



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD CUAJIMALPA  
DIVISION DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

# Elementos de Cálculo Vectorial para la Física- Matemática

Junio 2017

**Dra. Ana Laura García Perciante**  
**Dra. Alma Rosa Méndez Rodríguez**

Departamento de Matemáticas  
Aplicadas y Sistemas

ISBN: 978-607-28-1035-8

Elementos de Cálculo Vectorial para la  
Física-Matemática.

Ana Laura García-Perciante  
Alma Rosa Méndez Rodríguez

ISBN: 978-607-28-1035-8



ISBN: 978-607-28-1035-8

# Prefacio

El Cálculo Vectorial resulta una herramienta indispensable para abordar muchos temas de la Física-Matemática, por ejemplo tiene especial relevancia en cursos como mecánica, electrodinámica, hidrodinámica, relatividad especial y general, gravitación, etc. El presente material se ha elaborado en base a las experiencias recabadas de la impartición periódica de la UEA Cálculo Vectorial y de UEA optativas como Física I y II, Mecánica Analítica, Campos Clásicos y Teoría Electromagnética, por mencionar algunas, desde el año 2007, siendo un valioso complemento a textos estándar de dichas materias. En este documento se abordan los elementos básicos del cálculo vectorial y una introducción al cálculo tensorial desde el punto de vista de la física matemática. De ninguna manera pretende presentar una exposición completa y formal del Cálculo Vectorial, sino que la idea es que estas notas constituyan un eslabón que facilite la aplicación de los conocimientos del cálculo multivariable, vectorial y tensorial a cursos de orientación que se imparten en la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la UAM-C, así como a otras licenciaturas afines dentro y fuera de la UAM.

El contenido se presenta de una forma didáctica y constructiva y se incluyen ejercicios alineados con los ejes rectores de la UAM-C. El material está planeado para estudiantes de nivel universitario, en carreras como física, matemáticas, matemáticas aplicadas, ingenierías, biología y química que tengan conocimientos previos de cálculo multivariable. Se motiva al lector a llevar a cabo investigación individual o en grupo de algunos temas a modo de contextualizar los mismos antes de proceder a la aplicación. Se enfatiza adicionalmente el uso de paquetes computacionales para visualizar algunos resultados. El nivel de formalidad

es suficiente para que todos los resultados queden justificados sin que se pierda el contacto con la aplicación.

El presente material está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introduce el concepto de vector, desde el punto de vista del álgebra, la geometría, la física y el cálculo. En el Capítulo 2 nos ocupamos de la representación de los vectores en diferentes sistemas de coordenadas ortogonales, introducimos las coordenadas generalizadas y las operaciones básicas entre vectores. El Capítulo 3 presenta los elementos de cálculo diferencial e integral que nos permiten concluir, en el Capítulo 4, con la presentación de los teoremas integrales. Finalmente el Capítulo 5 presenta una introducción al cálculo tensorial para cerrar con un ilustrativo ejemplo de su utilidad en la relatividad especial. Al final del texto se incluye una lista de referencias sugeridas para consulta del lector. Los ejercicios propuestos pretenden, en su mayoría, ilustrar los conceptos y/o complementar la exposición del texto. Varios problemas fomentan que el lector participe en la construcción de los modelos o formalismos abordados. Se incluyen adicionalmente algunos ejercicios de cálculo con el objeto de refrescar algunas técnicas y ejemplificar algunas operaciones o procedimientos aquí introducidos.

# Índice general

<b>1. El concepto de vector</b>	<b>6</b>
1.1. Vectores como elementos de un espacio vectorial . . . . .	7
1.2. El vector posición y el punto de vista geométrico . . . . .	10
1.3. Vectores en la física . . . . .	12
1.4. Funciones vectoriales y campos . . . . .	16
<b>2. Representación de vectores y operaciones básicas</b>	<b>21</b>
2.1. Representación de vectores en sistemas cartesianos y polares . . . . .	21
2.1.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	21
2.1.2. Coordenadas polares en el plano . . . . .	23
2.1.3. Coordenadas polares en el espacio: cilíndricas y esféricas . . . . .	24
2.2. Dinámica de una partícula en coordenadas polares . . . . .	28
2.3. Coordenadas ortogonales generalizadas. . . . .	34
2.3.1. Curvas coordenadas y vectores direccionales . . . . .	34
2.3.2. Los coeficientes métricos y los elementos de línea, superficie y volumen	40
2.4. Operaciones básicas con vectores . . . . .	43
2.4.1. Suma y producto por escalar . . . . .	43
2.4.2. Producto interior . . . . .	45
2.4.3. Producto vectorial . . . . .	49
<b>3. Cálculo diferencial e integral vectorial</b>	<b>54</b>

3.1. Elementos de cálculo diferencial vectorial: operadores diferenciales . . . . .	54
3.1.1. Gradiente . . . . .	55
3.1.2. Divergencia . . . . .	61
3.1.3. Rotacional . . . . .	68
3.1.4. Operadores de segundo orden . . . . .	70
3.2. Elementos de cálculo integral . . . . .	71
3.2.1. Integrales de línea: circulación . . . . .	71
3.2.2. Integrales de superficie: flujo . . . . .	75
3.2.3. Integrales de volumen . . . . .	78
<b>4. Teoremas Integrales</b>	<b>80</b>
4.1. Teorema fundamental del cálculo . . . . .	83
4.2. Teorema de Gauss . . . . .	86
4.3. Teorema de Stokes . . . . .	99
4.3.1. Teorema de Green . . . . .	99
4.3.2. Teorema de Stokes . . . . .	101
4.4. Aplicación: las ecuaciones de Maxwell . . . . .	107
4.5. Campos conservativos . . . . .	111
<b>5. Introducción al cálculo tensorial</b>	<b>117</b>
5.1. Leyes de transformación: tensores contravariantes y covariantes de primer rango	118
5.2. Producto directo y tensores de rango superior . . . . .	121
5.3. Ecuaciones tensoriales y la ley de cocientes . . . . .	124
5.4. Tensor métrico, componentes físicas y tensoriales . . . . .	127
5.5. Derivación covariante . . . . .	132
5.6. Ejemplo: el espacio de Minkowski . . . . .	135
5.6.1. Transformaciones de Lorentz: contracción de la longitud y dilatación del tiempo . . . . .	136

- 5.6.2. Cuadrivector de ímpetu y formulación covariante de la 2da ley de Newton 143
- 5.6.3. El potencial electromagnético, el tensor de campo y la formulación covariante del electromagnetismo. . . . . 148

# Capítulo 1

## El concepto de vector

**Problema 1.0.1.** *(Trabajo en equipo)* Cada grupo trabajará en “armar” el concepto de vector incorporando toda la información que los integrantes tengan sobre dicho objeto. Como sugerencia, pueden iniciar con una lluvia de ideas donde vayan recabando toda la información que tengan sobre cualquier aspecto de los vectores (que hayan aprendido desde las clases de física del bachillerato hasta los cursos de álgebra lineal, geometría, física básica y cálculo en varias variables). Finalmente, cada grupo expondrá, de la manera más completa que les sea posible, el concepto de vector al que se llegó. Se recomienda guardar registro de esta actividad y repetirla al finalizar el curso.

La definición precisa de vector se ha abordado en cursos anteriores desde el punto de vista del álgebra lineal. Probablemente se ha trabajado también con este tipo de objetos matemáticos en cursos de geometría así como en los cursos de cálculo diferencial e integral en varias variables. Adicionalmente, es usual introducir los conceptos de vector y de campo en cursos de física básica. Para desarrollar los temas del presente curso, requeriremos de los tres puntos de vista, el algebraico, el analítico y el geométrico así como las aplicaciones en la física y otras disciplinas. Veremos que los elementos que aportan cada uno de los enfoques son necesarios para completar el esquema del cálculo vectorial aplicado y por ello es conveniente, en esta etapa introductoria, retomar algunos elementos ya estudiados, profundizando

en aquellos aspectos que vayan a resultar de particular relevancia para los temas que se desarrollarán. No se pretende hacer una descripción detallada, y mucho menos estrictamente formal, sino que se rescatarán los elementos principales y necesarios para el desarrollo de los temas de los siguientes capítulos.

## 1.1. Vectores como elementos de un espacio vectorial

Un espacio vectorial  $V$  consiste en un conjunto de elementos y dos operaciones básicas, cerradas en dicho conjunto, que satisfacen nueve axiomas. También es necesario especificar sobre qué campo  $F$  se refieren los llamados escalares en el conjunto, estos pueden ser los reales o bien los complejos. Tomemos dos elementos del conjunto  $V$ , digamos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , y consideremos sus dos operaciones suma y producto por un elemento  $a$  del campo  $F$ , tenemos entonces

$$\vec{u}, \vec{v} \in V, a \in F \implies \begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \in V \\ a\vec{u} \in V. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Los nueve axiomas en cuestión se muestran a continuación: si  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  y  $a, b \in F$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad (1.1.2)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad (1.1.3)$$

$$\exists \vec{0} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in V, \quad (1.1.4)$$

$$\exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in V, \quad (1.1.5)$$

$$\exists 0 \in F : 0 \vec{u} = \vec{0}, \quad \forall \vec{u} \in V, \quad (1.1.6)$$

$$\exists 1 \in F : 1 \vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in V, \quad (1.1.7)$$

$$(ab) \vec{u} = a(b\vec{u}), \quad (1.1.8)$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}, \quad (1.1.9)$$

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}. \quad (1.1.10)$$

Recuérdese que para todo espacio vectorial se puede obtener una base ortonormal de vectores, que aquí denotaremos como  $\hat{e}_i$ , a partir de los cuales cualquier elemento puede expresarse como una  $n$ -ada de reales dados por

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \hat{e}_i, \quad (1.1.11)$$

donde  $n$  es la dimensión del espacio. En el caso particular de  $\mathbb{R}^3$ , uno puede pensar en un elemento de dicho espacio como la ubicación de un punto en un espacio cartesiano tridimensional. Así, si consideramos como base los vectores cartesianos unitarios

$$\hat{e}_1 = \hat{i} \quad \text{eje x}, \quad (1.1.12)$$

$$\hat{e}_2 = \hat{j} \quad \text{eje y}, \quad (1.1.13)$$

$$\hat{e}_3 = \hat{k} \quad \text{eje z}, \quad (1.1.14)$$

se obtiene una terna de números asociada a cada vector y podemos escribir

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3). \quad (1.1.15)$$

La generalización a  $n$  dimensiones es directa y se tiene

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (1.1.16)$$

donde la suma y productos por escalar están dados por

$$\vec{u} + \vec{v} = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) \hat{e}_i, \quad (1.1.17)$$

$$a\vec{u} = \sum_{i=1}^n au_i\hat{e}_i, \quad (1.1.18)$$

respectivamente.

**Problema 1.1.1.** *Pruebe que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto definidas arriba (4.2.29-1.1.10).*

Si adicionalmente, se dota al conjunto de un producto interior (o producto interno) se obtiene un espacio vectorial con producto interno (o normado). El par espacio vectorial - producto interno (que denotaremos por  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in F$ ) debe cumplir con cuatro axiomas, a saber

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad (1.1.19)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w}), \quad (1.1.20)$$

$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad (1.1.21)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}. \quad (1.1.22)$$

A partir del último axioma, se define la norma de un vector como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \equiv u. \quad (1.1.23)$$

El producto interior en  $\mathbb{R}^3$  es el bien conocido producto escalar o producto punto dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i, \quad (1.1.24)$$

de donde claramente se observa que, en el caso particular de los vectores de la base, se tiene que

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.1.25)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker, que es un objeto matemático que vale 1 en caso de  $i = j$  y

o de lo contrario.

**Problema 1.1.2.** *Generalice las definiciones anteriores a  $\mathbb{R}^n$  y pruebe que el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$  satisface los axiomas.*

## 1.2. El vector posición y el punto de vista geométrico

Nótese que la asociación de elementos de  $\mathbb{R}^3$  a puntos en el espacio físico lleva a una única interpretación de un vector como la posición de un punto. Por ello, en un principio no queda del todo claro que la velocidad, aceleración, fuerza, ímpetu y otras cantidades físicas, que en cursos introductorios se conciben como vectores sin mucha justificación, realmente lo sean. Regresaremos a este punto más adelante.

La interpretación geométrica de un vector como un punto en el espacio, nos permite asociar de forma intuitiva la norma introducida en la sección anterior con longitudes o distancias, así como relacionar el producto interior con ángulos en un espacio cartesiano. Dado que la norma de un vector nos dará la distancia entre el punto en cuestión y el origen  $\vec{0}$ , se asocia intuitivamente al vector un segmento que va desde el origen al punto y la longitud del mismo corresponde con la norma del vector. Asociar directamente una norma y un ángulo a un punto es un poco contraintuitivo. De esta forma es que surge la noción de vector como “flecha”, donde el sentido como tal, está especificado exclusivamente para diferenciar un vector  $\vec{u}$  de su opuesto  $-\vec{u}$ . En estas notas usamos una flecha para denotar vector, pero es importante que se mantenga en mente que, esta asociación depende fuertemente del concepto de norma y que un vector no es propiamente una flecha ni tiene magnitud ni dirección, estas características corresponden al segmento que va del origen al mismo (al punto).

Para ejemplificar este punto, consideremos por simplicidad un vector  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Su norma está dada por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (1.2.1)$$

lo cual es claramente la longitud de un segmento que iría desde el origen al punto con coor-

denadas  $(u_1, u_2)$ . Adicionalmente, si se considera el producto con cada uno de los elementos de la base tenemos

$$\vec{u} \cdot \hat{i} = u_1, \quad (1.2.2)$$

$$\vec{u} \cdot \hat{j} = u_2, \quad (1.2.3)$$

de donde se obtiene

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \hat{i}}{u}, \quad (1.2.4)$$

si  $\theta$  es el ángulo que forma el segmento del origen al punto con coordenadas  $(u_1, u_2)$  con el eje horizontal (ver figura 1.2.1). De esta forma, vemos que el concepto de longitud así como el de ángulo están estrechamente ligados al producto interno que se considere. De esta forma queda determinada la interpretación de un par ordenado  $(u_1, u_2)$  como un segmento dirigido de magnitud  $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$  y que forma un ángulo  $\theta = \arccos\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right)$  con la horizontal. La generalización a  $\mathbb{R}^3$  es directa y se tratará en el Capítulo 2.

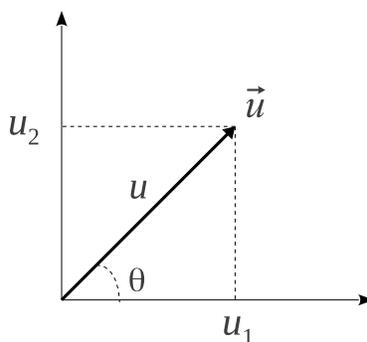


Figura 1.2.1: Vector  $\vec{u} = (u_1, u_2)$

**Problema 1.2.1.** Demuestre que el producto por un escalar mantiene invariante el ángulo y escala la norma de un vector.

**Problema 1.2.2.** Considere los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (3, -2)$ . Encuentre la norma de ambos así como los ángulos que forman con los ejes. Calcule la suma, resta y producto punto de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Muestre gráficamente ambos vectores así como los vectores suma y resta.

### 1.3. Vectores en la física

Por lo general, el primer acercamiento al concepto de vector, sucede en cursos de física elemental. Sin embargo, como se verá más adelante, el mismo resulta insuficiente en algunas circunstancias para describir la dinámica en los sistemas aun más simples. Muchas veces se introduce el concepto de vector para discutir el de fuerza. La problemática en concebir una fuerza como un vector surge, no por la naturaleza matemática de dicha cantidad, ya que finalmente se le puede considerar como un elemento de  $\mathbb{R}^3$ , sino por sus propiedades de transformación. En particular si consideramos fuerzas conservativas (gradientes), al ser introducidas en la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}), \quad (1.3.1)$$

llevan a una inconsistencia fundamental. En general el gradiente de una función de varias variables y la derivada que aparece del lado derecho de la ec. (1.3.1) se transforman de diferentes maneras ante cambios de marcos de referencia. Esto lleva a que físicamente sean cantidades con características diferentes y por lo tanto no puedan ser igualadas a la ligera. No es incorrecta la expresión en sí, sino que no resulta una formulación válida de una ley de la naturaleza, ya que pierde validez bajo ciertas transformaciones, por ejemplo las que llevan de un marco de referencia a otro siendo la velocidad relativa entre ellos cercana a la velocidad de la luz. Esto va en contra de uno de los principios fundamentales de la física llamado el principio de relatividad. En el caso de transformaciones entre sistemas que se mueven con velocidades constantes y pequeñas comparadas con la de la luz, usando coordenadas cartesianas y excluyendo la presencia de un campo gravitacional intenso, la expresión formulada arriba es válida.

**Problema 1.3.1.** *Investigue en un texto en idioma inglés el enunciado de las leyes de la relatividad. Encontrará varias versiones, discuta con sus compañeros las diferencias entre ellas.*

Vamos ahora a ver con un poco más de detalle el origen del problema antes mencionado. Para ello comenzaremos explorando la naturaleza física de los términos a ambos lados de la ec. (1.3.1) y su relación con los elementos de cálculo ya estudiados. De cursos anteriores, sabemos que la velocidad de un objeto está dada por la derivada de su posición con respecto al tiempo. ¿Cómo conciliamos esto con el concepto de vector que hemos venido armando? La respuesta es sencilla pero engloba un gran salto a nivel conceptual. La posición de un objeto es un elemento de  $\mathbb{R}^3$  y por lo tanto un vector que representaremos, siguiendo el razonamiento de la subsección 1.2, como un segmento dirigido del origen a la ubicación de dicho cuerpo. Ahora bien, si la posición del cuerpo varía con el tiempo podemos tomar su posición un instante posterior la cual será nuevamente un elemento de  $\mathbb{R}^3$ . Si seguimos variando el tiempo, que consideramos como una variable continua, tendremos un conjunto infinito de puntos que irán trazando una curva que podremos representar como

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (1.3.2)$$

lo cual claramente corresponde con la definición de curva parametrizada vista en cursos de cálculo multivariable. En particular, este tipo de curvas fueron utilizadas para llevar a cabo integrales de trayectoria o de línea aunque no necesariamente se profundizó en la naturaleza del parámetro. Para los efectos de llevar a cabo una integración, el parámetro puede ser escogido de casi cualquier manera. Sin embargo, en el caso en el cual el parámetro en cuestión es el tiempo y la curva representa la posición de un objeto material en el espacio, la cantidad

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad (1.3.3)$$

es justamente la variación de la posición con el tiempo, esto es la velocidad. De manera similar, definimos la aceleración como

$$\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)). \quad (1.3.4)$$

La masa del objeto como cantidad pertenece a los reales y por lo tanto el lado derecho de la ec. (1.3.1) es un vector. Para el lado izquierdo consideremos una fuerza conservativa, es decir, una fuerza para la cual existe una función  $\varphi(x, y, z)$ , llamada potencial, tal que  $\vec{F} = -\nabla\varphi(x, y, z)$ . Aquí  $\nabla$  denota el operador diferencial gradiente que usualmente se define en cursos de cálculo multivariable y está dado por

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}. \quad (1.3.5)$$

Este operador, así como algunas aplicaciones del mismo y su interpretación geométrica, serán tratados con detalle en el Capítulo 3. Ahora bien, dado que  $\varphi$  toma valores reales, sus derivadas serán elementos de  $\mathbb{R}$  y por lo tanto  $\vec{F}$  es un elemento de  $\mathbb{R}^3$ . De esta forma, la ec. (1.3.1) para  $m$  constante se puede escribir como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -mx_i'', \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3.6)$$

donde se introdujo como notación  $\vec{r} \cdot \hat{e}_i \equiv x_i$  la cual permite mantener las ecuaciones compactas y generalizar a  $\mathbb{R}^n$  de forma directa.

Supongamos ahora que nos interesa explorar la validez de la ec. (1.3.6) bajo un cambio de marco de referencia. Consideremos una transformación lineal dada por la matriz de elementos  $a_{ij}$  de la cual podemos obtener cada  $\bar{x}_i$  en términos de una combinación lineal de los  $x_j$  como

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \quad (1.3.7)$$

Nótese que podemos también escribir la relación anterior como

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\bar{x}_i}{\partial x_j}x_j. \quad (1.3.8)$$

**Problema 1.3.2.** *Escriba explícitamente la ec. (1.3.8) en el caso de una rotación de ángulo*

$\theta$  en  $\mathbb{R}^2$ .

La ecuación anterior es la ley de transformación de las componentes del vector posición ante una transformación lineal. Si el tiempo es considerado un parámetro que no se verá afectado por la transformación, las derivadas temporales del vector posición se transformarán de la misma manera que éste último, esto es

$$\bar{x}_i'' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} x_j'' \quad (1.3.9)$$

Por otra parte, la masa es una cantidad invariante, esto es no depende del marco de referencia y  $\bar{m} = m$ .

