfacen $A + B + C = 0$. Dadas las condiciones de frontera, puede resolverse el problema de determinar el potencial $u(x, y, z)$ en alguna región del espacio $\mathbb{R}^3$.

Nuevamente, dado que las ecuaciones de calor y de onda conducen a la ecuación de Laplace, se sigue que las mismas separaciones para las variables espaciales en coordenadas cilíndricas y esféricas de la ecuación de calor y de onda aplican a la ecuación de Laplace en tres dimensiones.

2.4 La Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger para una partícula que se mueve en el espacio tridimensional es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \hat{H}\psi(\vec{r}, t) \tag{2.323}$$

donde $\hat{H}$ es el operador de energia total o *Hamiltoniano*

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \tag{2.324}$$

con $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ el operador de momento. En general el Hamiltoniano es función tanto del vector posición $\vec{r}$ como del tiempo t, pero para potenciales V independientes del tiempo se tiene $\hat{H}(\vec{r})$. En tal caso la ecuación (2.323) se escribe como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) \tag{2.325}$$

Podemos utilizar la propuesta de separación de variables

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})T(t) \tag{2.326}$$

que al sustituir en (2.325), y luego dividir ambos lados por $\psi = uT$, conduce a la separación

$$i\hbar \frac{T'}{T} = \frac{\hat{H}u}{u} = E \tag{2.327}$$

donde denotamos como E a la constante de separación anticipando que corresponde a la energía total de la partícula. Este sistema puede escribirse como

$$T' + \frac{iE}{\hbar} T = 0 \tag{2.328}$$

$$\hat{H}u - Eu = 0 \tag{2.329}$$

de donde se ve que la variación temporal de la *función de onda* ψ es de la forma

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{2.330}$$

y la variación espacial se encuentra resolviendo el *problema de valores propios para el operador Hamiltoniano*

$$\hat{H}(\vec{r})u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}) \tag{2.331}$$

llamada comúnmente la *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*. Puede verse que los operadores $\hat{H}$ con sentido físico son *Hermitianos* lo cual implica que sus valores propios E son todos reales. El formalismo hasta este punto aplica a (2.323)–(2.324) para $V = V(\vec{r})$.

Ahora, dado que la ecuación (2.331) sólo puede resolverse para potenciales $V(\vec{r})$ particulares, consideraremos un par de ejemplos, pero antes de esto reescribamos (2.331) en una forma más atractiva en el sentido operacional. Utilizando el hecho que $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, de (2.324) se ve inmediatamente que

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \tag{2.332}$$

que al introducir en (2.331) conduce a

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(\vec{r})\right] u(\vec{r}) = 0 \tag{2.333}$$

Veremos más adelante que la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$ quedará completamente determinada cuando se imponga una condición inicial, digamos a $t = 0$.

Ejemplo 1. *Determine la función de onda de una partícula confinada en una caja unidimensional de longitud* $a > 0$. *Esto es, resuelva la ecuación de Schrödinger para una partícula sujeta al potencial*

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; 0 \le x \le a \\ \infty & \text{si } \; x < 0, \;\; x > a \end{cases} \tag{2.334}$$

Solucion. Dado que el potencial no depende del tiempo, podemos aplicar la separación recién obtenida para la posición $\vec{r}$ siendo x. Por lo tanto, la función de onda de esta partícula será $\psi(x,t) = u(x)T(t)$ con

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{2.335}$$

y $u(x)$ satisfaciendo la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]u = 0 \tag{2.336}$$

Para $x < 0$ y $x > a$ la única solución posible es $u(x) \equiv 0$ pues como $V(x) = \infty$ (y la partícula dentro de la caja tiene E finita) si u no fuese idénticamente cero, entonces su segunda derivada debería ser infinita en todo punto donde $u(x) \neq 0$ (lo cual no es posible de las soluciones de la ecuación de segundo orden con coeficientes "constantes").

Ahora, para $0 \le x \le a$ se tiene $V(x) = 0$, de tal forma que la ecuación a resolver es

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u = 0 \tag{2.337}$$

Suponiendo soluciones continuas en $-\infty < x < \infty$, se tienen las condiciones

$$u(0) = 0 \tag{2.338}$$

$$u(a) = 0 \tag{2.339}$$

La solución del problema (2.337)–(2.339) es conocida (la determinamos en la Sección 2.1.1). Se sigue que

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \tag{2.340}$$

$$u(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{2.341}$$

para cada $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Se tiene entonces que la energía E de la partícula confinada en la caja sólo puede tomar uno de los valores

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.342}$$

(i.e. ¡está *cuantizada*!) y que para cada una de estas n se tiene una función de onda asociada

$$\begin{aligned} \psi_n(x,t) &= u_n(x)T_n(t) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \end{aligned} \tag{2.343}$$

para $0 \leq x \leq a$ y $\psi_n(x,t) \equiv 0$ para $x < 0$ y $x > a$. Se requieren funciones de onda *normalizadas*, i.e. tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1 \tag{2.344}$$

así que buscamos un factor constante A que normalice las funciones $\psi_n(x,t)$. Esto es, A que satisfaga

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |A\psi_n(x,t)|^2 \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A\psi_n(x,t)A^*\psi_n^*(x,t)dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x,t)\psi_n^*(x,t)dx \\ &= |A|^2 \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{e}^{\frac{iE_n}{\hbar}t} dx \\ &= |A|^2 \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= |A|^2 \frac{a}{2} \end{aligned} \tag{2.345}$$

Se sigue que $|A|^2 = 2/a$. En general para A complejo se obtiene

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \, \mathrm{e}^{i\varphi} \tag{2.346}$$

con φ una fase real arbitraria. Como la información relevante de la función de onda normalizada se encuentra en su módulo cuadrado, es una costumbre considerar $\varphi = 2n\pi$ de tal forma que los factores de normalización se escogen reales positivos. Con todo esto, para esta partícula confinada en la caja unidimensional se tienen las funciones de onda normalizadas

$$\tilde{\psi}_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \tag{2.347}$$

para $0 \leq x \leq a$ y $\tilde{\psi}_n(x,t) \equiv 0$ para $x < 0$ y $x > a$. Aplicando el principio de superposición obtenemos la solución general

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\tilde{\psi}_n(x,t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\sqrt{\frac{2}{a}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \end{aligned} \tag{2.348}$$

con c_n constantes arbitrarias. Notamos que el sumando con $n = 0$ no contribuye y reescribimos la suma como

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{\frac{2}{a}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \tag{2.349}$$

con $b_n = c_n - c_{-n}$ coeficientes complejos igualmente arbitrarios. Para fijarlos imponemos la condición inicial

$$\psi(x,0) = f(x) \tag{2.350}$$

con f una función normalizada en $0 \leq x \leq a$ (que puede ser compleja) y $f(x) \equiv 0$ para $x < 0$ y $x > a$. Sustituyendo en (2.349) se obtiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{\frac{2}{a}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{2.351}$$

de donde se sigue que

$$b_n\sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \tag{2.352}$$

y por lo tanto

$$b_n = \int_0^a f(x)\sqrt{\frac{2}{a}}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \tag{2.353}$$

De esta forma, la solución al problema de la partícula confinada en la caja unidimensional es

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{2}{a}}\, \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\, \mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \tag{2.354}$$

para $0 \leq x \leq a$ y $\psi(x,t) \equiv 0$ para $x < 0$ y $x > a$, con los coeficientes b_n dados por

$$b_n = \int_0^a f(x)\sqrt{\frac{2}{a}}\, \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\, dx \tag{2.355}$$

y los valores de energía

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.356}$$

Puede verificarse fácilmente que si la función de onda (2.354) está normalizada, entonces los coeficientes b_n satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 1 \tag{2.357}$$

Ejemplo 2. *Resuelva el problema del ejemplo anterior si la condición inicial es*

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2c}} & \text{si } \; x_0 - c \leq x \leq x_0 + c \\ 0 & \text{si } \; x < x_0 - c, \;\; x > x_0 + c \end{cases} \tag{2.358}$$

con x_0 *y* c *constantes positivas que satisfacen* $x_0 - c > 0$ *y* $x_0 + c < a$.

Solución. Sólo es necesario calcular los coeficientes b_n, pero antes de hacerlo vale la pena verificar que la condición inicial efectivamente está normalizada. Calculamos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)\, \psi^*(x,0)\, dx \\ &= \int_{x_0-c}^{x_0+c} \frac{1}{2c}\, dx \\ &= \frac{1}{2c}\,(2c) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.359}$$

que efectivamente indica que la condición inicial está normalizada. Ahora sí, introducimos $f(x) = \psi(x,0)$ en (2.355) para obtener

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_0^a \psi(x,0)\sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,dx \\
&= \int_{x_0-c}^{x_0+c} \frac{1}{\sqrt{2c}}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{ac}}\int_{x_0-c}^{x_0+c} \mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,dx \\
&= -\,\frac{1}{\sqrt{ac}}\Big(\frac{a}{n\pi}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\Big|_{x_0-c}^{x_0+c} \\
&= \sqrt{\frac{a}{c}}\,\frac{1}{n\pi}\Big[\cos\Big(\frac{n\pi}{a}(x_0-c)\Big) - \cos\Big(\frac{n\pi}{a}(x_0+c)\Big)\Big] \\
&= \sqrt{\frac{a}{c}}\,\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x_0\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}c\Big) \qquad (2.360)
\end{aligned}
$$

Sustituyéndolos en (2.354) produce

$$
\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{c}}\,\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x_0\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}c\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \qquad (2.361)
$$

para $0 \le x \le a$ y $\psi(x,t) \equiv 0$ para $x < 0$ y $x > a$, con los valores de energía

$$
E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots \qquad (2.362)
$$

Ejemplo 3. *Determine la función de onda de una partícula confinada en la caja tridimensional* $[\,0,a\,]\times[\,0,b\,]\times[\,0,c\,]$.

Solucion. Haciendo un análisis similar al del Ejemplo 1 anterior se encuentra el *espectro de energía*

$$
E_{nml} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right) \qquad (2.363)
$$

para $n,m,l = 1,\,2,\,\ldots$ y las funciones de onda normalizadas

$$
\tilde{\psi}_{nml}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{8}{abc}}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{m\pi}{b}y\Big)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{l\pi}{c}z\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{iE_{nml}}{\hbar}t} \qquad (2.364)
$$

dentro de la caja y $\tilde{\psi}_{nml}(\vec{r},t) \equiv 0$ fuera de ella. Aplicando el principio de superposición e intercambiando las sumas sobre todos los enteros por sumas sobre enteros positivos se tiene la solución general

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{nml}\,\tilde{\psi}_{nml}(\vec{r},t) \tag{2.365}$$

con b_{nml} constantes complejas arbitrarias. Para la condición inicial

$$\psi(\vec{r},0) = f(\vec{r}) \tag{2.366}$$

con f normalizada dentro de la caja, se encuentran los coeficientes

$$b_{nml} = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz\, f(\vec{r})\,\tilde{\psi}_{nml}(\vec{r},0) \tag{2.367}$$

que igualmente, si la función de onda (2.365) está normalizada, satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |b_{nml}|^2 = 1 \tag{2.368}$$

De esta forma, la cantidad $|b_{nml}|^2$ puede interpretarse como la probabilidad de encontrar a la partícula en el *estado* $\tilde{\psi}_{nml}$ con *energía* E_{nml}.

2.5 Ecuación de Segundo Orden Lineal

Para finalizar este capítulo queremos buscar condiciones fuertes que aseguren separación de variables en la EDP de segundo orden lineal.

2.5.1 Forma General

Para el caso de dos variables se tiene

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g \tag{2.369}$$

con a, b, c, d, e, f y g funciones de (x,y). Proponemos una solución de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{2.370}$$

que al sustituir en (2.369) conduce a

$$a\,X''Y + 2b\,X'Y' + c\,XY'' + d\,X'Y + e\,XY' + f\,XY = g \tag{2.371}$$

Al dividir ésta por XY se obtiene

$$a\,\frac{X''}{X} + 2b\,\frac{X'Y'}{XY} + c\,\frac{Y''}{Y} + d\,\frac{X'}{X} + e\,\frac{Y'}{Y} + f = \frac{g}{XY} \tag{2.372}$$

Primeramente notamos que no puede haber separación a menos que las funciones b y g sean idénticamente cero. En tal caso se tiene

$$a\,\frac{X''}{X} + c\,\frac{Y''}{Y} + d\,\frac{X'}{X} + e\,\frac{Y'}{Y} + f = 0 \tag{2.373}$$

o escrita de otra forma

$$a\,\frac{X''}{X} + d\,\frac{X'}{X} = -c\,\frac{Y''}{Y} - e\,\frac{Y'}{Y} - f \tag{2.374}$$

Esta ecuación estará separada siempre que $a = a(x)$, $d = d(x)$, $c = c(y)$, $e = e(y)$ y $f = f(y)$ (o alternativamente, dejando f del lado izquierdo sería necesario que $f = f(x)$). Con todo esto vemos que condiciones fuertes necesarias para que la ecuación (2.369) sea separable son

(i) $b \equiv 0$ y $g \equiv 0$

(ii) $a = a(x)$, $d = d(x)$, $c = c(y)$ y $e = e(y)$

(iii) $f = f(x)$ ó $f = f(y)$

las cuales se tienen en todas las ecuaciones que hemos estudiado anteriormente.

2.5.2 Coeficientes Constantes

Para el caso de dos variables, la ecuación lineal

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g \tag{2.375}$$

con a, b, c, d, e, f constantes arbitrarias y g función de (x, y), es la forma más general de ecuación no homogénea. Anteriormente vimos que puede escribirse en la forma

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\partial} + f\right) u = g \tag{2.376}$$

donde $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es la matriz simétrica asociada a la parte cuadrática (i.e. de segundo orden en las derivadas de u) y $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ es la matriz renglón asociada a la parte lineal (i.e. de primer orden en las derivadas de u). Estamos empleando además $\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$ con la notación usual de derivada parcial, $\partial_x = \partial/\partial x$, y el superíndice T denotando la matriz transpuesta; i.e. $\boldsymbol{\partial}^T = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}$.

Dado que la matriz $\boldsymbol{Q}$ es simétrica de entradas constantes, siempre es posible encontrar una matriz de rotación $\boldsymbol{R}$ (de entradas constantes) que la diagonalice. Proponemos entonces el cambio de variables

$$\boldsymbol{\partial}' = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\partial} \tag{2.377}$$

con $\boldsymbol{\partial}' = \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix}$.[4] Multiplicando esta ecuación por $\boldsymbol{R}^T$ por la izquierda (usando el hecho que $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ es la matriz identidad) se encuentra

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{R}^T\,\boldsymbol{\partial}' \tag{2.378}$$

Considerando que $\boldsymbol{R}$ es de entradas constantes, podemos transponer esta ecuación para obtener

$$\boldsymbol{\partial}^T = \boldsymbol{\partial}'^T\,\boldsymbol{R} \tag{2.379}$$

Sustituyendo directamente (2.378) y (2.379) en (2.376) conduce a

$$\left(\boldsymbol{\partial}'^T\,\boldsymbol{Q}'\,\boldsymbol{\partial}' + \boldsymbol{L}'\,\boldsymbol{\partial}' + f'\right)U = G \tag{2.380}$$

donde hemos definido $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}^T$, $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}^T$, $f' = f$, $G(\xi,\eta) = g(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ y $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$. Bajo una rotación adecuada se tendrá $\boldsymbol{Q}' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{L}' = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$ de tal forma que la ecuación

[4] Utilizando la regla de la cadena puede verse que ésta corresponde a la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con $\boldsymbol{R}$ una matriz ortogonal propia de 2×2.

(2.375) quedará transformada en

$$a' \, U_{\xi\xi} + c' \, U_{\eta\eta} + d' \, U_{\xi} + e' \, U_{\eta} + f' \, U = G \tag{2.381}$$

Del resultado de la sección anterior podemos ver que esta ecuación será separable siempre que sea homogénea (i.e. para $G \equiv 0$). Se sigue entonces que la ecuación (2.375) con $g \equiv 0$ puede resolverse aplicando la rotación adecuada y luego usando separación de variables vía $U = X(\xi)Y(\eta)$ en (2.381)).

Ejemplo 1. *Resuelva el problema*

$$u_{xx} - 2u_{xt} + u_{tt} + u_x - u_t + u = 0 \tag{2.382}$$
$$u(0,t) = f(t) \tag{2.383}$$
$$u(\ell,t) = g(t) \tag{2.384}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2.385}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.386}$$

definido para $0 < x < \ell, \;\; t > 0.$

Solución. Las matrices asociadas son

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.387}$$

Por lo tanto este problema es *parabólico*. Se verifica que una matriz de rotación (obtenida como la transpuesta de una matriz de vectores propios normalizados; matriz de determinante igual a 1) que diagonaliza $\boldsymbol{Q}$ es

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.388}$$

Aplicando esta rotación se obtiene

$$\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.389}$$

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}^{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.390}$$

De tal forma que la ecuación transformada es

$$2\,U_{\xi\xi} + \sqrt{2}\,U_{\xi} + U = 0 \tag{2.391}$$

Utilizando $\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^T = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} x & t \end{pmatrix}^T$, puede verse que las condiciones iniciales y de frontera se transforman respectivamente en

$$U(\xi, -\xi) \;=\; f(-\sqrt{2}\xi) \tag{2.392}$$
$$U(\xi, \sqrt{2}\ell - \xi) \;=\; g(\ell - \sqrt{2}\xi) \tag{2.393}$$
$$U(\xi, \xi) \;=\; \phi(\sqrt{2}\xi) \tag{2.394}$$
$$U_{\eta}(\xi, \xi) - U_{\xi}(\xi, \xi) \;=\; \sqrt{2}\,\psi(\sqrt{2}\xi) \tag{2.395}$$

donde $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

El hecho que sólo aparezcan derivadas parciales respecto a ξ en la ecuación (2.391) la hacen esencialmente ordinara. Buscando soluciones de la forma

$$U \;=\; \mathrm{e}^{\lambda \xi} \tag{2.396}$$

se encuentra $\lambda_{\pm} = (-\sqrt{2}/4) \pm i(\sqrt{6}/4)$. Por lo tanto se tienen las soluciones

$$U_1(\xi, \eta) \;=\; A_1(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \tag{2.397}$$

$$U_2(\xi, \eta) \;=\; A_2(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \tag{2.398}$$

con A_1 y A_2 funciones arbitrarias. La solución general de (2.391) es entonces

$$U(\xi, \eta) = A_1(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) + A_2(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \tag{2.399}$$

Para determinar las funciones A_1 y A_2 utilizamos las condiciones (2.392)–(2.395). Calculamos primero las derivadas parciales

$$\begin{aligned} U_\xi(\xi,\eta) &= A_1(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\right] \\ &\quad + A_2(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\right] \quad (2.400) \\ U_\eta(\xi,\eta) &= A_1'(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2'(\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \quad (2.401) \end{aligned}$$

y las evaluamos en $\eta=\xi$ para obtener

$$\begin{aligned} U_\eta(\xi,\xi)-U_\xi(\xi,\xi) &= A_1'(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2'(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \\ &\quad - A_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\right] \\ &\quad - A_2(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\right] \\ &= \left[A_1'(\xi)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)A_1(\xi)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)A_2(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \\ &\quad + \left[A_2'(\xi)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)A_2(\xi)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)A_1(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) \end{aligned}$$

(2.402)

Ahora sí, evaluamos U de (2.399) y $U_\eta - U_\xi$, y aplicamos las condiciones

(2.392)–(2.395) para encontrar

$$A_1(-\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2(-\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = f(-\sqrt{2}\xi)$$

$$A_1(\sqrt{2}\ell-\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2(\sqrt{2}\ell-\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = g(\ell-\sqrt{2}\xi)$$

$$A_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = \phi(\sqrt{2}\xi)$$

$$\left[A_1'(\xi)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)A_1(\xi)-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)A_2(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+$$
$$\left[A_2'(\xi)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)A_2(\xi)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)A_1(\xi)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = \sqrt{2}\,\psi(\sqrt{2}\xi)$$

Una forma de resolver este sistema es utilizar solamente dos ecuaciones; por ejemplo la primera y la tercera. Intercambiando $\xi \to -\xi$ en la primera y luego multiplicándola por $\mathrm{e}^{-2\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}$, se obtiene el sistema reducido

$$A_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)-A_2(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi}f(\sqrt{2}\xi)$$

$$A_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)+A_2(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right) = \phi(\sqrt{2}\xi)$$

Su solución se encuentra por simple suma (y resta) de las ecuaciones:

$$A_1(\xi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\sec\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\left[\phi(\sqrt{2}\xi)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi}f(\sqrt{2}\xi)\right] \tag{2.403}$$

$$A_2(\xi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\csc\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\left[\phi(\sqrt{2}\xi)-\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi}f(\sqrt{2}\xi)\right] \tag{2.404}$$

lo cual hace evidente que debe haber relaciones entre las funciones f, g, ϕ, ψ para que haya consistencia.

