Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD CUAJIMALPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

Material Didáctico

Problemario: Resolución de Problemas Matemáticos

AUTOR:
Dra. Mika Olsen

Departamento de Matemáticas
Aplicadas y Sistemas

ISBN: 978-607-28-0758-7

Julio 2016

Problemario:
Resolución de Problemas Matemáticos

Dra. Mika Olsen

ISBN: 978-607-28-0758-7

Índice general

Índice de figuras

Introducción

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y el carácter.
>
> George Polya

Este problemario responde a la necesidad de contar con una colección de problemas matemáticos que apoyen el desarrollo de habilidades de pensamiento y de argumentación en la transición del bachillerato a la universidad. Muchos estudiantes ingresan a la universidad percibiendo a las matemáticas como un conjunto de fórmulas a memorizar. Esta colección de problemas puede fomentar el cambio de esta percepción y ayudar a que los estudiantes entiendan el valor del razonamiento como una herramienta fundamental tanto para el desarrollo de las matemáticas como para cualquier otro conjunto de conocimientos. Los problemas aquí presentados pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos que los estudiantes poseen al concluir sus estudios de bachillerato y, llevándolos al límite, lograr que ellos construyan conocimiento nuevo, confrontando, investigando, preguntando e interactuando con el resto del grupo y el profesor.

El objetivo de resolver problemas en matemáticas es que el estudiante desarrolle y/o fortalezca un pensamiento lógico y que logre una integración de sus conocimientos en esta disciplina. El estudiante logra esto mediante la discusión en equipos pequeños, en donde debe argumentar y justificar los pasos y el proceso para resolver el problema. Finalmente, al describir el proceso de resolución ante el grupo y el profesor, el estudiante tiene que resumir el mismo, desde el planteamiento hasta la solución y extraer los puntos mas importantes. Se sabe que, en el proceso de resolución de problemas, la interacción entre los estudiantes es de invaluable ayuda. No sólo por el apoyo que ellos obtienen con esto, sino también porque se vuelve condición indispensable que existan mecanismos de comunicación oral y escrita para transmitir información. Los problemas aquí presentados, pretenden ser un reto para ellos, no tan sencillos que sean triviales ni tan difíciles que parezcan imposibles de resolver; aunque esto puede variar de un grupo a otro.

El *Método de Polya*, descrito en su libro "Cómo plantear y resolver problemas" [8] propone una manera de enseñar las matemáticas, integrando los conocimientos mediante la resolución de problemas. La idea es captar la curiosidad y el interés del estudiante por resolver un problema y así motivarlo a aprender. Esta metodología se conoce también como *Aprendizaje Basado en Problemas* (ABP) y se aplica en diversas áreas del conocimiento. Hay estudios que justifican la pertinencia del ABP como método de trabajo en el desarrollo de habilidades de pensamiento en el área de las matemáticas [1, 2, 10] y, en particular, en la transición del bachillerato a la universidad [3, 4, 11].

A grandes rasgos el ABP sugiere un aprendizaje en donde el estudiante adquiere un papel más activo, mientras que el profesor se convierte en un guía durante el proceso de aprendizaje, en vez de proporcionar todos los conocimientos. Con el cambio de rol del profesor y de los estudiantes, los estudiantes se enfrentan a la frustración, y se ven obligados a colaborar con sus compañeros (de equipo) para resolver el o los problemas propuestos por el profesor. El profesor procura por su parte, guiarlos sin darles pistas ni resolverles el problema, sino preguntando. Los estudiantes buscan aplicar sus conocimientos y relacionarlos de diferentes maneras con el fin de resolver un problema en conjunto con sus compañeros, argumentan y justifican, logrando así integración de sus conocimientos. Lo esencial, en el trabajo que se realiza, es la argumentación y justificación del proceso de resolución y, la veracidad del resultado deja de ser lo más importante.

Una clase típica usando ABP sigue los siguientes cuatro pasos:

1. Se entrega el o los problemas a los estudiantes.
2. Los estudiantes se agrupan en equipos de 2 a 4 integrantes, discuten el problema y reúnen toda la información que tienen acerca del mismo así como lo que les pudiera hacer falta para resolverlo.
3. El profesor observa el proceso de resolución y en caso de que perciba que un equipo no avanza, interviene con preguntas que puedan ayudar, sin que con ello les resuelva el problema.

4. Los equipos exponen sus resoluciones ante el grupo, haciendo énfasis en la justificación del proceso. Se comparan los resultados y las diversas propuestas, haciendo énfasis en la diversidad de métodos de solución y, finalmente se hace una reflexión acerca de lo que les pareció difícil y qué estrategias les fueron de utilidad.

Pueden surgir, de manera natural, nuevos problemas durante la discusión en los equipos o durante la exposición ante el grupo. En estos casos es deseable que los estudiantes intenten dar solución a ellos.

Para terminar la introducción al ABP quiero hacer énfasis en los siguientes puntos ya mencionados. Un *problema* debe captar el interés de los estudiantes, debe ser un reto para ellos, no tan sencillo que sea trivial ni tan difícil que parezca imposible de resolver. El trabajo debe de realizarse en equipos, porque la *interacción* entre los estudiantes es muy importante en el proceso del aprendizaje. El profesor debe buscar problemas que inviten a los estudiantes, de manera natural, a experimentar diferentes heurísticas (por ejemplo hacer un diagrama, dibujo, explorar casos particulares, partir el problema en subcasos) para que el estudiante desarrolle una amplia gama de estrategias de resolución. La *discusión grupal* al final sirve para que ellos expliquen y justifiquen su proceso de resolución ante el grupo, que comprendan que hay diversas formas de abordar el problema, así como para discutir los posibles obstáculos en la resolución del problema y las estrategias que fueron útiles en el trabajo del equipo. Con el ABP *desarrollan habilidades* de resolución de problemas y habilidades de colaboración, las cuales no siempre se fomentan en un curso tradicional enfocado en contenidos. El *cambio de rol* del profesor es fundamental para una experiencia educativa exitosa con el ABP. El profesor tiene que entender su rol y no quitarle la oportunidad de aprender al estudiante, resolviéndole el problema. Cabe mencionar que todo cambio requiere un esfuerzo. En este caso es un esfuerzo por parte del profesor. Una descripción completa del método ABP se puede encontrar en [9, 12].

En el caso particular de la Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Cuajimalpa, esta colección de problemas es un apoyo en la impartición de la Unidad de Enseñanza y Aprendizaje (UEA) *Introducción al Pensamiento Matemático*. Cabe mencionar que esta UEA forma parte del *Tronco de Formación Inicial* que se imparte en todas las licenciaturas de la Unidad Cuajimalpa y que no es una UEA remedial, sino de desarrollo de habilidades. Recientemente, el programa de *Introducción al Pensamiento Matemático* fue modificado para responder adecuadamente a su objetivo de desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

El Problemario contiene una selección de los problemas que he aplicado a mis estudiantes en diferentes trimestres e incluye tanto problemas de las matemáticas puras, como de situaciones cotidianas. Los que aquí presento no son propios, sino una recolección de aquellos que he encontrado en libros, en Internet, tanto en páginas en español, inglés y danés, así como en el calendario de la Sociedad Matemática Mexicana y de diferentes Olimpiadas de Matemáticas. Todos han sido aplicado en al menos un trimestre y algunos me han gustado tanto que los he aplicado en varios. He modificado algunos problemas para responder quejas y/o sugerencias por parte de los estudiantes, mientras que otros están tal como los encontré.