Veamos ahora cómo se transforma el lado izquierdo de la ecuación (1.3.1). El potencial se considera una cantidad invariante también. Esto se puede ver fácilmente para el potencial gravitacional o el electrostático ya que dependen de la distancia (que en el contexto no relativista, es invariante), la masa o la carga y algunas constantes universales. Todas estas cantidades no se alteran en un cambio de sistema de referencia. Por lo tanto  $\bar{\varphi} = \varphi$  y, usando que  $\bar{x}_i$  es una función de las variables  $x_j$ , tenemos

$$\overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (1.3.10)$$

La ecuación anterior es la ley de transformación para el gradiente de una función de varias variables. Se puede ver claramente que las transformaciones dadas por las ecs. (1.3.9) y (1.3.10) no son las mismas. En resumen, podemos escribir por componentes

$$\overline{(m x_i'')} = m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} x_j'' \quad (1.3.11)$$

$$\overline{(F_i)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} F_j \quad (1.3.12)$$

Si combinamos las ecuaciones anteriores con el hecho de que en el sistema original se satisface

$F_i = mx_i''$  obtenemos

$$\overline{(F_i)} = m \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} x_j'', \quad (1.3.13)$$

y concluimos que en general  $\overline{(F_i)} \neq \bar{m}\bar{x}_i''$  lo cual contradice el principio de relatividad.

**Problema 1.3.3.** *¿Qué tipo de transformaciones son capaces de esquivar este argumento y mantener invariante la 2da ley de Newton?*

Para terminar esta sección, es importante comentar que en física se consideran como vectores aquellos elementos de  $\mathbb{R}^n$  cuyas leyes de transformación son las mismas que las del vector posición. Como hemos visto, no todas las cantidades se comportan de dicha forma por lo cual es necesario introducir un tipo de objetos más general. Estos objetos se denominan tensores y serán tratados a nivel puramente introductorio en el Capítulo 5.

## 1.4. Funciones vectoriales y campos

Una vez esclarecido con cierto detalle el concepto de vector y remarcado el punto de que los elementos de  $\mathbb{R}^3$  corresponden con vectores posición únicamente, pasaremos a un concepto bastante más general, el de campo. Es en este momento que incorporaremos los elementos del cálculo de varias variables al esquema de vectores y empezaremos a tratar realmente el cálculo vectorial. En cursos previos, se ha manejado el concepto de función de una y varias variables. Estas funciones en general toman elementos de  $\mathbb{R}^n$  y regresan elementos de  $\mathbb{R}$ , esto es

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } U \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (1.4.1)$$

En caso de  $n = 1$ , tenemos funciones reales. En caso de  $n > 1$  muchas veces se maneja el término de funciones de varias variables.

Una forma alternativa de ver este tipo de aplicaciones, es recordar que los elementos de  $\mathbb{R}^n$  son puntos en un espacio  $n$ -dimensional y por lo tanto, una función cuyo dominio se encuentre en un subespacio del mismo es lo que se conoce como una función de punto, esto

es, una función que depende de la posición en la cual esté evaluada. Como ejemplo de esto, considere la temperatura en un ambiente. La temperatura toma valores reales pero depende de donde se mida. Por ello, la temperatura es una función de punto y escribimos  $T(\vec{r})$ . Si en particular pensamos en la temperatura de un cuerpo esférico con una fuente puntual de energía en su centro, es claro que la temperatura dependerá exclusivamente de la distancia del punto en cuestión al origen. Así

$$T(\vec{r}) = f(r), \quad (1.4.2)$$

donde se está considerando  $\vec{r} = (x, y, z)$  en caso de un punto en un espacio tridimensional en coordenadas cartesianas.

A las aplicaciones que toman valores de  $\mathbb{R}^n$  y regresan elementos de  $\mathbb{R}$  se les llama también **campos escalares**. Si estas funciones en vez de caer en los reales caen en general en  $\mathbb{R}^m$  son denominados **campos vectoriales**. El concepto de campo se refiere a transformaciones cuyos dominios están contenidos en un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  y son llamadas escalares si sus valores caen en  $\mathbb{R}$  y vectoriales si caen en  $\mathbb{R}^m$ . Se conoce simplemente como **función** a aquella aplicación cuyo dominio está contenido en  $\mathbb{R}$  y cae en los reales y como **función vectorial** a aquella aplicación que parte de  $\mathbb{R}$  y cae en  $\mathbb{R}^n$ .

**Problema 1.4.1.** *De las siguientes cantidades, indique cuáles son funciones, funciones vectoriales, campos escalares y campos vectoriales. Argumente brevemente su respuesta.*

- a) *La distancia desde el punto de partida de un coche que circula a velocidad constante por una avenida recta como función del tiempo.*
- b) *La población de venados en diferentes regiones de un bosque.*
- c) *La velocidad de la luna en cada punto de su órbita.*
- d) *El número de tallos, ancho y largo de los mismos para una flor en particular en diferentes zonas de una región.*
- e) *La producción de una fábrica como función del trimestre del año.*

- f) La velocidad de un huracán como función de la distancia al ojo del mismo.
- g) La demanda de una línea de productos, mayor a uno, dependiendo de la ubicación del mercado.
- h) La densidad del aire en una habitación.
- i) Los tiempos de llegada de un nadador de 100 metros libres en una práctica.
- j) La estatura y peso promedio de niños según la edad en cierta región.

**Problema 1.4.2.** *Describa al menos dos ejemplos de función, función vectorial, campo escalar y campo vectorial correspondientes a algún área de las ciencias naturales o sociales. En cada caso explique claramente cuál es el dominio e intente argumentar a favor de una dependencia particular con las coordenadas.*

**Problema 1.4.3.** *Grafique algunos de los ejemplos antes descritos con el software de su preferencia.*

En la figura 1.4.1 se muestra un ejemplo de campo escalar donde los colores corresponden con los valores de  $f(\vec{r})$  mientras que la figura 1.4.2 muestra un ejemplo de campo vectorial donde a cada punto le corresponde un vector. En el caso de campos vectoriales se introducen las llamadas líneas de campo que son objetos extremadamente útiles para interpretar y visualizar resultados inherentes al cálculo vectorial aplicado, en particular a la física. Estas líneas corresponden con las curvas cuyo vector tangente en cada punto es justamente el campo vectorial en el mismo. La forma de dichas curvas dará una idea de la dirección del campo en cada punto. En la figura 1.4.3 se ilustra este concepto.

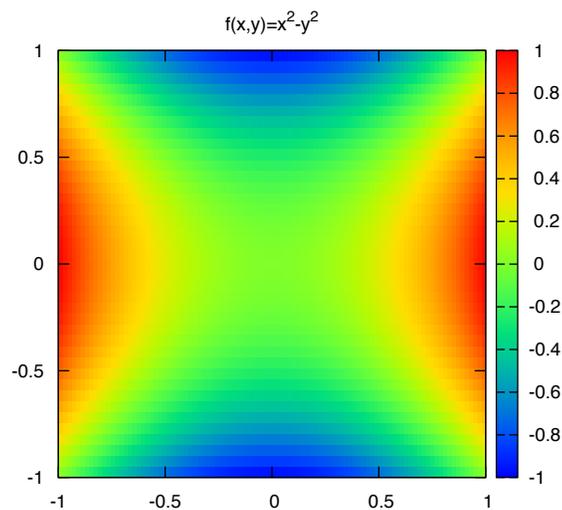


Figura 1.4.1: En la figura se muestra un campo escalar donde la escala de colores corresponde con la magnitud del mismo en el plano  $xy$ .

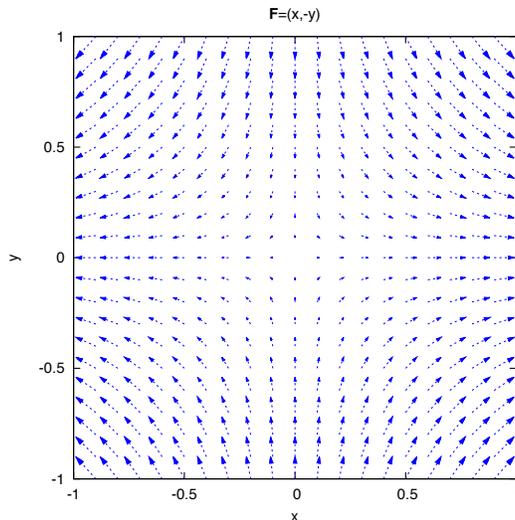


Figura 1.4.2: En la figura se muestra el campo vectorial  $\vec{F} = (x, -y)$ . Las flechas indican la dirección del campo y la longitud de ellas su magnitud en cada punto del plano  $xy$ .

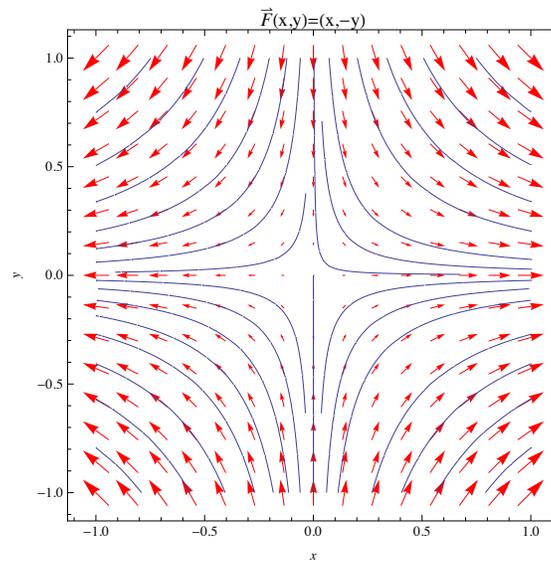


Figura 1.4.3: La figura muestra a través de flechas la dirección y magnitud del campo vectorial indicado. Las líneas de campo se muestran en azul.

# Capítulo 2

## Representación de vectores y operaciones básicas

### 2.1. Representación de vectores en sistemas cartesianos y polares

Los vectores, como elementos de un espacio vectorial, pueden expresarse como una combinación lineal de elementos de una base del mismo. Para diferentes bases en un mismo espacio, los coeficientes de esta combinación lineal difieren. Más aún, en algunos casos es muy conveniente considerar un sistema coordenado para cada posición del punto, en cuyo caso la propia base varía con el tiempo (o el parámetro que se utilice) sobre una curva. Por ello, es importante revisar con cuidado las diferentes representaciones para vectores. En esta parte nos concentraremos en elementos de  $\mathbb{R}^3$  por simplicidad, la generalización a  $\mathbb{R}^n$  es directa y se deja como problema en algunas ocasiones.

#### 2.1.1. Coordenadas cartesianas

Las llamadas coordenadas cartesianas son las que corresponden a las componentes de los elementos de  $\mathbb{R}^3$  referidas a la base ortonormal  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  (véase la figura 2.1.1).

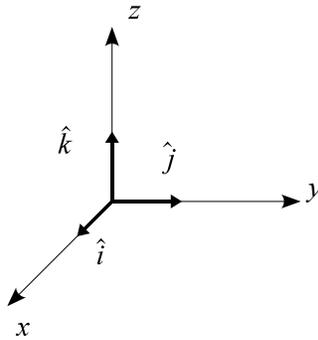


Figura 2.1.1: Sistema de coordenadas cartesianas.

Así, un vector dado por

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad (2.1.1)$$

ó

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.1.2)$$

corresponde con un punto en dichas coordenadas, tiene norma  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y los ángulos que forma el segmento del origen al mismo con los ejes coordenados están dados por los cosenos directores que se definirán en la subsección 2.4.2. Este sistema también es llamado sistema de coordenadas rectangulares y es usado en una amplia variedad de aplicaciones.

**Problema 2.1.1.** *Describa al menos tres aplicaciones del sistema cartesiano ajenas a la geometría y la física. Busque principalmente aplicaciones a ciencias sociales y humanidades.*

**Problema 2.1.2.** *Escriba en forma matricial la ley de transformación de un sistema cartesiano  $S$  en dos dimensiones a otro  $\bar{S}$  cuyos vectores base forman un ángulo  $\theta$  con los del  $S$ . Encuentre una expresión general para las componentes de un vector arbitrario en el sistema  $\bar{S}$  en términos de las componentes del mismo en  $S$ .*

### 2.1.2. Coordenadas polares en el plano

En esta sección se tratarán coordenadas curvilíneas en el espacio, en particular las coordenadas cilíndricas y esféricas. Para ello, comenzaremos con la representación polar de un punto en el plano  $xy$ , lo cual permitirá generalizar a  $\mathbb{R}^3$  de forma sencilla. Dado un punto en el plano con coordenadas  $(x, y)$ , podemos expresar el mismo en términos su distancia al origen y el ángulo  $\theta$  que forma el segmento correspondiente con el eje  $x$ , llamado ángulo polar. Llamemos  $\hat{e}_r$  a un vector unitario en la dirección del segmento del origen al punto  $(x, y)$  y  $\hat{e}_\theta$  a un vector ortogonal a él y también unitario. La dirección de  $\hat{e}_\theta$  se toma por convención en la dirección de crecimiento del ángulo  $\theta$ . Claramente, esta base depende del punto en cuestión y puede parecer algo muy rebuscado pero es de extrema utilidad. En este sistema, la posición del punto está dada simplemente por

$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad (2.1.3)$$

donde el vector unitario  $\hat{e}_r$  depende de las coordenadas del punto en coordenadas cartesianas y puede expresarse en términos de los ejes correspondientes como

$$\hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\hat{i} + y\hat{j}). \quad (2.1.4)$$

Para completar la base, necesitamos encontrar el vector unitario ortogonal a  $\hat{e}_r$ . Esto puede llevarse a cabo de varias formas y se deja como ejercicio obtener

$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y\hat{i} + x\hat{j}). \quad (2.1.5)$$

Nótese que también se podría haber definido este vector en el sentido opuesto. El que uno lo tome como especifica la ec. (2.1.5) se debe a que  $\hat{e}_\theta$  corresponde con la variable angular  $\theta$  y por ello señala en la dirección de crecimiento de la misma (véase la figura 2.1.2).

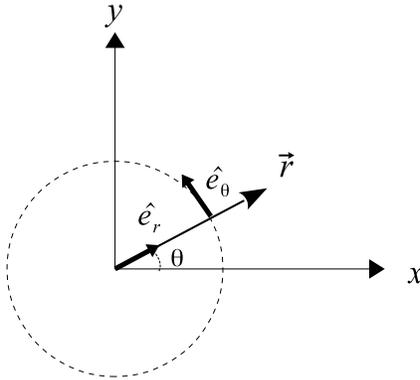


Figura 2.1.2: Sistema de coordenadas polares.

### 2.1.3. Coordenadas polares en el espacio: cilíndricas y esféricas

Consideremos ahora un punto de  $\mathbb{R}^3$  y su vector posición dado en coordenadas cartesianas por  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ . Vamos a escribir dicho vector en coordenadas cilíndricas y esféricas. Para visualizar las coordenadas cilíndricas, proyectemos el vector  $\vec{r}$  en el plano  $xy$ . Imagínese que se ilumina desde arriba y se busca la sombra que hace el punto en el plano  $xy$ . Llamemos a dicho punto  $\vec{\rho}$ . Entonces, para llegar desde el origen hasta el punto  $\vec{r}$  basta con avanzar desde el origen hasta el punto  $\vec{\rho}$  y luego subir en la dirección  $\hat{k}$  hasta la altura del punto  $\vec{r}$ , es decir  $z$ . De esta forma, tenemos por lo pronto que

$$\vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{k}. \quad (2.1.6)$$

Falta escribir el vector  $\vec{\rho}$  en términos de vectores unitarios que junto con  $\hat{k}$  formen una base. Si utilizamos  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , claramente caeremos nuevamente en el sistema cartesiano. Sin embargo, si utilizamos las coordenadas polares planas descritas anteriormente, tendremos que (ver figura 2.1.3)

$$\vec{\rho} = \rho\hat{e}_\rho, \quad (2.1.7)$$

y

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}. \quad (2.1.8)$$

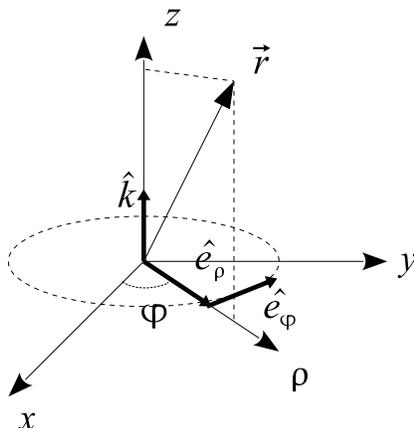


Figura 2.1.3: Sistema de coordenadas cilíndricas.

La representación dada por la ec. (2.1.8) dice algo muy sencillo e intuitivo: si uno quiere llegar al punto  $\vec{r}$ , basta con avanzar en la dirección horizontal hasta que estar exactamente bajo él y desde allí, caminar hacia arriba hasta encontrarlo.

Nótese que la forma en la cual está escrito  $\vec{r}$  en la ec. (2.1.8) puede resultar un poco engañosa ya que parece tratarse de un objeto de  $\mathbb{R}^2$ . Debe recordarse sin embargo, que las coordenadas polares planas están dadas por dos vectores y la base de  $\mathbb{R}^3$  correspondiente a las coordenadas cilíndricas es entonces  $\hat{e}_\rho$ ,  $\hat{e}_\varphi$  y  $\hat{k}$  mientras que las coordenadas del punto son  $\rho$ ,  $\theta$  y  $z$ . Es importante enfatizar en este momento que estas cantidades, las distancias  $\rho$  y  $z$  y el ángulo  $\theta$ , son las necesarias para especificar la posición del punto. Las tres están contenidas en la ec. (2.1.8) ya que el ángulo  $\theta$  interviene en la determinación de la dirección  $\hat{e}_\rho$ , la cual permite que  $\vec{r}$  pueda ser escrito en términos de dos vectores unitarios únicamente.

**Problema 2.1.3.** *¿Podemos pensar en el vector  $\vec{r}$  de la ec. (2.1.8) como un elemento en*

un espacio de dos dimensiones? ¿Cuál sería dicho espacio? Repita el cuestionamiento pero considerando el vector dado en la ec. (2.1.3) como un elemento con una sola dimensión.

De la discusión anterior surge naturalmente una pregunta: ¿es posible encontrar una base de  $\mathbb{R}^3$  tal que el vector posición pueda ser escrito en términos de un solo elemento de la misma? La respuesta es afirmativa y para verlo construiremos las llamadas coordenadas polares esféricas siguiendo un procedimiento similar al de las cilíndricas. En este caso estamos buscando una base que incluya un vector  $\hat{e}_r$  tal que

$$\vec{r} = r\hat{e}_r. \quad (2.1.9)$$

La dirección  $\hat{e}_r$  es claramente la que apunta hacia la posición  $\vec{r}$  a partir del origen. Ahora necesitamos encontrar dicho vector así como un par ortogonal que complete la base. En este caso, expresaremos  $\hat{e}_r$  en términos de dos ángulos de forma tal que la posición del punto quede especificada a través de ellos y su distancia al origen  $r$ . Uno de los ángulos, el que forma el vector  $\vec{r}$  con el eje  $z$ , es llamado ángulo polar y es denotado por  $\theta$ . El segundo es el que forma la proyección de  $\vec{r}$  en el plano  $xy$  con el eje  $x$ , es llamado ángulo acimutal y se denota con la letra  $\varphi$ , en analogía con el caso de las coordenadas polares planas. Es claro que toda esta información es necesaria para que la ec. (2.1.9) determine la posición del punto. La distancia  $r$  aparece explícitamente en la misma, mientras que las cantidades angulares  $\theta$  y  $\varphi$  se encuentran implícitamente en  $\hat{e}_r$ . En particular se tiene que

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}. \quad (2.1.10)$$

Los otros dos elementos de la base se pueden visualizar de la siguiente forma. El vector  $\hat{e}_\varphi$  es el mismo que en el caso de cilíndricas, esto es el vector ortogonal a  $\hat{e}_\rho$  en sentido antihorario. Por otra parte, si consideramos el plano que determinan los vectores  $\vec{r}$  y  $\hat{k}$ , podemos pensar escribir  $\vec{r}$  en coordenadas polares en dicho plano lo cual automáticamente determina el vector  $\hat{e}_\theta$ . En este caso, el ángulo  $\theta$  crece del eje  $z$  al plano  $xy$ , hacia abajo, por lo cual la orientación

de  $\hat{e}_\theta$  será horaria. Estas especificaciones se muestran en la figura 2.1.4.

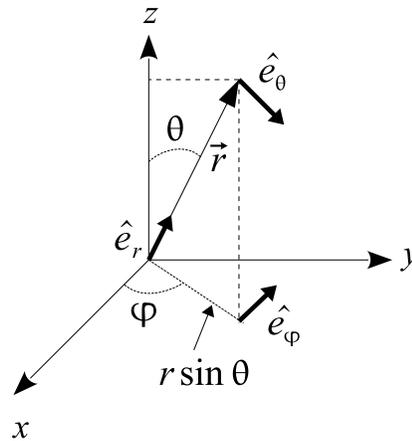


Figura 2.1.4: Sistema de coordenadas esféricas.

En esta sección se han presentado los sistemas de coordenadas más usuales de una forma intuitiva, sin embargo resta especificar la forma explícita de los vectores de las bases y las leyes de transformación. Éstas se enuncian en el Cuadro 2.1 a modo de resumen y su obtención se deja como problema. Por más que la deducción de las siguientes relaciones se encuentra en una gran cantidad de libros de texto y otras fuentes, es altamente recomendable que el lector haga el ejercicio de deducirlas de manera autónoma con el objeto de terminar de comprender y visualizar claramente estos sistemas antes de pasar a la generalización que se presentará en la siguiente sección.