Al intercambiar $\xi \to \eta$ en éstas e introducirlas en (2.399) se tiene finalmente

$$\begin{aligned}
U(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}\eta}\sec\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\eta\right)\left[\phi(\sqrt{2}\eta)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta}f(\sqrt{2}\eta)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\\
&+ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}\eta}\csc\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\eta\right)\left[\phi(\sqrt{2}\eta)-\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta}f(\sqrt{2}\eta)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(\xi-\eta)}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\sec\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\eta\right)\left[\phi(\sqrt{2}\eta)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta}f(\sqrt{2}\eta)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(\xi-\eta)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\xi\right)\csc\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\eta\right)\left[\phi(\sqrt{2}\eta)-\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta}f(\sqrt{2}\eta)\right]
\end{aligned} \tag{2.405}$$

Por último, se regresa a las variables originales utilizando

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(x-t)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+t)\end{pmatrix} \tag{2.406}$$

Considerando que $U(\xi(x,t),\eta(x,t))=u(x,t)$ se tiene la solución

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(x-t)\right)\sec\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(x+t)\right)\left[\phi(x+t)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+t)}f(x+t)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(x-t)\right)\csc\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(x+t)\right)\left[\phi(x+t)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+t)}f(x+t)\right]
\end{aligned} \tag{2.407}$$

la cual puede verificarse que satisface (2.383) y (2.385).

Ejercicio 1. *Resuelva el problema*

$$u_{xx}-2u_{xt}-u_{tt}+u_x-u_t+u = 0 \tag{2.408}$$
$$u(0,t) = f(t) \tag{2.409}$$
$$u(\ell,t) = g(t) \tag{2.410}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2.411}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.412}$$

definido para $0 < x < \ell, \;\; t > 0.$

Ejercicio 2. *Resuelva el problema*

$$2u_{xx} - 2u_{xt} + u_{tt} + u_x - u_t + u = 0 \tag{2.413}$$
$$u(0,t) = f(t) \tag{2.414}$$
$$u(\ell,t) = g(t) \tag{2.415}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2.416}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.417}$$

definido para $0 < x < \ell, \;\; t > 0.$

Capítulo 3

Método de Cambio de Variables

Más que un método para resolver EDP, la técnica de cambio de variables es un recurso muy útil tanto para simplificar problemas como para transformarlos en otros ya resueltos. Bajo condiciones excepcionales, como es el caso de transformaciones lineales y algunas transformaciones no lineales, sí puede utilizarse para encontrar soluciones generales de EDP o bien para resolver problemas con condiciones dadas. En este capítulo se abordan diversos problemas mediante el uso de cambios de variables. Al inicio se estudia la ecuación de onda unidimensional y se muestra que puede resolverse de forma general utilizando una transformación lineal de sus variables independientes. Considerando las condiciones iniciales más generales, en el mismo problema, se encuentra la solución particular conocida como *fórmula de D'Alembert*. Más aún, se muestra como, imponiendo distintas condiciones de frontera en la *cuerda finita*, se encuentran soluciones en series puramente a partir de la fórmula de D'Alembert sin recurrir al método de separación de variables. En un tratamiento análogo, se emplea una transformación lineal de las variables independientes en la ecuación de Laplace bidimensional para encontrar su solución general. Como ejemplos de problemas que se reducen a otros conocidos mediante el uso de cambios de variables no lineales, se considera la propagación de ondas esféricas y el problema de la difusión con reacción química lineal. Para finalizar se muestra como reducir la EDP de segundo orden lineal con coeficientes constantes a ecuaciones no homogéneas "tipo" Helmholtz o de difusión.

3.1 La Ecuación de Onda

3.1.1 Cuerda Vibrante Infinita

Consideremos la *ecuación de onda en una dimensión*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.1}$$

definida para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$.

Este problema describe la propagación de ondas transversales a lo largo de una línea, la cual hacemos coincidir con el eje x. En este contexto $u(x,t)$ representa la desviación del eje x de la cuerda (i.e. su *altura*) en el punto x al tiempo t. La constante c, como se verá más adelante, es la *magnitud de la velocidad* de propagación de las ondas sobre la línea.

Para resolver esta ecuación proponemos llevar a cabo un cambio de variables independientes

$$\xi = \xi(x,t) \tag{3.2}$$
$$\eta = \eta(x,t) \tag{3.3}$$

Introduciéndolo en $u(x,t)$ se obtiene $u(\xi(x,t),\eta(x,t))$. Derivando u respecto a x y a t, usando la regla de la cadena, se encuentra

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \tag{3.4}$$
$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t \tag{3.5}$$

Derivando nuevamente se tiene

$$u_{xx} = u_{\xi x}\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta x}\eta_x + u_\eta \eta_{xx} \tag{3.6}$$
$$u_{tt} = u_{\xi t}\xi_t + u_\xi \xi_{tt} + u_{\eta t}\eta_t + u_\eta \eta_{tt} \tag{3.7}$$

en donde las derivadas mixtas $u_{\xi x}$, $u_{\eta x}$, $u_{\xi t}$ y $u_{\eta t}$ deben calcularse usando la regla de la cadena ya que u_ξ y u_η son funciones de $(\xi(x,t), \eta(x,t))$. Se obtiene

$$u_{\xi x} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x \tag{3.8}$$

$$u_{\eta x} = u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \tag{3.9}$$

$$u_{\xi t} = u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t \tag{3.10}$$

$$u_{\eta t} = u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \tag{3.11}$$

La introducción de (3.8) y (3.9) en (3.6) produce

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + \left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_x + u_\eta\eta_{xx} \\ &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + u_{\eta\xi}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta\eta_{xx} \\ &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde hemos supuesto u de clase C^2. Análogamente, introduciendo (3.10) y (3.11) en (3.7) conduce a

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \left(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t\right)\xi_t + u_\xi\xi_{tt} + \left(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t\right)\eta_t + u_\eta\eta_{tt} \\ &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_\xi\xi_{tt} + u_{\eta\xi}\xi_t\eta_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\eta\eta_{tt} \\ &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\xi\xi_{tt} + u_\eta\eta_{tt} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vemos que, en particular, para una transformación lineal de la forma

$$\xi = Ax + Bt \tag{3.14}$$

$$\eta = Cx + Dt \tag{3.15}$$

con A, B, C y D constantes, se tiene

$$\xi_x = A \tag{3.16}$$

$$\xi_t = B \tag{3.17}$$

$$\eta_x = C \tag{3.18}$$

$$\eta_t = D \tag{3.19}$$

$$\xi_{xx} = \xi_{tt} = \eta_{xx} = \eta_{tt} = 0 \tag{3.20}$$

de tal forma que en este caso las ecuaciones (3.12) y (3.13) se reducen a

$$u_{xx} = A^2 u_{\xi\xi} + 2AC\, u_{\xi\eta} + C^2 u_{\eta\eta} \tag{3.21}$$

$$u_{tt} = B^2 u_{\xi\xi} + 2BD\, u_{\xi\eta} + D^2 u_{\eta\eta} \tag{3.22}$$

Al sustituir éstas en la ecuación de onda, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, se encuentra

$$\left(B^2 - c^2 A^2\right) u_{\xi\xi} + 2\left(BD - c^2 AC\right) u_{\xi\eta} + \left(D^2 - c^2 C^2\right) u_{\eta\eta} = 0 \tag{3.23}$$

Notamos que una transformación útil es la que anula dos de los tres términos; de lo contrario convierte el problema en otro del mismo o mayor grado de dificultad. Analizando los sistemas de tres ecuaciones algebraicas asociados a los coeficientes de $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$ y $u_{\eta\eta}$ en (3.23) se concluye que las únicas transformaciones *no singulares* que anulan los dos primeros (y análogamente los dos últimos) términos, en realidad anulan los tres términos (con lo cual convierten la ecuación en la identidad $0 \equiv 0$). Por otra parte, la transformación que anula el primer y tercer términos debe satisfacer $B = \pm cA$ y $D = \pm cC$, de donde se sigue que va a ser *no singular* sólo si $B = cA$ y $D = -cC$ ó $B = -cA$ y $D = cC$, con $A, C \neq 0$. Escogemos la segunda; esto es

$$\xi = A(x - ct) \tag{3.24}$$

$$\eta = C(x + ct) \tag{3.25}$$

que al sustituir en (3.23) conduce a

$$-4c^2 AC\, u_{\xi\eta} = 0 \tag{3.26}$$

o bien, notando que $4c^2 AC \neq 0$, se tiene

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{3.27}$$

Integrándola parcialmente respecto a η se encuentra

$$u_{\xi} = \tilde{f}(\xi) \tag{3.28}$$

con $\tilde{f}$ una función escalar arbitraria. Ahora integrando ésta parcialmente respecto a ξ da

$$u(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\xi)\, d\xi + \tilde{G}(\eta) \tag{3.29}$$

donde $\tilde{G}$ es otra función escalar arbitraria. Por lo tanto, la solución general es

$$u(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi) + \tilde{G}(\eta) \tag{3.30}$$

donde $\tilde{F}$ y $\tilde{G}$ son funciones escalares arbitrarias. En términos de las variables originales la solución es

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{3.31}$$

con F y G funciones escalares arbitrarias. La interpretación física de la solución es interesante: $F(x-ct)$ representa una *onda* de forma $F(x)$ que se mueve a la derecha con velocidad c, sin sufrir cambios. Análogamente, $G(x+ct)$ representa una onda de forma $G(x)$ que se mueve a la izquierda con velocidad c, e igualmente sin presentar cambios.

Para concluir vale la pena observar que la transformación lineal que permitió resolver este problema, dada por las ecuaciones (3.24) y (3.25), depende de los parámetros no nulos A y C. Si $A = C$ la dependencia es sólo de uno, pero si $A \neq C$ la dependencia es de dos. Si denotamos $k_1 = A$, $\omega_1 = cA$, $k_2 = C$ y $\omega_2 = cC$, entonces la transformación lineal (3.24)–(3.25) se escribe como

$$\xi = k_1 x - \omega_1 t \tag{3.32}$$

$$\eta = k_2 x + \omega_2 t \tag{3.33}$$

donde suponemos $k_1, \omega_1, k_2, \omega_2 > 0$. En términos de estas variables, la solución general de la ecuación de onda unidimensional es

$$u(x,t) = F(k_1 x - \omega_1 t) + G(k_2 x + \omega_2 t) \tag{3.34}$$

con F y G funciones escalares arbitrarias. Los nuevos parámetros son llamados *número de onda* (k) y *frecuencia angular* (ω), y su relación ($\omega = c\,k$) es llamada *relación de dispersión* para las ondas descritas por la ecuación (3.1).

3.1.2 Cuerda Vibrante Infinita con Condiciones Iniciales

El problema a resolver es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.35}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{3.36}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.37}$$

definido para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$.

Dado que ya tenemos la solución general, el problema se reduce a imponer las condiciones iniciales (3.36)–(3.37) en ella. Por simplicidad escogemos la forma (3.31), esto es

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{3.38}$$

de donde se obtiene

$$u_t(x,t) = -cF'(x-ct) + cG'(x+ct) \tag{3.39}$$

Ahora evaluamos (3.38) y (3.39) en $t = 0$ y utilizamos las condiciones (3.36)–(3.37) para obtener el sistema de ecuaciones

$$\phi(x) = u(x,0) = F(x) + G(x) \tag{3.40}$$
$$\psi(x) = u_t(x,0) = -cF'(x) + cG'(x) \tag{3.41}$$

Integrando esta última, utilizando el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\phi(x) = F(x) + G(x) \tag{3.42}$$
$$\frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds + A = -F(x) + G(x) \tag{3.43}$$

con A una constante arbitraria. La solución de este sistema lineal se encuentra por simple resta y suma de las ecuaciones:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) - \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds - A\right) \tag{3.44}$$
$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)ds + A\right) \tag{3.45}$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds - \frac{1}{2}A \tag{3.46}$$
$$G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)ds + \frac{1}{2}A \tag{3.47}$$

Introduciéndolas en la solución general (3.38), se encuentra

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x-ct) + G(x+ct) \\ &= \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} \psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds \qquad (3.48) \end{aligned}$$

Esto es,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\,\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds \qquad (3.49)$$

conocida como la *fórmula de D'Alembert*, es la solución al problema de Cauchy (3.35)–(3.37).

Ejercicio 1. *Resuelva el problema de las vibraciones de la cuerda infinita (3.35)–(3.37) para las condiciones iniciales dadas por*

(i) $\phi(x) = \delta(x), \qquad \psi(x) \equiv 0$

(ii) $\phi(x) \equiv 0, \qquad \psi(x) = \delta(x)$

(iii) $\phi(x) = \delta(x), \qquad \psi(x) = \delta(x)$

e interprete geométricamente sus resultados.

3.1.3 Cuerda Vibrante Finita con Extremos Fijos

El problema para la cuerda vibrante de longitud ℓ, fija en los extremos, y condiciones iniciales prescritas es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} && (3.50) \\ u(0,t) &= 0 && (3.51) \\ u(\ell,t) &= 0 && (3.52) \\ u(x,0) &= \phi(x) && (3.53) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) && (3.54) \end{aligned}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$. En particular ϕ y ψ sólo están definidas para $x \in (0, \ell)$.

Este problema puede resolverse por separación de variables, pero en esta sección queremos hacer uso de la fórmula de D'Alembert. Dado que esta solución está definida para $-\infty < x < \infty$, podemos considerar el problema alternativo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.55}$$
$$u(0,t) = 0 \tag{3.56}$$
$$u(\ell,t) = 0 \tag{3.57}$$
$$u(x,0) = \phi_{\text{ext}}(x) \tag{3.58}$$
$$u_t(x,0) = \psi_{\text{ext}}(x) \tag{3.59}$$

definido para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$, con ϕ_{ext} y ψ_{ext} funciones idénticas a ϕ y ψ respectivamente para toda $x \in (0, \ell)$; y aún por ser determinadas fuera de ese intervalo. La solución de (3.55), (3.58) y (3.59) está dada por la fórmula de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(x-ct) + \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{ext}}(s)ds \tag{3.60}$$

Al introducir las condiciones de frontera (3.56) y (3.57) en ésta se obtiene el sistema

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(-ct) + \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(ct) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \psi_{\text{ext}}(s)ds \tag{3.61}$$
$$0 = u(\ell,t) = \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(\ell-ct) + \frac{1}{2}\,\phi_{\text{ext}}(\ell+ct) + \frac{1}{2c}\int_{\ell-ct}^{\ell+ct} \psi_{\text{ext}}(s)ds \tag{3.62}$$

ahora, como ϕ_{ext} y ψ_{ext} son funciones arbitrarias, una manera de asegurar las igualdades es pidiendo que tanto ϕ_{ext} como ψ_{ext} sean *funciones impares* respecto a $x = 0$ y también respecto a $x = \ell$. Esto es, que satisfagan

$$\phi_{\text{ext}}(-x) = -\phi_{\text{ext}}(x) \tag{3.63}$$
$$\psi_{\text{ext}}(-x) = -\psi_{\text{ext}}(x) \tag{3.64}$$
$$\phi_{\text{ext}}(\ell-x) = -\phi_{\text{ext}}(\ell+x) \tag{3.65}$$
$$\psi_{\text{ext}}(\ell-x) = -\psi_{\text{ext}}(\ell+x) \tag{3.66}$$

para toda $x \in (-\infty, \infty)$. En particular, estas condiciones implican que $\phi_{\text{ext}}(0) = \psi_{\text{ext}}(0) = 0$ y que $\phi_{\text{ext}}(\ell) = \psi_{\text{ext}}(\ell) = 0$. Se sigue entonces que una manera general de satisfacer las condiciones (3.61)–(3.62) es utilizar

$$\phi_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } \ 0 < x < \ell \\ -\phi(-x) & \text{si } \ -\ell < x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0, \ x = \ell \end{cases} \tag{3.67}$$

$$\psi_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } \ 0 < x < \ell \\ -\psi(-x) & \text{si } \ -\ell < x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0, \ x = \ell \end{cases} \tag{3.68}$$

y además ϕ_{ext} y ψ_{ext} periódicas de periodo 2ℓ para toda x. Debido a que estas funciones son impares, el teorema de Fourier garantiza que tanto $\phi_{\text{ext}}(x)$ como $\psi_{\text{ext}}(x)$ tienen desarrollos en serie de senos de la forma[1]

$$\phi_{\text{ext}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) \tag{3.69}$$

$$\psi_{\text{ext}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) \tag{3.70}$$

con los coeficientes dados por las fórmulas de Euler-Fourier

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi_{\text{ext}}(x) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx \tag{3.71}$$

$$\beta_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi_{\text{ext}}(x) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx \tag{3.72}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ Queremos introducir (3.69)–(3.70) en la solución (3.60); lo cual nos conduce a calcular

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ext}}(x-ct) + \phi_{\text{ext}}(x+ct) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Big[\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\Big) + \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\Big)\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, 2 \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big) \end{aligned} \tag{3.73}$$

[1] Para asegurar la existencia de tales desarrollos sólo es necesario que las funciones originales ϕ y ψ sean seccionalmente continuas en $[0, \ell]$.

donde en la última igualdad hemos utilizado la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)=2\operatorname{sen}A\cos B \tag{3.74}$$

y también hace necesario calcular la integral[2]

$$\begin{aligned}
\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_{\text{ext}}(s)ds &= \int_{x-ct}^{x+ct}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}s\Big)ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_{x-ct}^{x+ct}\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}s\Big)ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{-\ell}{n\pi}\right)\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}s\Big)\Big|_{s=x-ct}^{s=x+ct}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)\Big[\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\Big)-\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\Big)\Big]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)2\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big)
\end{aligned}\tag{3.75}$$

donde al final simplificamos con la identidad trigonométrica

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B \tag{3.76}$$

Ahora sí, sustituimos (3.73) y (3.75) en la fórmula de D'Alembert (3.60) para obtener

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\phi_{\text{ext}}(x-ct)+\frac{1}{2}\phi_{\text{ext}}(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_{\text{ext}}(s)ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\ell}{n\pi c}\right)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\left[b_n\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big)+\beta_n\left(\frac{\ell}{n\pi c}\right)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}ct\Big)\right]
\end{aligned}\tag{3.77}$$

con los coeficientes b_n y β_n dados en (3.71) y (3.72). Notamos que esta solución es válida para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$, pero que esa información está contenida únicamente en los coeficientes b_n y β_n debido a que contienen explícitamente a

[2] El intercambio de la integral con la suma infinita en la segunda línea se justifica siempre que la función ψ sea seccionalmente continua en $[0,\ell]$.