Dra. Mika Olsen
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
División de Ciencias Naturales e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Cuajimalpa

Capítulo 1

Situaciones cotidianas

Una buena idea vale tanto como una mala,
si no se lleva a cabo en la práctica.
Mette K. Andersen

1. Dos grupos de secundaria son evaluados con la misma prueba. Un grupo de 20 estudiantes obtiene una calificación promedio de 80 y el otro, de 30 estudiantes obtiene una calificación promedio de 70. ¿Cuál es la calificación promedio de todos los estudiantes en los dos grupos?

2. El señor López tiene 50 años. La edad de su hijo es 40 % de su edad. ¿Cuántos años tendrá el señor, cuando la edad de su hijo es del 50 % de la suya?

3. Se estima que México tenía $81,163,256$ habitantes en 1987, de los cuales $17,321,800$ vivían en la capital.
   a) ¿Qué porcentaje de mexicanos vivían en la ciudad de México en 1987?
   b) Si el 33 % era población activa, ¿Cuántos de los habitantes eran población activa?
   c) Del total de la población activa en ese entonces, el 5,9 % se dedicaba a la construcción. ¿Cuántos trabajadores de la construcción había?

4. Para el 15 de Septiembre invitaste a cinco amigos a cenar. Les vas a preparar chile en nogada. Tienes una receta para cuatro personas, en la receta se pide $\frac{1}{4}$ de taza de manzana picada.

   a) ¿Para cuantas personas vas a cocinar?

   b) ¿Cuánta manzana necesitas?

c) ¿Cuanta nuez necesitas?

d) Identifica entre los datos dados en el enunciado uno que no se requiere para resolver el ejercicio.

e) Identifica entre los datos dados en el enunciado uno que sí es necesario para resolver el ejercicio.

f) Identifica un dato que hace falta para resolver el ejercicio completamente.

5. Dos comerciantes de vino entraron en París con 64 y 20 barriles de vino, respectivamente. Como no tenían bastante para pagar los derechos de la aduana, el primero de ellos entregó 5 barriles y 40 francos, mientras que el segundo dio 2 barriles, recibiendo 40 francos como cambio. ¿Cuál era el precio del barril y el impuesto que se pagaba en la aduana?

6. El profesor de Introducción al Pensamiento Matemático va a evaluar la UEA con 5 exámenes. Si quieres que tu calificación final sea MB (9 o mas) ¿Cuál sería la calificación mas baja puedes sacar en un examen parcial para que logres tu objetivo?

7. El dueño de una huerta de manzanas ha comprobado que plantando 500 árboles por hectárea cada árbol produce 150 manzanas y por cada 5 manzanos extra que planta, cada árbol produce 1 manzana menos.

   a) ¿Cuál es la producción de manzanas cuando planta 500 árboles por hectárea?

   b) ¿Cuál será esta producción si planta 15 árboles más por hectárea?

   c) Elaborar un modelo (haciendo uso gráfico, tabla y fórmula) que represente la situación.

   d) ¿qué cantidad de árboles se deberán plantar para optimizar la producción? ¿Cómo se interpreta en el gráfico anterior?

   e) Utilizando la expresión del punto c), responder: Si la producción fue de 77625 manzanas, ¿cuántos manzanos extra se plantaron?

8. Juan se tarda normalmente 45 minutos en podar un árbol. Ricardo se tarda 70 minutos en promedio para hacer lo mismo. Si el vivero *Árbol 2000* los contrata para que juntos trabajen en podar 92 árboles. ¿Cuánto tiempo se tardarán en terminar su trabajo?

9. Tienes dos relojes de arena, uno de 4 minutos y uno de 7 minutos. Si solamente puedes usar estos dos relojes ¿Cómo puedes medir 9 minutos?

   (Debes medir 9 minutos desde el inicio hasta el final de tu proceso).

10. Dos relojes se pusieron a la hora exacta esta mañana. El reloj A se adelanta exactamente 9 minutos por hora y el reloj B se adelanta exactamente 12 minutos por hora. Determina la hora real si los relojes A y B muestran la hora como sigue:

A	B
$18:07$	$18:36$

11. Jorge reparte 35 revistas entre sus amigos, dándole a cada uno tantas revistas como amigos son, más dos revistas. ¿Cuántos amigos tiene Jorge?

    item Los Gómez y los López se encuentran por la calle, y rápidamente se produce un efusivo intercambio de besos y abrazos. Cada uno de los López saluda a cada uno de los Gómez. Al saludarse dos varones se dan un abrazo, mientras que al saludarse dos mujeres, o un hombre y una mujer, se dan un beso. Al final de la efusiva salutación se han producido 35 abrazos y 42 besos.

    ¿Cuántas mujeres y cuantos varones hay en cada familia?

    ¿Es única la respuesta?

12. Un estudiante para aprobar un examen que consta de 10 preguntas, debe contestar exactamente 7 de ellas. ¿De cuántas maneras puede hacer la selección de las preguntas del examen?

13. Tres personas suben en la planta baja al ascensor de un edificio que tiene 5 pisos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ir saliendo del ascensor si en ningún piso baja más de una persona?

14. ¿De cuántas maneras se pueden bajar de un ascensor 4 personas, en un edificio que tiene 7 pisos?

15. Con 3 mujeres y 5 varones:

    a) ¿Cuántos ternas que tengan 2 personas del mismo sexo se pueden formar?

    b) ¿Cuántas hileras de 8 personas se pueden formar si las mujeres no pueden ocupar ni el primer ni el último lugar?

    c) ¿Cuántas hileras de 7 personas se pueden formar si personas del mismo sexo no pueden ocupar lugares consecutivos?

16. ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si 3 de ellas deben estar juntas?

17. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 libros en un estante, si 4 deben ocupar los mismos lugares, aún cuando estos 4 puedan intercambiarse entre sí?

18. En un grupo de 18 alumnos hay que formar un grupo de 6.

    a) ¿De cuántas maneras puede hacerse?

    b) ¿De cuántas maneras puede hacerse sabiendo que un alumno en particular, Juan, debe integrar el grupo?

    c) ¿De cuántas maneras puede hacerse excluyendo a Juan

19. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él.

    ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

20. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar en sus cajas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en la caja que le correspondía?

21. En una universidad hay tres facultades: Ciencias, Diseño y Humanidades. Hay 300 chicas y 200 chicos matriculados en Ciencias; en Humanidades hay 150 chicas y 50 chicos; y en Diseño hay 150 chicas y 150 chicos.

    a) Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.

    b) Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico, ¿A qué facultad es más probable que se encuentra matriculado?

22. Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

    a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra s para las respuestas afirmativas y n para las negativas.

    b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso *"al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"*?

    c) Describe el suceso contrario de *"más de una persona es partidaria de consumir el producto"*.

23. En una oficina el 70 % de los empleados son chilangos. De entre los chilangos, el 50 % son hombres, mientras que de los no chilangos, sólo son hombres el 20 %.

    a) ¿Qué porcentaje de los empleados chilangos son mujeres?
    b) Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.
    c) Fernando trabaja en dicha oficina.¿Cuál es la probabilidad de que sea chilango?

24. El costo de publicar cada copia de una revista semanal es de 28 centavos. El ingreso de las ventas al distribuidor es de 24 centavos por copia y de los anuncios es de 20 % del ingreso obtenido por las ventas e exceso de 3000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para obtener una utilidad semanal de $1000?

25. Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por $2900. Vendió uno con una ganancia de $107 y otro con una pérdida de 5 % y, aún así, obtuvo una ganancia de $185 en la translación completa. Encuentra el costo de cada automóvil.

26. Una caja de ahorro promete regresar después de un año $1,35 por cada peso depositado. ¿Cuánto dinero se necesita depositar en la caja de ahorro para recibir $2700 dentro de un año?

27. Una caja de ahorro promete regresar después de un año $1,20 por cada peso depositado. Si depositas $2000 en la caja de ahorro y, durante 5 años vuelves a invertir el monto total de lo que te regresó la caja de ahorro, ¿cúanto dinero te regresa la caja de ahorro al final de los 5 años? ¿Cuál fue la tasa de interés total?

28. En una fábrica de 3,000 empleados hay 1,880 varones, 1,600 personas casadas, 380 técnicos (varones o mujeres), 150 técnicos casados, 120 técnicos varones casados, 1,260 varones casados y 260 técnicos varones.

    a) ¿Cuántas mujeres no casadas trabajan en la fábrica?
    b) ¿Cuántas mujeres técnicas trabajan en la fábrica?
    c) ¿Cuántas mujeres técnicas casadas trabajan en la fábrica?
    d) ¿Cuántas mujeres trabajan en la fábrica?

29. En temporada de rebajas, es común encontrar que tiendas de ropa pongan anuncios como:

Toda la tienda a 50 % *mas* 40 %

Si un pantalón costaba (antes de las ofertas) \$400, ¿cuánto cuesta con la oferta? ¿Cuál fue la rebaja total en porcentaje que se aplicó al precio del pantalón? Por qué crees que las tiendas anuncian que la rebaja es de 50 % mas 40 % en lugar de anunciar la rebaja real?

30. Una tienda de motos tiene en la ventana un letrero que dice:

    Precio a 13 *meses sin intereses:*
    Enganche de \$1050 *y* 13 *mensualidades de* \$820*.*
    Si pagas al contado el precio tiene un descuento de 10 %*.*

    ¿Cuál es el precio que se paga al contado? ¿Cuál es el monto total que se paga a 13 meses sin intereses? Son iguales los dos montos. Si no, ¿cuál es la tasa de interés (sobre el precio total) que se paga por comprar a 13 meses *"sin intereses"*?

31. En una papelería se hace un balance, se concluye que por cada peso gastado se obtiene \$1,85 de ingreso.
    a) Escribe el ingreso I como función de la cantidad x que se gasta.
    b) Si se obtiene un ingreso de \$18,500 ¿Cuánto dinero se gastó?

    En las siguientes dos preguntas tienes que escribir cual es el dato o la incógnita que debes hallar. Además, encuentra una relación entre los datos descritas en el problema y representa esta relación con una ecuación entre lo que desea encontrar y los datos proporcionados en el problema.

    a) Vas a incrementar la nómina de tu empresa en 4 %. ¿Cuánto gana actualmente un empleado si después del aumento va a recibir \$5429,84?
    b) En un censo la población de Pueblo Quieto fue de 160,000. Un año después la población era de 163,200.
        1) ¿Con qué tasa de interés aumentó la población?
        2) Si se mantiene el crecimiento, ¿cuál será la población 5 años después de efectuar el primer censo?

Capítulo 2

Ciencias

El que nunca se equivoca,
generalmente no hace nada.

1. ¿Cuánta agua debe agregarse a 15 onzas de una solución de ácido al 20 % para obtener una solución de ácido al 12 %?

2. ¿Cuánta agua debe evaporarse de 300 onzas de una solución salina al 12 % para obtener una solución salina al 15 %?

3. Una flor del estanque alcanza una altura de 30 cm sobre la superficie del agua. Cuando la brisa sopla la flor se inclina y alcanza a tocar el agua en un punto situado a 40 cm del punto donde originalmente emergía. ¿Cuál es la profundidad del estanque?

4. Una pista de atletismo de seis carriles tiene la forma de un rectángulo cuyo largo es 1.5 veces su ancho, coronado por un semicírculo en cada extremo, cada carril tiene un metro de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo si el carril interior tiene 1500 m de largo?. En la carrera de 1500 m el corredor interior partiría de la misma línea donde finaliza la prueba. ¿De dónde partiría cada uno de los demás corredores si cada uno debe mantenerse en su carril?

5. Tres recipientes contienen agua. Si se vierte 1/3 del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuación 1/4 del contenido del segundo en el tercero, y por último 1/10 del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con 9 litros de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?

6. Se tienen tres recipientes: A de 7 litros, B de 6 litros y C de tres litros. Inicialmente el recipiente A tiene 3 litros de agua, el B tiene 3 litros y el C tiene 2 litros. Encuentre un procedimiento para lograr que en el recipiente A quede un litro de agua, en B queden cuatro litros y en C queden tres litros. Los recipientes no tienen graduación por lo que la única operación válida es vaciar el contenido de un recipiente en otro, hasta que se vacíe uno o se llene el otro.

7. Una correa continua corre, en torno de dos ruedas, de manera que éstas giran en sentidos opuestos. Las ruedas tienen 3 cm y 9 cm de radio y la distancia entre sus centros es de 24 cm. Determinar con error menor que 0,01 cm la longitud de la correa.

8. Sea F la temperatura en grados Farenheit y C la temperatura en grados centígrados. La relación entre F y C está dada por: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Encuentre F cuando C es 38,5.

9. La ecuación
$$K = \frac{x^2}{(a-x)\,(b-x)}$$
se usa en el estudio del equilibrio en el flujo de los líquidos.

   Completa la siguiente tabla:

x	1	2	1
K		3	1
a	2	1	
b	3		2

10. Juliana recorre a velocidad constante una distancia de 300 km invirtiendo un determinado tiempo. Si la velocidad se incrementara en 25 km por hora, el tiempo requerido sería 2 horas menor que el anterior. ¿Cuál es el tiempo que invirtió Juliana?

11. Cuando una mujer que va en su auto observa que el odómetro marca 15951, se da cuenta de que el número es palíndromo. *Curioso* se dice a sí misma. *Pero pasará mucho tiempo antes de que vuelva a ocurrir*. No obstante, al cabo de una hora y media el odómetro muestra otro número palíndromo (¿cuál es el siguiente número palíndromo?). ¿A qué velocidad viajó la mujer?

12. Una planta de lirio acuático crece de tal modo que cada día duplica su tamaño. A los 20 días de vida, cubre completamente un estanque.

¿En qué día cubrió la mitad del estanque?

13. ¿Cuántos saltos debe dar un galgo para alcanzar a una liebre que le lleva 75 saltos de ventaja, sabiendo que el galgo da dos saltos mientras la liebre da tres y que cinco saltos de la liebre equivalen a dos saltos del galgo?

14. Una anciana parte al amanecer del pueblo A hacia el B. Simultáneamente otra anciana parte del pueblo B hacia el A. Cada una de ellas camina a velocidad constante. Al mediodía ambas se cruzan. La primera llega a su destino a las 4 pm, mientras que la segunda lo hace a las 9 pm. ¿A qué hora amaneció ese día?

15. Problema que se atribuye a Isaac Newton.

    En una pradera la grama crece continua y uniformemente. Se sabe que 70 vacas se comerían la grama completamente en 24 días, y que 30 vacas se la comerían en 60 días. ¿Cuántas vacas serían necesarias para acabar con la grama en 96 días?