	Coordenadas	Vectores Direccionales	Transformación
Cartesianas	$x, y, z$	$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	-
Polares planas	$r, \theta$	$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$
Cilíndricas	$\rho, \varphi, z$	$\hat{e}_\rho = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$ $\hat{k}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$
Esféricas	$r, \theta, \varphi$	$\hat{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$ $\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$ $\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$ $x = r \cos \varphi \sin \theta$ $y = r \sin \varphi \sin \theta$ $z = r \cos \theta$

Cuadro 2.1: Coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

**Problema 2.1.4.** *Obtenga las relaciones de la tabla anterior.*

**Problema 2.1.5.** *Escriba el vector  $\hat{i} - \hat{j}$  en coordenadas polares.*

**Problema 2.1.6.** *Escriba el vector  $\frac{\hat{i}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \hat{k}$  en coordenadas cilíndricas y esféricas.*

## 2.2. Dinámica de una partícula en coordenadas polares

Es válido preguntarse, si todas las representaciones de un punto son equivalentes, ¿cuál es entonces la relevancia de explorar diferentes sistemas? La respuesta a esta pregunta surge desde su mismo enunciado, al ser todas las representaciones equivalentes, uno es libre de escoger la que más le convenga para tratar un problema en particular. Resulta entonces que algunos sistemas simplifican el modelado de ciertos fenómenos y en muchas ocasiones son capaces de exhibir de forma más clara algunos aspectos cualitativos de problemas que en otros sistemas permanecen de alguna forma ocultos. Para ilustrar esto con un ejemplo sencillo, veremos la descripción de la dinámica de una partícula en coordenadas polares. El ejemplo se desarrollará en  $\mathbb{R}^2$  por simplicidad.

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en un plano  $xy$  bajo la influencia de un campo central. Un campo central consiste en un potencial  $\phi$  que depende de la posición

del objeto únicamente a través de la distancia del cuerpo a un punto fijo. Ejemplos de este tipo de campos son el campo gravitacional y el electrostático así como el correspondiente a un resorte, por mencionar algunos. Para el caso gravitacional y electrostático, el potencial tiene en general la forma

$$\phi = -\frac{k}{r}, \quad (2.2.1)$$

donde  $k$  es una constante y  $r$  la distancia al punto donde se encuentra la “fuente” del campo. Esto es, si tenemos dos masas puntuales, ubicaremos el origen en una de ellas, y recordando que  $\vec{F} = -\nabla\phi$  obtenemos

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{e}_r, \quad (2.2.2)$$

lo cual implica que la fuerza está dirigida hacia la partícula que estamos considerando como fuente, y es una fuerza atractiva que varía como el inverso del cuadrado de la distancia. Esto es bien sabido en el caso de la fuerza gravitacional. Si el caso electrostático es ajeno al lector, queda como tarea investigarlo. La interpretación en este último es análoga, con la salvedad de que en el caso de partículas cargadas la interacción puede ser atractiva (cargas opuestas) o repulsiva (cargas iguales). La figura 2.2.1 muestra esquemáticamente las disposiciones mencionadas y las fuerzas involucradas en cada caso.

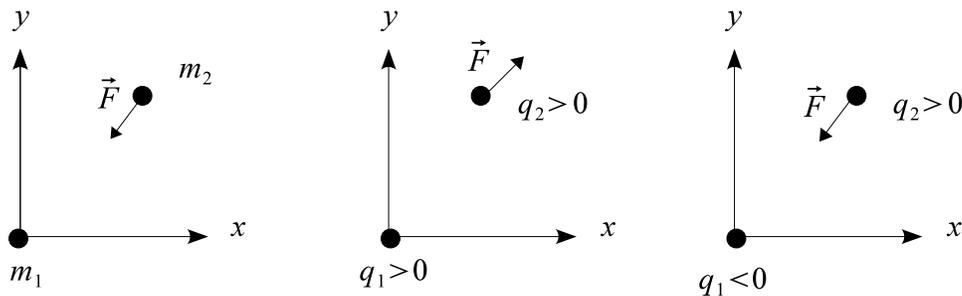


Figura 2.2.1: Fuerza gravitacional y electrostática.

El caso del resorte es particularmente ilustrativo, ya que es posible modelar la fuerza

basándose exclusivamente en la experiencia cotidiana. Piense que tiene un resorte fijo a un punto, donde pondremos el origen del sistema coordenado. Si el resorte no está comprimido ni estirado, tiene una longitud  $\ell_0$  que se llama longitud natural. Ahora piense que comprime el resorte, la distancia del extremo del resorte al origen será alguna  $r < \ell_0$  y sabemos que en ese caso, el resorte responderá con una fuerza que tiende a volver a estirarlo. También sabemos que cuanto más comprimido esté el resorte, mayor será la fuerza que se generará y que en el caso de que lo estiremos con  $r > \ell_0$  la reacción será exactamente opuesta. Considerando estas observaciones es claro que (ver figura 2.2.2)

$$\vec{F} = f(r) \hat{e}_r, \tag{2.2.3}$$

donde  $f(r)$  debe satisfacer lo siguiente

$$f(r) = 0 \quad \text{si } r = \ell_0,$$

$$f(r) > 0 \quad \text{si } r < \ell_0,$$

$$f(r) < 0 \quad \text{si } r > \ell_0,$$

$|f(r)|$  aumenta con  $|r - \ell_0|$ .

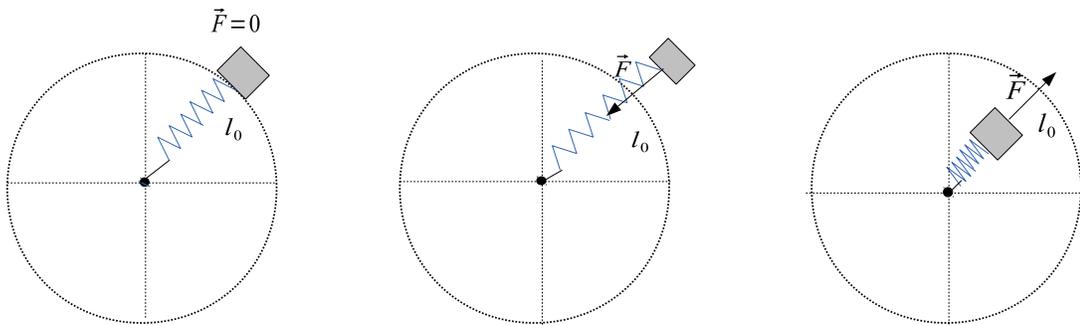


Figura 2.2.2: Fuerza elástica.

Claramente, una buena candidata es una función identidad, multiplicada por alguna constante. Se propone entonces como modelo

$$\vec{F} = -k(r - \ell_0) \hat{e}_r, \quad (2.2.4)$$

lo cual corresponde a un campo potencial

$$\phi = \frac{k}{2} (r - \ell_0)^2. \quad (2.2.5)$$

**Problema 2.2.1.** *Estudie, de preferencia en un texto de física básica en inglés, la validez de este modelo (llamado ley de Hooke).*

Consideremos ahora la dinámica de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central general del tipo

$$\vec{F} = f(r) \hat{e}_r, \quad (2.2.6)$$

que, como se verá más adelante, deriva de un potencial  $\phi$  que depende de la magnitud  $r$ . Si escribimos la ec. (1.3.1) con la fuerza dada en la ec. (2.2.6) y considerando masa constante tendremos, en coordenadas cartesianas, dos ecuaciones diferenciales, esto es

$$mx'' = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (2.2.7)$$

$$my'' = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (2.2.8)$$

que claramente constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas de segundo orden. Aquí  $x''$  significa derivada segunda con respecto al tiempo. Sin embargo, si escribimos la aceleración de la partícula en coordenadas polares como  $\vec{r}'' = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta$  tendremos

$$ma_r = f(r), \quad (2.2.9)$$

$$ma_\theta = 0, \quad (2.2.10)$$

que resulta mucho más claro y sencillo de resolver. Adicionalmente podremos obtener información sobre el tipo de movimiento que seguirá la partícula sin resolver el sistema, gracias a que estamos explotando la simetría del mismo, esto es, separando el problema en una parte radial y una angular. Para poder continuar, necesitamos las expresiones explícitas para  $a_r$  y  $a_\theta$ . Comencemos por escribir

$$\vec{r}'' = (r\hat{e}_r)'', \quad (2.2.11)$$

y notar que, como mencionamos anteriormente, los vectores unitarios en coordenadas polares dependen de la posición del punto a través del ángulo  $\theta$ . De esta forma, a medida que el punto se mueve sobre su trayectoria también lo hará  $\hat{e}_r$ , debido al cambio del ángulo  $\theta$ . Considerando  $\theta' \neq 0$  (recordemos que en este caso la prima indica derivada temporal), podemos encontrar  $\hat{e}_r'$  escribiéndolo en términos de los vectores fijos  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ . Realizando dicha operación para obtener la variación temporal de los dos elementos de la base se obtiene

$$\hat{e}_r' = \theta' \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_\theta' = -\theta' \hat{e}_r, \quad (2.2.12)$$

de forma tal que la velocidad y la aceleración en coordenadas polares planas están dadas por

$$\vec{r}' = r' \hat{e}_r + r\theta' \hat{e}_\theta, \quad (2.2.13)$$

$$\vec{r}'' = (r'' - r\theta'^2) \hat{e}_r + (r\theta'' + 2r'\theta') \hat{e}_\theta. \quad (2.2.14)$$

**Problema 2.2.2.** *Obtenga las ecuaciones (2.2.12)-(2.2.14).*

De las ecuaciones anteriores se pueden reconocer de inmediato la velocidad tangencial y la aceleraciones angular y radial. Nótese que estos conceptos, que frecuentemente en cursos básicos se introducen sin mayor justificación, surgen realmente de escribir la trayectoria en coordenadas polares. Ahora podemos escribir las ecuaciones de movimiento para la partícula

como

$$m(r'' - r\theta'^2) = f(r), \quad (2.2.15)$$

$$(r\theta'' + 2r'\theta') = 0. \quad (2.2.16)$$

De la segunda ecuación podemos deducir que la cantidad  $mr^2\theta'$  es constante ya que  $(r^2\theta')' = r(2r'\theta' + r\theta'') = 0$  y, por no variar a lo largo de la trayectoria, puede calcularse en cualquier punto de la misma. A dicha cantidad, llama momento angular, se le denota por  $\vec{L}$  y permite tener una relación entre la coordenada radial y la angular que se sostiene durante todo el movimiento. La simetría del problema es lo que ha permitido encontrar una cantidad constante. En física, a estas cantidades se les llama constantes de movimiento y son de suma utilidad. En este caso en particular, dicha simetría permite escribir la ec. (2.2.15) de la siguiente forma

$$mr'' - \frac{L^2}{mr^3} = f(r), \quad (2.2.17)$$

siendo ahora  $L$  una constante que depende de las condiciones iniciales. Este procedimiento desacopla el sistema dado que la ec. (2.2.17) es una ecuación diferencial para  $r$ . La misma puede resolverse para diferentes campos  $f(r)$ , dejaremos este ejercicio para los cursos de ecuaciones diferenciales o de física. De todas formas, antes de terminar con este ejemplo, es bueno resaltar que de la segunda Ley de Newton ( $\vec{F} = m\vec{r}''$ ) podemos obtener más información sin resolverla. Para ello, basta tomar el producto punto a ambos lados de la misma por  $\vec{r}'$  e integrar sobre la trayectoria de la partícula. Esto se llevará a cabo más adelante cuando se revisen las integrales de trayectoria.

**Problema 2.2.3.** *(Proyecto en equipo) Con la ayuda de libros de texto, resuelva el problema de las órbitas planetarias considerando como fuerza central la fuerza gravitacional. Para ello deberá obtener previamente la expresión para la aceleración en coordenadas polares esféricas y utilizar la simetría del problema para eliminar una de las variables y reducir el problema a uno en un plano. Debe llegar a la clasificación de órbitas según condiciones iniciales y de preferencia ejemplificar la dinámica realizando animaciones en un programa como Mathematica*

o Maple.

## 2.3. Coordenadas ortogonales generalizadas.

En esta parte estableceremos una generalización de los elementos vistos anteriormente para coordenadas curvilíneas. Por más que hablaremos de coordenadas generalizadas, nos estaremos refiriendo exclusivamente a coordenadas ortogonales.

Comenzaremos por reconocer que para especificar la posición de un punto en  $\mathbb{R}^n$  necesitamos  $n$  valores, llamados sus coordenadas, y la base en la cual está expresado. Tomemos entonces de forma general

$$q_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{coordenadas,}$$

$$\hat{e}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{vectores unitarios direccionales (base ortonormal),}$$

y supongamos que existe una transformación que permite relacionar las coordenadas  $q_i$  en términos de las variables cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ , esto es

$$q_i = q_i(x_1, \dots, x_n).$$

En las siguientes subsecciones se definirán algunos elementos necesarios para plantear el cálculo vectorial en estas coordenadas curvilíneas ortogonales y se verán algunos ejemplos.

### 2.3.1. Curvas coordenadas y vectores direccionales

Los vectores unitarios en el sistema planteado arriba, tienen como dirección aquella en la cual crece la coordenada correspondiente. Para encontrar dicha dirección, introducimos el concepto de curva coordenada. Para que sea más sencillo de visualizar y tomando en cuenta que la mayoría de las aplicaciones que manejaremos son en el espacio físico, consideraremos el

caso de  $\mathbb{R}^3$  en el cual tenemos tres coordenadas  $q_1(x, y, z)$ ,  $q_2(x, y, z)$  y  $q_3(x, y, z)$ . Las curvas sobre las cuales varía cada una de ellas se llaman curvas coordenadas y para encontrarlas primero consideraremos las superficies de coordenada constante. Esto es, la curva coordenada de  $q_1$  está dada por la intersección de las superficies de  $q_2$  y  $q_3$  constantes. Llamemos a estas curvas  $\gamma_i$  y a las superficies de coordenadas constantes  $\Gamma_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . En efecto, si por ejemplo tomamos la superficie  $\Gamma_1$  en la cual  $q_1$  es constante y únicamente varían las coordenadas  $q_2$  y  $q_3$  y la intersecamos con la superficie  $\Gamma_2$  en la que  $q_2$  es constante mientras que  $q_1$  y  $q_3$  varían, claramente obtenemos una curva en la que  $q_1$  y  $q_2$  son constantes y únicamente varía  $q_3$ , esto es  $\gamma_3$ . Ahora bien, los vectores unitarios deben ser tangentes a estas curvas ya que están en la dirección de crecimiento de la coordenada en cuestión. Adicionalmente dichos vectores son normales a la superficie de coordenada constante y deben ser unitarios de lo cual se desprende que están dados por

$$\hat{e}_i = \begin{cases} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} & \text{tangente a la curva coordenada } \gamma_i, \\ \left\| \nabla q_i \right\|^{-1} \nabla q_i & \text{normal a la superficie de } q_i \text{ constante.} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Las relaciones de la ec. (2.3.1) serán fundamentadas en el Capítulo 4, aunque deben resultar relativamente intuitivas para el lector con conocimientos de cálculo multivariable.

A continuación se muestran estas curvas y superficies para los sistemas descritos en las secciones anteriores.

- Coordenadas cartesianas:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$

$$\text{superficies de coordenada constante} \begin{cases} \Gamma_1 \text{ superficies con } x \text{ constante, planos } yz \\ \Gamma_2 \text{ superficies con } y \text{ constante, planos } xz \\ \Gamma_3 \text{ superficies con } z \text{ constante, planos } xy \end{cases}$$

$$\text{curvas coordenadas} \begin{cases} \gamma_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \text{ recta, eje } x \\ \gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3 \text{ recta, eje } y \\ \gamma_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \text{ recta, eje } z \end{cases}$$

$$\text{vectores direccionales} \begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{i} \\ \hat{e}_2 = \hat{j} \\ \hat{e}_3 = \hat{k} \end{cases}$$

donde para obtener los vectores direccionales se pueden utilizar cualquiera de las relaciones de la ec. (2.3.1). Por ejemplo, para  $\hat{e}_1$  tenemos

$$\hat{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right\|} = \hat{i}, \tag{2.3.2}$$

donde  $\vec{r}$  está dado por la ec. (2.1.2), o bien

$$\hat{e}_1 = \frac{\nabla x}{\|\nabla x\|} = \hat{i}. \tag{2.3.3}$$

En la figura 2.3.1 se muestran las curvas coordenadas y superficies de coordenada constante para este caso.

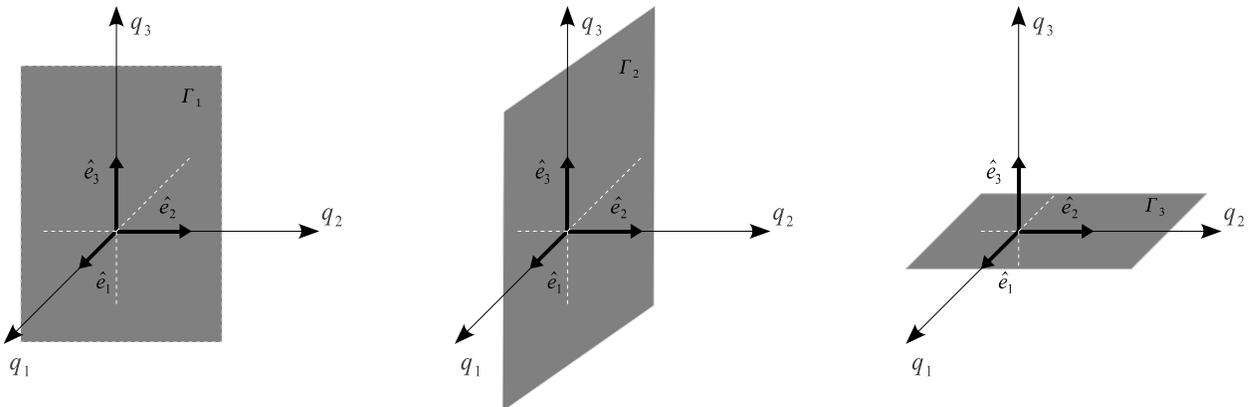


Figura 2.3.1: Curvas coordenadas y superficies de coordenada constante para coordenadas cartesianas.

- Coordenadas cilíndricas:  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = z$

$$\text{superficies de coordenada constante} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \text{ superficies con } \rho \text{ constante, caras laterales de cilindros} \\ \Gamma_2 \text{ superficies con } \theta \text{ constante, semiplanos oblicuos} \\ \Gamma_3 \text{ superficies con } z \text{ constante, semiplanos ortogonales al eje } z \end{array} \right.$$

$$\text{curvas coordenadas} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \text{ semirectas} \\ \gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3 \text{ círculos paralelos al plano } xy \\ \gamma_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \text{ rectas perpendiculares al plano } xy \end{array} \right.$$

$$\text{vectores direccionales} \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{e}_3 = \hat{k} \end{array} \right.$$

donde para obtener los vectores direccionales hemos usado las ecuaciones del Cuadro 2.1, por ejemplo

$$\hat{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \rho} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \hat{k}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \rho} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \hat{k} \right\|} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (2.3.4)$$

o bien

$$\hat{e}_1 = \frac{\nabla \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\left\| \nabla \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\|} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}. \quad (2.3.5)$$

Estos elementos se muestran en la figura 2.3.2.

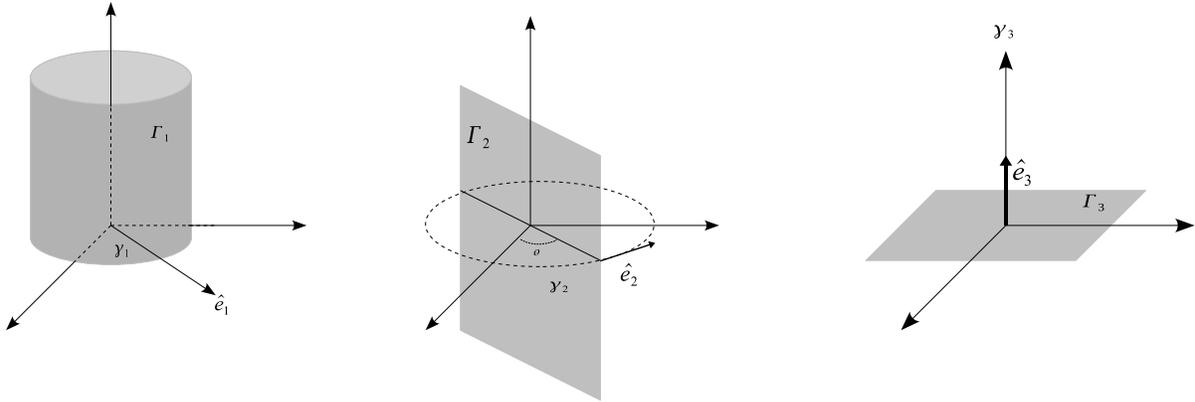


Figura 2.3.2: Curvas coordenadas y superficies de coordenada constante para coordenadas cilíndricas.