$\phi_{\text{ext}}(x)$ y $\psi_{\text{ext}}(x)$ respectivamente. Sin embargo, dado que estas funciones son idénticas a $\phi(x)$ y $\psi(x)$ en el intervalo $(0,\ell)$ y que los coeficientes pueden calcularse sobre este intervalo, se concluye que la expresión (3.77) resuelve el problema original. Esto es, la solución al problema (3.50)–(3.54) definido para $0<x<\ell$ y $t>0$ es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[b_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)+\beta_n\left(\frac{\ell}{n\pi c}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)\right] \tag{3.78}$$

con

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{3.79}$$

$$\beta_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{3.80}$$

para cada $n=1,2,\ldots$

Ejercicio 1. *Resuelva el problema de las vibraciones de una cuerda de longitud ℓ fija en los extremos, (3.50)–(3.54), para las condiciones iniciales*

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}(x-x_0)+b & \text{si } x_0-a\le x<x_0\\ -\dfrac{b}{a}(x-x_0)+b & \text{si } x_0\le x<x_0+a\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

con $x_0\in(a,\ell-a)$, $0<2a<\ell$, $b>0$, y $\psi(x)\equiv 0$.

Ejercicio 2. *Resuelva el problema de las vibraciones de una cuerda de longitud ℓ fija en los extremos, (3.50)–(3.54), utilizando el método de separación de variables y verifique la solución (3.78)–(3.80).*

3.1.4 Cuerda Vibrante Finita con Extremos Libres

El problema para la cuerda vibrante de longitud ℓ con los extremos libres y condiciones iniciales prescritas es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.81}$$
$$u_x(0,t) = 0 \tag{3.82}$$
$$u_x(\ell,t) = 0 \tag{3.83}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{3.84}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3.85}$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$.

Puede encontrarse su solución ya sea por separación de variables o utilizando la fórmula de D'Alembert de forma análoga al tratamiento de la sección anterior. Siguiendo cualquiera de estos caminos se encuentra

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{\alpha_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right) + \alpha_n\left(\frac{\ell}{n\pi c}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)\right] \tag{3.86}$$

con

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{3.87}$$
$$\alpha_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \tag{3.88}$$

para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ejercicio 1. *Resuelva el problema de las vibraciones de una cuerda de longitud ℓ con extremos libres, (3.81)–(3.85), utilizando el método de separación de variables y verifique la solución (3.86)–(3.88).*

3.1.5 Cuerda Vibrante Finita con un Extremo Fijo y otro Libre

El problema para la cuerda vibrante de longitud ℓ con el extremo $x = 0$ fijo y el extremo $x = \ell$ libre, y condiciones iniciales prescritas es

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx} && (3.89)\\
u(0,t) &= 0 && (3.90)\\
u_x(\ell,t) &= 0 && (3.91)\\
u(x,0) &= \phi(x) && (3.92)\\
u_t(x,0) &= \psi(x) && (3.93)
\end{aligned}
$$

definido para $0 < x < \ell$ y $t > 0$.

Su solución puede encontrarse ya sea por separación de variables o utilizando la fórmula de D'Alembert de forma análoga al tratamiento de las secciones anteriores. Siguiendo cualquiera de estos caminos se llega a

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \;=\; & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right) \times \\
\times \; & \left[b_{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}ct\right) + \beta_{2n-1}\left(\frac{2\ell}{(2n-1)\pi c}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}ct\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

con

$$
\begin{aligned}
b_{2n-1} &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right)dx && (3.95)\\
\beta_{2n-1} &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \psi(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell}x\right)dx && (3.96)
\end{aligned}
$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$

Ejercicio 1. *Resuelva el problema de las vibraciones de una cuerda de longitud ℓ con un extremo fijo y el otro libre, (3.89)–(3.93), utilizando el método de separación de variables y verifique la solución (3.94)–(3.96).*

3.2 La Ecuación de Laplace

3.2.1 Solución General

Consideremos la *ecuación de Laplace bidimensional*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3.97}$$

definida para $-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$.

Esta es la ecuación que obedece el potencial electrostático (o gravitacional) $u(x,y)$ en todo el plano x-y. Podemos encontrar su solución general llevando a cabo un cambio de variables dado por la transformación lineal

$$\xi = Ax + By \tag{3.98}$$

$$\eta = Cx + Dy \tag{3.99}$$

con A, B, C y D constantes a nuestra disposición. Introduciéndolo en $u(x,y)$ se obtiene $u(\xi(x,y), \eta(x,y))$. Derivando u respecto a x y a y, usando la regla de la cadena, se encuentra

$$u_x = Au_\xi + Cu_\eta \tag{3.100}$$

$$u_y = Bu_\xi + Du_\eta \tag{3.101}$$

Derivando nuevamente se obtiene

$$\begin{aligned} u_{xx} &= A\big(Au_{\xi\xi} + Cu_{\xi\eta}\big) + C\big(Au_{\eta\xi} + Cu_{\eta\eta}\big) \\ &= A^2 u_{\xi\xi} + 2AC\, u_{\xi\eta} + C^2 u_{\eta\eta} \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= B\big(Bu_{\xi\xi} + Du_{\xi\eta}\big) + D\big(Bu_{\eta\xi} + Du_{\eta\eta}\big) \\ &= B^2 u_{\xi\xi} + 2BD\, u_{\xi\eta} + D^2 u_{\eta\eta} \end{aligned} \tag{3.103}$$

donde hemos supuesto u de clase C^2. Al introducirlas en la ecuación de Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, se encuentra

$$\left(A^2 + B^2\right) u_{\xi\xi} + 2\left(AC + BD\right) u_{\xi\eta} + \left(C^2 + D^2\right) u_{\eta\eta} = 0 \tag{3.104}$$

Notamos que una transformación útil es la que anula dos de los tres términos; de lo contrario convierte el problema en otro del mismo o mayor grado de dificultad. Analizando los sistemas de tres ecuaciones algebraicas asociados a los coeficientes de $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$ y $u_{\eta\eta}$ en (3.23) se concluye que las únicas transformaciones *no singulares* que anulan los dos primeros (y análogamente los dos últimos) términos, en realidad anulan los tres términos (con lo cual convierten la ecuación en la identidad $0 \equiv 0$). Por otra parte, la transformación que anula el primer y tercer términos debe satisfacer $B = \pm iA$ y $D = \pm iC$, de donde se sigue que va a ser *no singular* sólo si $B = iA$ y $D = -iC$ ó $B = -iA$ y $D = iC$, con $A, C \neq 0$. Escogemos la primera; esto es

$$\xi = A(x + iy) \tag{3.105}$$

$$\eta = C(x - iy) \tag{3.106}$$

que al sustituir en (3.104) conduce a

$$4AC\, u_{\xi\eta} = 0 \tag{3.107}$$

o bien, notando que $4AC \neq 0$, se tiene

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{3.108}$$

Integrándola parcialmente respecto a η se encuentra

$$u_{\xi} = \tilde{f}(\xi) \tag{3.109}$$

con $\tilde{f}$ una función escalar arbitraria. Ahora integrando ésta parcialmente respecto a ξ da

$$u(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\xi)\, d\xi + \tilde{G}(\eta) \tag{3.110}$$

donde $\tilde{G}$ es otra función escalar arbitraria. Por lo tanto, la solución general es

$$u(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi) + \tilde{G}(\eta) \tag{3.111}$$

donde $\tilde{F}$ y $\tilde{G}$ son funciones escalares arbitrarias. En términos de las variables originales la solución es

$$u(x, y) = F(x + iy) + G(x - iy) \tag{3.112}$$

con F y G funciones escalares arbitrarias. La interpretación matemática de la solución es interesante: $F(x + iy)$ es una función escalar arbitraria de clase

C^2 de la variable compleja $z = x + iy$. Análogamente, $G(x - iy)$ es una función escalar arbitraria de clase C^2 de la variable compleja conjugada de z, $\bar{z} = x - iy$.

Nótese que el hecho de que las variables orginales sean $\xi = A(x + iy)$ y $\eta = C(x - iy)$, con A y C reales, no cambia cualitativamente el resultado: *la solución general de la ecuación de Laplace bidimensional es la suma de funciones escalares arbitarias de las variables complejas* $z = x + iy$ *y* $\bar{z} = x - iy$ *respectivamente.*

Ejercicio 1. *Muestre que la función* $u(x, y)$ *dada en (3.112) es solución de la ecuación de Laplace bidimensional (3.97) para cualesquiera funciones escalares* F *y* G *de clase* C^2.

3.3 Ondas Esféricas

Considérese la ecuación de onda tridimensional

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \tag{3.113}$$

y supóngase que la solución tiene *simetría esférica*. Es decir, $u = u(r, t)$, de tal forma que el Laplaciano escrito en coordenadas esféricas sólo contiene la parte radial

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{3.114}$$

En este caso puede escribirse el problema de valores iniciales (problema de Cauchy) para la ecuación de onda con simetría esférica

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) \tag{3.115}$$

$$u(r, 0) = \phi(r) \tag{3.116}$$

$$u_t(r, 0) = \psi(r) \tag{3.117}$$

para $0 < r < \infty$, $t > 0$. Formalmente éste es esencialmente un problema "unidimensional", similar a la cuerda vibrante pero con un término extra en la primera derivada, u_r. Para resolverlo, lo reducimos a un problema de Cauchy para la ecuación de onda unidimensional. Esto lo logramos llevando a cabo el cambio de variable

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\,w(r,t) \tag{3.118}$$

Calculamos u_{tt}, u_r y u_{rr}. Notando que r y t son variables independientes, se tiene

$$u_{tt} = \frac{1}{r}\,w_{tt} \tag{3.119}$$

$$u_r = -\frac{1}{r^2}\,w + \frac{1}{r}\,w_r \tag{3.120}$$

$$u_{rr} = \frac{2}{r^3}\,w - \frac{2}{r^2}\,w_r + \frac{1}{r}\,w_{rr} \tag{3.121}$$

que al introducir en (3.115) conducen directamente a la ecuación

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} \tag{3.122}$$

Luego, al evaluar las condiciones iniciales (3.116)–(3.117) para la u dada en (3.118) se encuentran las condiciones

$$w(r,0) = r\,\phi(r) \tag{3.123}$$

$$w_t(r,0) = r\,\psi(r) \tag{3.124}$$

En conclusión, el cambio de variable (3.118) transforma el problema original (3.115)–(3.117) en

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} \tag{3.125}$$

$$w(r,0) = r\,\phi(r) \tag{3.126}$$

$$w_t(r,0) = r\,\psi(r) \tag{3.127}$$

es decir, en un problema de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante pero para la función $w = w(r,t)$. Podemos utilizar entonces la fórmula de D'Alembert para escribir su solución

$$w(r,t) = \frac{1}{2}\,(r-ct)\,\phi(r-ct) + \frac{1}{2}\,(r+ct)\,\phi(r+ct) + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\,\psi(s)\,ds \tag{3.128}$$

y finalmente utilizar (3.118) para obtener la solución al problema original

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \frac{1}{2r}\,(r-ct)\,\phi(r-ct) + \frac{1}{2r}\,(r+ct)\,\phi(r+ct) + \frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} s\,\psi(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{ct}{r}\right)\phi(r-ct) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{ct}{r}\right)\phi(r+ct) + \frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} s\,\psi(s)\,ds \end{aligned} \tag{3.129}$$

Nótese que, a diferencia de la cuerda vibrante donde las ondas que viajan a la derecha e izquierda preservan la mitad de la amplitud original, en las ondas esféricas se *atenúa* la amplitud de la onda *entrante* (al origen) y se *amplifica* la amplitud de la onda *saliente* (del origen).

Ejercicio 1. *Resuelva el problema de propagación de ondas esféricas (3.115)–(3.117) para las condiciones iniciales dadas por*

(i) $\phi(r) = \delta(r), \qquad \psi(r) \equiv 0$

(ii) $\phi(r) \equiv 0, \qquad \psi(r) = \delta(r)$

(iii) $\phi(r) = \delta(r), \qquad \psi(r) = \delta(r)$

e interprete geométricamente sus resultados.

3.4 Ecuación de Difusión con Reacción Lineal

El problema de valores iniciales de interés es en este caso

$$au_{xx} - bu_t + cu = 0 \tag{3.130}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.131}$$

para $-\infty < x < \infty,\ \ t > 0$, con $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}$ y f una función dada.

Lo resolvemos utilizando un cambio de variable que transforma (3.130) en la ecuación de calor. Notamos que un cambio adecuado es de la forma

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{At}\,w(x,t) \tag{3.132}$$

con A una constante por determinar. Calculamos u_{xx} y u_t. Notando que x y t son variables independientes, se tiene

$$u_{xx} = \mathrm{e}^{At} w_{xx} \tag{3.133}$$

$$u_t = \mathrm{e}^{At}(A\,w + w_t) \tag{3.134}$$

que al introducir en (3.130) conduce a la ecuación

$$aw_{xx} - bw_t + (c - bA)w = 0 \tag{3.135}$$

Eligiendo $A = c/b$, suponiendo que $b \neq 0$, se tiene la ecuación para w

$$aw_{xx} - bw_t = 0 \tag{3.136}$$

luego, de (3.132) se sigue que $u(x,0) = w(x,0)$, con lo cual se obtiene el problema transformado

$$w_t = \frac{a}{b} w_{xx} \tag{3.137}$$

$$w(x,0) = f(x) \tag{3.138}$$

la solución de éste, como se verá en un capítulo posterior, para $a/b = \alpha^2 > 0$ es

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}} f(s)ds \tag{3.139}$$

Finalmente, se obtiene la solución utilizando $u(x,t) = \mathrm{e}^{At} w(x,t)$ con $A = c/b$. Esto es

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{b}{4\pi a t}}\; \mathrm{e}^{\frac{c}{b}t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{b(x-s)^2}{4at}} f(s)ds \tag{3.140}$$

Observe que dependiendo de si $c/b < 0$ ó $c/b > 0$ el factor exponencial $\mathrm{e}^{\frac{c}{b}t}$ respectivamente atenúa o amplifica la temperatura $u(x,t)$ a medida que avanza el tiempo.

3.5 Ecuación Lineal con Coeficientes Constantes

Hemos visto que la ecuación lineal

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g \tag{3.141}$$

con a, b, c, d, e, f constantes arbitrarias y g función de (x,y), se escribe en forma matricial como

$$\left(\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\partial} + f \right) u = g \tag{3.142}$$

donde $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$, con el superíndice T denotando la matriz transpuesta; i.e. $\boldsymbol{\partial}^T = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}$.

Aplicando una transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.143}$$

con $\boldsymbol{R}$ una matriz de rotación (i.e. ortogonal propia) que diagonaliza $\boldsymbol{Q}$, se obtiene

$$\left(\boldsymbol{\partial}'^T \boldsymbol{Q}'\,\boldsymbol{\partial}' + \boldsymbol{L}'\,\boldsymbol{\partial}' + f' \right) U = G \tag{3.144}$$

donde $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}^T = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}^T = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\partial}' = \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix}$, $f' = f$, $G(\xi,\eta) = g(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ y $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$. Es decir, bajo esta rotación, la ecuación (3.141) se transforma en

$$a'\,U_{\xi\xi} + c'\,U_{\eta\eta} + d'\,U_\xi + e'\,U_\eta + f'\,U = G \tag{3.145}$$

la cual puede simplificarse más mediante un nuevo cambio de variable. En los casos elíptico e hiperbólico (i.e. para $a' \neq 0$ y $c' \neq 0$) el cambio de variable es de la forma

$$U(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{A\xi + B\eta}\,V(\xi,\eta) \tag{3.146}$$

con A y B constantes por determinar. Para $A = -d'/(2a')$ y $B = -e'/(2c')$ la ecuación (3.145) se transforma en

$$a'\,V_{\xi\xi} + c'\,V_{\eta\eta} + \left(f' - \frac{d'^2}{4a'} - \frac{e'^2}{4c'} \right) V = \mathrm{e}^{\frac{d'}{2a'}\xi + \frac{e'}{2c'}\eta}\,G \tag{3.147}$$

que en el caso $a' = c'$ corresponde a la ecuación de Helmholtz (no homogénea) o bien para $a' \neq c'$ es una generalización de ésta.

Por otra parte, en el caso parabólico (por ejemplo, para $a' \neq 0$ y $c' = 0$) el cambio de variable es de la forma

$$U(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{A\xi}\, V(\xi,\eta) \tag{3.148}$$

Eligiendo $A = -d'/(2a')$ se tiene la ecuación transformada de (3.145)

$$a'\, V_{\xi\xi} + e'\, V_\eta + \left(f' - \frac{d'^2}{4a'}\right)V = \mathrm{e}^{\frac{d'}{2a'}\xi}\, G \tag{3.149}$$

Un cambio de variable extra

$$V(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{B\eta}\, W(\xi,\eta) \tag{3.150}$$

con $B = (d'^2/(4a'e')) - (f'/e')$ conduce a la ecuación

$$a'\, W_{\xi\xi} + e'\, W_\eta = \mathrm{e}^{\frac{d'}{2a'}\xi + \left(\frac{f'}{e'} - \frac{d'^2}{4a'e'}\right)\eta}\, G \tag{3.151}$$

Esto es, la ecuación de difusión inhomogénea. En conclusión, el problema general se reduce a resolver dos ecuaciones conocidas y después invertir los cambios de variables.