16. Se considera una célula en el instante $t = 0$. En el instante $t = 1$ la célula puede o bien reproducirse, es decir, dividiéndose en dos, con probabilidad $3/4$, o bien morir con probabilidad $1/4$. Si la célula se divide, entonces en el tiempo $t = 2$ cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades que antes, independientemente uno de otro.

    a) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t = 2$?

    b) ¿Con qué probabilidad?

Capítulo 3

Matemática

A quien teme preguntar, le avergüenza aprender.
Proverbio danés

1. La suma de tres números es 176. El primero es la cuarta parte del tercero y este supera al segundo en 40 unidades. ¿Cuáles son esos números?

2. ¿Cuántos números hay de tres dígitos cuya suma de sus dígitos es 22?

3. Utilizando exclusivamente los dígitos 2 y a se forma el siguiente número de 90 cifras. $2a22a222a2222a\ldots a22\ldots 2a$. Si el número es múltiplo de 9, ¿qué valores son posibles para el dígito a?

4. ¿Cuántos números hay del 10 al 100 tales que la suma de sus dígitos es un cuadrado perfecto?

5. Encontrar el número natural más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

   a) En su representación decimal termina en 6.

   b) Si el 6 es trasladado al principio del número el resultado es cuatro veces el número original.

6. Encuentre los dígitos a, b ($b \neq 0$) tales que ababab1, en el sistema decimal sea un cubo perfecto.

7. Un antiguo problema hindú.

   Bella doncella de ojos refulgentes, dime, ¿cuál es el número que cuando se multiplica por 3, se le suman 3/4 del producto, se divide entre 7, se disminuye en 1/3 del cociente, se multiplica por si mismo, se disminuye en 52, se le saca la raíz cuadrada, se le suman 8 y finalmente se divide entre 10, da como resultado 2?

8. Un número perfecto es un número natural que es igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo. Por ejemplo, 28 es un número perfecto porque sus otros divisores son $1, 2, 4, 7$ y 14 y $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. ¿Cuál es el número perfecto más pequeño?

9. ¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

10. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 4 esferas negras, 4 esferas azules y 4 blancas en seis paquetes diferentes? (puede haber paquetes vacíos).

11. La figura 3.1 muestra las primeras tres figuras de una sucesión de hexágonos triangulados.

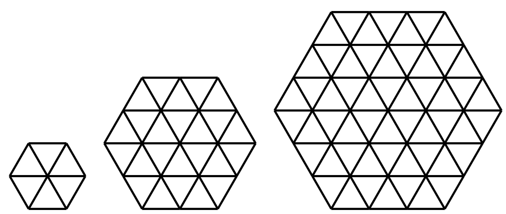

Figura 3.1: Sucesión de hexágonos triangulados

¿Cuántos triángulos pequeños aparecerán en la novena figura?

12. Un cubo sólido de madera de lado 20 cm se pinta de rojo. Luego con una sierra se hacen cortes paralelos a las caras, de centímetro en centímetro, hasta obtener 8000 cubitos de lado 1 cm. ¿Cuántos de esos cubitos tendrían al menos una cara pintada de rojo?

13. En una reunión a cada una de las personas se le dio un número del 1 al 125. Las personas con el números pares formaron una comisión, las personas con números múltiplos de 3 formaron otra comisión, y las personas con el resto de los números, la tercera comisión. ¿Cuántas personas están en dos comisiones?

14. Los dígitos que aparecen en las pantallas de las calculadoras muestran todos o algunos de los segmentos de la figura 3.2. En los dígitos del 0 al 9:

    a) ¿Cuál es el segmento que mas se utiliza?

b) ¿Cuál es el segmento que menos se utiliza?

c) ¿Cuál dígito utiliza mas segmentos?

d) ¿Cuál dígito utiliza menos segmentos?

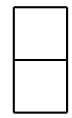

Figura 3.2: Los segmentos para representar los dígitos en una calculadora

15. En una ciudad A los números telefónicos se forman con 4 números (0 a 9) no pudiendo ser cero el primero de ellos, y en otra ciudad B con 5 números con las mismas condiciones ¿cuántas comunicaciones pueden mantenerse entre los abonados de ambas ciudades?.

16. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 manzanas entre tres niños?

17. Un cajón contiene 20 calcetines negros y 20 calcetines blancos. Si se apaga la luz y metes la mano al cajón para sacar tus calcetines, ¿Cuál es el mínimo número de calcetines que debes sacar para estar seguro de que tienes un par del mismo color?

18. Un cajón contiene 7 calcetines blancos, 5 pares de calcetines azules y 3 calcetines de rayas. Si se apaga la luz y metes la mano al cajón para sacar tus calcetines, ¿Cuál es el mínimo número de calcetines que debes sacar para estar seguro de que tienes un calcetín de color blanco?

19. Una araña aficionada a las matemáticas decide el primero de diciembre por la mañana que cada mañana de diciembre va a subir o bajar el número de metros que indica la fecha. Así, subirá o bajará un metro el primero de diciembre, el segundo de diciembre subirá o bajará dos metros etc. ¿Será posible que la araña se encuentra donde inicio el primero de diciembre el día de a) noche buena? b) fin de año?

20. Se tienen 26 tarjetas y cada una tiene escrito un número. Hay dos con el 1, dos con el 2, dos con el 3, y así siguiendo hasta dos con el 12 y dos con el 13. Hay que distribuir las 26 tarjetas en pilas de manera que se cumplan las dos condiciones siguientes:

    a) Si dos tarjetas tienen el mismo número están en la misma pila.

    b) Ninguna pila contiene una tarjeta cuyo número es igual a la suma de los números de dos tarjetas de esa misma pila.

Determina cuál es el mínimo número de pilas que hay que hacer. Da un ejemplo con la distribución de las tarjetas para ese número de pilas y justifica por qué es imposible tener menos pilas.

21. Siguiendo las líneas de la figura 3.3, ¿Cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B, que no pasen dos veces por el mismo punto y que sólo avancen hacia abajo y hacia los lados pero no hacia arriba?.

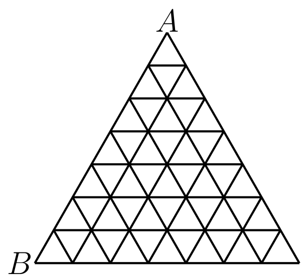

Figura 3.3: Caminos de A a B

22. La recta AB es tangente a la circunferencia de centro O en el punto A. La circunferencia tiene 9 centímetros de diámetro. El punto C pertenece a la circunferencia y al segmento OB. El segmento CB mide las dos terceras partes del radio de la circunferencia. Determina si el área del triángulo ABO es mayor, igual o menor que la cuarta parte del área del círculo.

23. Se tiene un tubo de forma cilíndrica de 12 m de largo, su sección es una circunferencia de 4 m de longitud. Una soga rodea al cilindro dando 4 vueltas exactas al mismo. Calcula el largo de la soga.

24. ¿En un vértice de una caja de tamaño $2 \times 3 \times 4$ se encuentra una araña que quiere ir al vértice opuesto caminando sobre las caras de la caja. ¿Cuál es la distancia mínima que debe recorrer?

25. ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 6 puntos, tales que no haya 3 alineados?

26. Un cuadrado es cortado en 25 cuadraditos, de los cuales 24 tienen lado 1 cm. Determina los posibles valores del área original.

27. Determina la cantidad de triángulos cuyos lados tienen longitudes enteros y tales que su área sea igual a su perímetro.