- Coordenadas esféricas:  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$

$$\text{superficies de coordenada constante} \begin{cases} \Gamma_1 \text{ superficies con } r \text{ constante, esferas} \\ \Gamma_2 \text{ superficies con } \theta \text{ constante, medios conos} \\ \Gamma_3 \text{ superficies con } \varphi \text{ constante, planos oblicuos} \end{cases}$$

$$\text{curvas coordenadas} \begin{cases} \gamma_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \text{ semirecta} \\ \gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3 \text{ arcos} \\ \gamma_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \text{ circunferencias} \end{cases}$$

$$\text{vectores direccionales} \begin{cases} \hat{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \end{cases}$$

Una vez más, ejemplificamos la obtención de uno de los vectores direccionales:

$$\hat{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \hat{k}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial r} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \hat{k} \right\|} = \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \quad (2.3.6)$$

donde se ha usado la expresión para  $x(r, \theta, \varphi)$  del Cuadro 2.1. Alternativamente,

$$\hat{e}_1 = \frac{\nabla \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\left\| \nabla \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right\|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \varphi \sin \theta \hat{i} + \sin \varphi \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}. \quad (2.3.7)$$

La figura 2.3.3 muestra esquemáticamente las superficies de coordenada constante y las curvas coordenadas para este caso.

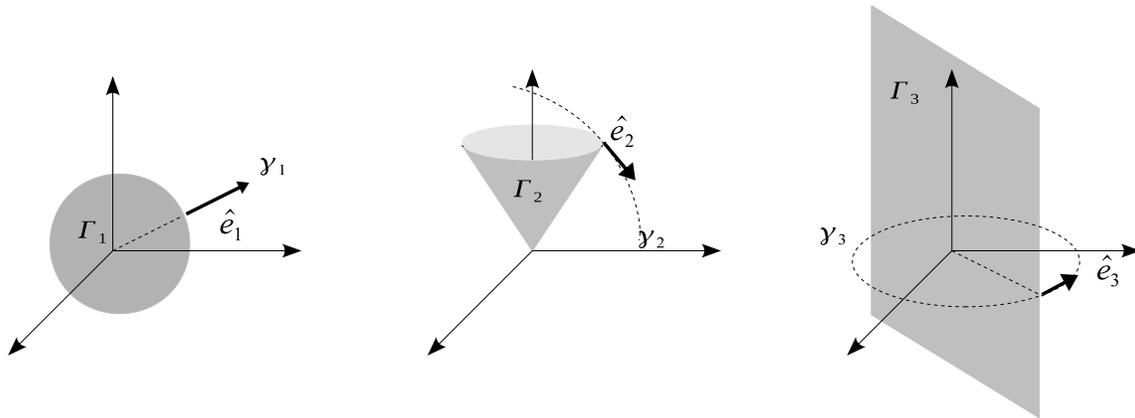


Figura 2.3.3: Curvas coordenadas y superficies de coordenada constante para coordenadas esféricas.

Tenemos entonces que podemos describir puntos en el espacio, o en general en  $\mathbb{R}^n$ , en términos de variables  $q_i$ . Con el procedimiento descrito podemos encontrar las curvas coordenadas así como los vectores unitarios direccionales. Claramente, las coordenadas son ortogonales cuando sus vectores direccionales lo son. Se puede verificar que esta condición se cumple para los sistemas descritos arriba. Estos elementos se retomarán más adelante para la obtención de operadores diferenciales así como elementos de línea, área y volumen en coordenadas curvilíneas y generalizadas.

**Problema 2.3.1.** *Pruebe que las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas son ortogonales.*

**Problema 2.3.2.** *Explore otros sistemas de coordenadas curvilíneas, como por ejemplo elípticas o hiperbólicas. Encuentre curvas coordenadas y vectores unitarios. Investigue algunas aplicaciones.*

### 2.3.2. Los coeficientes métricos y los elementos de línea, superficie y volumen

Una pregunta que surge naturalmente, es cómo medir distancias en estos sistemas. Claramente no se podrá aplicar el teorema de Pitágoras usando como longitudes las variables, como se hace en el caso cartesiano donde

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3.8)$$

Aquí  $ds$  es el elemento de longitud y llamaremos  $d\vec{s}$  al vector de desplazamiento diferencial dado por

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}, \quad (2.3.9)$$

cuya norma es  $ds$ . Lo que nos interesa es ver cómo escribir  $ds$  en coordenadas generalizadas. Para ello partimos de un principio simple que es la invariancia del elemento de línea. Independientemente de cómo midamos, la distancia entre dos puntos debe ser la misma. Por ello proponemos

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}dq_i dq_j, \quad (2.3.10)$$

donde hemos supuesto una forma bilineal con ciertos coeficientes  $g_{ij}$  que deberán ser determinados usando que  $x$ ,  $y$  y  $z$  son funciones de  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ . Realizando las operaciones correspondientes e igualando términos en  $dq_i dq_j$  se puede mostrar que

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right), \quad (2.3.11)$$

donde  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ .

**Problema 2.3.3.** *Obtenga la ec. (2.3.11).*

Observe que los coeficientes  $g_{ij}$  pueden ser escritos como

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}. \quad (2.3.12)$$

Estos coeficientes se llaman coeficientes métricos y usualmente se expresan ya sea de forma matricial

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.3.13)$$

o a través del elemento de línea

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j. \quad (2.3.14)$$

Nótese que los coeficientes  $g_{ij}$  son justamente los productos escalares de los vectores tangentes a las curvas coordenadas. De hecho, de la ec. (2.3.12) vemos que cada  $g_{ij}$  es proporcional a los vectores direccionales correspondientes a las coordenadas  $q_i$  y  $q_j$ . Por ello, si consideramos coordenadas ortogonales, los vectores direccionales  $\hat{e}_i$  son ortogonales y entonces  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Únicamente los coeficientes  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  y  $g_{33}$  son distintos de cero, lo que da origen a una métrica diagonal y se tiene

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.3.15)$$

o

$$ds^2 = g_{11}dq_1^2 + g_{22}dq_2^2 + g_{33}dq_3^2. \quad (2.3.16)$$

Como  $g_{ii} > 0$ , se definen los factores de escala como

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}, \quad (2.3.17)$$

de forma tal que

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2, \quad (2.3.18)$$

de donde podemos escribir

$$d\vec{s} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3. \quad (2.3.19)$$

**Problema 2.3.4.** *Considere las coordenadas cilíndricas parabólicas en  $\mathbb{R}^3$  dadas por la transformación*

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

$$y = uv,$$

$$z = z.$$

- a) *Muestre que las superficies de coordenada constante son cilindros parabólicos para el caso de las coordenadas  $u$  y  $v$  mientras que la correspondiente a la coordenada  $z$  es un plano.*
- b) *Grafique algunas de estas superficies utilizando el software de su preferencia.*
- c) *Describa las curvas coordenadas y encuentre explícitamente los vectores unitarios direccionales.*
- d) *Muestre que este sistema es ortogonal y escriba la métrica correspondiente.*

**Problema 2.3.5.** *Considere que  $q_2$  y  $q_3$  son constantes en la expresión (2.3.18). En este caso, tendremos que para la curva coordenada  $\gamma_1$ , el diferencial de longitud es  $ds = h_1 dq_1$ . Escriba con sus palabras, la interpretación que puede dársele a la cantidad  $h_1$  en esta expresión.*

La interpretación de las ecuaciones anteriores es interesante. La ec. (2.3.18) implica que podemos medir distancias en las coordenadas curvilíneas ortogonales de la misma forma que en cartesianas, siempre y cuando escalemos las variables. Esto es, podemos utilizar el teorema de Pitágoras pero las distancias sobre una curva coordenada se escala a  $h_i dq_i$ . Por otro lado, la ec. (2.3.19) nos dice cómo realizar desplazamientos diferenciales en estas nuevas

coordenadas. Es necesario tener muy presente que los factores métricos dependen del punto y por lo tanto lo que se tiene es un sistema ortogonal en cada punto donde podremos trabajar como si fuesen coordenadas rectangulares, siempre y cuando se incluyan los factores de escala de forma apropiada. Con esto en mente, y apoyándonos en la ec. (2.3.19) podemos establecer las expresiones generales para el elemento de superficie y el de volumen en este tipo de coordenadas como sigue

$$d\vec{S} = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \hat{e}_1 + h_1 h_3 dq_1 dq_3 \hat{e}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{e}_3, \quad (2.3.20)$$

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.3.21)$$

**Problema 2.3.6.** Encuentre los factores de escala y escriba explícitamente el elemento de longitud, superficie y volumen para coordenadas cilíndricas y esféricas.

## 2.4. Operaciones básicas con vectores

En el capítulo anterior se introdujeron de manera formal las operaciones suma, producto por escalar y producto interno para vectores. En esta parte se considerarán exclusivamente elementos de  $\mathbb{R}^3$  y se desarrollarán algunas propiedades de los mismos a nivel operacional, introduciendo un tercer producto que es ajeno a la estructura de espacio vectorial.

### 2.4.1. Suma y producto por escalar

Como se estableció antes, tenemos que si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son vectores con

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \hat{e}_i, \quad (2.4.1)$$

en la base cartesiana, las operaciones suma y producto por escalar están dadas por

$$\vec{A} + \vec{B} = \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i) \hat{e}_i, \quad (2.4.2)$$

$$\alpha \vec{A} = \sum_{i=1}^3 (\alpha A_i) \hat{e}_i. \quad (2.4.3)$$

Adicionalmente, la existencia del opuesto nos permite definir una operación resta, entendida como la suma del opuesto,

$$\vec{A} - \vec{B} \equiv \vec{A} + (-\vec{B}) = \sum_{i=1}^3 (A_i - B_i) \hat{e}_i. \quad (2.4.4)$$

La figura 2.4.1 muestra esquemáticamente la interpretación geométrica de estas operaciones.

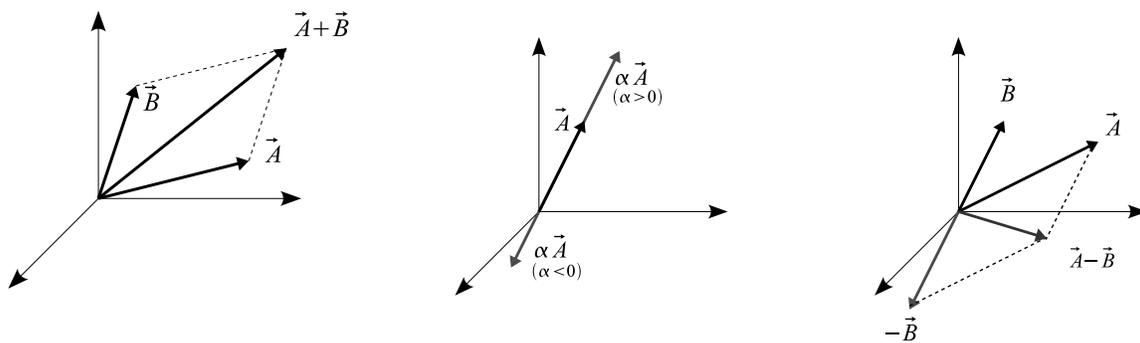


Figura 2.4.1: Operaciones básicas vectoriales.

**Problema 2.4.1.** *Considere dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  y muestre la validez de la regla del paralelogramo para la suma de vectores. También muestre que la interpretación geométrica del producto por un real como un escalamiento es válida.*

### 2.4.2. Producto interior

El producto interior, o producto punto, automáticamente define una métrica para espacio en cuestión. Esto es, al definir a través de él una norma, el producto interior nos dice cómo se miden las magnitudes en el espacio. Por ello, este producto depende del espacio mismo a través de su métrica, un concepto que se introducirá más adelante. Aquí, teniendo  $\mathbb{R}^3$  en mente, el producto interior es sencillamente

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i, \quad (2.4.5)$$

y satisface los axiomas de la Sección 1.1, esto es

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A}, \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}, \\ \alpha \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\alpha \vec{A}) \cdot \vec{B}, \\ \vec{A} \cdot \vec{A} &> 0 \quad \text{si } \vec{A} \neq \vec{0}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Se define la norma de un vector no nulo como

$$\|\vec{A}\| \equiv A = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (A_i)^2}, \quad (2.4.7)$$

y en este sentido es que el producto punto introduce una forma de medir, ya que claramente  $A$  es la longitud del segmento que va del origen al punto con coordenadas  $A_i$ . Ahora bien, ya vimos en el Capítulo 1 que el producto interno nos permite definir ángulos a partir de

$$\cos \theta = \frac{\vec{A}}{A} \cdot \hat{i}, \quad (2.4.8)$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje  $x$ . De la misma forma podemos definir el ángulo que forma con el eje  $y$  como

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \hat{j}}{A}, \quad (2.4.9)$$

y análogamente para el ángulo con el eje  $z$ . La generalización a  $n$  dimensiones es directa y se definen los llamados cosenos directores como

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{A} \cdot \hat{e}_i}{A}, \quad (2.4.10)$$

o

$$\cos \theta_i = \hat{A} \cdot \hat{e}_i, \quad (2.4.11)$$

donde definimos, en general,  $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  para cualquier vector  $\vec{u}$ , lo cual corresponde a un vector que tiene la misma dirección que  $\vec{u}$  pero su norma es 1. A los vectores con norma igual a uno se les llama unitarios. Obsérvese que, utilizando el concepto de coseno director podemos escribir

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^n A \cos \theta_i \hat{e}_i, \quad (2.4.12)$$

lo cual nos permite expresar un vector en términos de su magnitud y los ángulos que forma con cada uno de los elementos de la base. En particular, para elementos de  $\mathbb{R}^3$  se obtiene la expresión

$$\vec{A} = A \left( \cos \theta_1 \hat{i} + \cos \theta_2 \hat{j} + \cos \theta_3 \hat{k} \right), \quad (2.4.13)$$

note que el vector  $\cos \theta_1 \hat{i} + \cos \theta_2 \hat{j} + \cos \theta_3 \hat{k}$  tiene norma 1.

**Problema 2.4.2.** *Obtenga la ec. (2.4.12).*

Resta aún expresar, utilizando este producto, el ángulo entre dos vectores cualesquiera  $\vec{A}$

y  $\vec{B}$ . Para ello, consideremos por simplicidad elementos de  $\mathbb{R}^2$  y sean

$$\alpha = \hat{A} \cdot \hat{i} \quad \beta = \hat{B} \cdot \hat{i}, \quad (2.4.14)$$

los ángulos que forman dichos vectores con el eje  $x$  y  $\theta = \beta - \alpha$  el ángulo entre ellos (ver figura 2.4.2).

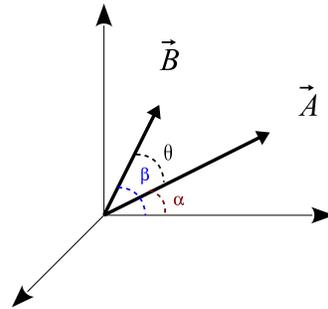


Figura 2.4.2: Ángulos formados por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en la ec. (2.4.15)

Tenemos entonces que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 = AB (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = AB \cos \theta, \quad (2.4.15)$$

de donde definimos el ángulo entre dos vectores como

$$\theta_{AB} = \arccos \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \right) = \arccos (\hat{A} \cdot \hat{B}), \quad (2.4.16)$$

y se sigue que si el producto punto es cero, los vectores son ortogonales. Para vectores no ortogonales, el ángulo varía como se muestra en la figura 2.4.3

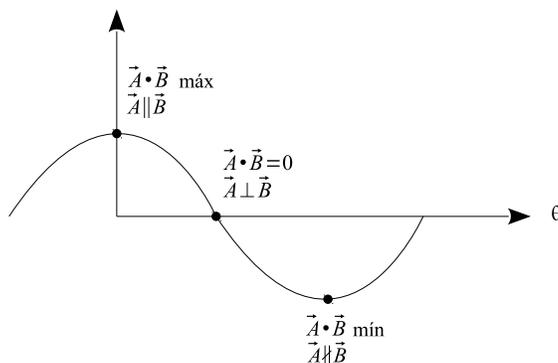


Figura 2.4.3: Producto escalar entre dos vectores como función del ángulo que subtienden.

Una operación derivada directamente del producto punto es la de proyección. Esta busca encontrar las componentes de un vector en alguna dirección, es decir interesa ver qué tanto de un vector se encuentra en la misma dirección de otro y se puede pensar, para facilitar la visualización, como la “sombra” que hace el vector  $\vec{A}$  en la dirección  $\hat{B}$ . Para ello, consideremos los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  como en la figura 2.4.4 y busquemos el valor de  $t$ , al cual llamaremos proyección de  $\vec{A}$  en  $\vec{B}$ .

**Problema 2.4.3.** Considere que  $\vec{f}$  es cierta propiedad de un fluido en movimiento. Explique con sus palabras por qué el producto  $\vec{f} \cdot \hat{n} d\vec{S}$  representa el flujo de dicha propiedad a través del elemento de área  $d\vec{S}$  cuando  $\hat{n}$  es el vector unitario normal al mismo.

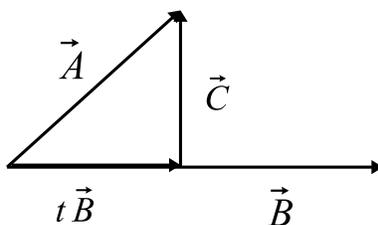


Figura 2.4.4: Proyección de  $\vec{A}$  en la dirección  $\vec{B}$ .

Dado entonces que

$$\vec{C} = \vec{A} - t\vec{B}, \tag{2.4.17}$$

y tomando el producto punto con  $\vec{B}$  a ambos lados, podemos obtener para la proyección

$$t = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B^2}, \quad (2.4.18)$$

que es justamente la fracción de  $\vec{A}$  que “cae” sobre  $\vec{B}$ . Nótese que este escalar puede ser negativo, con la misma interpretación ilustrada en la figura 2.4.1.

### 2.4.3. Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz es, como mencionamos al principio de esta sección, ajeno a la estructura de espacio vectorial y solamente tiene sentido en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que en esta sección nos restringimos a  $\mathbb{R}^3$ . Es una operación entre dos vectores cuyo resultado vuelve es un tercer vector perpendicular a ellos. Para introducir dicho producto, comenzaremos por pensar en los vectores unitarios direccionales cartesianos como una terna ordenada. Esto es, sabemos que dadas las direcciones  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , automáticamente queda determinada la dirección “positiva” de  $\hat{k}$ . En cursos anteriores, en particular en cursos de física, pueden haberle enseñado la “regla de la mano izquierda” en la cual si se considera un primer vector en la dirección del dedo medio y un segundo en la del índice, la dirección del pulgar será la perpendicular positiva a ellos. Es claro que el orden es importante y que si invertimos el orden, la dirección se invierte. Esto lo podemos resumir en

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad (2.4.19)$$

y de forma similar, simplemente intercambiando los vectores pero teniendo en cuenta el orden, se puede ver que

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}, \quad (2.4.20)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}. \quad (2.4.21)$$

Ahora, extrapolaremos este concepto a vectores generales usando las siguientes propiedades del producto vectorial

$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}, \quad (2.4.22)$$

$$\vec{A} \times (\alpha \vec{B}) = \alpha (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (2.4.23)$$

**Problema 2.4.4.** Demuestre que, en un sistema cartesiano tridimensional, si  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , entonces las coordenadas del vector  $\vec{C}$  están dadas por  $C_i = A_j B_k - A_k B_j$  si  $i, j, k$  son una permutación cíclica de 1, 2, 3 (véase la figura 2.4.5). Para esto utilice la linealidad del producto vectorial así como las ecs. (2.4.19)-(2.4.21).

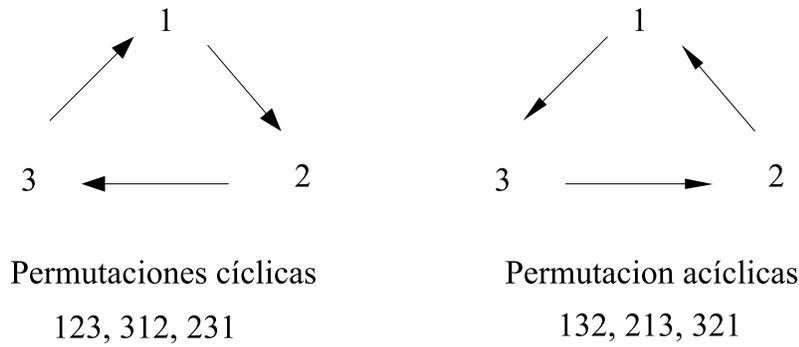


Figura 2.4.5: Permutaciones de los números 1, 2, 3.

Derivado del problema anterior, vemos que el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , en términos de las componentes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  está dado por

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{k}, \quad (2.4.24)$$

lo cual puede ser escrito, utilizando notación de determinantes, como

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \hat{k}. \quad (2.4.25)$$

La ecuación anterior motiva la siguiente *notación*

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (2.4.26)$$

Nótese que la expresión anterior realmente no es matemáticamente correcta, sin embargo es particularmente útil operativamente.