Capítulo 4

Método de Transformadas Integrales

Un segundo método general para resolver EDP lineales con condiciones dadas se basa en el uso de transformadas integrales. La técnica consiste en aplicar la transformada integral al problema para convertirlo en uno soluble. Una vez resuelto, se invierte la transformada integral para así obtener la solución al problema original. El éxito de dicho procedimiento radica en la linealidad tanto del problema como de las transformadas integrales; y de forma particular en la transformada específica que se elija. En este capítulo se introduce el método de las transformadas integrales de manera general y se presentan las *transformadas* más comunes: *de Laplace, de Fourier, de Mellin* y *de Hankel*. En particular, se utiliza la transformada de Fourier para resolver problemas de valores en la frontera para la ecuación de Laplace y problemas de valores iniciales para la ecuación de onda, para la ecuación de calor y finalmente para la ecuación de Schrödinger. Se consideran únicamente EDP homogéneas para funciones de dos variables. A diferencia del método de separación de variables, los problemas que se resuelven por transformadas integrales están definidos en intervalos infinitos. Para hacer contacto con resultados previos se encuentra la fórmula de D'Alembert como solución al problema de Cauchy para la ecuación de onda unidimensional. Un ejemplo no estudiado anteriormente, pero que es relevante, es determinar la función de onda de una partícula cuántica sometida a un potencial rectangular finito. Concluimos resolviendo este problema, así como el problema de la partícula cuántica libre.

4.1 Transformadas Integrales en General

Para una función escalar $f(t)$ puede definirse

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = \int_a^b K(\omega, t) f(t) dt \tag{4.1}$$

llamada la *transformada integral* de la función f mediante el núcleo K (sobre el intervalo (a, b)). Notamos que la integral (4.1) es función de ω de tal forma que podemos denotar

$$F(\omega) = \mathcal{T}\{f(t)\} \tag{4.2}$$

Esta notación a su vez sugiere que puede haber una transformación inversa que satisfaga

$$f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{F(\omega)\} \tag{4.3}$$

Claramente una transformada integral $\mathcal{T}$ es lineal pues

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_a^b K(\omega, t)\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] dt \\
&= \int_a^b K(\omega, t) c_1 f_1(t) dt + \int_a^b K(\omega, t) c_2 f_2(t) dt \\
&= c_1 \int_a^b K(\omega, t) f_1(t) dt + c_2 \int_a^b K(\omega, t) f_2(t) dt \\
&= c_1 \mathcal{T}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{T}\{f_2(t)\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

para constantes arbitrarias c_1 y c_2.

Más generalmente, si la función escalar depende de más de una variable, por ejemplo $f(x, t)$, pueden definirse transformadas integrales respecto a las diferentes variables

$$F_1(x, \omega) = \mathcal{T}_1\{f(x, t)\} = \int_a^b K_1(\omega, t) f(x, t) dt \tag{4.5}$$

$$F_2(k, t) = \mathcal{T}_2\{f(x, t)\} = \int_c^d K_2(k, x) f(x, t) dx \tag{4.6}$$

donde el sentido de las integraciones es como *integrales parciales*. Ejemplos de estas transformadas integrales serán utilzadas para resolver ecuaciones diferenciales parciales en secciones posteriores. A continuación presentamos algunas de las transformadas integrales más comunes.

4.1.1 Transformada de Laplace

En este caso el núcleo de la transformación es $K(s,t) = \mathrm{e}^{-st}$ y el intervalo de integración es $[0,\infty)$ de tal forma que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)dt \tag{4.7}$$

Condiciones suficientes para su existencia son:

(i) f seccionalmente continua en $[0,\infty)$

(ii) $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{at}$ para toda $t \in [0,\infty)$; donde M y a son constantes reales

y en tal caso la transformada es única.

Su inversa involucra una integración en el plano complejo que no discutiremos en estas notas.

4.1.2 Transformada de Fourier

En este caso el núcleo de la transformación es $K(\omega,t) = \mathrm{e}^{i\omega t}/\sqrt{2\pi}$ y el intervalo de integración es $(-\infty,\infty)$ de tal forma que la transformada de Fourier de la función $f(t)$ es

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{i\omega t} f(t)dt \tag{4.8}$$

Condiciones suficientes para su existencia son:

(i) f seccionalmente continua en $(-\infty,\infty)$

(ii) $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|dt < \infty$

y en tal caso la transformada es única.

Su inversa puede encontrarse con ayuda de la delta de Dirac y es

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t}F(\omega)d\omega \tag{4.9}$$

Es común encontrar la transformada de Fourier en términos de variables asociadas a la "posición" más que al "tiempo". Aquí utilizamos la notación

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}f(x)dx \tag{4.10}$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}F(k)dk \tag{4.11}$$

para la transformada inversa.

La representación en (4.8) relaciona al tiempo t con la frecuencia angular ω mientras que la representación en (4.10) relaciona la posición x con el número de onda k. Las cantidades ω y k son físicamente relevantes ya que a su vez están relacionadas a la energía E y al momento p de acuerdo a la mecánica cuántica. En ese contexto se distinguen pares de variables conjugadas: $\{E, t\}$ y $\{p, x\}$ cuyas desviaciones obedecen el principio de incertidumbre de Heisenberg $(\Delta x \Delta p \geq \hbar)$, el cual es propiamente descrito por la transformada de Fourier.

Algunas de las propiedades más útiles para resolver ecuaciones diferenciales, además de la linealidad, son

(i) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right\} = (-ik)^n F(k)$

(ii) $\mathcal{F}\left\{(f * g)(x)\right\} = F(k)G(k)$

donde $(f * g)$ es la convolución de f con g definida como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds \tag{4.12}$$

(iii) $\mathcal{F}\left\{f(x-x_0)\right\} = \mathrm{e}^{ikx_0}F(k)$

Ejercicio 1. *Use las definiciones (4.10)–(4.11) para probar las propiedades anteriores.*

4.1.3 Transformada de Mellin

En este caso el núcleo de la transformación es $K(s,t) = t^{s-1}$ y el intervalo de integración es $(0,\infty)$ de tal forma que la transformada de Mellin es

$$\mathcal{M}\{f(t)\} = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt \tag{4.13}$$

Condiciones suficientes para su existencia son:

(i) f seccionalmente continua en $(0,\infty)$

(ii) $\int_0^\infty |f(t)|\, t^{k-1}\, dt < \infty$ para alguna $k > 0$

y en tal caso la transformada es única.

Su inversa involucra una integración en el plano complejo que no discutiremos en estas notas. Un ejemplo particularmente interesante de transformada de Mellin es $\mathcal{M}\left\{\mathrm{e}^{-t}\right\} = \Gamma(s)$, donde $\Gamma(s)$ es la función gamma de Euler (i.e. la generalización de la función factorial: $\Gamma(s) = (s-1)!$).

4.1.4 Transformada de Hankel

En este caso el núcleo de la transformación es $K(s,t) = tJ_\nu(st)$, con J_ν la función de Bessel de primera especie y orden ν, y el intervalo de integración es $(0,\infty)$. De esta forma la transformada de Hankel de orden $\nu \geq -1/2$ de la función f es

$$\mathcal{H}_\nu\{f(t)\} = \int_0^\infty tJ_\nu(st) f(t) dt \tag{4.14}$$

Condiciones suficientes para su existencia son:

(i) f seccionalmente continua en $(0,\infty)$

(ii) $\int_0^\infty |f(t)|\, t^{1/2}\, dt < \infty$

y en tal caso la transformada es única.

Su transformada inversa es

$$\mathcal{H}_\nu^{-1}\{F(s)\} = \int_0^\infty sJ_\nu(st) F(s) ds \tag{4.15}$$

4.2 Ecuación de Laplace

4.2.1 Problema de Dirichlet en el Semiplano Superior

Podemos comenzar con el problema de Dirichlet en el semiplano superior. Esto es,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.16}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{4.17}$$

con $u(x,y)$ acotada para $-\infty < x < \infty,\ y > 0$.

La función $u(x,y)$ que satisface este problema puede interpretarse físicamente como el potencial electrostático en el semiplano superior sujeto al valor $f(x)$ en todo el eje x. Esta interpretación se tiene debido a que una de las ecuaciones de Maxwell (la ley de Gauss eléctrica) conduce a la ecuación de Laplace para el potencial escalar.

El problema puede resolverse utilizando el método de la transformada de Fourier en la variable x (lo cual es necesario para poder transformar el dato (4.17)). Empleando[1]

$$U(k,y) = \mathcal{F}\left\{u(x,y)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} u(x,y) dx \tag{4.18}$$

transformamos (4.16) para obtener

$$\mathcal{F}\left\{u_{xx} + u_{yy}\right\} = \mathcal{F}\left\{0\right\} \tag{4.19}$$

que, debido a la linealidad de $\mathcal{F}$, es

$$\mathcal{F}\left\{u_{xx}\right\} + \mathcal{F}\left\{u_{yy}\right\} = 0 \tag{4.20}$$

[1] A partir de este punto suponemos que las funciones involucradas tienen una transformada de Fourier. Para ello basta con que sean seccionalmente continuas y absolutamente integrables en $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, estas hipótesis no son indispensables ya que es posible obtener transformadas de Fourier de *funciones generalizadas* o *distribuciones* como la delta de Dirac.

Usando las propiedades $\mathcal{F}\{u_{xx}\} = (-ik)^2\mathcal{F}\{u(x,y)\}$ (pues la transformada es respecto a x) y $\mathcal{F}\{u_{yy}\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathcal{F}\{u(x,y)\}$ (suponiendo que las derivadas respecto a y pueden conmutarse con la integral sobre x) se obtiene

$$(-ik)^2 U(k,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(k,y) = 0 \tag{4.21}$$

la cual puede reescribirse de forma compacta como

$$U_{yy} - k^2 U = 0 \tag{4.22}$$

Es decir, la ecuación transformada es esencialmente una ecuación diferencial ordinaria respecto a la variable y (aunque debe tomarse en cuenta que U también depende de k).

Para completar el problema se debe transformar también la condición de frontera (4.17). Esto da directamente

$$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \tag{4.23}$$

Es decir

$$U(k,0) = F(k) \tag{4.24}$$

es la condición de frontera en el espacio de la variable k. Con esto se tiene que el problema a resolver se ha transformado en

$$U_{yy} - k^2 U = 0 \tag{4.25}$$

$$U(k,0) = F(k) \tag{4.26}$$

Para $k \neq 0$ dos soluciones linealmente independientes de (4.25) son

$$U_1 = A_1(k)\,\mathrm{e}^{ky} \qquad \text{y} \qquad U_2 = A_2(k)\,\mathrm{e}^{-ky} \tag{4.27}$$

las cuales pueden ser no acotadas cuando $y \to \infty$ (dependiendo del signo de k). La combinación más general de éstas que permanece acotada para toda $y > 0$ es[2]

$$U(k,y) = A(k)\,\mathrm{e}^{-|k|y} \tag{4.28}$$

[2] Una condición necesaria para que una función $f(x)$ tenga transformada de Fourier es que sea acotada y puede verse que cuando existe la transformada $F(k)$, ésta también es acotada. Se sigue entonces que si $F(k)$ es no acotada, entonces $f(x)$ también sería no acotada.

Puede verificarse trivialmente que ésta es solución de (4.25) para cualquier función $A(k)$. Imponiendo la condición de frontera (4.26) en ésta se tiene

$$F(k) = U(k,0) = A(k)\,\mathrm{e}^{0} \tag{4.29}$$

de donde se sigue que $A(k) = F(k)$. Se tiene entonces que la solución al problema (4.25)–(4.26) con $U(k,y)$ acotada para toda $y > 0$ y para toda $-\infty < k < \infty$ es[3]

$$U(k,y) = F(k)\,\mathrm{e}^{-|k|y} \tag{4.30}$$

Lo que sigue ahora es aplicar la transformada inversa de Fourier para regresar al espacio de posiciones. Utilizando

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{U(k,y)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}U(k,y)dk \tag{4.31}$$

directamente en la solución (4.30) se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{U(k,y)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\,\mathrm{e}^{-|k|y}\right\} \tag{4.32}$$

Denotando $G(k) = \mathrm{e}^{-|k|y}$ y utilizando la propiedad de la convolución

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{G(k)F(k)\right\} = (g * f)(x) \tag{4.33}$$

se encuentra

$$u(x,y) = (g * f)(x) \tag{4.34}$$

donde

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-|k|y}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \tag{4.35}$$

y

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\right\} \tag{4.36}$$

[3] Falta considerar el valor $k = 0$, pero en tal caso se tendría la solución general $U(0,y) = A_1(0)y + A_2(0)$, la cual es acotada para toda $y > 0$ siempre que $A_1(0) \equiv 0$ y $A_2(0)$ sea cualquier real. Claramente esta solución puede obtenerse como el caso particular $k = 0$ de (4.28), de tal forma que no era necesario considerarlo por separado.

Finalmente, utilizando la definición de la convolución con estas funciones se obtiene

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (g * f)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-s) f(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{y}{(x-s)^2 + y^2} \right) f(s) ds \\
&= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{(x-s)^2 + y^2} \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1. *Muestre que*

$$
\mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{e}^{-|k|y} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)
$$

Ejercicio 2. *Demuestre que la función $u(x,y)$ dada por (4.37) es solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior definido en (4.16)–(4.17) para $u(x,y)$ acotada.*

Ejemplo 1. *Encuentre la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior si el potencial en el eje x es $f(x) = \delta(x)$. Esto es, el potencial sobre el eje x es un pulso en el origen.*

Solución. Utilizamos la solución (4.37) con $f(s) = \delta(s)$ y evaluamos la integral directamente usando las propiedades de la delta

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(s) ds}{(x-s)^2 + y^2} \\
&= \frac{y}{\pi} \left. \frac{1}{(x-s)^2 + y^2} \right|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2. *Encuentre la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior si el potencial en el eje x es ahora $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$. Esto es, el potencial sobre el eje x está compuesto de un pulso en cada valor entero.*

Solución. Introduciendo directamente $f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s-n)$ en (4.37) y evaluando la integral suponiendo que $\int \sum(\cdots) = \sum \int(\cdots)$ se encuentra

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s-n) ds}{(x-s)^2 + y^2} \\
&= \frac{y}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(s-n) ds}{(x-s)^2 + y^2} \\
&= \frac{y}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left. \frac{1}{(x-s)^2 + y^2} \right|_{s=n} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-n)^2 + y^2} \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

De aquí se observa que el potencial para esta condición de frontera es la suma de los potenciales de cada uno de los pulsos individuales.

Ejemplo 3. *Encuentre la solución al problema de Dirichlet en el semiplano derecho: $x > 0$, $-\infty < y < \infty$, con la condición de frontera $u(0,y) = f(y)$, y $u(x,y)$ acotada en todo el semiplano.*

Solución. Debido a la simetría de este problema con el del semiplano superior, simplemente intercambiamos x con y en la solución (4.37) para obtener

$$
u(x,y) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{x^2 + (y-s)^2} \qquad (4.40)
$$

Ejemplo 4. *Encuentre la solución al problema de Dirichlet en todo el plano con la condición de frontera $u(x,0) = f(x)$, y $u(x,y)$ acotada fuera del eje x.*

Solución. Siguiendo el mismo tratamiento del problema del semiplano superior, se llega a la misma ecuación (4.25) y condición de frontera (4.26). La solución a este problema acotada en todo el plano es ahora

$$
U(k,y) = F(k) \mathrm{e}^{-|k||y|} \qquad (4.41)
$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de ésta y usando la convolución se encuentra

$$
u(x,y) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{(x-s)^2 + y^2} \qquad (4.42)
$$

Ejemplo 5. *Encuentre la solución al problema de Dirichlet en todo el plano con la condición de frontera $u(0, y) = f(y)$, y $u(x, y)$ acotada fuera del eje y.*

Solución. De manera análoga se encuentra

$$u(x, y) = \frac{|x|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)ds}{x^2 + (y - s)^2} \tag{4.43}$$

4.3 Ecuación de Onda

4.3.1 Problema de Cauchy para la Cuerda Vibrante Infinita

Ahora queremos resolver el problema de valores iniciales para la cuerda vibrante infinita

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{4.44}$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \tag{4.45}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \tag{4.46}$$

definida para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ empleando la transformada de Fourier.

Como hemos visto, la función $u(x, t)$ puede interpretarse como la longitud transversal correspondiente a la desviación del equilibrio de la cuerda vibrante en cada punto x y en cada tiempo t.

Nuevamente, el hecho que las condiciones iniciales queden en términos de la variable x nos conduce a utilizar la transformada de Fourier en la variable x. Esto es

$$U(k, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} u(x, t) dx \tag{4.47}$$

Aplicando esta $\mathcal{F}$ a cada una de las ecuaciones (4.44)–(4.46) utilizando las propiedades adecuadas (y llevando a cabo unas simplificaciones) se obtiene el problema en el espacio de la variable k

$$U_{tt} + c^2 k^2 U = 0 \tag{4.48}$$

$$U(k, 0) = \Phi(k) \tag{4.49}$$

$$U_t(k, 0) = \Psi(k) \tag{4.50}$$

La ecuación (4.48) es esencialmente la ecuación del oscilador armónico para U. Su solución general en términos de exponenciales complejas es

$$U(k,t) = A(k)\,\mathrm{e}^{ickt} + B(k)\,\mathrm{e}^{-ickt} \tag{4.51}$$

para funciones arbitrarias A y B. Imponiendo las condiciones iniciales (4.49) y (4.50) se obtiene respectivamente

$$\Phi(k) = U(k,0) = A(k) + B(k) \tag{4.52}$$
$$\Psi(k) = U_t(k,0) = ick\,[A(k) - B(k)\,] \tag{4.53}$$

Resolviendo este sistema para A y B se obtiene

$$A(k) = \frac{1}{2}\Phi(k) - \frac{i}{2ck}\Psi(k) \tag{4.54}$$
$$B(k) = \frac{1}{2}\Phi(k) + \frac{i}{2ck}\Psi(k) \tag{4.55}$$

que al introducir en (4.51) da la solución

$$U(k,t) = \left(\frac{1}{2}\Phi(k) - \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{ickt} + \left(\frac{1}{2}\Phi(k) + \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{-ickt} \tag{4.56}$$

Para regresar a las variables originales aplicamos la transformada de Fourier inversa

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{U(k,t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ikx}U(k,t)dk \tag{4.57}$$

Esto da

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\left(\frac{1}{2}\Phi(k) - \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{ickt}dk \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\left(\frac{1}{2}\Phi(k) + \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{-ickt}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\Phi(k) - \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}dk \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\Phi(k) + \frac{i}{2ck}\Psi(k)\right)\mathrm{e}^{-ik(x+ct)}dk \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}dk + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x+ct)}dk \\
&- \frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{k}\Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}dk + \frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{k}\Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x+ct)}dk \\
&= \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) \\
&+ \frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{k}\left(\Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x+ct)} - \Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}\right)dk \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

La última integral puede reescribirse usando el teorema de convolución. Dado que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i}{k}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\,\frac{i}{k}\,dk \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x) \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

se tiene

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ik(x\pm ct)}\,\frac{i}{k}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x\pm ct) \qquad (4.60)
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ik(\pm ct)}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\,\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ik(\pm ct)}\,dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ik(x\pm ct)}\,\frac{i}{k}\,dk \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x\pm ct) \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

Luego, como

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\Psi(k)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\,\Psi(k)\,dk = \psi(x) \tag{4.62}$$

entonces, por el teorema de convolución, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ik(\pm ct)}\Psi(k)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x\pm ct - s)\psi(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(x\pm ct-s)\psi(s)ds \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ahora, la función signo puede escribirse como

$$\mathrm{sgn}(x\pm ct - s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; s < x\pm ct \\ 0 & \text{si } \; s = x\pm ct \\ -1 & \text{si } \; s > x \pm ct \end{cases} \tag{4.64}$$

de tal forma que la integral en (4.63) es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(x\pm ct-s)\psi(s)ds = \int_{-\infty}^{x\pm ct}\psi(s)ds - \int_{x\pm ct}^{\infty}\psi(s)ds \tag{4.65}$$

Con todos estos resultados podemos escribir el último sumando de (4.58) como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{k}\left(\Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x+ct)} - \Psi(k)\,\mathrm{e}^{-ik(x-ct)}\right)dk \\ &\quad = \frac{1}{2c}\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ik(+ct)}\Psi(k)\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i}{k}\,\mathrm{e}^{-ik(-ct)}\Psi(k)\right\}\right) \\ &\quad = \frac{1}{4c}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(x+ct-s)\psi(s)ds - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(x-ct-s)\psi(s)ds\right) \\ &\quad = \frac{1}{4c}\left(\int_{-\infty}^{x+ct}\psi(s)ds - \int_{x+ct}^{\infty}\psi(s)ds - \int_{-\infty}^{x-ct}\psi(s)ds + \int_{x-ct}^{\infty}\psi(s)ds\right) \\ &\quad = \frac{1}{4c}\left(\int_{x-ct}^{-\infty}\psi(s)ds + \int_{-\infty}^{x+ct}\psi(s)ds + \int_{x-ct}^{\infty}\psi(s)ds + \int_{\infty}^{x+ct}\psi(s)ds\right) \\ &\quad = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \end{aligned} \tag{4.66}$$

Introduciendo esta expresión en (4.58) se obtiene finalmente

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(x-ct) + \frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \tag{4.67}$$

esto es, la solución de D'Alembert.