28. En la figura 3.4, el arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y radio 10 cm. Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

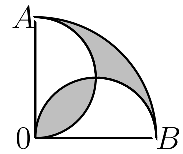

Figura 3.4: Semicírculos del Problema 28

29. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

30. Este problema, de origen árabe, data del siglo XI. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. Sus alturas son de 20 y 30 pies, y la distancia entre sus troncos (que suponemos verticales) es de 50 pies. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Ambos descubren simultáneamente un pez en la superficie del río justo entre las palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y volando directamente hacia el pez, lo alcanzan al mismo tiempo. Si los pájaros vuelan a la misma velocidad, ¿a qué distancia de la palmera más alta apareció el pez?

31. Para hacer un rosetón para la fachada de una iglesia se han empleado 400 cm^2 de cristal verde. En la figura 3.5, las letras A, R y V representan los colores azul, rojo y verde respectivamente. ¿Cuántos centímetros cuadrados de azul son necesarios?

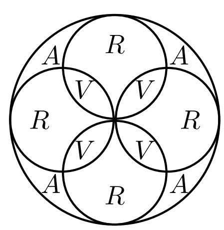

Figura 3.5: El rosetón para la fachada de un iglesia

32. ¿Cuál es el mayor número de puntos de intersección de 7 líneas rectas de modo que ninguno de ellos coincidan?

33. ¿Cuántos paralelogramos quedan determinados cuando un grupo de 8 rectas paralelas son intersecadas por otro grupo de 6 rectas paralelas?

34. En una noche de luna llena, se pudo apreciar la luna (parcialmente tapada por un letrero) como se muestra en la figura 3.6. El radio del círculo es 50 cm, la longitud de AB es 6 cm y la de BC es 2 cm. El ángulo ABC es recto. Considera la figura 3.6 con las dimensiones dadas en el enunciado, ¿cuál es la distancia desde B hasta el centro del círculo?

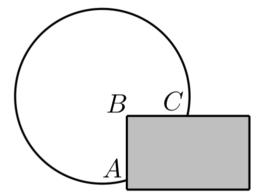

Figura 3.6: La luna llena parcialmente tapada por un letrero

35. ¿Qué proporción guardan las áreas de las dos regiones grises marcadas en el rectángulo PQRS en la figura 3.7, si M es un punto cualquiera de la diagonal?

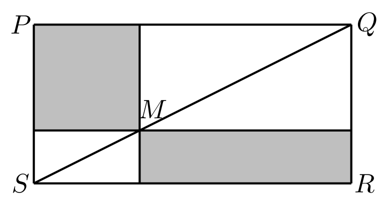

Figura 3.7: Rectángulo

36. La figura 3.8 representa una tira larga de papel dividida en 2001 triángulos marcados con líneas punteadas. Supongamos que la tira será doblada siguiendo las líneas punteadas en el orden indicado por los números, de forma que la tira siempre quede en posición horizontal y la parte de la izquierda que ya ha sido doblada se dobla hacia la derecha. ¿Cuál es la posición en que terminan los vértices A, B, C después de 1999 dobleces?

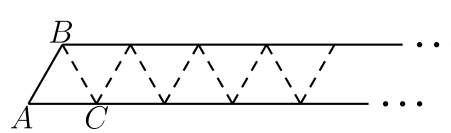

Figura 3.8: Tira de triángulos

Capítulo 4

Lógica

La mejor forma de tener una buena idea es ...
tener un montón de ideas.
Linus Carl Pauling

1. Un grupo de turistas decidieron sentarse en un conjunto de autobuses de tal manera que cada autobús contendría el mismo número de turistas. En un principio trataron de sentarse 22 en cada autobús, pero sobró un turista. De pronto uno de los autobuses partió vacío y pudieron distribuirse con igual número cada uno de los autobuses restantes. Si cada autobús sólo puede acomodar a menos de 33 personas, ¿cuántos autobuses y cuántos turistas había originalmente?

2. Una fracción del pez.

   Un día Adam, Juan y Marco se fueron a pescar. Cuando regresaron, Adam se llevó una tercera parte de los pescados y se fue mientras los otros dos desempacaban. Juan y Marco no sabían que Adam se llevó sus pescados. Cuando Juan estaba yendo, Marco le dijo que se llevara una tercera parte de los pescados de la caja. Cuando Marco llegó a casa contó 40 pescados en la caja y sospecho de que algo estaba mal así que le llamó a Adam para preguntarle si él se había llevado sus pescados. La esposa de Adam dijo que él se había llevado una tercera parte de los pescados, pero que no sabía cuantos pescados. Después de pensar un rato, Marco le llamó a Juan. Marco le dijo a Juan que algunos de los 40 pescados que quedaban eran suyos y que podía pasar por ellos si podía resolver el problema y determinar el número de pescados que cada uno debería recibir. ¿Cuántos pescados debería recibir cada uno?

3. Un estudiante lleva a la escuela una bolsa con galletas. A la hora del descanso da a uno de sus compañeros la mitad de sus galletas y media más. A una amiga

de otro grupo, le da la mitad de lo que le queda en la bolsa y media galleta más. Por último, a su hermano le da la mitad de las galletas que le quedan y media más. Cuando decide comer galletas resulta que sólo le queda una, ¿cuántas galletas tenía originalmente la bolsa?

4. Se tienen dos recipientes conteniendo 1 l. de café y 1 l. de leche, respectivamente. Si tomamos un vaso de leche y lo vertimos en el café y luego, de la mezcla resultante tomamos un vaso de su contenido y lo vertimos en la leche. ¿Qué hay más, leche en el café ó café en la leche?

5. En un banco hay 7 sacos de monedas de curso legal, de un mismo valor, cada una de las cuales pesa 10 gramos. Un empleado, por error, ha dejado junto a estos sacos otro saco de monedas falsas pero idénticas en todo menos en el peso, ya que pesan un gramo menos que las auténticas. ¿Cómo se podrá averiguar cuál es el saco de las monedas falsas haciendo una sola pesada?

6. Aquí tenemos otro problema de monedas que aunque pueda parecer igual que el anterior no lo es, si bien tiene cierta similitud. Por descuido, un coleccionista de monedas ha mezclado una moneda falsa con otras ocho monedas de curso legal. Las nueve monedas son idénticas, salvo en el detalle de que la falsa pesa unos centigramos menos que las otras. El coleccionista dispone de una balanza muy sensible y se prepara para pesar las monedas y así poder apartar la falsa, sin emplear pesas. ¿Cuál será el número mínimo de pesadas que deberá hacer para conseguir su propósito?

7. Un Jeque árabe tenía tres hijos y les dejó al morir 17 camellos, con el mandato expreso de que habían de repartirlos sin matar ningún camello, y de la manera siguiente: El mayor recibirá la mitad; el segundo, la tercera parte, y el menor, la novena parte. Los hijos del Jeque, al querer hacer el reparto, se dieron cuenta de que para poder cumplir la voluntad de su padre no había mas remedio que descuartizar algunos camellos. Acudieron al cadí, y éste les pidió un día para pensarlo. Pasado ese día, acudió el cadí con un camello suyo y lo unió al grupo de los 17 camellos, y propuso que se procediera a cumplir la voluntad del Jeque sobre esta herencia aumentada. Así, el mayor tomó 9 camellos; el segundo, 6, y el menor, 2. Al terminar el reparto el cadí volvió a llevarse su camello y dejó a los tres hermanos contentos. Explica la solución dada por el cadí.