Una vez definido este tipo de producto, exploraremos sus propiedades. Primeramente observemos que el producto cruz entre dos vectores cualesquiera (no nulos) es perpendicular a ambos. Esto se puede verificar sencillamente calculando

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_1(A_2B_3 - A_3B_2) + A_2(A_3B_1 - A_1B_3) + A_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0, \quad (2.4.27)$$

y de forma análoga se puede ver que  $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ . En general esto implica que, dado que  $\vec{A} \neq \vec{0}$  y  $\vec{B} \neq \vec{0}$ , el coseno del ángulo que subtienden  $\vec{A}$  y  $\vec{A} \times \vec{B}$  (e igualmente  $\vec{B}$  y  $\vec{A} \times \vec{B}$ ) se anula y efectivamente los vectores son ortogonales. Teniendo ya la dirección del producto cruz, calculamos su magnitud, la cual está dada por

$$\begin{aligned} \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 &= (A_2B_3 - A_3B_2)^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2 \\ &= A_1^2(B_2^2 + B_3^2) + A_2^2(B_1^2 + B_3^2) + A_3^2(B_1^2 + B_2^2) \\ &\quad - 2(A_1A_2B_1B_2 + A_2A_3B_2B_3 + A_1A_3B_1B_3). \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Usando que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$  y por lo tanto

$$(AB \cos \theta)^2 = A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 + A_3^2B_3^2 + 2(A_1A_2B_1B_2 + A_2A_3B_2B_3 + A_1A_3B_1B_3), \quad (2.4.29)$$

se obtiene, sustituyendo en la ec. (2.4.28), que

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta), \quad (2.4.30)$$

de donde  $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta$ . De este resultado podemos ver que el producto cruz de vectores paralelos (o antiparalelos) es el vector nulo. Para vectores no paralelos, la dirección del producto cruz siempre es ortogonal al plano formado por los dos vectores y su magnitud aumenta con el ángulo que subtienden siendo máxima para  $\theta = \pi/2$ , como puede verse en la figura 2.4.6.

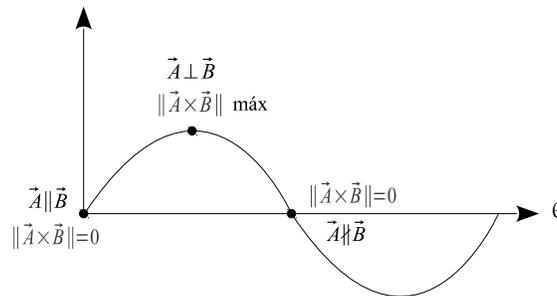


Figura 2.4.6: Magnitud del producto vectorial entre dos vectores como función del ángulo que subtienden.

Una implicación importante del resultado anterior es que la magnitud del producto cruz corresponde con el área del paralelogramo formado a partir de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Esto es de suma utilidad para establecer el elemento de área sobre superficies. Por ello, se caracteriza el área diferencial sobre la superficie a través de un vector perpendicular al plano que forman dos vectores tangentes (no necesariamente ortogonales) y cuya magnitud es justamente el área del paralelogramo que forman. Es así como el producto cruz aparece en las integrales de superficie que se pueden haber visto ya en cursos de cálculo multivariable y que serán estudiadas con cierto detalle en el próximo capítulo.

**Problema 2.4.5.** Desarrollar una animación en un programa como Mathematica en la cual,

variando el ángulo entre dos vectores se muestren los mismos así como su producto cruz. La norma de los vectores se pueden tomar unitarias.

El producto cruz satisface las siguientes identidades

$$a) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B},$$

$$b) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}),$$

$$c) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot (\vec{A} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot (\vec{B} \times \vec{D}) = 0,$$

$$d) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

$$e) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0,$$

$$f) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C}(\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{D}) - \vec{D}(\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{D} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{C} \times \vec{D} \cdot \vec{B}).$$

# Capítulo 3

## Cálculo diferencial e integral vectorial

El objetivo de esta sección es recordar los principales elementos del cálculo diferencial e integral para campos escalares e introducir los operadores diferenciales y las integrales relevantes para el caso de campos vectoriales. En la primera parte se motivan y definen los operadores diferenciales en coordenadas cartesianas. En la segunda parte se recuerdan las integrales de trayectoria, superficie y volumen ya vistas en cursos de cálculo multivariable y se generalizan a campos vectoriales introduciendo los conceptos de circulación y flujo.

### 3.1. Elementos de cálculo diferencial vectorial: operadores diferenciales

Los operadores diferenciales principales que actúan sobre campos son tres. El gradiente ya es conocido para la mayoría de los estudiantes por cursos de cálculo multivariable. Éste actúa sobre campos escalares y es crucial para poder hablar de diferenciabilidad en el caso de dichos objetos. Más aún, la diferencial, que es la cantidad que viene a reemplazar la derivada para funciones multivariadas en el sentido de que cuantifica de manera global el cambio en el campo, está estrechamente ligada con el concepto de gradiente. Por ello, introduciremos el mismo desde un punto de vista un poco más formal retomando elementos de cálculo

multivariable.

Los otros dos operadores que definiremos son la divergencia y el rotacional. Ellos actúan sobre campos vectoriales y son usados mayormente en el modelado de problemas físicos. Sin embargo, su relevancia desde el punto de vista de las matemáticas es indiscutible ya que es en términos de ellos que se establecen algunas relaciones entre derivadas e integrales similares a la del teorema fundamental del cálculo. En este texto, los motivaremos a partir de situaciones físicas que seguiremos citando como aplicaciones a lo largo del mismo.

### 3.1.1. Gradiente

El concepto de derivada para funciones en  $\mathbb{R}$ , así como el de derivabilidad (o diferenciabilidad) no son sencillamente generalizados a campos escalares. Recuérdesse que en el caso de funciones de varias variables se introduce el concepto de diferencial, que naturalmente motiva el primer operador diferencial que definiremos en esta sección: el gradiente.

Un campo  $f$  que toma valores en  $\mathbb{R}$  y cuyo dominio  $V$  está contenido en  $\mathbb{R}^n$  se dice diferenciable en un punto  $\vec{r}_0$  (con coordenadas  $x_{0i}$ ) del interior de  $V$  (estando  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}$  en  $V$ ), si existe una transformación lineal  $T_{\vec{r}_0}$  y una bola  $\varepsilon(\vec{r}_0; v)$  con centro en  $\vec{r}_0$  y radio  $v$  tales que

$$f(\vec{r}_0 + \vec{v}) - f(\vec{r}_0) = T_{\vec{r}_0}(\vec{v}) + v\varepsilon(\vec{r}_0; v), \quad (3.1.1)$$

con  $\lim_{v \rightarrow 0} \varepsilon(\vec{r}_0; v) = 0$ . La ec. (3.1.1) motiva la definición de gradiente de  $f$  en  $\vec{r}_0$ , dada por

$$T_{\vec{r}_0}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}_0} (x_i - x_{0i}), \quad (3.1.2)$$

(se puede consultar un texto estándar de cálculo de varias variables para recordar la prueba de la relación anterior). La operación del lado derecho se puede escribir en términos de un producto interno si se define el gradiente de  $f$  como

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i, \quad (3.1.3)$$

y por lo tanto tenemos

$$T_{\vec{r}_0}(\vec{v}) = \nabla f|_{\vec{r}_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (3.1.4)$$

Con estas definiciones uno puede escribir la variación de un campo escalar como

$$f(\vec{r}_0 + \vec{v}) - f(\vec{r}_0) \sim \nabla f|_{\vec{r}_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.1.5)$$

y se introduce el diferencial como

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}, \quad (3.1.6)$$

donde  $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  es el elemento de línea. La diferencial es una función de varias variables capaz que cuantificar de forma global la variación de un campo escalar tomando en cuenta las variaciones en todas las direcciones.

Otro resultado importante que se puede establecer a partir de estos conceptos es el de la derivada de un campo sobre una trayectoria. Suponga que se tiene  $f(\vec{r})$ , donde  $\vec{r}$  varía sobre una curva parametrizada. Si llamamos  $t$  al parámetro correspondiente y utilizando la regla de la cadena se puede obtener

$$\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \nabla f \cdot \vec{r}'(t). \quad (3.1.7)$$

**Problema 3.1.1.** *Demuestre que el resultado anterior es válido. Debe suponer que tanto  $f$  como las componentes de  $\vec{r}(t)$  son diferenciables sobre la curva.*

**Problema 3.1.2.** *Considere el campo  $f(\vec{r}) = x^3y - z + 3$ . (a) Encuentre la diferencial  $df$ . (b) Calcule  $\frac{df}{dt}$  en  $t = \frac{\pi}{2}$  sobre la hélice de radio 3 y paso  $2\pi$ .*

Con respecto a las propiedades geométricas del gradiente, analizaremos su dirección con respecto a los conjuntos de nivel del campo. Consideremos un conjunto de nivel  $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{r}) = c\}$  y dos puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  pertenecientes al mismo. La diferencial para un desplazamiento sobre el conjunto cuyos extremos sean dichos puntos es nula, por tener  $f$  el

mismo valor en ellos. Esto es

$$\nabla f \cdot d\vec{r} = 0, \quad (3.1.8)$$

y dado que la ecuación se sostiene para puntos y desplazamientos arbitrarios, podemos concluir que en cada punto de un conjunto de nivel, el gradiente del campo es perpendicular al mismo (véase la figura 3.1.1 ).

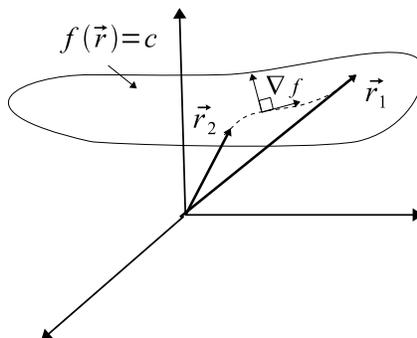


Figura 3.1.1: El gradiente es perpendicular al conjunto de nivel en cada punto.

Consideremos ahora dos conjuntos de nivel, correspondientes a valores  $c_1$  y  $c_2$  del campo y un punto en cada uno de ellos,  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente. La diferencial de  $f$  en un desplazamiento  $d\vec{r}$  entre ambos puntos siempre valdrá  $\nabla f \cdot d\vec{r}$ . Por lo tanto,  $df$  aumentará a medida que el ángulo entre  $d\vec{r}$  y el gradiente disminuya y alcanzará su valor máximo cuando sean paralelos. En este sentido, se observa que la dirección del gradiente es la que provoca un mayor crecimiento (o decrecimiento) del campo  $f$  (véase la figura 3.1.2).

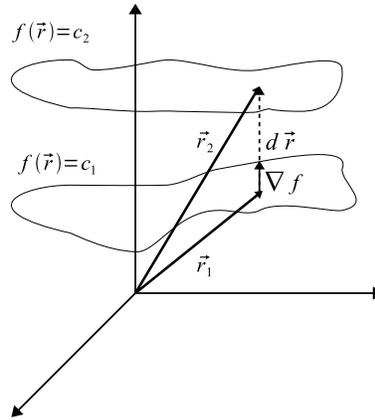


Figura 3.1.2: La dirección del gradiente en cada punto es la que provoca una variación mayor del campo.

Para entender esta propiedad, pensemos que estamos ubicados en cierta superficie, que es un conjunto de nivel, y tenemos derecho a dar un paso de tamaño fijo en cualquier dirección. Tenemos a nuestro alcance muchas otras superficies de nivel, pero si queremos llegar a la que corresponde a un nivel  $c$  mayor, debemos desplazarnos en la dirección del gradiente en el punto en el que estamos. Esto se debe a que tanto el gradiente en el punto como la norma de  $d\vec{r}$  son fijas y lo único que varía en el diferencial es el ángulo entre  $d\vec{r}$  y  $\nabla f$ . Si damos el paso en la dirección ortogonal al gradiente, nos estaremos moviendo sobre la superficie y no cambiaremos de nivel. Cualquier otro desplazamiento nos llevará a un cambio de nivel  $\Delta c = |\nabla f| |d\vec{r}| \cos \theta$  que será máximo para  $\theta = 0$ . De esta manera queda determinada la dirección que llevará a un cambio de nivel máximo, para un desplazamiento de longitud fija desde cualquier punto sobre una superficie de nivel.

En la figura 3.1.3. se muestra la gráfica de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (izquierda), a la derecha su conjunto de nivel junto con el gradiente de  $f$ . A lo largo del eje horizontal ( $f(x, 0) = x^2$ ), tenemos que el valor de  $f$  crece conforme nos alejamos del origen, las flechas que representan el gradiente apuntan en la misma dirección. Por otra parte, si nos movemos a lo largo del eje  $y$  ( $f(0, y) = -y^2$ ), alejándonos del origen,  $f$  decrece y en esta ocasión la dirección de las flechas es opuesta.

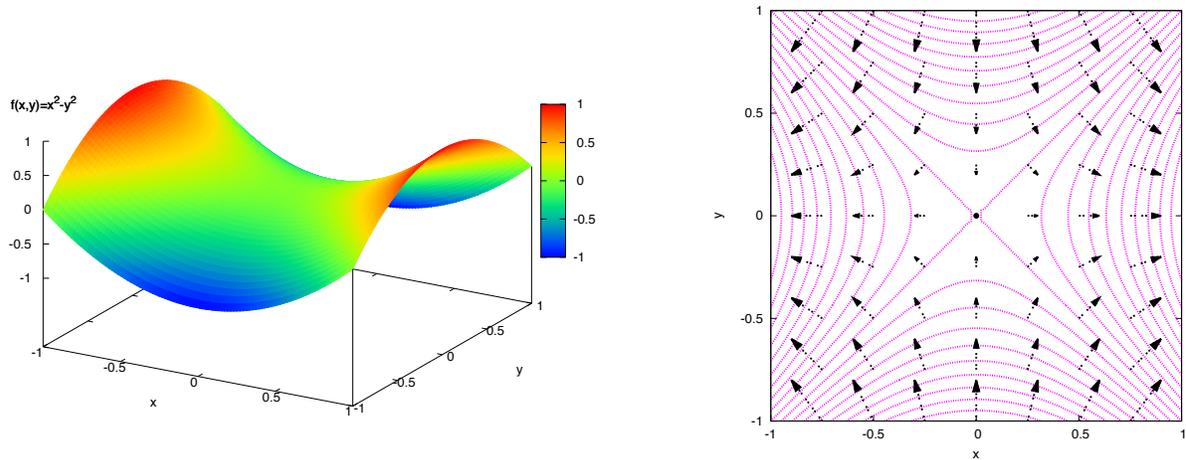


Figura 3.1.3: En el lado izquierdo la gráfica de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , del lado derecho el conjunto de nivel y el gradiente de  $f$ .

Este es un buen punto para regresar al concepto de vector unitario direccional, que se manejó para coordenadas curvilíneas, y esclarecer ahora la segunda parte de la ec. (2.3.1), esto es

$$\hat{e}_i = \frac{\nabla q_i}{\|\nabla q_i\|}. \quad (3.1.9)$$

Recordemos que  $\hat{e}_i$  es un vector ortogonal a la superficie de  $q_i$  constante y da la dirección en la cual varía únicamente  $q_i$  (aumenta) mientras el resto de las coordenadas se mantienen constantes. Esto coincide claramente con las dos propiedades geométricas del gradiente que se mencionaron arriba. Si consideramos por ejemplo la superficie de coordenada constante  $q_i$  como el conjunto de nivel

$$\Gamma = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 : q_1 = 1\}, \quad (3.1.10)$$

tenemos que  $f(q_1, q_2, q_3) = q_1$  y por lo tanto  $\nabla q_1$  es ortogonal a la superficie  $\Gamma$  y a su vez tiene la dirección en la cual  $q_1$  aumenta dejando constantes  $q_2$  y  $q_3$ . Recordemos que al ser las coordenadas ortogonales, la dirección de máximo crecimiento de  $q_1$  es aquella en la que  $q_2$  y  $q_3$  no varían. Para obtener la ec. (3.1.9) sólo basta recordar que los vectores direccionales deben ser unitarios por lo cual se normaliza dividiendo entre la norma del mismo.

**Problema 3.1.3.** Encuentre un vector normal a la superficie  $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$  en el

punto  $(1, -1, 2)$ .

**Problema 3.1.4.** *Suponga que la altura de un pico está dada por  $z = 6 - x^2 - 2y^2$  y una persona se encuentra en su base, en el punto  $(2, 1, 0)$ . Siga los siguientes incisos para obtener la curva sobre la cual el alpinista debe escalar para llegar a la cima de forma más rápida.*

a) *Muestre que en cada punto  $(x, y, z)$  del pico, la dirección sobre el mismo en la cual hay un máximo aumento de la coordenada  $z$  es  $-2x\hat{i} - 4y\hat{j}$ . Realice un diagrama de la superficie (pico) en  $\mathbb{R}^3$  así como de las curvas de nivel en el plano  $xy$ . Muestre sobre el diagrama la dirección de máxima inclinación.*

b) *La trayectoria óptima para el alpinista, en el plano  $xy$ , estará entonces dada por la curva  $y(x)$  cuya tangente en cada punto tenga la dirección  $-2x\hat{i} - 4y\hat{j}$ . Usando esta información, obtenga una relación  $y(x)$  para dicha curva. Recuerde que el punto  $(2, 1, 0)$  debe pertenecer a la misma.*

c) *Finalmente obtenga que la persona debe caminar sobre la curva dada por  $z = 6 - x^2 - \frac{x^4}{8}$ ,  $y = \frac{x^2}{4}$ . Realice una gráfica en un programa como Mathematica mostrando la superficie del pico así como la trayectoria óptima.*

**Problema 3.1.5.** *Muestre que  $\nabla r^a = nr^{a-2}\vec{r}$  donde  $\vec{r}$  es el vector posición en  $\mathbb{R}^n$  y  $r$  su norma.*

Un resultado que será de gran utilidad más adelante y conviene tener presente es el siguiente. Considere una función escalar que depende únicamente de la norma del vector posición. Este será naturalmente el caso de varias cantidades de interés, por ejemplo si pensamos en la temperatura a cierta distancia de una fuente de calor. Si ubicamos el origen del sistema coordenado en la posición de la fuente, tenemos que la temperatura dependerá únicamente de la distancia del punto a la misma, esto es  $r = \|\vec{r}\|$ . De forma similar podemos pensar en muchos ejemplos de campos escalares que dependen únicamente de la distancia a un punto. Para este tipo de funciones, el gradiente toma la forma

$$\nabla f(r) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \hat{e}_i, \quad (3.1.11)$$

y dado que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad (3.1.12)$$

podemos escribir

$$\nabla f(r) = f'(r) \hat{e}_r. \quad (3.1.13)$$

El gradiente de un campo escalar que únicamente depende de la distancia, tiene dirección radial. Observamos entonces que para este tipo de cantidades los conjuntos de nivel (las superficies en las cuales  $f$  no varía) son esferas y la dirección radial es la normal a las mismas y a su vez la de máximo crecimiento. Este resultado concuerda con la experiencia: en busca de un aumento o disminución máximo de temperatura, uno debe moverse en dirección radial teniendo como centro la fuente de calor.

Claramente, el operador gradiente actúa únicamente sobre campos escalares generando un campo vectorial con propiedades geométricas bastante interesantes y útiles. En algunas ocasiones se habla de calcular el gradiente de campos vectoriales pero dicha operación genera un objeto que claramente no es un campo vectorial. Este es otro de los casos en los que aparecen los tensores, bajo ciertas condiciones, y se discutirá más adelante. En las siguientes subsecciones veremos dos operadores diferenciales que sí actúan sobre campos vectoriales, uno de ellos generando un campo escalar y el otro uno vectorial.

### 3.1.2. Divergencia

Para motivar la definición de la divergencia y tener una idea intuitiva de su interpretación geométrica, estableceremos la ecuación de continuidad. Esta relación es mayormente conocida por su aplicación a fluidos pero realmente es una ecuación de conservación general, válida para cualquier cantidad que se “transporta a sí misma”. Con esto nos referimos a cualquier cantidad cuya variación en una región está dada únicamente por su movimiento sin que exista un agente que la elimine o produzca. Por ejemplo, la masa de un fluido es una cantidad portada por las partículas que lo constituyen de forma tal que al moverse dichas partículas

se desplaza la masa en el espacio.

Consideremos entonces por simplicidad un fluido con una densidad  $\rho$  y velocidad  $\vec{u}$ . La densidad es un campo escalar y la velocidad un campo vectorial y ambos dependen del tiempo y de la posición. Consideremos un volumen diferencial en algún sector del fluido como en la figura 3.1.4.

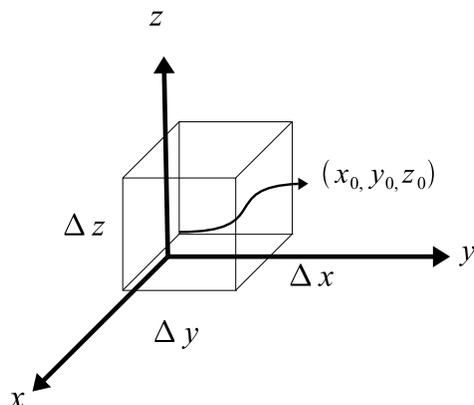


Figura 3.1.4: Volumen diferencial de fluido (fijo).

La variación de la masa dentro de la parcela puede ser escrita como

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = M_+ - M_-, \quad (3.1.14)$$

donde  $M_+$  y  $M_-$  corresponden con la cantidad de materia que ingresa y que abandona el volumen en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  respectivamente. El flujo de masa, o de cualquier cantidad cuya densidad está dada por  $\rho$  y se mueve a una velocidad  $\vec{u}$  está dada por

$$\vec{J} = \rho \vec{u}, \quad (3.1.15)$$

cuyas unidades son las unidades de la cantidad, en este caso kilogramos, por unidad de área y de tiempo. Por lo tanto  $\vec{J}$  es la “corriente” de masa que atraviesa una superficie por unidad de tiempo y de superficie. Ahora bien, para establecer la ecuación de balance, pensemos en la cantidad de masa que atraviesa las caras del cubo de la figura 3.1.4 una por una. Por

ejemplo, en la dirección  $\hat{i}$ , tenemos materia que ingresa al volumen en la cara  $x = x_0$  y lo abandona en  $x = x_0 + \Delta x$ . Estas cantidades están dadas por la proyección del flujo en la dirección ortogonal a las caras, esto es  $\rho \vec{u} \cdot \hat{i}$ .