4.4 Ecuación de Calor

4.4.1 Difusión de Calor a lo Largo de una Línea Infinita

El problema en cuestión ahora es la ecuación de calor unidimensional con condición inicial. Esto es

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{4.68}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{4.69}$$

definida para $-\infty < x < \infty$, $t > 0$. Vamos a resolverlo utilizando la transformada de Fourier.

En este contexto la función $u(x,t)$ puede interpretarse como la temperatura en cada punto x de la línea y en cada tiempo t. Una vez más, dado que la condición inicial es una función de la variable x, entonces debemos utilizar la transformada de Fourier en la variable x. Esto es

$$U(k,t) = \mathcal{F}\left\{u(x,t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} u(x,t)dx \tag{4.70}$$

Aplicando esta $\mathcal{F}$ a cada una de las ecuaciones (4.68)–(4.69) utilizando las propiedades adecuadas (y llevando a cabo unas simplificaciones) se obtiene el problema en el espacio de la variable k

$$U_t + \alpha^2 k^2 U = 0 \tag{4.71}$$

$$U(k,0) = F(k) \tag{4.72}$$

La ecuación (4.71) es esencialmente una ecuación diferencial ordinaria para U (aunque debe considerarse su dependencia en k). Su solución, sujeta a la condición inicial (4.72) es

$$U(k,t) = F(k)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 k^2 t} \tag{4.73}$$

Regresamos al espacio de la variable x aplicando la transformada de Fourier inversa

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{U(k,t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx} U(k,t)dk \tag{4.74}$$

y el teorema de la convolución

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(k)F(k)\} = (g * f)(x) \tag{4.75}$$

Dado que

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{e}^{-\alpha^2 k^2 t} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \end{aligned} \tag{4.76}$$

y

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} \tag{4.77}$$

se tiene que la solución al problema es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2 t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}} f(s) ds \end{aligned} \tag{4.78}$$

4.5 Ecuación de Schrödinger

4.5.1 Partícula en un Pozo Rectangular de Potencial

El último problema que consideramos en este capítulo es la ecuación de Schrödinger unidimensional con condición inicial

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi \tag{4.79}$$

$$\psi(x,0) = f(x) \tag{4.80}$$

definida para $-\infty < x < \infty,\ t > 0$, con $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$. En el caso del pozo rectangular de potencial se tiene

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le x \le a \\ V_0 & \text{si } \ x < 0,\ \ x > a \end{cases} \tag{4.81}$$

con $V_0 > 0$. La función $\psi(x,t)$ en este contexto es la función de onda de una partícula sujeta al potencial independiente del tiempo $V(x)$.

Nuevamente utilizamos la transformada de Fourier en la variable x pues la condición inicial es una función de x. Esto es

$$\Psi(k,t) = \mathcal{F}\{\psi(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}\psi(x,t)dx \tag{4.82}$$

Aplicándola a las ecuaciones (4.79)–(4.80) utilizando las propiedades adecuadas (y llevando a cabo unas simplificaciones) se obtiene el problema en el espacio de la variable k

$$i\hbar\Psi_t - \frac{\hbar^2}{2m}k^2\Psi - \mathcal{F}\{V(x)\psi\} = 0 \tag{4.83}$$

$$\Psi(k,0) = F(k) \tag{4.84}$$

donde

$$\mathcal{F}\{V(x)\psi\} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le x \le a \\ V_0\Psi & \text{si } \ x < 0, \ \ x > a \end{cases} \tag{4.85}$$

Podemos utilizar $\mathcal{F}\{V(x)\psi\} = V_0\Psi$ y luego hacer la consideración $V_0 = 0$ para $0 \le x \le a$. De esta forma sólo nos concentramos en el problema

$$\Psi_t + \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}k^2 + V_0\right)\Psi = 0 \tag{4.86}$$

$$\Psi(k,0) = F(k) \tag{4.87}$$

cuya solución es

$$\Psi(k,t) = F(k)\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}k^2 + V_0\right)t} \tag{4.88}$$

Regresamos al espacio de la variable x aplicando la transformada de Fourier inversa

$$\psi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\Psi(k,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\Psi(k,t)dk \tag{4.89}$$

y el teorema de la convolución

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(k)F(k)\} = (g * f)(x) \tag{4.90}$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}k^2+V_0\right)t} \right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\, \mathrm{e}^{-\frac{i\hbar t}{2m}k^2} \right\} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\, \mathcal{F}^{-1}\left\{ \mathrm{e}^{-\frac{i\hbar t}{2m}k^2} \right\} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\, \frac{1}{\sqrt{\frac{i\hbar t}{m}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\frac{2i\hbar t}{m}}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{i\hbar t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\ \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}x^2}
\end{aligned} \tag{4.91}
$$

y

$$
f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\right\} \tag{4.92}
$$

se obtiene la solución

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-s) f(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{m}{i\hbar t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t}\ \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds
\end{aligned} \tag{4.93}
$$

válida para $x < 0$ y $x > a$, pero

$$
\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds \tag{4.94}
$$

para $0 \leq x \leq a$.

Ejemplo 1. *Determine la función de onda de una partícula libre para la condición inicial:* $\psi(x,0) = f(x)$, *con* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$.

Solución. El resultado se encuentra escribiendo $V_0 \equiv 0$ en toda la solución anterior. Esto es:

$$
\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds \tag{4.95}
$$

para $-\infty < x < \infty$. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} & \text{si } \ 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } \ x < 0, \ \ x > a \end{cases} \tag{4.96}$$

se tiene la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi a i\hbar t}} \int_0^a \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} ds \tag{4.97}$$

Ejemplo 2. *Determine la función de onda de una partícula sujeta al escalón de potencial*

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq x_0 \\ V_0 & \text{si } \ x > x_0 \end{cases} \tag{4.98}$$

con $V_0 \neq 0$, *para la condición inicial:* $\psi(x,0) = f(x)$, *con* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$.

Solución. Utilizando el resultado principal de esta sección se encuentra

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2\pi i\hbar t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds & \text{si } \ x \leq x_0 \\ \sqrt{\dfrac{m}{2\pi i\hbar t}} \ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds & \text{si } \ x > x_0 \end{cases} \tag{4.99}$$

Ejemplo 3. *Determine la función de onda de una partícula sujeta a la barrera rectangular de potencial*

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } \ 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } \ x < 0, \ \ x > a \end{cases} \tag{4.100}$$

para $V_0 > 0$ *y la condición inicial:* $\psi(x,0) = f(x)$, *con* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$.

Solución. Nuevamente utilizamos el resultado principal de esta sección para obtener

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2\pi i\hbar t}} \ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds & \text{si } \ 0 \leq x \leq a \\ \sqrt{\dfrac{m}{2\pi i\hbar t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t}(x-s)^2} f(s) ds & \text{si } \ x < 0, \ \ x > a \end{cases} \tag{4.101}$$

Capítulo 5

Problemas Más Generales

En las aplicaciones se encuentran problemas más generales que los estudiados en los capítulos anteriores. Por ejemplo, resolver EDP en geometrías no rectangulares hace necesario introducir coordenadas curvilíneas directamente en los operadores diferenciales. Aunque ya se ha estudiado la separación de variables para la ecuación de calor tanto en coordenadas cilíndricas como en esféricas (y por analogía, con el sector espacial de la ecuación de onda y de la ecuación de Laplace) no se ha considerado su solución de forma explícita. El problema de determinar esas soluciones, lejos de ser ilustrativo, es bastante técnico. Las ideas esenciales para atacarlos ya han sido expuestas previamente y la metodología particular, como el método de Frobenius, forma parte de un curso optativo de *Métodos Matemáticos*. No obstante, un problema accesible es determinar el potencial electrostático en el interor del disco cuando se conoce su valor en el círculo frontera. Otro problema de interés en este capítulo corresponde a condiciones de frontera más generales. Lo ilustramos resolviendo el problema de Dirichlet general para la ecuación de Laplace en el rectángulo. Un problema relevante, también considerado en este capítulo, corresponde a resolver EDP no homogéneas. Lo abordamos determinando las *funciones de Green* y a partir de ellas construimos las soluciones generales. Utilizamos como ejemplos los problemas unidimensionales para las ecuaciones no homogéneas de onda, de calor y de Laplace (i.e. ecuación de Poisson). Elegimos utilizar la técnica de la transformada de Fourier porque permite un tratamiento más transparente y autocontenido. Para finalizar estas notas, mostramos como las ecuaciones de la electrodinámica clásica de Maxwell conducen a ecuaciones de onda no homogéneas para los campos eléctrico y magnético, y a ecuaciones similares para los potenciales escalar y vectorial.

5.1 Geometrías No rectangulares

Como ejemplo de este tipo de problema consideremos determinar el potencial $u(\rho,\phi)$ en el disco de radio a cuando se conoce el valor del potencial sobre el círculo $\rho = a$. El problema es entonces resolver la ecuación de Laplace dada en coordenadas polares

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} = 0 \tag{5.1}$$

para $\rho \leq a$, que satisface la condición de frontera

$$u(a,\phi) = f(\phi), \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \tag{5.2}$$

Dos condiciones adicionales que se piden a la función $u(\rho,\phi)$ es que sea de valores únicos (i.e. *univaluada*) y acotada para $\rho < a$. Estas son necesarias para poder interpretar físicamente a la función $u(\rho,\phi)$ como un potencial.

La solución de este problema puede encontrarse utilizando el método de separación de variables. La propuesta es

$$u(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \tag{5.3}$$

Al introducirla en (5.1) se obtiene

$$R''\Phi + \frac{1}{\rho}R'\Phi + \frac{1}{\rho^2}R\Phi'' = 0 \tag{5.4}$$

Multiplicándola por $\rho^2/(R\Phi)$ se llega a la separación

$$\rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = A \tag{5.5}$$

con A una constante compleja arbitraria. Se tiene entonces el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\rho^2 R'' + \rho R' - AR = 0 \tag{5.6}$$

$$\Phi'' + A\Phi = 0 \tag{5.7}$$

La ecuación para $R(\rho)$ es una ecuación de Euler mientras que la ecuación para $\Phi(\phi)$ es lineal de coeficientes constantes. Podemos resolver ambas para cualquier valor de la constante A. Consideramos los casos relevantes:

(i) Para $A = 0$ la solución general de (5.7) es

$$\Phi(\phi) = c_1\phi + c_2 \tag{5.8}$$

la cual será univaluada para $\phi \in (-\infty, \infty)$ sólo cuando $c_1 \equiv 0$ (de otra forma $\Phi(\phi) \neq \Phi(\phi + 2\pi)\ \forall\ \phi$). Podemos tomar la constante arbitraria $c_2 = 1$; esto es $\Phi(\phi) \equiv 1$. Luego, para (5.6) se busca una solución de la forma $R(\rho) = \rho^m$. Se encuentra que $m = 0$ es raíz de multiplicidad 2 y por lo tanto se tiene la solución general

$$R(\rho) = k_1 \ln \rho + k_2 \tag{5.9}$$

Esta es acotada para $0 \leq \rho < a$ siempre que $k_1 \equiv 0$. Nuevamente, tomamos $R(\rho) \equiv 1$ con lo cual se tiene la solución para este caso:

$$u_0(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \equiv 1 \tag{5.10}$$

(ii) Para $A \neq 0$ la solución general de (5.7) es

$$\Phi(\phi) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \phi} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \phi} \tag{5.11}$$

con $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = A$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Esta función será univaluada sólo cuando sea periódica (de periodo 2π), y eso sucede cuando $A = -n^2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ de tal forma que $\lambda_1 = in$ y $\lambda_2 = -in$. La solución general univaluada (5.11) puede escribirse también en la forma $\Phi(\phi) = c_1 \cos(n\phi) + c_2 \operatorname{sen}(n\phi)$, con nuevas constantes c_1 y c_2. Una vez más, la solución de (5.6) se busca en la forma $R(\rho) = \rho^m$ considerando ya que $A = -n^2$. Se encuentra que $m = \pm n$ y por lo tanto se tiene la solución general

$$R(\rho) = k_1 \rho^n + k_2 \rho^{-n} \tag{5.12}$$

Esta es acotada para $0 \leq \rho < a$ siempre que $k_1 \equiv 0$ cuando $n < 0$ y $k_2 \equiv 0$ cuando $n > 0$. Sin perder generalidad elegimos $R(\rho) = \rho^n$ con lo cual se tiene la solución

$$u_n(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi) = \rho^n [\, c_1 \cos(n\phi) + c_2 \operatorname{sen}(n\phi)\,] \tag{5.13}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

A partir de éstas construimos la solución más general de (5.1) que es univaluada y acotada en el disco $0 \leq \rho < a$. Esta es

$$\begin{aligned} u(\rho,\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\, u_n(\rho,\phi) \\ &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left[\, \alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \operatorname{sen}(n\phi) \,\right] \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde $\alpha_n = \gamma_n c_1$ y $\beta_n = \gamma_n c_2$ con γ_n constantes arbitrarias. Resta fijar la condición de frontera (5.2). Se tiene

$$\begin{aligned} f(\phi) &= u(a,\phi) \\ &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[\, \alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \operatorname{sen}(n\phi) \,\right] \end{aligned} \tag{5.15}$$

Los coeficientes γ_0, α_n y β_n se encuentran respectivamente: integrando (5.15) sobre $0 \leq \phi \leq 2\pi$, multiplicando (5.15) por $\cos(m\phi)$ e integrando sobre $0 \leq \phi \leq 2\pi$, y finalmente multiplicando (5.15) por $\operatorname{sen}(m\phi)$ e integrando sobre $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Se obtiene

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \tag{5.16}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\pi) d\phi \tag{5.17}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \operatorname{sen}(n\pi) d\phi \tag{5.18}$$

Notamos que $\gamma_0 = \alpha_0/2$, de tal forma que la solución (5.14) finalmente se escribe como

$$u(\rho,\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left[\, \alpha_n \cos(n\phi) + \beta_n \operatorname{sen}(n\phi) \,\right] \tag{5.19}$$

con los coeficientes α_n y β_n dados por (5.17)–(5.18) para $n = 0, 1, 2, \ldots$

5.2 Condiciones de Frontera Generales

Un ejemplo de problema de Dirichlet con condiciones de frontera generales corresponde a la ecuación de Laplace en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$:

$$
\begin{align}
u_{xx} + u_{yy} &= 0 \tag{5.20}\\
u(x, 0) &= f_0(x) \tag{5.21}\\
u(x, b) &= f_b(x) \tag{5.22}\\
u(0, y) &= g_0(y) \tag{5.23}\\
u(a, y) &= g_a(y) \tag{5.24}
\end{align}
$$

donde $f_0(x)$ y $f_b(x)$ son funciones definidas en $[0, a]$, y $g_0(y)$ y $g_a(y)$ funciones definidas en $[0, b]$. El primer hecho notable es que podemos escribir la solución como $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)}$ donde $u^{(1)}(x, y)$ es solución del problema

$$
\begin{align}
u_{xx} + u_{yy} &= 0 \tag{5.25}\\
u(x, 0) &= f_0(x) \tag{5.26}\\
u(x, b) &= 0 \tag{5.27}\\
u(0, y) &= 0 \tag{5.28}\\
u(a, y) &= 0 \tag{5.29}
\end{align}
$$

$u^{(2)}(x, y)$ es solución del problema

$$
\begin{align}
u_{xx} + u_{yy} &= 0 \tag{5.30}\\
u(x, 0) &= 0 \tag{5.31}\\
u(x, b) &= f_b(x) \tag{5.32}\\
u(0, y) &= 0 \tag{5.33}\\
u(a, y) &= 0 \tag{5.34}
\end{align}
$$

$u^{(3)}(x,y)$ es solución del problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{5.35}$$
$$u(x,0) = 0 \tag{5.36}$$
$$u(x,b) = 0 \tag{5.37}$$
$$u(0,y) = g_0(y) \tag{5.38}$$
$$u(a,y) = 0 \tag{5.39}$$

y $u^{(4)}(x,y)$ es solución del problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{5.40}$$
$$u(x,0) = 0 \tag{5.41}$$
$$u(x,b) = 0 \tag{5.42}$$
$$u(0,y) = 0 \tag{5.43}$$
$$u(a,y) = g_a(y) \tag{5.44}$$