8. En una ferretería, puedo comprar 1 por \$0,75 y también puedo comprar 68356 por \$3,75. ¿Qué estoy comprando?

9. Los antiguos griegos tenían tanta fé en el oráculo que consultaban toda pregunta importante. Un campesino acudió ante el oráculo para saber si era pertinente comprar otra oveja u otro cordero. El oráculo lo hizo pararse enfrente del espejo sagrado y le respondió:

   > *No te mentiré, puede ser una transacción fructuosa o desastrosa para ti. Para mantener el buen presagio, debes asegurarte que se reproduzcan hasta que el número de ovejas multiplicado por el número de corderos sea tal que, reflejado en el espejo, sea el número de rebaño completo (corderos y ovejas).*

   ¿Cuántos ovejas y corderos deberá llegar a tener el campesino?

10. Un turista es capturado por caníbales y le dicen: *Si dices una mentira te matamos lentamente y si dices una verdad te matamos rápidamente.*

    ¿Que debe decir para que no lo maten?

11. Estás en una habitación donde sólo hay dos puertas. Detrás de una puerta hay un tigre hambriento y la otra puerta te lleva a la libertad, pero no sabes cual es cual. En cada puerta hay un guardián, uno dice siempre la verdad y el otro siempre miente, ellos saben que el otro dice la verdad o la mentira, pero tú no sabes cual es cual.

    Puedes hacer solamente una pregunta a uno de los guardianes, ¿cuál es la pregunta que tendrás que hacer para saber cuál es la puerta de la libertad y cuál la del tigre hambriento?

12. En una mesa hay tres sombreros negros y dos blancos. Tres señores en fila india se ponen un sombrero al azar cada uno y sin mirar el color. Se le pregunta al tercero de la fila, que puede ver el color del sombrero del segundo y el primero, si puede decir el color de su sombrero, a lo que responde negativamente. Se le pregunta al segundo que ve solo el sombrero del primero y tampoco puede responder a la pregunta. Por último el primero de la fila que no ve ningún sombrero responde acertadamente de que color es el sombrero que tenia puesto.

    ¿Cuál es este color y cual es la lógica que uso para saberlo?

13. Tres amigos con dificultades económicas comparten un café que les cuesta 30 pesos, por lo que cada uno pone 10. Cuando van a pagar piden un descuento y el dueño les rebaja 5 pesos tomando cada uno una pes0 y dejando dos en un fondo común. Mas tarde hacen cuentas y dicen:

Cada uno ha pagado 9 pesos así que hemos gastado $9 \times 3 = 27$ pesos que con las dos del fondo hacen 29 ¿dónde esta el peso que falta?

14. Un problema de origen hindú se presentaba en esta forma:

    Regocíjense los monos
    Divididos en dos bandos.
    Su octava parte al cuadrado
    En el bosque se solaza.
    Con alegres gritos, doce
    Atronando el campo están.

    ¿Sabes cuántos monos hay en la manada, en total?

15. Hay 7 niños en un equipo de fútbol. Cada niño tiene una posición, número de camiseta, y altura diferentes. Encuentra la posición, altura y número de cada niño.

    - Justin es el arquero
    - El puntero derecho es el número 10
    - El arquero mide 178
    - Joe mide 169
    - Ryan es el puntero derecho
    - La persona junto a Ryan es el número 14
    - La persona que mide 178 es el número 16
    - El número 10 mide 165
    - El puntero izquierdo es el número 15
    - Brad es el defensa derecho
    - Brendan es el número 20
    - Michael mide 184
    - Miguel es el número 6
    - Michael es el puntero izquierdo
    - El número 42 es el defensa derecho
    - Brad mide 171
    - El número 6 es el defensa central

- El número 15 mide 184
- El número 20 mide 180
- Miguel mide 160
- El número 14 mide 169
- La persona que mide 180 es defensa izquierdo

16. Cinco hermanos (Juan, José, Mateo, Emilio, Emiliano) comparten un rasgo común de la falta de memoria, esto los ha metido en problemas con sus novias (Andrea, Elisa, María, Laura, Vanessa). Después de una serie de los cumpleaños olvidados, aniversarios e incluso citas, las novias de los hermanos estaban hartas. Después de una sesión de lluvia de ideas, los hermanos idearon un nuevo día de fiesta - *Día de la Novia*. Para el gran día, cada uno de los cinco hermanos tiene una cita con su novia. Cada uno compró un regalo diferente (pulsera, chocolate, música, collar, anillo) y una docena de rosas de un color diferente (púrpura pálido, rosado, blanco, rojo, amarillo). Cada pareja va a un destino diferente (juego de baloncesto, cena, patinaje, cine, teatro). Determina el nombre de cada hermano, el nombre de su novia, el regalo y el color de las rosas que él le da, y su destino fecha.

    - Los cinco hermanos son: Emiliano, el hermano que da a su novia el anillo y las rosas rojas, el hermano que da a su novia rosas de color rosa, el hermano que lleva a Laura al cine, y el hermano que lleva a su novia a patinar sobre hielo.
    - Las cinco amigas son: Andrea (que no va al partido de baloncesto), la mujer que consigue el anillo, Elisa (que no está recibiendo la pulsera), la novia de Juan, y la que le regala el caramelo y las rosas amarillas.
    - El hermano que lleva su novia al cine es o bien o José o Emiliano (que no le regala el collar a su novia).
    - Vanessa y la novia de Juan (que no le regalan el collar) son, en algún orden, la mujer que va al teatro y el que lo recibe rosas blancas.
    - Ni Emilio ni José (cuya novia no es Andrea) lleva a su novia al juego de baloncesto.

17. Hay 5 casas con 5 diferentes colores. En cada casa vive una persona con una nacionalidad diferente. Los 5 dueños prefieren cierto tipo de bebida, hacen cierto tipo de ejercicio y tienen cierta mascota. No hay dos dueños con la

misma mascota, o que hagan el mismo ejercicio o que prefieran el mismo tipo de bebida. Alguien tiene un pez. La pregunta es: ¿Quién?

- El ingles vive en la casa roja.
- El sueco tiene un perro.
- El holandés toma te.
- La casa verde esta de lado izquierdo y a un lado de la casa blanca.
- El que vive en la casa verde toma café.
- La persona que corre cría aves.
- El dueño de la casa amarilla juega futbol.
- El hombre que vive en la casa del centro toma leche.
- El noruego vive en la primera casa.
- El hombre que anda en bicicleta vive a lado de la persona que tiene gatos.
- El hombre que tiene un caballo vive a lado de la persona que juega futbol.
- El dueño que juega tenis toma cerveza.
- El alemán juega volleyball.
- El noruego vive a lado de la casa azul.
- El hombre que anda en bicicleta es vecino de la persona que toma agua.

Capítulo 5

Jugando se aprende

Un optimista se equivoca tanto como un pesimista
- pero se divierte mas.

1. A un tablero de ajedrez se le recortan dos casillas ubicadas en vértices diagonalmente opuestos. Se tienen además 31 rectángulos de cartón, cada uno de los cuales puede cubrir exactamente dos casillas del tablero. ¿Es posible cubrir completamente el tablero con los rectángulos?

2. En cada una de las 64 casillas de un tablero de ajedrez hay un grano de azúcar. Una hormiga comienza en un vértice del tablero, come el azúcar, y se traslada a una casilla adyacente, desplazándose en dirección horizontal o vertical (pero nunca en diagonal). Continúa de este modo hasta acabar con todo el azúcar, y sin pasar dos veces por una misma casilla. ¿Es posible que su trayecto finalice en el vértice diagonalmente opuesto al inicial?