Para entender lo anterior consideremos un campo vectorial en dos dimensiones  $\vec{F}(x, y)$  y una superficie ortogonal al plano  $xy$  como en la figura 3.1.5.

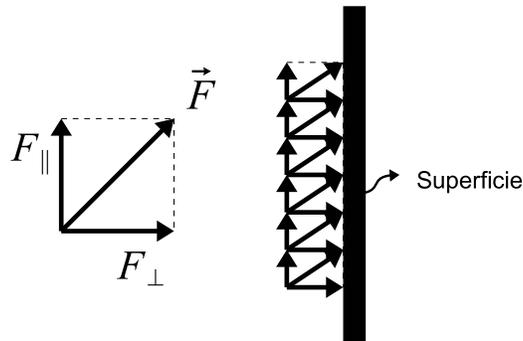


Figura 3.1.5: Campo a través de una superficie. La componente paralela a la superficie no aporta al flujo.

Descomponiendo el campo en una dirección paralela y una perpendicular a la superficie, como en la figura, se puede ver claramente que únicamente la componente ortogonal es la que atravesará la superficie. Para generalizar este concepto, basta con pensar que si la superficie en cuestión es diferenciable en la región de interés, la componente del campo que atravesará la superficie en cada punto será la proyección del campo en la dirección normal a la misma.

Para el caso del fluido, claramente podemos escribir

$$M_+ = \Delta y \Delta z \vec{J}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{i} + \Delta x \Delta z \vec{J}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{j} + \Delta x \Delta y \vec{J}(x_0, y_0, z_0) \cdot \hat{k}, \quad (3.1.16)$$

y

$$M_- = \Delta y \Delta z \vec{J}(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \cdot \hat{i} + \Delta x \Delta z \vec{J}(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \cdot \hat{j} + \Delta x \Delta y \vec{J}(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \cdot \hat{k}, \quad (3.1.17)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial t} &= -[J_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - J_1(x_0, y_0, z_0)] \Delta y \Delta z \\
 &\quad - [J_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - J_2(x_0, y_0, z_0)] \Delta x \Delta z \\
 &\quad - [J_3(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - J_3(x_0, y_0, z_0)] \Delta x \Delta y,
 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

donde  $J_i = \rho u_i$  con  $u_i$  las componentes de  $\vec{u}$ . Dividiendo ambos lados de la ec. (3.1.18) por  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  y calculando el límite con  $\Delta V \rightarrow 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial t \Delta V} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{J_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - J_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\
 &\quad + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - J_2(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} \\
 &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{J_3(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - J_3(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.
 \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Al tomar del lado izquierdo el límite de volumen infinitesimalmente pequeño, la densidad será aproximadamente constante en el mismo e igual a

$$\rho = \frac{M}{\Delta V}, \tag{3.1.20}$$

y por lo tanto tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z} \right), \tag{3.1.21}$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{3.1.22}$$

donde hemos definido el operador diferencial divergencia como

$$\nabla \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \tag{3.1.23}$$

La ec. (3.1.22) es una ecuación diferencial parcial para la variación de la densidad local en

un fluido.

**Problema 3.1.6.** Muestre la siguiente propiedad para la divergencia:  $\nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$ .

Utilizaremos la ecuación de continuidad para interpretar la divergencia de un campo vectorial. Antes de ello, consideraremos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\rho. \quad (3.1.24)$$

Sustituyendo la ec. (3.1.24) en la (3.1.22) y usando la propiedad demostrada en el problema 3.1.5, obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{u}. \quad (3.1.25)$$

El lado izquierdo de la ec. (3.1.25) es la variación temporal de la densidad normalizada a la densidad en el punto. Por lo tanto, valores positivos de  $\nabla \cdot \vec{u}$  llevarán a valores negativos de esta cantidad, lo cual implica que si el fluido tiene divergencia positiva en una localidad existe un flujo neto hacia fuera del mismo. Si la divergencia es negativa existirá un flujo neto hacia el interior y una divergencia nula implica una densidad constante. Viendo la figura 3.1.6, podemos intuir que la divergencia está relacionada con qué tanto las líneas de campo convergen o divergen de un punto. En la figura 3.1.7 se muestra esquemáticamente la variación de la divergencia de algunos campos en los cuales es fácil observar esta propiedad.

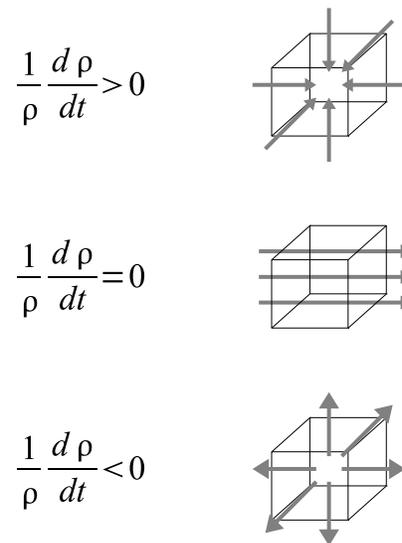


Figura 3.1.6: Ecuación de continuidad.

Vale la pena observar que la divergencia no está relacionada únicamente con la dirección del campo. Si las líneas de campo son, por ejemplo, paralelas pero la intensidad del mismo aumenta, tendremos una divergencia positiva. Tal es el caso del campo  $\vec{A} = x\hat{i}$  cuya divergencia es 1 aún siendo las líneas de campo paralelas.

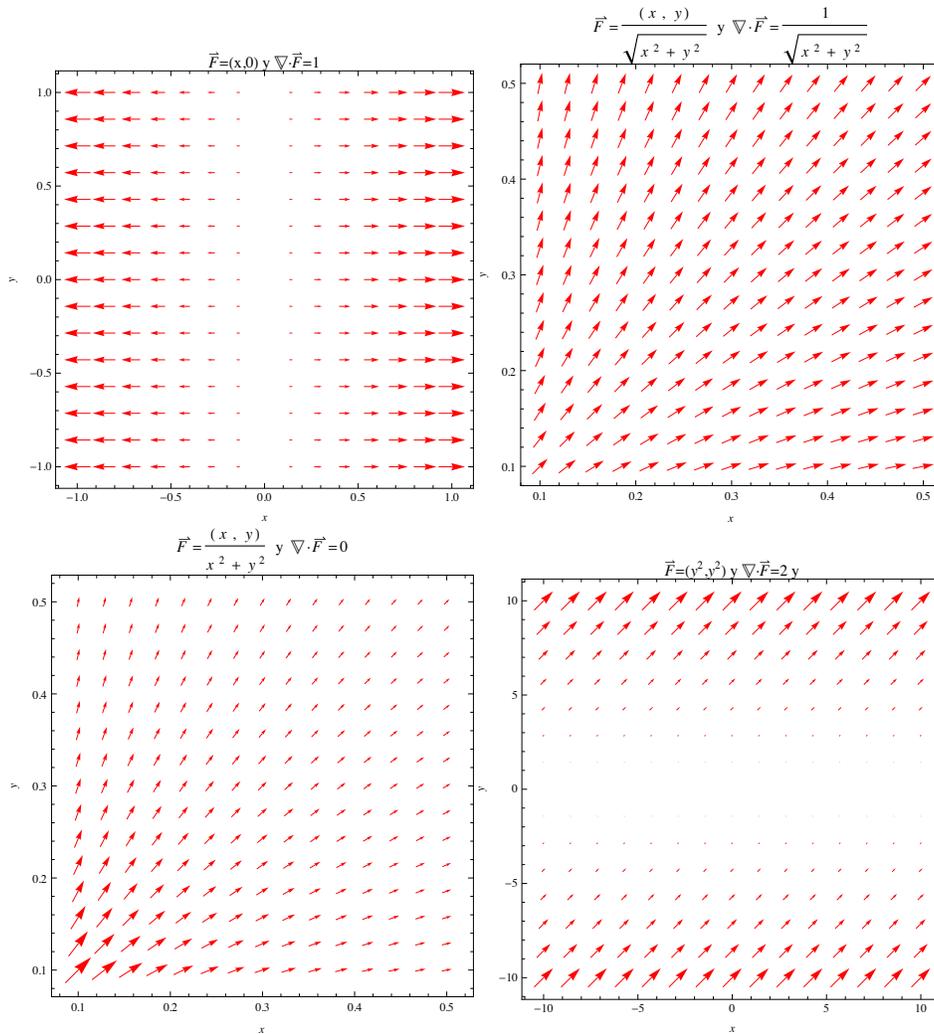


Figura 3.1.7: Variación de la divergencia de un campo.

**Problema 3.1.7.** *Dé un ejemplo de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  (a) con líneas de campo paralelas y divergencia negativa, (b) con líneas de campo no paralelas y divergencia nula, (c) con líneas de campo paralelas que tenga un cambio de signo en su divergencia. Muestre los campos propuestos con algunos vectores (apóyese con la instrucción VECTORPLOT de Mathematica o algún software de su elección).*

Como se mencionó anteriormente, los campos centrales son de particular interés, en especial dentro de la teoría de potenciales. Estos son derivados de potenciales que dependen únicamente de la magnitud de  $\vec{r}$ . El siguiente problema explora la divergencia de un campo de este tipo.

**Problema 3.1.8.** Muestre que en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\nabla \cdot (r^a \vec{r}) = (a + 3)r^a$ . Generalice el resultado para  $\mathbb{R}^n$ .

El resultado del problema anterior puede resultar un poco intrigante en vista de la ec. (2.2.2). Las líneas de campo de un campo de fuerzas indican, siguiendo la 2da ley de Newton, la dirección de movimiento de una masa de prueba que se coloque en cada punto. Por ello, uno espera que las líneas de campo se acerquen radialmente a la fuente del campo en el caso de fuerzas atractivas y se alejen en el caso de las fuerzas repulsivas, como puede verse en la gráfica de la esquina inferior izquierda de la figura 3.1.7 (tenga en cuenta que las figuras están en  $\mathbb{R}^2$ ). Sin embargo, el problema anterior parece decir que  $\nabla \cdot (r^{-2} \hat{e}_r) = 0$ . Hay que tener cuidado en este punto: el resultado anterior es claramente válido solo para  $r \neq 0$ . Para  $r = 0$  el campo no existe y por lo tanto no podemos hablar de su divergencia en dicho punto. Este tipo de comportamiento proviene del hecho de que estamos suponiendo como fuente de campo un objeto puntual, ya sea para la fuerza gravitacional o la electrostática. Este problema se retomará y resolverá al estudiar el teorema de Gauss.

### 3.1.3. Rotacional

El concepto de rotacional no es tan sencillo de introducir como el de la divergencia y del gradiente, excepto cuando el estudiante está de antemano familiarizado con algunos temas de física que involucran dicha cantidad. Intentaremos de todas formas motivarlo, aunque su interpretación geométrica así como su relevancia quedarán completamente claros cuando se vea el teorema de Stokes.

Es relativamente intuitivo, por la notación utilizada para la divergencia y el gradiente, que puede tener sentido aplicar el operador de derivadas parciales "∇" sobre un campo vectorial de una forma similar a un producto cruz, esto es

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{i} \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) - \hat{j} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right). \quad (3.1.26)$$

Adicionalmente, por su nombre, queda claro que algo tiene que ver este operador con la rotación del campo. Pensemos entonces en un fluido que rota en torno al origen con velocidad  $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$  como se ve en la figura 3.1.8. Este movimiento corresponde con una rotación positiva siguiendo la convención de sentido positivo antihorario.

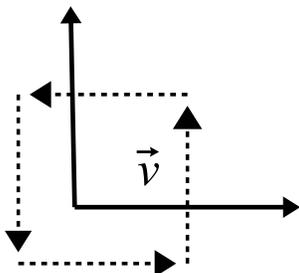


Figura 3.1.8: Fluido con rotación en torno al origen.

Siguiendo el diagrama, vemos que la velocidad vertical del lado derecho es positiva y del lado izquierdo negativa. Esto implica

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} > 0.$$

De forma similar, la velocidad horizontal es negativa para  $y > 0$  y positiva para  $y < 0$  lo cual significa que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} < 0.$$

Si calculamos el rotacional de un campo de velocidades con estas características tenemos

$$\nabla \times \vec{v} = \hat{k} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) > 0. \quad (3.1.27)$$

A esta cantidad se le llama vorticidad del fluido y cuantifica la rotación a nivel local en torno a un punto, en este caso el origen. De esta forma, la dirección del rotacional está relacionada con la dirección del giro, siendo éste perpendicular al plano en el que se da la rotación (ver figura 3.1.9).

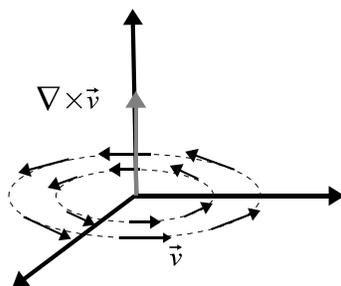


Figura 3.1.9: Dirección del rotacional.

**Problema 3.1.9.** Muestre que si  $f$  es un campo escalar y  $\vec{A}$  un campo vectorial se satisfacen las siguientes relaciones:

$$a) \quad \nabla \times (f\vec{A}) = f\nabla \times \vec{A} + \nabla f \times \vec{A},$$

$$b) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}).$$

### 3.1.4. Operadores de segundo orden

Operando sobre gradiente, divergencia y rotacional se pueden obtener operadores diferenciales de orden superior sobre campos. Los de segundo orden son los de mayor interés por su aplicación a la física, principalmente en las ecuaciones diferenciales parciales. El operador que más frecuentemente encontraremos en dichos problemas es el laplaciano, el cual se define como la divergencia del gradiente y se denota como

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla f(\vec{r})).$$

Algunas otras operaciones son relevantes, como por ejemplo el rotacional de un gradiente y la divergencia de un rotacional. En ambos casos se satisface que bajo ciertas condiciones (sobre

los campos  $f$  y  $\vec{A}$ )

$$\nabla \times (\nabla f) = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

**Problema 3.1.10.** *¿Bajo qué condiciones se sostienen las igualdades anteriores?*

**Problema 3.1.11.** *En equipos, investigar ecuaciones diferenciales parciales que involucren el operador laplaciano y exponerlas al grupo. Es importante dar un fundamento a las mismas desde un punto de vista intuitivo así como al menos un bosquejo de su planteamiento. Ejemplos de ecuaciones que se pueden estudiar son la ecuación de calor y la ecuación de onda. No es necesario ahondar en el método de solución.*

**Problema 3.1.12.** *Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones para los campos electromagnéticos. Investigue sobre las mismas en un libro de texto en inglés y escribálas (en el vacío) en su forma diferencial en sistema internacional. Utilice los operadores diferenciales y sus propiedades para obtener una sola ecuación diferencial para el campo eléctrico. Indique qué tipo de ecuación obtuvo y qué tipo de solución tiene. Discuta físicamente su resultado e interprete el significado del factor  $\mu_0\epsilon_0$ .*

## 3.2. Elementos de cálculo integral

En esta parte se introducirán las integrales de línea, superficie y volumen de campos vectoriales. Para ello, primero se recordarán las correspondientes para campos escalares, las cuales con seguridad fueron definidas y estudiadas en cursos anteriores.

### 3.2.1. Integrales de línea: circulación

Recordemos que la integral de trayectoria de un campo escalar sobre una curva  $\mathcal{C}$  orientada, dada por una parametrización  $\vec{\gamma}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , se define como

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt, \quad (3.2.1)$$

y se interpreta a grandes rasgos como el acumulado de  $f$  sobre la curva en cuestión. Aquí  $\|\vec{\gamma}'(t)\| dt = ds$  es el elemento diferencial de longitud sobre la curva y  $\vec{\gamma}(t)$  consiste en un mapeo como el mostrado en la figura 3.2.1.

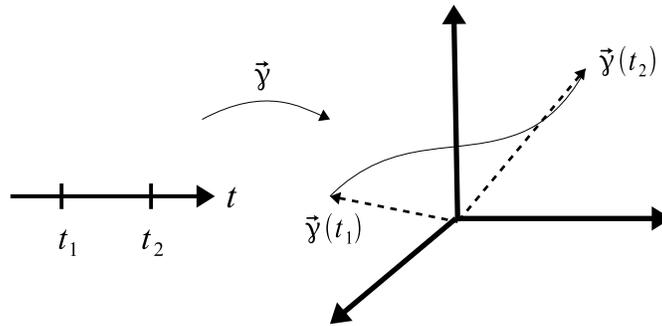


Figura 3.2.1: Curva parametrizada.

Para el caso de campos vectoriales, podríamos integrar sobre una curva cada una de sus componentes, esto sería denotado como

$$\int_C \vec{F} ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt, \quad (3.2.2)$$

y, si  $F_i$  son las componentes de  $\vec{F}$  en alguna base  $\hat{e}_i$  tendremos

$$\int_C \vec{F} ds = \sum_i \hat{e}_i \int_a^b F_i(\vec{\gamma}(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt. \quad (3.2.3)$$

Sin embargo, la mayoría de las veces no es esta la integral que nos interesa, sino una cantidad particular llamada integral de línea que corresponde con la integral de trayectoria de la componente del campo paralela al vector tangente a la curva en cada punto. Para motivar dicha definición, regresaremos al problema de la dinámica de una partícula. Supongamos que su masa es constante y que el objeto (puntual) se mueve bajo la influencia de una fuerza  $\vec{F}(\vec{r})$  trazando una trayectoria  $\vec{r}(t)$  donde el parámetro  $t$  es el tiempo. De esta forma, la

ecuación de movimiento está dada por

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}. \quad (3.2.4)$$

Sin resolver la ecuación diferencial, de segundo orden, podremos obtener información valiosa sobre el movimiento de la partícula. Comencemos por proyectar la ecuación sobre la trayectoria. Para ello, calculamos el producto escalar a ambos lados con  $\vec{r}'(t)$ , que tiene dirección tangente a la curva en cada punto de la misma. Obtenemos entonces

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (r'(t)^2). \quad (3.2.5)$$

Ahora, integremos ambos lados de la ecuación en un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  y, llamando  $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$  donde  $v_i = \|\vec{r}'(t_i)\|$ , obtenemos la siguiente relación

$$K_2 - K_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (3.2.6)$$

La cantidad  $K_i$  que aparece del lado izquierdo de la ecuación (3.2.6) se denomina energía cinética, dado que es la proveniente del movimiento. Lo interesante aquí es que, conociendo la integral del lado derecho, podemos saber la diferencia en la energía, o en el cuadrado de la magnitud de la velocidad, entre dos puntos de la trayectoria. En el caso en el que dicha integral se anule tendremos  $K_1 = K_2$  y como los puntos que se han escogido son arbitrarios, tendremos que la energía cinética es constante en todo el recorrido. También observemos que siempre que la fuerza sea ortogonal al desplazamiento la integral se anulará y  $K$  será constante. Definimos entonces al trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de la trayectoria  $\vec{r}(t)$  con  $t \in [t_1, t_2]$  como

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (3.2.7)$$

Este ejemplo es el más tradicional para las integrales de línea. Su conexión con la teoría de po-

tenciales se establecerá en el siguiente capítulo como una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

Con el ejemplo anterior queda justificado, en parte, el interés por esta forma particular de calcular la integral de un campo vectorial sobre una trayectoria. Definimos entonces la integral de línea del campo vectorial  $\vec{A}$  sobre la curva  $\mathcal{C}$  (con cierta orientación) como

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt, \quad (3.2.8)$$

siendo  $\vec{\gamma}(t)$  con  $t \in [t_1, t_2]$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ . Esta integral no es la integral del campo como tal sino la de su componente sobre la trayectoria (tangente a ella). Más aún, nótese que multiplicando y dividiendo el integrando por  $\|\vec{\gamma}'(t)\|$  podemos escribir

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \hat{T} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt, \quad (3.2.9)$$

donde  $\hat{T} = \vec{\gamma}'(t) / \|\vec{\gamma}'(t)\|$  es justamente el vector unitario tangente a la curva en cada punto y por lo tanto

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{A} \cdot \hat{T}) ds. \quad (3.2.10)$$

La expresión anterior finalmente nos muestra de forma transparente cómo la integral de línea de un campo es la integral de trayectoria de la componente del campo tangente a la curva en cada punto. Cuando la curva es cerrada, la cantidad recibe el nombre de circulación. Para entender esto, basta con observar que la operación en cuestión consiste en sumar todas las proyecciones del campo sobre la curva. En la figura 3.2.2 se ilustran esquemáticamente algunos casos de circulación positiva, negativa y nula respectivamente. Nótese la importancia de que la curva se encuentre orientada.

**Problema 3.2.1.** *En equipo, grafique en Mathematica los campos vectoriales  $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$  y  $\vec{G}(x, y) = (x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j}$ , cada uno junto con la curva  $\mathcal{C}$  que representa el círculo unitario en sentido antihorario. Discuta, en cada caso, si la circulación es positiva,*

negativa o cero. Ahora realice las respectivas integrales de línea y verifique su resultado.