La prueba se sigue directamente de la simple sustitución en (5.20)–(5.24) de $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)}$; utilizando las hipótesis que cada $u^{(i)}$ es solución del problema respectivo. Notamos además que cada uno de los problemas anteriores es *análogo* a los otros tres, en el sentido que de la solución de cualquiera de ellos podemos inferir las soluciones de los demás. Elegimos resolver el problema para $u^{(1)}(x,y)$ definido por (5.25)–(5.29). Utilizamos separación de variables mediante la propuesta

$$u^{(1)}(x,y) = X(x)Y(y) \tag{5.45}$$

Al introducirla en (5.25) se obtiene

$$X''Y + XY'' = 0 \tag{5.46}$$

Multiplicándola por $1/(XY)$ se llega a la separación

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = A \tag{5.47}$$

con A una constante compleja arbitraria. Se tiene entonces el sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'' - AX = 0 \tag{5.48}$$
$$Y'' + AY = 0 \tag{5.49}$$

ambas lineales de coeficientes constantes. Las condiciones de frontera que se obtienen a partir de (5.26)–(5.29) son

$$X(x)Y(0) = f_0(x) \tag{5.50}$$

$$X(x)Y(b) = 0 \tag{5.51}$$

$$X(0)Y(y) = 0 \tag{5.52}$$

$$X(a)Y(y) = 0 \tag{5.53}$$

con lo cual se obtiene el problema para $X(x)$

$$X'' - AX = 0 \tag{5.54}$$

$$X(0) = 0 \tag{5.55}$$

$$X(a) = 0 \tag{5.56}$$

La solución de éste es bien conocida

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{5.57}$$

con $A = -(n\pi/a)^2$ para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ahora, introduciendo esta A en (5.49) y utlizando las condiciones de frontera (5.50)–(5.51) se obtiene el problema para $Y(y)$

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0 \tag{5.58}$$

$$Y(0) = C \tag{5.59}$$

$$Y(b) = 0 \tag{5.60}$$

con C una constante arbitraria, pero no cero, y $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ La solución general de (5.58) es

$$Y(y) = k_1 \, e^{\frac{n\pi}{a} y} + k_2 \, e^{-\frac{n\pi}{a} y} \tag{5.61}$$

con k_1 y k_2 constantes arbitrarias. Tenemos, por lo tanto, tres constantes arbitrarias y sólo dos condiciones para fijarlas. Esto nos deja la libertad de escoger una de ellas. Imponiendo las condiciones de frontera (5.59)–(5.60) en la solución (5.61) se obtiene la relación

$$C = -2k_1 \, e^{\frac{n\pi}{a} b} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \tag{5.62}$$

de tal forma que si tomamos $k_1 = -(1/2)\,\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}b}$ se tendrá

$$C = \operatorname{senh}\Big(\frac{n\pi}{a}b\Big) \tag{5.63}$$

y, en tal caso, $k_2 = (1/2)\,\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}b}$. Con todo esto, para esta elección de C se tiene la solución del problema (5.58)–(5.60)

$$\begin{aligned} Y(y) &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}b}\,\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}b}\,\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} - \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right) \\ &= \operatorname{senh}\Big(\frac{n\pi}{a}(b-y)\Big) \end{aligned} \tag{5.64}$$

A partir de (5.57) y (5.64) construimos las soluciones

$$\begin{aligned} u_n^{(1)}(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,\operatorname{senh}\Big(\frac{n\pi}{a}(b-y)\Big) \end{aligned} \tag{5.65}$$

para cada $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, y con ellas la solución general

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, u_n^{(1)}(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, u_n^{(1)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.66}$$

con los coeficientes $\alpha_n = a_n + a_{-n}$ aún por ser determinados. Para fijarlos imponemos la condición de frontera (5.26). Se tiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &= u^{(1)}(x,0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, u_n^{(1)}(x,0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \operatorname{senh}\Big(\frac{n\pi}{a}b\Big)\,\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \end{aligned} \tag{5.67}$$

de donde $\alpha_n \operatorname{senh}(n\pi b/a)$ son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de la función $f_0(x)$ (i.e. de su extensión impar alrededor de $x = 0$ y periódica de periodo $2a$). Es decir

$$\alpha_n \operatorname{senh}\Big(\frac{n\pi}{a}b\Big) = \frac{2}{a}\int_0^a f_0(x)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,dx \tag{5.68}$$

De todo este análisis concluimos que la solución al problema (5.25)–(5.29) es

$$u^{(1)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \tag{5.69}$$

con los coeficientes α_n dados por

$$\alpha_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{5.70}$$

Análogamente, la solución al problema (5.30)–(5.34) es

$$u^{(2)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \tag{5.71}$$

con los coeficientes β_n dados por

$$\beta_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f_b(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{5.72}$$

De igual manera, la solución al problema (5.35)–(5.39) es

$$u^{(3)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{5.73}$$

con los coeficientes γ_n dados por

$$\gamma_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b g_0(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \tag{5.74}$$

y finalmente, la solución al problema (5.40)–(5.44) es

$$u^{(4)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{5.75}$$

con los coeficientes μ_n dados por

$$\mu_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b g_a(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \tag{5.76}$$

De esta forma, se tiene la solución al problema completo (5.20)–(5.24)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u^{(1)}(x,y) + u^{(2)}(x,y) + u^{(3)}(x,y) + u^{(4)}(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left[\alpha_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) + \beta_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right] \right. \\ &+ \left. \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\gamma_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right) + \mu_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right] \right\} \end{aligned} \tag{5.77}$$

con los coeficientes α_n, β_n, γ_n, y μ_n dados por

$$\alpha_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{5.78}$$

$$\beta_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f_b(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \tag{5.79}$$

$$\gamma_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b g_0(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \tag{5.80}$$

$$\mu_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b g_a(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \tag{5.81}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

5.3 Ecuaciones No homogéneas: Funciones de Green

El problema en cuestión es

$$\hat{\mathcal{L}}\, u = g \tag{5.82}$$

donde $\hat{\mathcal{L}}$ es un *operador diferencial lineal*. Para fijar ideas podemos considerar

$$\hat{\mathcal{L}} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f \tag{5.83}$$

con $a, b, \ldots, f,$ al igual que la función incógnita u y el término inhomogéneo g, funciones de (x, y). Esto es, $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}(x, y)$.

Para resolver (5.82) consideramos el problema alternativo

$$\hat{\mathcal{L}}\, G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{5.84}$$

y notamos que al multiplicar esta ecuación por $g(\xi,\eta)$ e integrar sobre todos los valores de ξ y η (suponiendo que son $(-\infty,\infty)$) se obtiene[1]

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \hat{\mathcal{L}}\, G(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) g(\xi,\eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \delta(x-\xi) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, \delta(y-\eta) g(\xi,\eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \delta(x-\xi) g(\xi,y) \\
&= g(x,y) \qquad (5.85)
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\hat{\mathcal{L}}(x,y)$ es un operador diferencial de segundo orden; basta con que $G(x,y;\xi,\eta)$ sea de clase C^2 para que $\hat{\mathcal{L}}$ pueda salir de las integrales. Suponiendo ésto, se tiene

$$\hat{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, G(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta) = g(x,y) \qquad (5.86)$$

Al compararla con (5.82) obtenemos directamente que

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, G(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta) \qquad (5.87)$$

es la solución al problema original. La función $G(x,y;\xi,\eta)$, que satisface (5.84), es llamada la *función de Green* asociada al operador diferencial lineal $\hat{\mathcal{L}}$. Dado el carácter de funciones *unidad* de las deltas de Dirac, $G(x,y;\xi,\eta)$ puede pensarse como el operador inverso de $\hat{\mathcal{L}}$. Otro aspecto notable es que a partir de su conocimiento puede obtenerse la solución general del problema original. En ese sentido la función de Green asociada a $\hat{\mathcal{L}}$ es una *solución fundamental*.

Nota: Anticipando un cambio de signo al aplicar una transformada de Fourier a derivadas de segundo orden, es común elegir el término inhomogéneo como $-g$ y en ese sentido definir la función de Green considerando el lado derecho de (5.84) igual a $-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$. En estas notas se empleará tal definición.

[1] Hacemos uso del hecho que la delta es par; i.e.

$$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$$

la cual se sigue directamente de su definición en términos de la función $d_a(x)$.

5.3.1 Función de Green para EDO

Primer Problema

Comencemos por resolver la ecuación

$$y'' - a^2 y = -f(x) \tag{5.88}$$

para $a > 0$.[2] Esto es, $\hat{\mathcal{L}}\, y = -f$, con $\hat{\mathcal{L}} = (d^2/dx^2) - a^2$. La función de Green asociada, $G(x;\xi)$, satisface

$$G'' - a^2 G = -\delta(x-\xi) \tag{5.89}$$

Para resolver esta ecuación utilizamos la transformada de Fourier

$$\tilde{G}(k;\xi) = \mathcal{F}\{G(x;\xi)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} G(x;\xi)dx \tag{5.90}$$

Aplicándola a (5.89), empleando las propiedades adecuadas, se obtiene

$$(-ik)^2 \tilde{G} - a^2 \tilde{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{ik\xi} \tag{5.91}$$

esto es

$$\tilde{G} = \left(\frac{1}{k^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.92}$$

Regresamos a las variables originales aplicando la transformada inversa

$$G(x;\xi) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{G}(k;\xi)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx} \tilde{G}(k;\xi)dk \tag{5.93}$$

directamente en (5.92). Se encuentra

$$G(x;\xi) = (p * q)(x) \tag{5.94}$$

[2] Si $a = 0$ la solución se encuentra integrando dos veces la ecuación $y'' = -f(x)$. Esto es

$$y(x) = -\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta f(\eta) + c_1 x + c_2$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Y si $a < 0$, se encuentra exactamente la misma solución que en el caso $a > 0$, pero con a reemplazada por $|a|$.

donde

$$p(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+a^2}\right\} \tag{5.95}$$

$$q(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right\} = \delta(x-\xi) \tag{5.96}$$

Considerando la transformada de Fourier de la exponencial $\mathrm{e}^{-|ax|}$ se encuentra

$$p(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+a^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{|a|}\,\mathrm{e}^{-|ax|} \tag{5.97}$$

En particular, para $a > 0$ se tiene $|a| = a$. Introduciendo las expresiones para p y q en (5.94) se obtiene la función de Green

$$\begin{aligned} G(x;\xi) &= (p*q)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x-s)q(s)ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-a|x-s|}\delta(s-\xi)ds \\ &= \frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-a|x-\xi|} \end{aligned} \tag{5.98}$$

A partir de ella se construye la solución particular a la ecuación (5.88); la cual es

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x;\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|x-\xi|}f(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{5.99}$$

Nótese que la solución general a la ecuación (5.88) será

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{ax} + C_2\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|x-\xi|}f(\xi)d\xi \tag{5.100}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Segundo Problema

Empleando los resultados anteriores podemos construir la solución de la ecuación

$$y'' + a^2 y = -f(x) \tag{5.101}$$

Observamos que al introducir el cambio $a \to \pm ia$ en el problema original (5.88) se obtiene la ecuación (5.101). De este modo, simplemente aplicamos el mismo cambio a la función de Green (5.98) para obtener

$$G(x;\xi) = \frac{1}{2(\pm ia)}\,\mathrm{e}^{-(\pm ia)|x-\xi|} \tag{5.102}$$

Es decir, en este caso se tienen dos funciones de Green

$$G_{\pm}(x;\xi) = \frac{\pm i}{2a}\,\mathrm{e}^{\pm ia|x-\xi|} \tag{5.103}$$

Empleando alguna combinación lineal de ellas como la función de Green, $G(x;\xi) = A_+G_+(x;\xi) + A_-G_-(x;\xi)$, con A_+ y A_- constantes (complejas en general) tales que $A_+ + A_- = 1$, se obtiene la solución particular de (5.101):

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x;\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\,A_+G_+(x;\xi) + A_-G_-(x;\xi)\,]\,f(\xi)d\xi \\ &= \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_+\,\mathrm{e}^{ia|x-\xi|} - A_-\,\mathrm{e}^{-ia|x-\xi|}\right] f(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{5.104}$$

La solución general es por lo tanto

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{iax} + C_2\,\mathrm{e}^{-iax} + \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_+\,\mathrm{e}^{ia|x-\xi|} - A_-\,\mathrm{e}^{-ia|x-\xi|}\right] f(\xi)d\xi \tag{5.105}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Por ejemplo, se tienen soluciones simétricas para $A_+ = A_- = 1/2$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{iax} + C_2\,\mathrm{e}^{-iax} + \frac{i^2}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{ia|x-\xi|} - \mathrm{e}^{-ia|x-\xi|}}{2i}\right] f(\xi)d\xi \\ &= C_1\,\mathrm{e}^{iax} + C_2\,\mathrm{e}^{-iax} - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\left(a|x-\xi|\right) f(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{5.106}$$

Concluimos esta parte remarcando que otra forma de definir la función de Green asociada al operador diferencial $\hat{\mathcal{L}}$ es como la solución del problema de Dirichlet homogéneo

$$\hat{\mathcal{L}}\,G = -\delta \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{5.107}$$

$$G = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \tag{5.108}$$

Emplearemos ésta en lo que sigue.

5.3.2 Función de Green para EDP

Ecuación de Onda

Consideremos el problema de Cauchy homogéneo para la ecuación de onda unidimensional no homogénea

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -f(x,t) \tag{5.109}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{5.110}$$

$$u_t(x,0) = 0 \tag{5.111}$$

definido para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$. Este problema puede interpretarse como las vibraciones de una cuerda infinita que parte del reposo y con velocidad cero, pero que todo el tiempo está sujeta a un forzamiento $-f(x,t)$. Para resolverlo consideramos la ecuación para la función de Green asociada

$$G_{tt} - c^2 G_{xx} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{5.112}$$

La solución de ésta puede encontrarse utilizando transformadas de Fourier respecto a x y t respectivamente. Denotándolas

$$U(k,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_x\{G(x,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} G(x,t;\xi,\tau)dx \tag{5.113}$$

$$V(k,\omega;\xi,\tau) = \mathcal{F}_t\{U(k,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t} U(k,t;\xi,\tau)dt \tag{5.114}$$

y aplicando (5.113) a (5.112) se obtiene

$$U_{tt} + k^2 c^2 U = -\delta(t-\tau)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.115}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\mathcal{F}_x\{G_{xx}\} = (-ik)^2 U$. Aplicando (5.114) ahora a (5.115) conduce a

$$-\omega^2 V + k^2 c^2 V = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.116}$$

donde esta vez empleamos $\mathcal{F}_t\{U_{tt}\} = (-i\omega)^2 V$. Simplificando se tiene

$$V = \left(\frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.117}$$

Para regresar a las variables originales aplicamos ahora las transformadas inversas

$$U(k,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_t^{-1}\{V(k,\omega;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t}V(k,\omega;\xi,\tau)d\omega \quad (5.118)$$

$$G(x,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_x^{-1}\{U(k,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx}U(k,t;\xi,\tau)dk \quad (5.119)$$

respectivamente. Elegimos actuar primero con $\mathcal{F}_t^{-1}$ y luego con $\mathcal{F}_x^{-1}$ para evitar introducir notación nueva, pero puede verse que el orden inverso produce exactamente el mismo resultado. La aplicación de (5.118) a (5.117) conduce a

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)(p*q)(t) \quad (5.120)$$

donde $(p*q)(t)$ es la convolución de p y q, con

$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}\right\} \quad (5.121)$$

$$q(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right\} = \delta(t-\tau) \quad (5.122)$$

Ahora, $p(t)$ puede encontrarse a partir del resultado (5.97). Notando que en aquel caso la transformada inversa es de k a x pero en éste es de ω a t, e introduciendo $a = \pm ikc$ se tiene

$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\pm ikc}\right)\mathrm{e}^{-(\pm ikc)|t|} \quad (5.123)$$

Esto es, hay dos posibles funciones $p(t)$ que denotamos

$$p_{\pm}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pm i}{kc}\right)\mathrm{e}^{\pm ikc|t|} \quad (5.124)$$

Introduciendo las expresiones para $p_\pm$ y q en (5.120) se obtienen dos funciones $U_\pm$ que, análogamente, denotamos

$$\begin{aligned}
U_\pm(k,t;\xi,\tau) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)(p_\pm * q)(t) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p_\pm(t-s)q(s)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pm i}{kc}\right)\mathrm{e}^{\pm ikc|t-s|}\delta(s-\tau)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\left(\frac{\pm i}{2kc}\,\mathrm{e}^{\pm ikc|t-\tau|}\right) \\
&= \left(\frac{\pm i}{2kc}\,\mathrm{e}^{\pm ikc|t-\tau|}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \qquad (5.125)
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos (5.119) a esta última para obtener

$$G_\pm(x,t;\xi,\tau) = (\phi_\pm * \psi)(x) \qquad (5.126)$$

donde

$$\phi_\pm(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{\pm i}{2kc}\,\mathrm{e}^{\pm ikc|t-\tau|}\right\} \qquad (5.127)$$

$$\psi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right\} = \delta(x-\xi) \qquad (5.128)$$

Para encontrar $\phi_\pm(x)$ observamos que

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{\pm i}{2kc}\right\} = \frac{\pm 1}{2c}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sgn}(x) \qquad (5.129)$$

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left\{\mathrm{e}^{\pm ikc|t-\tau|}\right\} = \sqrt{2\pi}\,\delta(x-[\,\pm c|t-\tau|\,]) \qquad (5.130)$$

de tal forma que por la propiedad de la convolución se tiene

$$
\begin{aligned}
\phi_{\pm}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pm 1}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \operatorname{sgn}(x-s) \right) \left(\sqrt{2\pi}\, \delta(s - [\, \pm c|t-\tau|\,]) \right) ds \\
&= \frac{\pm 1}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-s)\, \delta(s - [\, \pm c|t-\tau|\,])\, ds \\
&= \frac{\pm 1}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \operatorname{sgn}(x - [\, \pm c|t-\tau|\,]) \\
&= \frac{\pm 1}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \operatorname{sgn}(x \mp c|t-\tau|) \qquad (5.131)
\end{aligned}
$$

Con todo esto se tienen las dos funciones de Green

$$
\begin{aligned}
G_{\pm}(x,t;\xi,\tau) &= (\phi_{\pm} * \psi)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(x-s)\psi(s) ds \\
&= \frac{\pm 1}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x - s \mp c|t-\tau|)\delta(s-\xi) ds \\
&= \frac{\pm 1}{4c} \operatorname{sgn}(x - \xi \mp c|t-\tau|\,]) \qquad (5.132)
\end{aligned}
$$

Para construir la solución al problema original utilizamos la combinación lineal simétrica

$$
\begin{aligned}
G(x,t;\xi,\tau) &= \frac{1}{2} [\, G_{+} + G_{-} \,] \\
&= \frac{1}{8c} [\, \operatorname{sgn}(x - \xi - c|t-\tau|) - \operatorname{sgn}(x - \xi + c|t-\tau|) \,] \qquad (5.133)
\end{aligned}
$$

A partir de ésta se obtiene la solución

$$
u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{0}^{t} d\tau\, G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) \qquad (5.134)
$$

Nótese que el intervalo de integración sobre τ es $[\,0,t\,]$ (pues no se aceptan contribuciones desde el *futuro* $\tau > t$). Para facilitar la integración invertimos el orden de las integrales haciendo uso del teorema de Fubini. Se sigue que

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) \\
&= \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \operatorname{sgn}([\,x - c(t-\tau)\,] - \xi) f(\xi,\tau) \\
&- \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \operatorname{sgn}([\,x + c(t-\tau)\,] - \xi) f(\xi,\tau)
\end{aligned} \tag{5.135}
$$

donde hemos utilizado el hecho que $0 \leq \tau \leq t$ para simplificar los valores absolutos. Las integrales sobre ξ pueden evaluarse considerando que $\operatorname{sgn}([\,x - c(t-\tau)\,] - \xi) = 1$ para $\xi < x - c(t-\tau)$ y que $\operatorname{sgn}([\,x - c(t-\tau)\,] - \xi) = -1$ para $\xi > x - c(t-\tau)$ (en la primera integral) y que $\operatorname{sgn}([\,x + c(t-\tau)\,] - \xi) = 1$ para $\xi < x + c(t-\tau)$ y que $\operatorname{sgn}([\,x + c(t-\tau)\,] - \xi) = -1$ para $\xi > x + c(t-\tau)$ (en la segunda integral). Con todo esto se encuentra

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \left[\int_{-\infty}^{x-c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) - \int_{x-c(t-\tau)}^{\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) \right] \\
&- \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \left[\int_{-\infty}^{x+c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) - \int_{x+c(t-\tau)}^{\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) \right] \\
&= \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \left[\int_{-\infty}^{x-c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) + \int_{\infty}^{x-c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) \right] \\
&+ \frac{1}{8c} \int_0^t d\tau \left[\int_{x+c(t-\tau)}^{-\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) + \int_{x+c(t-\tau)}^{\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) \right] \\
&= \frac{1}{4c} \int_0^t d\tau \int_{x+c(t-\tau)}^{x-c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau) \\
&= -\frac{1}{4c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi,\tau)
\end{aligned} \tag{5.136}
$$

Para concluir utilizamos el resultado anterior y la fórmula de D'Alembert para escribir la solución al problema general

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{5.137}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{5.138}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{5.139}$$

Esta es

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\phi(x-ct)+\frac{1}{2}\phi(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}ds\,\psi(s)+\frac{1}{4c}\int_0^t d\tau\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}ds\,f(s,\tau) \tag{5.140}$$

válida para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$. La interpretación es en este caso: cuerda vibrante sometida al forzamiento $f(x,t)$ pero que parte de la forma inicial $\phi(x)$ con velocidad inicial $\psi(x)$ al tiempo $t = 0$.