3. En un campeonato internacional de ajedrez, cada maestro debió jugar exactamente una vez con cada uno de sus adversarios. Si en total se jugaron 45 partidas y la cantidad de maestros es un número par, ¿Cuál fue el número de maestros que participó del campeonato?

4. ¿Qué significa que un juego de dominó se cierra? Juega a que se cierre el juego y cuenta los puntos de cada equipo. ¿Hay algún patrón del número de puntos una vez que se cierre el juego? Explicar porque se tiene este comportamiento.

5. En un torneo de ajedrez con n jugadores, se juega de la siguiente manera: En cada vuelta juegan un partido cada jugador y pasan a la siguiente vuelta únicamente los ganadores, salvo si hay un número impar de jugadores, en este

caso, se elige al azar el jugador que pasa directamente a la siguiente vuelta. El ganador es el que queda solo al final. ¿Cuántos partidos de ajedrez se juegan en este torneo?

6. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en hilera todas las fichas blancas de ajedrez, si no son distinguibles entre sí las del mismo tipo? (Por ejemplo los 8 peones).

7. Para ver la final de mundial de futbol, tu y tus amigos ordenaron pizzas para comer. Cuando llegaron las pizzas, se dieron cuenta de que no las habían cortado en rebanadas. Juanito, que siempre se hacía el chistoso, cortó dos de las pizzas como en la figura 5.1. ¿Cuál es el mayor número de "rebanadas" que puedes obtener haciendo cuatro cortes rectos? ¿Cuál es el mayor número de "rebanadas" que puedes obtener haciendo n cortes rectos?

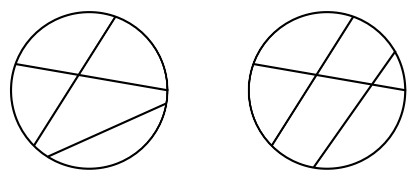

Figura 5.1: Dos maneras diferentes de cortar una pizza con tres cortes rectos

8. La FIFA desea cambiar la modalidad del mundial. En el torneo participarán 32 equipos, los juegos de cada ronda se decidirán por sorteo y en cada partido entre dos equipos exactamente uno, el ganador (no hay empates), pasará a la siguiente ronda. La FIFA tiene un ranking de los 32 equipos ordenándolos de mejor a peor. En la primera ronda del torneo se realizarán 16 partidos y los 16 ganadores pasan a la segunda ronda, en la segunda ronda se jugarán 8 partidos y los 8 equipos ganadores pasan a la tercera ronda así hasta que en la cuarta ronda habrá 2 partidos y los ganadores jugarán la final. Supongamos que si un equipo A está en mejor posición en el ranking de la FIFA que un equipo B entonces si A y B juegan, A le gana a B, por ejemplo el equipo 1 en el ranking siempre gana. Bajo esta suposición, ¿cuál es el peor equipo que puede disputar la final?

9. Se tiene el número 1234 escrito en una hoja blanca. César y Lalo toman turnos para jugar lo siguiente: en cada turno un jugador puede restarle cualquiera de los dígitos del número escrito en la hoja (siempre y cuando este dígito no sea cero); se borra el viejo número y se escribe el nuevo. Pierde el que ya no pueda

restar números (cuando se llegue al número cero). Si César es el que empieza, ¿quién gana y cuál es su estrategia ganadora?

10. Un dado ha sido trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es el doble que la de sacar un número impar. Se lanza el dado una vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par? Si se lanzan a la vez el dado trucado y un dado no trucado,

    a) ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par y un número impar?

    b) ¿cuál es la probabilidad de obtener, al menos, un número impar?

11. Lalo y César juegan volados. Lanzan n veces la moneda. César gana si la cantidad de águilas obtenidas es múltiplo de 4, y Lalo gana en otro caso. ¿Para qué n la probabilidad de que gane César es 1?

12. Mariana y Susan juegan dominó. A Mariana le sale una mano con cuatro mulas. A Mariana le parece curioso y afirma que es muy raro que te salgan cuatro mulas en una mano.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de dominó tenga cuatro mulas?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de dominó tenga al menos cuatro mulas?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de dominó no tenga mulas?

13. Mariana y César juega a los dados. La que repite la misma suma mas veces gana. Determina cuales son los posibles resultados y, calcula la probabilidad de cada evento.

14. Lanza una moneda y anota el resultado (sol o águila). Repite el experimento 100 veces y anota todos los resultados en una tabla. ¿El resultado es lo que esperaban? En caso de que no sea así, ¿a qué creen que se deba?

15. Pide dos dados en el ludoteca. Lanza los dados y anota la suma de los puntos de los dos dados. Repite el experimento 100 veces y anota todos los resultados en una tabla. Compara los resultados con los del problema 13. En caso de que sean diferentes, ¿a qué creen que se deba? Basado en los resultados encuentren la probabilidad de cada evento. Representa los resultados gráficamente (todas las representaciones gráficas que conozcas).

16. Pide un juego de dominó en el ludoteca. Saca siete fichas al azar del mazo y anota cuantas mulas tiene la mano. Repite el experimento 100 veces y anota todos los resultados en una tabla. Compare los resultados con los del problema 12. En caso de que sean diferentes, ¿a qué creen que se deba? Basado en los resultados encuentren la probabilidad de cada evento. Representa los resultados gráficamente (todas las representaciones gráficas que conozcas).

17. Pide un mazo de cartas (inglesa o española) en el ludoteca. Saca cinco cartas al azar del mazo y anota si la mano tiene un par, una tercia, full, corrida o Poker. Repite el experimento 100 veces y anota todos los resultados en una tabla. Basado en los resultados encuentren la probabilidad de cada evento. Representa los resultados gráficamente (todas las representaciones gráficas que conozcas).

Anexo A

Reglas de Dominó

Origen e historia: El dominó surgió hace mil años en China a partir de los juegos de dados. La forma actual de 28 fichas dobles y rectangulares se conoció en Europa hasta mediados del siglo XVIII. El nombre del juego es de origen francés y fue tomado de una capucha negra por fuera y blanca por dentro, los mismos colores que presenta el dominó.

Descripción: El juego de dominó es un juego de mesa que consta de 28 fichas rectangulares, cada una dividida en dos cuadrados del mismo tamaño; en cada cuadrado hay desde cero hasta seis puntos. Las 28 fichas tienen todas las posibles combinaciones de los números del cero al seis. A las fichas que tienen el mismo número en los dos cuadrados se les llama *mulas*. La dinámica del juego consiste en formar una cadena de fichas pegando cuadrados iguales, con el objetivo genérico de colocar todas las fichas. En el juego de dominó se juega entre dos parejas (cuatro jugadores).

Objetivo: El objetivo del juego es alcanzar una puntuación que se fija ante de iniciar el juego (por ejemplo 100 puntos).

Desarrollo del juego:

Inicio del juego: Los cuatro jugadores se colocan alternadamente alrededor de una mesa de manera en que los miembros de cada pareja queda uno enfrente del otro. En cada mano, se reparten todas las fichas (7 a cada jugador).

Cómo colocar las fichas: El jugador que empieza a jugar coloca cualquier ficha sobre la mesa (si es la primera mano, el jugador tiene la mula de seis inicia con la mula de seis). Siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, cada jugador coloca una ficha en uno de los extremos de la cadena, siempre que sea posible; en caso contrario debe pasar.

Las fichas van formando una cadena de modo que los extremos iguales de las fichas se colocan juntos, salvo las fichas dobles, que se colocan en dirección perpendicular a la cadena.