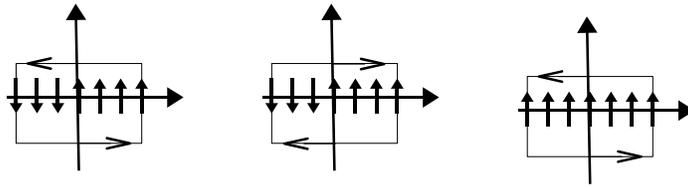


Figura 3.2.2: Ejemplos de circulación positiva, negativa y nula, respectivamente.

**Problema 3.2.2.** Sea la curva  $C$  una hélice de radio 1 y paso  $2\pi$  centrada en el origen. Considere las funciones  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y  $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + 2xy\hat{j}$  y calcule  $\int_C f ds$  y  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para una revolución de  $C$  entre los extremos  $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$  y  $\vec{r}_2 = (1, 0, 2\pi)$ .

**Problema 3.2.3.** Considere el campo  $f(\vec{r}) = (1 + 3y^2)^{-1/2}$  en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $C$  la elipse dada por  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  con sentido antihorario. Calcule

$$\int_C f(\vec{r}) ds \quad \text{y} \quad \int_C \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{s}.$$

### 3.2.2. Integrales de superficie: flujo

Las integrales de superficie resultan un poco más elaboradas que las de trayectoria y línea. Recordemos que para parametrizar una superficie  $\Gamma$  necesitamos dos parámetros que permitan expresar la misma como el conjunto de puntos con vectores de posición dados por

$$\vec{\sigma}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (3.2.11)$$

con  $(u, v) \in D$ , siendo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . De esta forma, la parametrización  $\vec{\sigma}$  es un mapeo como el que se muestra en la figura 3.2.3.

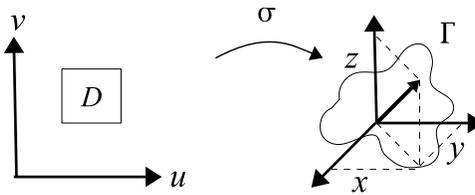


Figura 3.2.3: Superficie parametrizada

El elemento de área en estas condiciones se obtiene a partir de calcular el producto cruz de dos vectores tangentes a la superficie en cada punto. Como hemos visto anteriormente, los vectores tangentes son

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}, \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}, \quad (3.2.12)$$

y el elemento de área está dado por

$$d\mathcal{S} = \left\| \vec{T}_u \times \vec{T}_v \right\| dudv, \quad (3.2.13)$$

que es el área del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{T}_u$  y  $\vec{T}_v$ . Se define entonces la integral de superficie de un campo escalar  $f$  como

$$\int_{\Gamma} f(\vec{r}) d\mathcal{S} = \int_D f(\vec{\sigma}(u, v)) \left\| \vec{T}_u \times \vec{T}_v \right\| dudv, \quad (3.2.14)$$

donde hemos utilizado como notación compacta  $\int_D$  para indicar la integral doble sobre  $u$  y  $v$ .

De forma similar al caso de la integral de línea, aquí podemos decir que para llevar a cabo la integral de superficie de un campo como tal, uno puede integrar cada una de sus componentes. Esto es una operación completamente válida y de interés en algunas situaciones. Sin embargo, y una vez más motivado por la física, se tiene que la cantidad relevante en la mayoría de los casos es la integral de superficie de una componente particular del campo vectorial con respecto a la superficie. En el caso de la integral de línea nos interesaba conocer la integral de trayectoria de la componente del campo paralela a la curva. En este caso, sin

embargo, integraremos la componente del campo perpendicular a la superficie en cada punto. Esto se puede entender desde un punto de vista geométrico, pensando que mientras que la generalización del elemento de longitud es un vector con la misma norma y dirección paralela a la curva, la del elemento de superficie tendrá como magnitud el área pero asumirá una dirección ortogonal al plano tangente a la superficie. Esto es

$$ds \longrightarrow d\vec{s} = ds\hat{T},$$

$$dS \longrightarrow d\vec{S} = dS\hat{N},$$

donde  $\hat{N}$  es un vector unitario normal a la superficie en cada punto. Cuando decimos normal a la superficie nos referimos a un vector ortogonal al plano tangente a la superficie en cada punto, esto es

$$\hat{N} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}, \quad (3.2.15)$$

dado que  $\vec{T}_u$  y  $\vec{T}_v$  determinan el plano tangente a la superficie en cada punto y su producto cruz tiene dirección ortogonal a ambos. Recordemos que el orden del producto determinará el signo y por lo tanto el sentido de la normal. La recomendación en este caso es obtener la dirección de  $\hat{N}$  a reserva del signo y luego ajustarlo según la orientación de la superficie. Ahora bien, con esta idea en mente podemos definir la integral de superficie de un campo vectorial  $\vec{A}$  como

$$\int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} (\vec{A} \cdot \hat{N}) dS. \quad (3.2.16)$$

**Problema 3.2.4.** Sea  $\Gamma$  la superficie lateral de un cilindro elíptico dado por  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  y  $0 \leq z \leq 5$ . Parametrice la superficie y gráfíquela usando algún software. Calcule  $\int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$  para  $\vec{F}(\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} - \tan(x^2 + \sqrt{yz})\hat{k}$ .

**Problema 3.2.5.** Calcule el área de un toroide de radio mayor  $R$  y radio menor  $r$  utilizando para ello una parametrización de dicha superficie del tipo  $\vec{\sigma}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$ .

Una motivación para definir la integral de superficie como (3.2.16), proviene de la física y en particular del concepto de flujo. Cuando establecimos la ecuación de continuidad en la sección anterior, nos preguntamos qué tanto del fluido atraviesa un área para saber qué cantidad del mismo abandona o ingresa a cierto volumen. Retomemos entonces dichos elementos y observemos que si queremos saber la cantidad total de fluido que atraviesa un área superficial, únicamente nos interesa la componente ortogonal a la misma dado que las otras dos componentes del campo se desplazarán de forma paralela a ella. Es directo entonces definir el flujo de un campo  $\vec{A}$  a través de una superficie  $\Gamma$  como

$$\Phi_A = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (3.2.17)$$

**Problema 3.2.6.** *Calcular  $\int_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$  donde  $S$  es la superficie de un cubo unitario con vértices en  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  y  $\vec{r}$  es el vector posición. Grafique la superficie parametrizada y el campo vectorial. Observe que sólo 3 caras contribuyen a la integral y que las tres tienen el mismo valor. Relacionar este resultado con el concepto de flujo.*

### 3.2.3. Integrales de volumen

Las integrales de volumen consisten en integrales triples sobre una región cerrada de  $\mathbb{R}^3$  y se definen como

$$\int_V f(\vec{r}) d\tau, \quad (3.2.18)$$

para campos escalares y para campos vectoriales se considera la integral de las componentes

$$\int_V \vec{A}(\vec{r}) d\tau = \sum_{i=1}^3 \left( \int_V A_i(\vec{r}) d\tau \right) \hat{e}_i. \quad (3.2.19)$$

Aquí el elemento de volumen  $d\tau$  se expresa de forma que simplifique el cálculo de la integral y en el caso de coordenadas cartesianas está dado por

$$d\tau = dx dy dz. \quad (3.2.20)$$

Los elementos de volumen en otras coordenadas ortogonales se establecieron en el Capítulo 2.

**Problema 3.2.7.** Calcule la integral de volumen del campo  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  en la región limitada por las esferas de radio 2 y 1 centradas en el origen y con  $z > 0$ .

**Problema 3.2.8.** Encuentre la masa de un sólido limitado por el paraboloides  $z = 1 - x^2 - y^2$  y el plano  $z = 0$  si su densidad está dada por  $\rho(\vec{r}) = x + y + 1$ .

# Capítulo 4

## Teoremas Integrales

Con los elementos fundamentales del cálculo diferencial e integral para campos escalares y vectoriales en mente, es momento de ver cómo se relacionan entre ellos. Como antecedente, recuérdese que en cursos de cálculo en una sola variable, luego de definir y estudiar la derivada y la integral se introduce el teorema fundamental del cálculo que finalmente une ambos conceptos. Este teorema establece una relación entre la operación que se introdujo para explorar la razón de cambio de una función (la derivada) y la que se motiva como área bajo una curva (la integral). El teorema fundamental del cálculo, que aquí enunciaremos como

$$\int_a^b \left( \frac{df(x)}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \quad (4.0.1)$$

finalmente nos lleva a concebir la derivación, o diferenciación, y la integración como operaciones de alguna manera inversas.

Los teoremas integrales que se verán en estas notas son conceptualmente similares al teorema fundamental del cálculo en una variable. Para ver sus enunciados con mayor claridad, consideremos la ec. (4.0.1) desde otro punto de vista. Es importante reconocer, a partir de la misma, que las operaciones de derivar y posteriormente integrar no regresan la función íntegra sino únicamente la diferencia de sus valores en los extremos del intervalo de integración. Esto es, los detalles de la función en los puntos intermedios son irrelevantes, siempre y cuando no

se pierda en los mismos la diferenciabilidad, claro está. Es de suma importancia tener esta idea en mente al momento de ver por primera vez los teoremas integrales para el cálculo vectorial. Sin alargar más el preámbulo, estos teoremas son:

a) Teorema Fundamental del Cálculo en  $\mathbb{R}^n$

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \quad \text{donde } \vec{r}(a) \text{ y } \vec{r}(b) \text{ son los extremos de la curva } \mathcal{C} \quad (4.0.2)$$

b) Teorema de Gauss

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{donde la superficie } \Gamma \text{ es la frontera de la región } V \quad (4.0.3)$$

c) Teorema de Stokes

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{donde la curva } \mathcal{C} \text{ es la frontera de la superficie } \Gamma. \quad (4.0.4)$$

Aquí se han omitido los detalles de las hipótesis para poder visualizar de forma rápida y sencilla la estructura de los teoremas. Lo importante en este momento es identificar que cada uno de ellos establece un resultado similar al del teorema fundamental del cálculo en  $\mathbb{R}$ . Del lado izquierdo tenemos una integral de un operador diferencial y del lado derecho la función en cuestión integrada (o evaluada en el caso de la ec. (4.0.2)) en un dominio con una dimensión menor, siendo el mismo la frontera de la región de la integral del lado izquierdo. Veamos este punto con más cuidado. En el caso de la ec. (4.0.1), tenemos que si integramos la derivada de una función sobre todo un intervalo, obtenemos la función evaluada en los extremos del mismo, que constituyen su frontera al considerarlo como conjunto de puntos. Los valores de la función en puntos intermedios es irrelevante y con los valores en los extremos podemos saber el valor de la integral. El teorema fundamental del cálculo para  $\mathbb{R}^n$ , enunciado en la ec. (4.0.2), tiene un contenido análogo. En este caso, como ya no tenemos una función sino un campo, el operador diferencial es el gradiente y no la derivada. Al calcular la integral de línea

del gradiente del campo en una curva, obtenemos la diferencia del mismo en la frontera de la curva, que son sus puntos extremos. Los valores intermedios son nuevamente irrelevantes. Observe que realmente la ec. (4.0.1) en un caso particular de la ec. (4.0.2).

**Problema 4.0.9.** *Muestre que la el teorema fundamental del cálculo contiene el resultado de la ec. (4.0.1). Proponga cuales serán entonces las hipótesis detrás de la ecuación (4.0.2) para que haya consistencia.*

De manera similar, vemos del lado izquierdo de la ec. (4.0.3) la integral, en este caso en una región de  $\mathbb{R}^3$  encerrada por una superficie, de un operador diferencial actuando sobre un campo. Del lado derecho obtenemos la integral del campo en cuestión sobre la superficie frontera. Los valores del campo en el interior de la región no afectan el valor de la integral. En el caso del teorema de Stokes ocurre algo similar, partimos de la integral de un operador diferencial aplicado a un campo. La integral es doble, sobre una superficie que tiene como frontera una curva y obtenemos del lado derecho una integral de línea del campo sobre dicha curva sin importar los valores del campo en el resto de los puntos de la superficie. Claro que en cualquiera de las ecs. (4.0.2)-(4.0.4), el comportamiento de los campos en el interior no es completamente irrelevante ya que deben satisfacer las hipótesis que se detallarán en las siguientes subsecciones, aquí solo buscamos apreciar la estructura general de estas relaciones. Efectivamente, parece que los tres teoremas integrales exhiben algo similar a lo que intuitivamente se maneja en los cursos básicos de cálculo: la derivada y la integral actúan como si fuesen operaciones inversas de forma tal que cada vez que se integra una derivada se obtiene una integral menos. En la ec. (4.0.2) se pasa de una integral sencilla a una función sin integrar, en la ec. (4.0.3) de una integral triple a una doble y en la ec. (4.0.4) de una doble a una sencilla. Claro que no son integrales cualesquiera, los dominios son muy precisos así como los operadores diferenciales que intervienen. Adicionalmente, es importante recordar que componer funciones u operadores inversos genera la identidad, aquí el resultado no es tal.

## 4.1. Teorema fundamental del cálculo

Sea  $\mathcal{C}$  una curva suave con  $\vec{\gamma}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , una parametrización donde  $\vec{\gamma}'(t)$  es continua y  $f$  un campo escalar  $C^1$  en  $\mathcal{C}$ , entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a)). \quad (4.1.1)$$

Como

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f|_{\vec{\gamma}(t)} \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \quad (4.1.2)$$

y tomando en cuenta que

$$\frac{df(\vec{\gamma}(t))}{dt} = \nabla f|_{\vec{\gamma}(t)} \cdot \vec{\gamma}'(t)$$

podemos escribir

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{df(\vec{\gamma}(t))}{dt} dt = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a)), \quad (4.1.3)$$

donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo para funciones reales.

Nos apoyaremos en este resultado para obtener lo que se conoce como el gradiente en coordenadas generalizadas. Podemos escribir la ec. (4.1.1) en coordenadas generalizadas (utilizando la ecuación (3.1.11)) como

$$\int_{\mathcal{C}} \text{grad}(f) \cdot (h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3) = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$$

de donde se puede ver que el operador gradiente debe ser sustituido por

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i \quad (4.1.4)$$

para que el teorema retenga la misma forma que en la ec. (4.1.1). Aquí es importante resaltar que  $\hat{e}_i$  es el vector direccional correspondiente a la coordenada  $q_i$ . La notación “grad” se

introduce aquí para distinguir este operador del definido en la Subsección 3.1.1. El operador “*grad*” contiene los factores de escala adecuados para que el teorema fundamental se sostenga.

Como aplicación de este teorema, regresaremos a la segunda ley de Newton y el teorema de trabajo y energía. Partimos de la 2da ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (4.1.5)$$

que es una ecuación diferencial de 2do orden, ya que en general  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  y la aceleración es la derivada segunda de la posición  $\vec{r}$  con respecto al tiempo. Si existe un campo escalar  $\varphi(\vec{r})$  tal que podemos escribir  $-\nabla\varphi = \vec{F}$  y la trayectoria de la partícula es  $\vec{r}(t)$  tenemos

$$\nabla\varphi = -m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (4.1.6)$$

que es ahora un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales, en un principio acopladas, de segundo orden en el tiempo y primer orden en la posición. Es claro que esta ecuación no será, en general, sencilla de resolver. Sin embargo, como vimos anteriormente, una primera integral de la misma sobre la trayectoria de la partícula, nos puede dar mucha información sobre la dinámica de la misma sin tener que resolver explícitamente para  $\vec{r}(t)$ . En la Subsección 3.2.1 consideramos el caso de una fuerza en general y obtuvimos

$$\int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} \quad (4.1.7)$$

donde se ha integrado con respecto al tiempo, con  $t \in [a, b]$ , ambos lados de la ec (4.1.5), previamente proyectada sobre la trayectoria  $\vec{r}(t)$  y hemos definido  $v_a^2 = \|\vec{v}(a)\|^2$  y lo mismo para  $b$ . Definimos entonces

$$\int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = W_{ab}, \quad \text{trabajo realizado por la fuerza al mover la partícula de } \vec{r}(a) \text{ a } \vec{r}(b)$$

$$K_a = \frac{mv_a^2}{2}, \quad \text{energía cinética en } \vec{r}(a)$$

y por lo tanto podemos escribir

$$\Delta K_{ab} = W_{ab}, \quad (4.1.8)$$

donde  $\Delta K_{ab} = K_b - K_a$ . Este resultado es el llamado teorema de trabajo-energía y simplemente dice que la variación de la energía cinética entre dos puntos es igual al trabajo realizado sobre la trayectoria que llevó de uno al otro.

Supongamos ahora que la fuerza es tal que  $-\nabla\varphi = \vec{F}$ . En ese caso, utilizando el teorema fundamental del cálculo, y si abreviamos  $\varphi(\vec{r}(a)) = \varphi_a$  y  $\varphi(\vec{r}(b)) = \varphi_b$  vemos que

$$\varphi_a + \frac{mv_a^2}{2} = \varphi_b + \frac{mv_b^2}{2}. \quad (4.1.9)$$

Esta cantidad se conserva, dado que es la misma en todos los puntos de la trayectoria, en el caso de fuerzas que se pueden escribir como el gradiente de un campo escalar. A dichas fuerzas se les llama fuerzas conservativas, al campo escalar un potencial y a la cantidad conservada se denomina energía mecánica

$$E_a = \varphi_a + \frac{mv_a^2}{2}. \quad (4.1.10)$$

Tenemos entonces que para fuerzas conservativas  $\Delta E_{ab} = E_b - E_a = 0$  para puntos  $a$  y  $b$  arbitrarios.

**Problema 4.1.1.** *Muestre que en el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de fuerzas tanto conservativas como no conservativas, el teorema de trabajo energía toma la forma*

$$\Delta E_{ab} = W_{ab}^{NC} \quad (4.1.11)$$

donde  $W_{ab}^{NC}$  es el trabajo realizado exclusivamente por las fuerzas no conservativas.

**Problema 4.1.2.** *Una partícula cargada que se mueve sobre una trayectoria  $\vec{r}(t)$  en un*

*campo electromagnético experimenta una fuerza dada por*

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (4.1.12)$$

*donde  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son el campo eléctrico y magnético respectivamente (ambos dependientes de las coordenadas y del tiempo en general),  $q$  es la carga (constante) y  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t)$  es la velocidad de la partícula. Muestre que si el campo eléctrico  $\vec{E}$  es conservativo, la energía mecánica se conserva.*

## 4.2. Teorema de Gauss

Sea  $V \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto acotado y cerrado con frontera suave a trozos  $\Gamma$ . Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial  $C^1$  en  $V$  entonces

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (4.2.1)$$

Para demostrar este teorema, consideremos una partición de  $V$  en paralelepípedos con aristas  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  y  $\Delta z_i$  en cada punto  $(x_i, y_i, z_i)$  de  $V$ . En caso de que la región en cuestión no pueda ser cubierta con una colección de paralelepípedos, construiremos un cubo que encierre a la región y aplicaremos el teorema a un campo auxiliar que tome los valores del campo dentro de la región y se anule en los puntos contenidos en el cubo pero que no pertenecen a  $V$ .

El flujo del campo  $\vec{F}$  a través de  $\Gamma$  (lado derecho de la ec. (4.2.1)) se puede calcular a partir de la suma de los flujos a través de dichos volúmenes, esto es

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i \quad (4.2.2)$$

donde  $\Gamma_i$  es la frontera del  $i$ -ésimo paralelepípedo. En esta igualdad está la sustancia del teorema de Gauss ya que es la que permite relacionar una cantidad que está calculada sobre todo el volumen  $V$  con una que sólo se evalúa en su frontera. Para justificar la ec. (4.2.2)

basta con observar que los flujos de  $\vec{F}$  a través de las caras interiores de los volúmenes se anulan uno a uno (ver figura 4.2.1). Esto es, el flujo a través de la cara  $x = x_i$ , se calcula dos veces: una para la superficie  $\Gamma_i$ , en la cual dicha cara es la posterior del volumen, y otra para la superficie  $\Gamma_{i-1}$ , en la cual es la cara frontal. El flujo a través de dichas superficies es igual y de signo opuesto ya que la orientación es exterior a los paralelepípedos y por lo tanto será  $-\hat{i}$  para  $\Gamma_i$  e  $\hat{i}$  para  $\Gamma_{i-1}$ . Siguiendo este razonamiento, vemos que el flujo en todas las superficies se anulará salvo en las caras que no tengan una cara vecina, esto es, las que estén pegadas a la frontera. Una vez reconocido que el flujo total a través de las superficies de todos los paralelepípedos se reduce al que atraviesa las caras que tocan la frontera, sólo hace falta observar que al tomar el límite para infinitos elementos en la partición el área de cada una de estas caras se vuelve infinitesimalmente pequeña. Por lo tanto, en este límite, al tener infinitas caras pequeñas tocando la superficie, se logra cubrir toda la superficie de la frontera.