Ecuación de Calor

Consideremos ahora el problema de Cauchy homogéneo para la ecuación de calor unidimensional no homogénea

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = -f(x,t) \tag{5.141}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{5.142}$$

definido para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$. Este problema puede interpretarse como la difusión de calor por los extremos de la línea infinita cuya distribución inicial de temperatura es idénticamente cero (igual a la del medio o *baño térmico*), pero que todo el tiempo está sujeta a una fuente externa $-f(x,t)$. Para resolverlo consideramos el problema para la función de Green

$$G_t - \alpha^2 G_{xx} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \tag{5.143}$$

Encontramos su solución utilizando transformadas de Fourier respecto a x y a t, respectivamente, que nuevamente denotamos

$$U(k,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_x\{G(x,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} G(x,t;\xi,\tau)dx \tag{5.144}$$

$$V(k,\omega;\xi,\tau) = \mathcal{F}_t\{U(k,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t} U(k,t;\xi,\tau)dt \tag{5.145}$$

Aplicando (5.144) a (5.143) se obtiene

$$U_t + k^2\alpha^2 U = -\delta(t-\tau)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.146}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\mathcal{F}_x\{G_{xx}\} = (-ik)^2 U$. La aplicación de (5.145) ahora a (5.146) produce

$$-i\omega V + k^2\alpha^2 V = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.147}$$

donde esta vez empleamos $\mathcal{F}_t\{U_t\} = (-i\omega)V$. Simplificando obtenemos

$$V = \left(\frac{1}{i\omega - k^2\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right) \tag{5.148}$$

Para regresar a las variables originales aplicamos las transformadas inversas

$$U(k,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_t^{-1}\{V(k,\omega;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} V(k,\omega;\xi,\tau)d\omega \tag{5.149}$$

$$G(x,t;\xi,\tau) = \mathcal{F}_x^{-1}\{U(k,t;\xi,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx} U(k,t;\xi,\tau)dk \tag{5.150}$$

respectivamente. Como antes, se elige aplicar primero $\mathcal{F}_t^{-1}$ y luego $\mathcal{F}_x^{-1}$ para evitar introducir notación nueva, pero puede verse que el orden inverso produce exactamente el mismo resultado. La aplicación de (5.149) a (5.148) conduce a

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)(p * q)(t) \tag{5.151}$$

donde $(p * q)(t)$ es la convolución de p y q, con

$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega - k^2\alpha^2}\right\} \tag{5.152}$$

$$q(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\right\} = \delta(t-\tau) \tag{5.153}$$

Ahora, $p(t)$ puede encontrarse utilizando un resultado anterior. Se tiene

$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega - k^2\alpha^2}\right\} = -\sqrt{2\pi}\,\Theta(t)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2 t} \tag{5.154}$$

donde $\Theta(t)$ es la función de Heaviside (o *escalón unitario*)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \;\; t < 0 \end{cases} \tag{5.155}$$

y ya hemos considerado el hecho que $t > 0$. Introduciendo las expresiones para p y q en (5.151) se obtiene

$$
\begin{aligned}
U(k,t;\xi,\tau) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)(p*q)(t) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(t-s)q(s)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\sqrt{2\pi}\,\Theta(t-s)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2(t-s)}\right)\delta(s-\tau)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)\left(-\Theta(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2(t-\tau)}\right) \\
&= \left(-\Theta(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2(t-\tau)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right)
\end{aligned}
\tag{5.156}
$$

Ahora aplicamos (5.150) a esta última para obtener

$$
G(x,t;\xi,\tau) = (\phi*\psi)(x) \tag{5.157}
$$

donde

$$
\phi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{-\Theta(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2(t-\tau)}\right\} \tag{5.158}
$$

$$
\psi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik\xi}\right\} = \delta(x-\xi) \tag{5.159}
$$

La transformada (5.158) ya fue calculada anteriormente; su resultado es

$$
\phi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{-\Theta(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-k^2\alpha^2(t-\tau)}\right\} = \frac{-\Theta(t-\tau)}{\sqrt{2\alpha^2(t-\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} \tag{5.160}
$$

De esta forma se obtiene la función de Green

$$
\begin{aligned}
G(x,t;\xi,\tau) &= (\phi*\psi)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-s)\psi(s)ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Theta(t-\tau)}{\sqrt{2\alpha^2(t-\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}}\right)\delta(s-\xi)ds \\
&= \frac{-\Theta(t-\tau)}{\sqrt{4\pi\alpha^2(t-\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}}
\end{aligned}
\tag{5.161}
$$

A partir de ésta construimos la solución al problema original

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\tau\, G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{-\Theta(t-\tau)}{\sqrt{4\pi\alpha^2(t-\tau)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} \right) f(\xi,\tau) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{t} d\tau\, \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2(t-\tau)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}}\, f(\xi,\tau) \\ &= -\int_0^{t} d\tau\, \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}}\, f(\xi,\tau) \end{aligned} \tag{5.162}$$

Note que el intervalo de integración para τ se reduce a $[0,t]$ debido a la función de Heaviside. Para finalizar utilizamos el resultado anterior y la solución al problema de Cauchy para la ecuación de calor homogénea para escribir la solución al problema general

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{5.163}$$

$$u(x,0) = g(x) \tag{5.164}$$

Esta es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}}\, g(s) + \int_0^{t} d\tau\, \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}}\, f(s,\tau) \tag{5.165}$$

válida para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$. La interpretación es en este caso: línea infinita que disipa (o absorbe) calor del ambiente sólo a través de sus extremos. Parte de la distribución inicial de temperatura $g(x)$ al tiempo $t = 0$ y está sujeta a la fuente externa $f(x,t)$ en todo punto y a todo tiempo $t > 0$.

Ecuación de Poisson

Consideremos ahora el problema

$$u_{xx} + u_{yy} = -f(x,y) \tag{5.166}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{5.167}$$

definido para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$. La interpretación ahora puede darse en términos del potencial (electrostático o gravitacional) u generado en el punto (x,y) a partir de la fuente $-f(x,y)$. Para resolverlo consideramos el problema para la función de Green

$$G_{xx} + G_{yy} = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{5.168}$$

La solución de ésta puede encontrarse utilizando transformadas de Fourier respecto a x y y respectivamente. En este caso las denotamos

$$U(k_x, y; \xi, \eta) = \mathcal{F}_x\{G(x,y;\xi,\eta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ik_x x} G(x,y;\xi,\eta)dx \tag{5.169}$$

$$V(k_x, k_y; \xi, \eta) = \mathcal{F}_y\{U(k_x,y;\xi,\eta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ik_y y} U(k_x,y;\xi,\eta)dy \tag{5.170}$$

y aplicamos (5.169) a (5.168) para obtener

$$-k_x^2 U + U_{yy} = -\delta(y-\eta)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right) \tag{5.171}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\mathcal{F}_x\{G_{xx}\} = (-ik_x)^2 U$. Aplicando (5.170) ahora a (5.171) produce

$$-k_x^2 V - k_y^2 V = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_y\eta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right) \tag{5.172}$$

donde esta vez empleamos $\mathcal{F}_y\{U_{yy}\} = (-ik_y)^2 V$. Simplificando obtenemos

$$V = \left(\frac{1}{k_y^2 + k_x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_y\eta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right) \tag{5.173}$$

Para regresar a las variables originales aplicamos las transformadas inversas

$$U(k_x, y; \xi, \eta) = \mathcal{F}_y^{-1}\{V(k_x,k_y;\xi,\eta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ik_y y} V(k_x,k_y;\xi,\eta)dk_y \tag{5.174}$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \mathcal{F}_x^{-1}\{U(k_x,y;\xi,\eta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ik_x x} U(k_x,y;\xi,\eta)dk_x \tag{5.175}$$

respectivamente. Al igual que antes, se elige aplicar primero $\mathcal{F}_y^{-1}$ y luego $\mathcal{F}_x^{-1}$ para evitar introducir notación nueva, pero puede verse que el orden inverso produce exactamente el mismo resultado. La aplicación de (5.174) a (5.173) conduce a

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right)(p * q)(y) \tag{5.176}$$

donde $(p * q)(y)$ es la convolución de p y q, con

$$p(y) = \mathcal{F}_y^{-1}\left\{\frac{1}{k_y^2 + k_x^2}\right\} \tag{5.177}$$

$$q(y) = \mathcal{F}_y^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_y\eta}\right\} = \delta(y-\eta) \tag{5.178}$$

Ahora, $p(y)$ se encuentra directamente usando el resultado (5.97) con $a = k_x$. Se tiene

$$p(y) = \mathcal{F}_y^{-1}\left\{\frac{1}{k_y^2 + k_x^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{|k_x|}\,\mathrm{e}^{-|k_x y|} \tag{5.179}$$

Introduciendo las expresiones para p y q en (5.176) se obtiene

$$\begin{aligned}
U(k_x, y; \xi, \eta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right)(p * q)(y) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(y-s)q(s)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{|k_x|}\,\mathrm{e}^{-|k_x(y-s)|}\delta(s-\eta)ds \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right)\left(\frac{1}{2|k_x|}\,\mathrm{e}^{-|k_x(y-\eta)|}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2|k_x|}\,\mathrm{e}^{-|k_x(y-\eta)|}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right) \qquad (5.180)
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos (5.175) a esta última para obtener

$$G(x, y; \xi, \eta) = (\phi * \psi)(x) \tag{5.181}$$

donde

$$\phi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{2|k_x|}\,\mathrm{e}^{-|k_x(y-\eta)|}\right\} \tag{5.182}$$

$$\psi(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{ik_x\xi}\right\} = \delta(x-\xi) \tag{5.183}$$

Para encontrar $\phi(x)$ se requiere seguir el camino adecuado; de otra forma los cálculos se complican y no conducen a ningún resultado útil. Se comienza con la propiedad

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (-ik)^n F(k) \tag{5.184}$$

y se recuerda que se conoce

$$\mathcal{F}\left\{f'(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{2x}{a^2+x^2}\right\} = \sqrt{2\pi}\; i\,\mathrm{sgn}(k)\;\mathrm{e}^{-|ak|} \tag{5.185}$$

Luego, una primitiva de $f'(x) = 2x/(a^2+x^2)$ es $f(x) = \ln\left(a^2+x^2\right)$. Utilizando $n=1$ en (5.184) e igualando a (5.185) se tiene

$$(-ik)F(k) = \sqrt{2\pi}\; i\,\mathrm{sgn}(k)\;\mathrm{e}^{-|ak|} \tag{5.186}$$

Es decir

$$F(k) = -\sqrt{2\pi}\;\frac{1}{|k|}\;\mathrm{e}^{-|ak|} \tag{5.187}$$

donde hemos empleado el hecho que $\mathrm{sgn}(k)/k = 1/|k|$. Multiplicando ambos lados por la constante $-1/(2\sqrt{2\pi})$ se obtiene

$$\frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}F(k) = \frac{1}{2|k|}\;\mathrm{e}^{-|ak|} \tag{5.188}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa a la ecuación anterior. Teniendo en mente que $\mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\right\} = f(x) = \ln\left(a^2+x^2\right)$, se encuentra

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2|k|}\;\mathrm{e}^{-|ak|}\right\} = \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}\;\ln\left(a^2+x^2\right) \tag{5.189}$$

Introduciendo los cambios $\mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}_x^{-1}$, $k \rightarrow k_x$ y $a \rightarrow y-\eta$ (véase la ecuación (5.182)) se sigue directamente que

$$\phi(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}\;\ln\left[(y-\eta)^2+x^2\right] \tag{5.190}$$

De esta forma se obtiene la función de Green

$$\begin{aligned}
G(x,y;\xi,\eta) &= (\phi * \psi)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-s)\psi(s)ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{2\sqrt{2\pi}} \ln\left[(y-\eta)^2 + (x-s)^2\right] \right) \delta(s-\xi)\, ds \\
&= \frac{-1}{4\pi} \ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] \qquad (5.191)
\end{aligned}$$

A partir de ella construimos la solución al problema original

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\, G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) \\
&= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \, \ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] f(\xi,\eta) \qquad (5.192)
\end{aligned}$$

Para concluir utilizamos el resultado anterior (y la solución al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace) para escribir la solución al problema general

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \qquad (5.193)$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad (5.194)$$

Esta es

$$u(x,y) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds\, g(s)}{(x-s)^2 + y^2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] f(\xi,\eta) \qquad (5.195)$$

válida para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. La interpretación es en este caso: potencial (electrostático o gravitacional) generado por una distribución de fuentes (de carga eléctrica o masa) $f(x,y)$, que además está sujeto a la condición de frontera $u(x,0) = g(x)$ para toda $y \in (-\infty, \infty)$.

5.4 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en el *vacío* pueden expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas que describe la dinámica de los campos eléctrico y magnético en función de las fuentes que los producen (densidad de carga eléctrica y densidad de corriente eléctrica). En el sistema de unidades de Gaussiano son

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{5.196}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.197}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.198}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{5.199}$$

Los campos eléctrico y magnético, $\boldsymbol{E}(\vec{r}, t)$ y $\boldsymbol{B}(\vec{r}, t)$ respectivamente, son funciones vectoriales que dependen tanto de la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ como del tiempo t. En este contexto son llamados el *campo de desplazamiento eléctrico* y *campo de inducción magnética* respectivamente. Las fuentes de éstos son la *densidad de carga eléctrica* ρ y la *densidad de corriente eléctrica* $\boldsymbol{J}$, también funciones de la posición y del tiempo. Los operadores $\nabla\cdot$ y $\nabla\times$ son la divergencia y el rotacional que actúan sobre vectores del espacio tridimensional, y como es costumbre denotamos la derivada parcial respecto al tiempo como $\partial/\partial t$. La constante c es precisamente la magnitud de la velocidad de la luz en el vacío (cercana a $300,000$ km/s).

Las ecuaciones de Maxwell ya eran conocidas y estudiadas en los fenómenos electromagnéticos antes de que Maxwell las completara y agrupara. De esta forma son comúnmente referidas por su nombre histórico. Por ejemplo, las ecuaciones para la divergencia de los campos se conocen como *ley de Gauss eléctrica* y *ley de Gauss magnética* (ecuaciones (5.196) y (5.197) respectivamente). La ecuación para el rotacional del campo eléctrico (5.198) se denomina la *ley de Faraday* y la ecuación para el rotacional del campo magnético (5.199) es llamada la *ley de Ampère* o *ley de Ampère–Maxwell*. No es el objetivo de este trabajo profundizar en los detalles de la electrodinámica de las ecuaciones de Maxwell, sino simplemente mostrar la riqueza contenida en ellas. Hay tratados suficientemente completos que pueden encontrarse generalmente bajo el título de *electrodinámica clásica*.

Ecuaciones para los Campos

Un primer ejercicio es mostrar que los campos eléctrico y magnético que satisfacen las ecuaciones de Maxwell, a su vez obedecen ecuaciones de onda. Utilizando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F} \tag{5.200}$$

se encuentra, aplicando directamente $\nabla \times$ a la ecuación (5.198),

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \tag{5.201}$$

Ahora, suponiendo $\boldsymbol{B}$ de clase C^2, se puede conmutar el rotacional con la derivada parcial respecto a t de tal modo que el lado derecho de (5.201) se escribe como $-(1/c)(\partial/\partial t)(\nabla \times \boldsymbol{B})$. Introduciendo después las ecuaciones de Maxwell (5.196) y (5.199) en (5.201) se obtiene

$$4\pi \nabla \rho - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{J} \right) \tag{5.202}$$

esto es, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ satisface la ecuación de onda inhomogénea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \boldsymbol{E} = -4\pi \left(c^2 \nabla \rho + \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \right) \tag{5.203}$$

donde, como puede observarse, las fuentes del forzamiento son $\nabla \rho$ y $\partial \boldsymbol{J}/\partial t$. Análogamente, aplicando $\nabla \times$ a la ecuación (5.199)

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = \nabla \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{J} \right) \tag{5.204}$$

Escribiendo el primer término del lado derecho como $(1/c)(\partial/\partial t)(\nabla \times \boldsymbol{E})$ e introduciendo las ecuaciones de Maxwell (5.197) y (5.198) se encuentra

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \boldsymbol{B} = 4\pi c \nabla \times \boldsymbol{J} \tag{5.205}$$

es decir, el campo magnético $\boldsymbol{B}$ de igual manera satisface la ecuación de onda inhomogénea pero con la fuente del forzamiento siendo $4\pi c \nabla \times \boldsymbol{J}$ en este caso.