Final: Cada mano puede acabar por una de estas dos situaciones:

Cuando uno de los 4 jugadores coloca todas sus fichas: la mano es ganada por la pareja a la que pertenece dicho jugador.

Por cierre: cuando ninguno de los 4 jugadores puede seguir colocando ninguna de sus fichas. En este caso se suman los puntos de las fichas que no han sido jugadas por cada pareja. La pareja cuya suma es menor gana la mano. En caso de empate, la pareja del jugador que cerró partida pierde la mano. La pareja ganadora obtiene la suma de todos los puntos de las fichas que no han sido colocadas por la pareja que perdió la mano.

En manos consecutivas, comienza alguno de los dos jugadores de la pareja que ganó la mano anterior. La pareja que alcanza la puntuación acordada gana la partida.

Resumen basado en [17, 18].

Anexo B

Reglas de Ajedrez

Origen e historia: El origen del ajedrez es un juego de tablero para cuatro personas que surgió en India entre los siglos V y VI, llamado Chaturanga. Este ajedrez antigüo llegó a Persia y luego a los países árabes. Los árabes lo siguieron desarrollando lo llevaron, a través de sus conquistas, desde Persia hasta España durante el siglo IX. Aunque el ajedrez llegó a Europa primero por el Imperio Bizantino y luego en el siglo VIII a Rucia. Las normas del ajedrez tal como se conocen hoy en día se establecieron en los siglos XVI y XVII.

Descripción: El objetivo de cada jugador es situar al rey de su adversario bajo ataque, de tal forma que el adversario no disponga de ninguna jugada legal que evite la captura del rey en la siguiente jugada. El jugador que consigue esto ha dado *jaque mate* a su adversario y ha ganado la partida. El tablero de ajedrez es un cuadrado dividido en 64 casillas cuadradas del mismo tamaño, con distribución 8×8, alternativamente casillas "blancas" y casillas "negras". El tablero se coloca entre los jugadores de tal forma que la casilla de la esquina derecha más cercana a cada jugador sea blanca.

Al comienzo de la partida, un jugador dispone de 16 piezas de color "blanco"; el otro tiene 16 piezas de color "negro". Cada color tiene las siguientes piezas:

Un rey R, una reina (o dama) D, dos torres T, dos alfiles A, dos caballos C y ocho peones P.

Posición inicial de las piezas sobre el tablero es la siguiente:

Las ocho hileras verticales de casillas se denominan *"columnas"*, las ocho hileras horizontales de casillas se denominan *"filas"* y una sucesión de casillas del mismo color en línea recta, tocándose por sus vértices, se denomina *"diagonal"*.

El movimiento de las piezas: Ninguna pieza puede ser movida a una casilla ocupada por una pieza del mismo color. Si una pieza se mueve a una casilla ocupada por una pieza de su adversario, ésta es capturada y retirada del tablero como parte del mismo movimiento.

La dama se mueve a cualquier casilla a lo largo de la fila, columna o diagonal en las que se encuentra. **La torre** se mueve a cualquier casilla a lo largo de la fila o columna en las que se encuentra. **El alfil** se mueve a cualquier casilla a lo largo de una de las diagonales sobre las que se encuentra. La dama, la torre o el alfil no pueden pasar sobre ninguna otra pieza. **El caballo** se mueve a una de las casillas más próximas a la que se encuentra, sin ser de la misma fila, columna o diagonal. No pasa directamente sobre ninguna casilla intermedia. **El peón** se puede mover de las siguientes maneras:

1. hacia adelante a la casilla inmediatamente delante suyo en la misma columna, siempre que dicha casilla esté desocupada;

2. si es su primer movimiento, el peón puede avanzar dos casillas a lo largo de la misma columna, siempre que ambas casillas estén desocupadas;

3. a una casilla ocupada por una pieza del adversario que esté en diagonal delante suyo, sobre una columna adyacente, capturando la pieza.

4. Cuando un peón alcanza la fila más alejada desde su posición inicial debe ser cambiado, como parte del mismo movimiento, por una dama, torre, alfil o caballo del mismo color. La elección del jugador no está limitada a piezas que hayan sido capturadas anteriormente.

El rey puede moverse a cualquier casilla adyacente que no esté atacada por una o más piezas del adversario.

Se dice que el rey está *"en jaque"* si se encuentra bajo ataque por una o más piezas del adversario, incluso aunque dichas piezas no pudieran ser movidas. Un jugador no puede hacer una jugada que ponga o deje a su propio rey en jaque.

La final del juego se puede dar de las siguientes maneras.

La partida es *ganada* por el jugador que ha dado jaque mate al rey de su adversario con una jugada legal.

El rey está *"ahogado"*, cuando el jugador que está en juego no puede hacer ninguna jugada legal y su rey no está en jaque. Esto finaliza inmediatamente la partida.

La partida es *"tablas"* (empate) si se han hecho los últimos 50 movimientos consecutivos de cada jugador sin que haya habido ninguna captura de pieza.

Resumen basado en [18].

Bibliografía

[1] S. Bayat y R. A. Tarmizib, *Effects of problem-based learning approach on cognitive variables of university students*, Procedia - Social and Behavioral Sciences **46** (2012) 3146–3151.

[2] M. Cazzola, *Problem-based learning and teacher training in mathematics*, Università di Milano-Bicocca, Quaderni di Matematica n. 8/2008.

[3] I. E. Gálvez et. al., *El aprendizaje basado en problemas como innovación docente en la universidad: posibilidades y limitaciones*, Educación y Futuro, 16 (2007), 85-100.

[4] T. Marino y M. Rodríguez, *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos: análisis de un caso*, II Reunin Pampeana de Educación Matemática (2008), Editores: M. E. Ascheri; R. A. Pizarro; N. C. Ferreyra, Trabajo de investigación # C36, 213 – 222.

[5] L. I. Martínez Sandoval, *Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal*, Folleto de Problemas 2011.

[6] T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, JHU Press, 2009.

[7] J. H. Nieto Said, *Resolución de Problemas Matemáticos*, Talleres de Formación Matemática, Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004.

[8] G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Serie de matemáticas, Trillas (2002).

[9] J. R. Savery, *Over view of problem-based learning: Denition and distinctions*, The Journal of Problem-based Learning, 1-1 (2006) 9–20.

[10] Stanford University (2001) *Speaking of teaching: Problem-based learning.* http://www.stanford.edu/dept/CTL/Newsletter/problem_based_learning.pdf

[11] E. Triantafyllou y O. Timcenko, *Applying Constructionism and Problem Based Learning for Developing Dynamic Educational Material for Mathematics At Undergraduate University Level*, Published in: PBL Across Cultures.

[12] D. R. Woods, *Problem-Based Learning: helping your students to gain the most from PBL. Instructor's guide to "Problem-Based Learning: How to gain the most from PBL"*, Publisher: Donald R. Woods (1995).

[13] *Laberintos e infinitos*, Revista de los alumnos de matemáticas y actuaría del ITAM.

[14] Problemas de la Olimpiada de Matemáticas Mexicana, Española, Colombiana, Soviética, Internacional entre otros.

[15] http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/menuresol.htm

[16] http://rt000z8y.eresmas.net/matemat.htm

[17] http://historiadeldomino.blogspot.mx/2008/01/historia-del-domino.html

[18] http://www.ludoteka.com/domino.html

[19] http://www.juegosdelogica.com/neuronas/acertijo.htm

[20] http://www.braingle.com/Logic-Grid.html