Ecuaciones para los Potenciales

Como un segundo ejercicio introducimos las definiciones del potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ y del potencial vectorial $\boldsymbol{A}(\vec{r}, t)$, en relación a los campos $\boldsymbol{E}(\vec{r}, t)$ y $\boldsymbol{B}(\vec{r}, t)$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5.206}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5.207}$$

que satisfacen la ley de Faraday (5.198) y la ley de Gauss magnética (5.197) respectivamente. Aplicando $\nabla\cdot$ a la ecuación (5.206), considerando la ley de Gauss eléctrica (5.196), se tiene

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = 4\pi\rho \tag{5.208}$$

Dentro de la *norma de Coulomb*, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, (5.208) es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \tag{5.209}$$

pero dentro de la *norma de Lorentz*, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + (1/c)(\partial\phi/\partial t) = 0$, (5.208) es la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\phi = 4\pi c^2\rho \tag{5.210}$$

De forma análoga, aplicando $\nabla\times$ a la ecuación (5.207), considerando la ley de Ampère–Maxwell (5.199), se obtiene

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{5.211}$$

Introduciendo ahora (5.206) conduce a

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{5.212}$$

que a su vez puede reescribirse en la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A} + c^2\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -c\,\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + 4\pi c\,\boldsymbol{J} \tag{5.213}$$

dentro de la *norma de Coulomb*, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, (5.213) es la ecuación de onda (acoplada al potencial escalar ϕ)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A} = -c\,\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + 4\pi c\,\boldsymbol{J} \tag{5.214}$$

pero dentro de la *norma de Lorentz*, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + (1/c)(\partial\phi/\partial t) = 0$, (5.213) es la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\boldsymbol{A} = 4\pi c\,\boldsymbol{J} \tag{5.215}$$

Vemos que la norma de Lorentz hace que los potenciales escalar y vectorial satisfagan ecuaciones de onda escencialmente simétricas.

Problemas

1. Demuestre que si m y n son números cualesquiera y $\ell \neq 0$, entonces

$$(i) \quad \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{\ell}x\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi}{\ell}x\right)\right]$$

$$(ii) \quad \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi}{\ell}x\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi}{\ell}x\right)\right]$$

$$(iii) \quad \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi}{\ell}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi}{\ell}x\right)\right]$$

Sugerencia: Use las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A \pm B) &= \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B
\end{aligned}$$

2. Usando el ejercicio anterior demuestre que, si m y n son números naturales y $\ell \neq 0$, el valor de las siguientes integrales es

$$(i) \quad \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \ell\,\delta_{mn}$$

$$(ii) \quad \int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \ell\,\delta_{mn}$$

$$(iii) \quad \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker, $\delta_{mn} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{array} \right.$.

3. Use los resultados de las dos primeras integrales del ejercicio anterior, y el hecho que la función seno es impar y la función coseno es par, para mostrar que

$$(i) \quad \int_0^\ell \operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{\ell}x\Big) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx = \frac{\ell}{2}\,\delta_{mn}$$

$$(ii) \quad \int_0^\ell \cos\Big(\frac{m\pi}{\ell}x\Big) \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx = \frac{\ell}{2}\,\delta_{mn}$$

Muestre además que el resultado equivalente para la tercera integral no siempre es cero, sino que

$$(iii) \quad \int_0^\ell \operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{\ell}x\Big) \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx = \begin{cases} \frac{\ell}{\pi}\Big(\frac{2m}{m^2-n^2}\Big) & \text{si } m+n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } m+n \text{ es par} \end{cases}$$

4. Una manera alternativa de plantear el problema 2 es:

Demuestre las relaciones de ortonormalidad de las funciones $\phi_n(x) = (1/\sqrt{\ell})\,\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$ y $\psi_m(x) = (1/\sqrt{\ell})\cos(m\pi x/\ell)$ sobre el intervalo $(-\ell, \ell\,)$. Es decir, demuestre que

$$(i) \quad \langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{mn}$$

$$(ii) \quad \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

$$(iii) \quad \langle \phi_m, \psi_n \rangle = 0$$

para cualesquiera $m, n = 1, 2, \ldots,$ donde $\langle f, g \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) g(x) dx$ es el producto escalar *estándar* para funciones reales definidas sobre el intervalo $(-\ell, \ell\,)$.

5. Una *serie de Fourier* unidimensional se define como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\, a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) + b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big) \Big]$$

la cual da una representación para la función periódica, de periodo 2ℓ, f (i.e., $f(x + 2\ell) = f(x) \;\; \forall \;\, x$). Muestre que los n-ésimos coeficientes de la serie están dados por

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\, dx$$

para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sugerencia: Para obtener a_0, simplemente integre la serie desde $-\ell$ hasta ℓ. Para obtener a_n, $n \geq 1$, multiplique la serie por $\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)$ e integre el producto desde $-\ell$ hasta ℓ. Análogamente, para obtener b_n, $n \geq 1$, repita el procedimiento pero multiplicando por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)$.

6. Use el resultado del ejercicio anterior para mostrar que, si f es una función impar su desarrollo en serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

y los coeficientes b_n pueden ser calculados como

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

Sin embargo muestre que, si f es una función par su desarrollo en serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

y en este caso los coeficientes a_n pueden calcularse como

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

esto es, si f es impar todos los coeficientes $a_n \equiv 0$ y si f es par todos los coeficientes $b_n \equiv 0$.

7. Demuestre que, si para cada entero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la función $u_n(x,t)$ es solución al problema de valores homogéneos en la frontera para la ecuación de conducción de calor

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\ell,t) &= 0 \end{aligned}$$

y si c_n son constantes arbitrarias, entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, u_n(x,t)$$

también es solución del mismo problema.

8. Repita el mismo ejercicio, pero ahora considerando las condiciones de frontera dadas por

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(\ell,t) &= 0 \end{aligned}$$

9. Generalice el resultado del ejercicio 7. Es decir, demuestre que, si para cada entero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la función $u_n(x,t)$ es solución al problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0 \\ u(0,t) &= T_1 \\ u(\ell,t) &= T_2 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

y si c_n son constantes que satisfacen $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n = 1$, entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, u_n(x,t)$$

también es solución del mismo problema.

Observación: Nótese que si un sumando de la solución, digamos $u_k(x,t)$, satisface (además de la ecuación de calor) las condiciones de frontera y la condición inicial, entonces cualquier otra $u_i(x,t)$ con $i \neq k$ que sea parte de la solución satisfacerá condiciones homogéneas en la frontera e iniciales.

10. Resuelva el problema de conducción de calor definido por

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}\,, \qquad 0 < x < \ell\,, \qquad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\ell,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

para las distribuciones iniciales de temperatura:

(i) $f(x) = A\left(\ell\, x - x^2\right)(\ell - 2x)^2$

(ii) $f(x) = A + \ell\, x$

(iii) $f(x) = A\,\mathrm{e}^{\sigma x} + \ell\, x - x^2$

(iv) $f(x) = A\left(\ell x - x^2\right)(\ell - 2x)^2 + \delta(x - \ell/2)$

donde A y σ son constantes reales, y $\ell > 0$.

11. Resuelva el problema de conducción de calor definido por

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}\,, \qquad 0 < x < \ell\,, \qquad t > 0 \\ u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(\ell,t) &= 0 \\ u(x,0) &= x + A\,, \qquad A = \text{constante} \end{aligned}$$

¿Cuál es el $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ para $A = 0$? ¿porqué?

12. Demuestre que mediante el uso de las variables adimensionales

$$\xi = (1/\ell)\,x, \qquad \tau = (\alpha^2/\ell^2)\,t$$

la ecuación de conducción de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ $(0 < x < \ell,\ t > 0)$ puede escribirse como

$$u_\tau = u_{\xi\xi}, \qquad 0 < \xi < 1, \qquad \tau > 0$$

13. Considere la ecuación

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} + c u_x = 0$$

con α y c constantes reales. Suponga que su solución puede escribirse en la forma $u(x,t) = w(x - ct, t)$, con w una función escalar.

(i) Muestre que w satisface la ecuación de conducción de calor.

(ii) Use el resultado anterior para resolver el problema:

$$\begin{aligned} u_t - \alpha^2 u_{xx} + c u_x &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

definido para $-\infty < x < \infty\,, \quad t > 0.$

14. La ecuación de conducción de calor en dos dimensiones puede expresarse en términos de coordenadas polares (ρ, ϕ) como

$$u_t = \alpha^2 \left[u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} \right]$$

Aplicando el método de separación de variables, suponga que $u(\rho, \phi, t) = R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$ y encuentre las ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen las funciones $R(\rho), \Phi(\phi)$ y $T(t)$.

15. La ecuación de Helmholtz en tres dimensiones escrita en coordenadas cartesianas es

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + k^2 u = 0\,, \qquad k = \text{constante}$$

Aplicando el método de separación de variables, suponga que $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ y encuentre las ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen las funciones $X(x), Y(y)$ y $Z(z)$.

16. Considere el problema de *conducción de calor en dos dimensiones*:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) \\ u(0,y,t) &= 0 \\ u(a,y,t) &= 0 \\ u_y(x,0,t) &= 0 \\ u_y(x,b,t) &= 0 \\ u(x,y,0) &= f(x,y) \end{aligned}$$

definido para $0 < x < a$, $0 < y < b$ y $t > 0$. Puede interpretarlo como la difusión de calor de la lámina rectangular $[\,0, a\,] \times [\,0, b\,]$ únicamente a través de los lados $x = 0$ y $x = a$ (pues tanto $y = 0$ como $y = b$ están perfectamente aislados). Nótese además que, por la naturaleza bidimensional del problema, no hay difusión de calor en la dirección perpendicular a la lámina.

(i) Resuelva este problema.

(ii) Encuentre la solución particular para la temperatura inicial

$$f(x,y) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)$$

con $0 < x_0 < a$, $0 < y_0 < b$, y δ la delta de Dirac.

(iii) Use la solución (i) para mostrar que en el límite cuando $b \to 0$, esta solución coincide con la del problema unidimensional:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}\,, \qquad 0 < x < a\,, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u(a,t) &= 0 \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

donde $g(x) = f(x,0)$ está definida en $(0,a)$.

17. Use el método de separación de variables para resolver el problema general para la cuerda elástica (fija en los extremos) con desplazamiento y velocidad inicial arbitrarias:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u(\ell,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

donde $\phi(0) = \phi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$.

18. Si la cuerda elástica está libre en uno de sus extremos, la condición de frontera a satisfacer allí es $u_x = 0$. Resuelva el problema del ejercicio anterior pero cambiando la condicion de frontera en $x = \ell$ por

$$u_x(\ell,t) = 0$$

Nota: Otra forma de resolver este problema es imponiendo las condiciones de frontera directamente en la fórmula de D'Alembert.

19. Resuelva el problema de la cuerda elástica definido en los dos ejercicios anteriores para los desplazamientos y velocidades iniciales:

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \phi(x) = x(\ell - x), \quad \psi(x) = 0 \\
(ii) & \phi(x) = x(\ell - x), \quad \psi(x) = \dfrac{\ell}{2} - \left| x - \dfrac{\ell}{2} \right| \\
(iii) & \phi(x) = g(x)\delta(x - x_0), \quad \psi(x) = 0 \\
(iv) & \phi(x) = g(x)\delta(x - x_0), \quad \psi(x) = h(x)\delta(x - x_1)
\end{array}
$$

donde x_0 y $x_1 \in (0, \ell)$ y las funciones g y h son acotadas en $[0, \ell]$.

20. Repita el ejercicio anterior, pero ahora considerando las condiciones de frontera dadas por

$$
\begin{aligned}
u_x(0, t) &= 0 \\
u_x(\ell, t) &= 0
\end{aligned}
$$

21. Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - a^2 u$$

donde a^2 es proporcional al coeficiente de elasticidad del medio. Resuelva el problema de valores iniciales y en la frontera para una cuerda de longitud ℓ, fija en los extremos, que se suelta con velocidad inicial $u_t(x, 0) = \psi(x)$ a partir de la posición inicial $u(x, 0) = \phi(x)$, donde $\phi(0) = \phi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$.

22. El problema de las vibraciones de una membrana elástica rectangular fija en la orilla está definido como

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) &= 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0 \\
u(0, y, t) = u(a, y, t) &= 0 \\
u(x, 0, t) = u(x, b, t) &= 0
\end{aligned}
$$

donde $u(x, y, t)$ es la forma de la membrana a cada tiempo t y c^2 es una constante real que depende de las propiedades de la membrana.

Resuelva este problema de valores en la frontera para las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= F(x,y) \\ u_t(x,y,0) &= 0 \end{aligned}$$

tal que $F(x,y)$ se anula en la frontera del rectángulo $[0,a] \times [0,b]$.

23. Encuentre la solución $u(\rho,\phi)$ de la ecuación de Laplace

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} = 0$$

fuera del disco $\rho \le a$, que satisfaga la condición de frontera

$$u(a,\phi) = f(\phi), \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

sobre el círculo $\rho = a$. Suponga que $u(\rho,\phi)$ es de valores únicos y acotada para $\rho > a$.

24. Resuelva el problema de Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b \\ u_x(0,y) &= 0 \\ u_x(a,y) &= f(y) \\ u_y(x,0) &= 0 \\ u_y(x,b) &= 0 \end{aligned}$$

con f una función que satisface la condición $\displaystyle\int_0^b f(s)ds = 0$.

25. Resuelva el problema de Dirichlet en $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \\ u(0,y,z) &= f_0(y,z) \\ u(a,y,z) &= f_a(y,z) \\ u(x,0,z) &= g_0(x,z) \\ u(x,b,z) &= g_b(x,z) \\ u(x,y,0) &= h_0(x,y) \\ u(x,y,c) &= h_c(x,y) \end{aligned}$$

donde f_0, f_a, g_0, g_b, h_0 y h_c son todas funciones bien comportadas en $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$.

Sugerencia: Resuelva el problema con $f_a \equiv g_0 \equiv g_b \equiv h_0 \equiv h_c \equiv 0$ y de éste infiera cada una de las demás soluciones.

26. Supóngase que $F(k)$ es la transformada de Fourier de la función $f(x)$. Muestre que

    (i) La transformada de Fourier de la función $F(x)$ es $f(-k)$.

    (ii) La transformada inversa de Fourier de la función $f(k)$ es $F(-x)$.

27. Determine la transformada de Fourier de las siguientes funciones

    (i) $f(x) = \delta(x-a)$

    (ii) $g(x) = \mathrm{e}^{-|ax|}$

    (iii) $h_+(x) = \Theta(x)\,\mathrm{e}^{-|ax|}$

    (iv) $h_-(x) = -\Theta(-x)\,\mathrm{e}^{-|ax|}$

    (v) $\phi(x) = \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{e}^{-|ax|}$

    (vi) $\psi(x) = \mathrm{e}^{-|a|x^2}$

    donde a es una constante real, $\Theta(x)$ es la función de Heaviside

    $$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

    y $\operatorname{sgn}(x)$ es la función signo

    $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

    Sugerencia: Observe que $\operatorname{sgn}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$ para toda x.

28. Use los resultados anteriores para determinar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

    (i) $h(x) = \Theta(x)$

(ii) $\phi(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Sugerencia: Tome el límite cuando $a \to 0$ de (iii) y (v) respectivamente.

29. Calcule la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones

(i) $F(k) = \delta(k-a)$

(ii) $G(k) = \mathrm{e}^{-|ak|}$

(iii) $H_{+}(k) = \Theta(k)\,\mathrm{e}^{-|ak|}$

(iv) $H_{-}(k) = -\Theta(-k)\,\mathrm{e}^{-|ak|}$

(v) $\Phi(k) = \operatorname{sgn}(k)\,\mathrm{e}^{-|ak|}$

(vi) $\Psi(k) = \mathrm{e}^{-|a|k^2}$

donde a es una constante real.

Sugerencia: Use los resultados del ejercicio 26 en las transformadas calculadas en 27.

30. Use los resultados anteriores para determinar la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones:

(i) $H(k) = \Theta(k)$

(ii) $\Phi(k) = \operatorname{sgn}(k)$

Sugerencia: Tome el límite cuando $a \to 0$ de los resultados (iii) y (v) del ejercicio 29.

31. Use la transformada de Fourier para encontrar la solución al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace definida en todo el plano, con la condición de frontera $u(0,y) = g(y)$ y $u(x,y)$ acotada. Esto es, resuelva

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty \\ u(0,y) &= g(y) \end{aligned}$$

con $u(x,y)$ acotada en todos los puntos fuera del eje y.

Sugerencia: Elija la transformada respecto a la variable adecuada.

32. Resuelva el *problema de Neumann*

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_y(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

definido para $-\infty < x < \infty$, $y > 0$, con u_y acotada en este semiplano.

Sugerencia: Utilice una transformada de Fourier, pero antes transforme el problema en uno *nuevo* para $v = u_y$. Puede lograr esto derivando la EDP respecto a y suponiendo que u es de clase C^3.

33. Use el método de la transformada de Fourier para resolver el problema de la cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} + a^2 u &= 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

donde a^2 es proporcional al coeficiente de elasticidad del medio.

34. Use el método de la transformada de Fourier para resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del telégrafo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2(u_{xx} + au_t + bu) &= 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes reales.

35. La vibración lateral de una varilla delgada y homogénea está gobernada por la ecuación

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0$$

donde $u(x,t)$ es la deflexión de la varilla en la posición x al tiempo t y c^2 es una constante real que depende de las propiedades de la varilla.

Resuelva el problema de la vibración lateral de una varilla de longitud ℓ fija en los extremos:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_x(0,t) = 0 \\ u(\ell,t) &= u_x(\ell,t) = 0 \end{aligned}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \phi(x) \\
u_t(x,0) &= \psi(x)
\end{aligned}
$$

donde $\phi(0) = \phi'(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0$.

Referencias

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, USA, 1972).

[2] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier, USA, 2005).

[3] R. Beals and R. Wong, *Special Functions: A Graduate Text* (Cambridge University Press, UK, 2010).

[4] J. Blank, P. Exner and M. Havlíček, *Hilbert Space Operators in Quantum Physics* (Springer, USA, 2010).

[5] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera* (Limusa Wiley, México, 2005).

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 (Wiley-VCH, Germany, 2004).

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations* (American Mathematical Society, USA, 1998).

[8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, USA, 1994).

[9] K. E. Gustafson, *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods* (Dover, USA, 1999).

[10] R. Haberman, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno* (Pearson, España, 2003).

[11] F. John, *Partial Differential Equations* (Springer, USA, 1982).

[12] M. Renardy and R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations* (Springer, USA, 2004).

[13] P. Szekeres, *A Course in Modern Mathematical Physics* (Cambridge University Press, UK, 2004).

[14] N. Virchenko and I. Fedotova, *Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications* (World Scientific, Singapore, 2001).

[15] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, USA, 1996).

[16] H. F. Weinberger, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* (Reverté, España, 1992).

[17] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications* (Dover, USA, 1986).

[18] E. Zauderer, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics* (Wiley, USA, 2006).