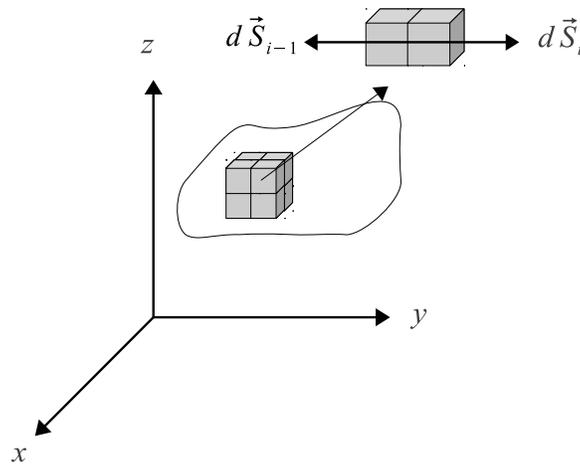


Figura 4.2.1: Partición en paralelepípedos del volumen  $V$  y aproximación de la superficie  $\Gamma$  por caras externas  $\Gamma_i$ .

Para obtener las integrales  $\int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$ , se calcula el flujo a través de cada una de las 6 caras de  $\Gamma_i$ . Se calcularán con detalle únicamente las aportaciones de las caras para  $x$  constante.

Estas superficies están dadas por

$$\begin{array}{ll}
 x = x_i & x = x_i + \Delta x_i \\
 y \in [y_i, y_i + \Delta y_i] & y \in [y_i, y_i + \Delta y_i] \\
 z \in [z_i, z_i + \Delta z_i] & z \in [z_i, z_i + \Delta z_i] \\
 d\vec{S}_i = -dydz\hat{i} & d\vec{S}_i = dydz\hat{i}
 \end{array} \quad (4.2.3)$$

El flujo a través de las mismas es entonces

$$\int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} F_1(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i) dydz - \int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} F_1(x_i, y_i, z_i) dydz. \quad (4.2.4)$$

Procediendo de manera análoga para las otras 4 caras se puede escribir la ec. (4.2.2) como

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} \left[ \frac{F_1(x_i + \Delta x_i, y, z) - F_1(x_i, y, z)}{\Delta x_i} \right] \Delta x_i dydz \right. \\
 &+ \int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \left[ \frac{F_2(x, y_i + \Delta y_i, z) - F_2(x, y_i, z)}{\Delta y_i} \right] dx \Delta y_i dz \\
 &\left. + \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \left[ \frac{F_3(x, y, z_i + \Delta z_i) - F_3(x, y, z_i)}{\Delta z_i} \right] dx dy \Delta z_i \right\} \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

donde también se ha multiplicado y dividido el primer término por  $\Delta x_i$ , el segundo por  $\Delta y_i$  y el tercero por  $\Delta z_i$ . Estas cantidades son las longitudes de las aristas de los paralelepípedos y por lo tanto tienden a cero al tomar el límite de infinitos cubos (infinitos puntos en la partición). Por ello, al tomar el límite, los términos en paréntesis rectos se vuelven las derivadas parciales evaluadas en el punto en cuestión:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x_i dydz \right. \\
 &+ \int_{z_i}^{z_i+\Delta z_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big|_{y=y_i} dx \Delta y_i dz \\
 &\left. + \int_{y_i}^{y_i+\Delta y_i} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} \Big|_{z=z_i} dx dy \Delta z_i \right\}. \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

En el lado derecho de la ecuación se reconocen fácilmente las definiciones de integral con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  en cada uno de los tres términos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_i + \Delta z_i} \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (4.2.7)$$

Finalmente, al tomar infinitos elementos de la partición se cubre todo el conjunto  $V$ , lo cual prueba la ec. (4.2.1).

**Problema 4.2.1.** Verifique que se satisface el teorema de Gauss (calcule por separado ambos lados de la ec. (4.2.1) y muestre que son iguales) para el flujo del campo  $\vec{A}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k}$  a través de la superficie  $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$ .

**Problema 4.2.2.** Obtenga la identidad  $\int_{\Gamma} \varphi d\vec{S} = \int_V \nabla \varphi d\tau$ . Sugerencia: utilice el teorema de Gauss para un campo  $\vec{A} = \varphi \vec{u}$  donde  $\vec{u}$  es un vector constante.

**Problema 4.2.3.** Muestre que en  $\mathbb{R}^n$  el volumen de una esfera de radio  $R$  está dado por  $V_n = \frac{1}{n} \int_{\delta V_n} \vec{r} \cdot d\vec{S}$  donde  $\delta V_n$  es la frontera de dicha esfera y  $\vec{r}$  el vector posición en  $\mathbb{R}^n$ . Utilice que el área de una esfera de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$  es  $n\alpha_n R^{n-1}$  (donde  $\alpha_n$  es una constante dada para cada  $n$ ) para obtener  $V_n$ .

**Problema 4.2.4.** Integre la ecuación de continuidad (ec.(3.1.22)) para un fluido, con densidad  $\rho(\vec{r}, t)$  y campo de velocidades  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  en un volumen dado, para encontrar una relación entre la variación de la masa total contenida en dicho volumen y el flujo total de fluido a través de la frontera del mismo.

Un resultado de suma importancia, el cual usaremos para trabajar una aplicación del teorema de Gauss, es el siguiente. Suponga que se tiene un conjunto  $V$  cerrado y acotado, cuya frontera  $\Gamma$  no contiene al origen. Entonces, si el origen no se encuentra en el interior del conjunto

$$\int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.2.8)$$

lo cual se puede ver claramente ya que  $\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$  para  $r \neq 0$ .

Si el origen es un elemento de  $V$ , no es posible aplicar el teorema de Gauss en dicha región. Sin embargo, podemos excluir el origen de la misma ya que al no encontrarse  $\vec{r} = \vec{0}$  en la frontera, sabemos que podemos encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que una bola centrada en el origen y de radio  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)$ , se encuentre contenida en  $V$ . Si llamamos  $W$  a la región  $W = V - \mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)$  y  $\partial W$  su frontera tenemos

$$\int_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 0$$

ya que  $W$  no contiene al origen y

$$\int_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \int_W \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau = 0. \quad (4.2.9)$$

Por otro lado, usando que la frontera de  $W$  es la unión de  $\Gamma$  y la frontera de  $\mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)$ , podemos escribir

$$\int_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} + \int_{\partial^- \mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \quad (4.2.10)$$

donde  $\partial^- \mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)$  denota la frontera de la bola con normal interior dado que dicha orientación general la normal exterior al conjunto  $W$ . Por lo tanto tenemos,

$$\int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = - \int_{\partial^- \mathcal{B}(\vec{0}, \varepsilon)} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \quad (4.2.11)$$

y dado que  $r = \varepsilon$  sobre dicha superficie y  $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r$  se obtiene finalmente

$$\int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi. \quad (4.2.12)$$

Tomando en cuenta ambos resultados, podemos escribir

$$\int_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{0} \notin V \\ 4\pi & \text{si } \vec{0} \in V. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Como aplicación del teorema de la divergencia y del resultado anterior, regresaremos a los campos centrales del tipo  $\vec{F} = kr^{-2}\hat{e}_r$ . Recordemos que el campo gravitacional y el campo eléctrico tienen esta dependencia con la distancia a la fuente de campo. En este punto revisaremos cómo se aplica el teorema de Gauss a la llamada ley de Gauss, que en física se aplica de forma similar para ambos campos como sigue

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad (4.2.14)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho_m \quad (4.2.15)$$

donde  $\vec{E}$  y  $\vec{G}$  son el campo eléctrico y gravitacional respectivamente,  $\epsilon_0$  y  $\mathcal{G}$  constantes universales (permitividad del vacío y constante de gravitación). Las densidades de carga  $\rho_e$  y de masa  $\rho_m$  corresponden a la carga o masa por unidad de volumen distribuida en cierta región de  $\mathbb{R}^3$ . Dichas relaciones están estrechamente ligadas con las expresiones para la fuerza gravitacional y eléctrica entre dos masas y dos cargas respectivamente, dadas por

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\hat{e}_r \quad (4.2.16)$$

$$\vec{F}_E = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\hat{e}_r. \quad (4.2.17)$$

En particular, las ecs. (4.2.14) y (4.2.15) se pueden obtener a partir de las ecs. (4.2.16) y (4.2.17). La demostración formal de esto involucra el manejo de las llamadas funciones delta por lo cual se deja como tarea revisarlas. Aquí simplemente daremos una idea general para el caso de una masa puntual (el caso para una carga puntual es análogo).

Para obtener el campo gravitacional generado en el punto  $\vec{R}$  por una masa puntual  $M$  situada en el origen, se considera el campo en un punto  $\vec{r}$  arbitrario, esto es

$$\vec{G} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\hat{e}_r. \quad (4.2.18)$$

Al calcular la integral de superficie de la ec. (4.2.18) tomando como superficie una esfera de radio  $R$  centrada en la masa (en el origen), se obtiene

$$\int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -\mathcal{G}M \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{S}. \quad (4.2.19)$$

El signo negativo proviene de que la normal a la esfera se toma exterior mientras que el campo gravitacional es radial pero apunta hacia el centro de la misma. Como el origen se encuentra en la región delimitada por  $\Gamma$ , usando la ec. (4.2.13) tenemos que la integral del lado derecho es  $4\pi$ . Por otra parte, la integral del lado izquierdo, usando el teorema de Gauss es

$$\int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{G} d\tau \quad (4.2.20)$$

por lo cual

$$\int_V \nabla \cdot \vec{G} d\tau = -4\pi\mathcal{G}M. \quad (4.2.21)$$

Por otra parte, podemos escribir la masa puntual  $M$  como

$$M = \int \rho_m d\tau \quad (4.2.22)$$

donde  $\rho_m$  es una densidad de masa consistente con la presencia de un objeto puntual en el origen. Tenemos por lo tanto <sup>1</sup>

$$\int_V \nabla \cdot \vec{G} d\tau = -4\pi\mathcal{G} \int \rho_m d\tau \quad (4.2.23)$$

lo cual es consistente con la ec. (4.2.15) y un razonamiento similar se puede aplicar al caso eléctrico.

---

<sup>1</sup>El tener una masa, o cualquier otra cantidad, finita contenida en un punto (que tiene volumen nulo) corresponde con una densidad infinita, dado que  $\rho = dm/dV$ . Esto implica que  $\rho_m$  es nula en todo el espacio pero infinita en el origen siendo su integral la dada por la ec. (4.2.22). Este comportamiento es precisamente el de un objeto matemático llamado delta de Dirac y se denota como  $\delta(\vec{r}_0)$  donde  $\vec{r}_0$  es el punto de discontinuidad, por lo que podemos entonces escribir  $\rho_m = M\delta(\vec{0})$ .

Regresando a las expresiones (4.2.14) y (4.2.15), vemos que son ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas, lo cual puede hacer el problema altamente complejo. Sin embargo, se pueden integrar directamente utilizando el teorema de Gauss y en algunos casos particulares de interés pueden obtenerse expresiones para  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{G}(\vec{r})$  de una forma relativamente sencilla. Tomemos por ejemplo el caso eléctrico (el gravitacional es análogo). Integraremos ambos lados de la ec. (4.2.14) de la siguiente forma

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e d\tau \quad (4.2.24)$$

donde  $V$  es alguna región de interés. La integral de la densidad simplemente resulta en la carga total encerrada en la región  $V$  dado que  $\rho_e = dQ/d\tau$ , donde el caso del objeto puntual no presenta mayores dificultades como se mencionó arriba. Por otra parte, podemos aplicar el teorema de Gauss al lado izquierdo de la ec. (4.2.24) y obtenemos la llamada forma integral de la ley de Gauss (la ec. (4.2.14) es llamada la forma diferencial):

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad (4.2.25)$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de la región  $V$  y  $Q_V$  denota la carga total encerrada en dicho volumen. Por lo general, se escoge  $V$  de forma tal que la integral del lado izquierdo pueda calcularse utilizando el teorema de Gauss. Para ello, conviene escoger un volumen cuya frontera permita explotar la simetría del campo para calcular su flujo. De forma similar, para el campo gravitacional tendremos

$$\int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}m_V \quad (4.2.26)$$

donde  $m_V$  es la masa contenida en la región delimitada por la superficie  $\Gamma$ .

Como ejemplo, supongamos que se tiene carga distribuida uniformemente sobre una placa plana que consideraremos infinita como se muestra en la figura 4.2.3. Sabiendo que el campo eléctrico depende de la distancia y de la intensidad de la fuente y que vectorialmente se

encuentra sobre la línea que une la fuente con el punto donde se está evaluando el campo, se puede argumentar fácilmente que en este caso el campo estará en la dirección perpendicular a la placa y que será constante en planos paralelos a la misma. Para ver esto, considere un punto a una cierta distancia de la placa. Cada carga sobre la placa generará, en el punto que estamos observando, un campo como muestra la figura 4.2.2. Sin embargo, como la placa es infinita, por cada carga existe una diametralmente opuesta (con respecto a la proyección del punto sobre la placa) que generará un campo de igual magnitud. Como se observa en la figura, las componentes horizontales de ambos campos son opuestas y por lo tanto se anulan. Resulta así que el campo tendrá dirección perpendicular a la placa y únicamente dependerá de la distancia vertical a la misma.

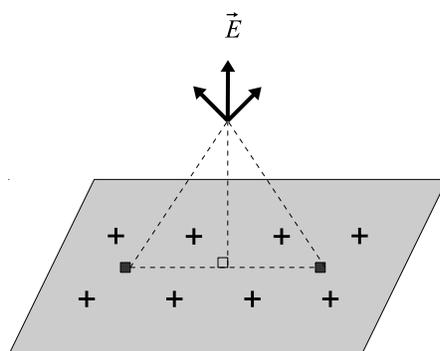


Figura 4.2.2: Campo generado por una placa plana infinita e uniformemente cargada.

**Problema 4.2.5.** *Utilice el concepto de campo conservativo y la interpretación geométrica del gradiente para llegar a la misma conclusión (que el campo es perpendicular al plano de la placa y constante en cada plano paralela a la misma).*

Por lo discutido arriba, vemos que la simetría del problema puede ser explotada si se toma como región  $V$  un cilindro cuyas tapas sean paralelas a la placa como en la figura 4.2.3.

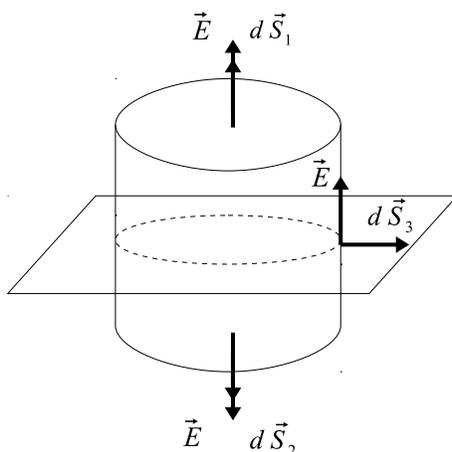


Figura 4.2.3: Superficie gaussiana cilíndrica.

El tipo de superficie que se construya para cada problema depende fuertemente del contexto. Se buscará por lo general una superficie en la cual el ángulo que forma el campo con la normal a la misma y/o su magnitud sean constantes o a lo sumo pueda ser expresado de forma sencilla. En este caso, dividiremos la superficie del cilindro en 3 partes: las dos tapas y la cara lateral. Así, para el lado derecho de la ec. (4.2.25) tenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Gamma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.2.27)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son las tapas del cilindro y  $\Gamma_3$  su cara lateral. Nótese que la normal a la cara lateral es ortogonal al campo y por lo tanto la integral de línea se anula. Por otra parte, las normales a ambas tapas son paralelas al campo a ambos lados de la placa y en ellas el campo tiene la misma magnitud por lo cual

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E} d\tau = 2 \int_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \int_{\Gamma_1} dbS = 2E\pi r^2 \quad (4.2.28)$$

donde hemos utilizado que el campo es constante sobre la superficie y paralelo a su normal. Por otra parte, al ser la densidad de carga uniforme y estar distribuida únicamente sobre la

superficie, la carga total en  $V$  está dada por

$$Q_V = \pi r^2 \rho_e \quad (4.2.29)$$

de donde finalmente obtenemos que el campo está dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{para } z > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \hat{k} \quad \text{para } z < 0.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico generado por la placa no es únicamente constante en superficies paralelas a la misma ¡sino en todo el espacio! Independientemente de donde ubiquemos una carga cercana a la placa, ésta experimentará la misma fuerza. Este sencillo resultado tiene una enorme relevancia ya que a partir del mismo se desarrollan los capacitores o condensadores. Esta aplicación se estudiará en los siguientes problemas.

**Problema 4.2.6.** *Muestre que si se colocan dos placas infinitas paralelas con densidades de carga iguales pero opuestas  $\pm\rho_e$ , el campo en el espacio entre ellas tiene magnitud constante  $\rho_e/\epsilon_0$  y en el resto del espacio es nulo. Utilice el hecho de que el campo eléctrico es conservativo junto con el teorema fundamental del cálculo para mostrar que la diferencia de potencial eléctrico entre las placas depende de la distancia entre las mismas de forma lineal.*

Los resultados del problema anterior son de gran utilidad en aplicaciones tecnológicas. Los capacitores son unos de los componentes principales de los circuitos. Para entender su utilidad, debemos antes reconocer que una diferencia de potencial, como la que generan estas placas, da origen a un movimiento de cargas. Esto genera una corriente, dada por la llamada ley de Ohm, la cual enuncia una relación de proporcionalidad entre la diferencia de potencial y la corriente. La constante de proporcionalidad es la resistencia del medio conductor donde se mueven las cargas.

**Problema 4.2.7.** *Escoja una aplicación de los capacitores (consulte circuitos RC en textos*

de física) en áreas como medicina, ingeniería biomédica, biología, química, etc. Lleve a cabo una exposición del tema elegido individual o en grupo (de preferencia consulte fuentes en idioma inglés).

Como se mencionó anteriormente, los resultados para el caso electrostático son extrapolables al caso gravitacional con la salvedad de que sólo se considera una fuerza atractiva. En el siguiente problema se abordará el campo generado por una distribución esférica de masa.

**Problema 4.2.8.** *Utilice la ley de Gauss para encontrar el campo generado por una distribución de masa esférica con densidad uniforme. Debe obtener la dependencia con la distancia desde el punto donde se mide el campo al centro de la esfera, incluso para distancias menores que su radio. Note cómo se elimina la singularidad en el origen al considerar un objeto extendido en vez de uno puntual.*

Para finalizar esta parte, llevaremos a cabo un procedimiento similar al desarrollado para obtener la expresión para el gradiente en coordenadas generalizadas. Esto es, buscamos un operador "div" que permita sostener el resultado

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

cuando se utilicen coordenadas generalizadas. Para ello, regresaremos a la demostración del teorema, en particular a las ecs. (4.2.4) - (4.2.6). Primeramente notamos que los cubos diferenciales estarán dados por incrementos de  $h_{1i}q_i$  a  $h_{1i}q_i + \Delta h_{1i}q_i$  para cada coordenada. En particular, calculando el flujo que atraviesa una cara con  $q_1$  constante tendríamos la siguiente ecuación, análoga a la ec. (4.2.4)

$$\int_{q_{3i}}^{q_{3i} + \Delta q_{3i}} \int_{q_{2i}}^{q_{2i} + \Delta q_{2i}} [F_1(q_{1i} + \Delta q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}) - F_1(q_{1i}, q_{2i}, q_{3i})] h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (4.2.30)$$

y por lo tanto, sumando la contribución de todas las caras tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{q_{3i}}^{q_{3i}+\Delta q_{3i}} \int_{q_{2i}}^{q_{2i}+\Delta q_{2i}} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) \Big|_{q_1=q_{1i}} \Delta q_{1i} dq_2 dq_3 \right. \\
 &+ \int_{q_{3i}}^{q_{3i}+\Delta q_{3i}} \int_{q_{1i}}^{q_{1i}+\Delta q_{1i}} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2) \Big|_{q_2=q_{2i}} dq_1 \Delta q_{2i} dq_3 \\
 &\left. + \int_{q_{1i}}^{q_{1i}+\Delta q_{1i}} \int_{q_{2i}}^{q_{2i}+\Delta q_{2i}} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \Big|_{q_3=q_{3i}} dq_1 dq_2 \Delta q_{3i} \right\} \quad (4.2.31)
 \end{aligned}$$

Para obtener entonces la integral sobre el volumen, hace falta dividir y multiplicar por  $h_1 h_2 h_3$ , esto es

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{q_{3i}}^{q_{3i}+\Delta q_{3i}} \int_{q_{2i}}^{q_{2i}+\Delta q_{2i}} \int_{q_{1i}}^{q_{1i}+\Delta q_{1i}} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \\
 &\left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right] h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (4.2.32)
 \end{aligned}$$

de forma tal que el teorema de Gauss se sostiene en coordenadas generalizadas como

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int \operatorname{div}(\vec{F}) d\tau \quad (4.2.33)$$

si definimos la divergencia como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right]. \quad (4.2.34)$$

**Problema 4.2.9.** *Obtenga la expresión para el laplaciano en coordenadas cilíndricas y esféricas. Investigue cómo se modifican las soluciones de las ecuaciones que contienen dicho operador, como la ecuación de onda, la ecuación de Laplace o la de Poisson, cuando son escritas en estos sistemas coordenados. ¿Por qué razón conviene utilizar estas coordenadas y no las cartesianas en las cuales el laplaciano parece tener una forma más sencilla?*

### 4.3. Teorema de Stokes

Antes de probar el teorema de Stokes, nos enfocaremos un resultado relacionado llamado el teorema de Green. El mismo se conoce habitualmente como la versión en dos dimensiones del teorema de Stokes.

#### 4.3.1. Teorema de Green

Considérese una región  $D \subset \mathbb{R}^2$  cuya frontera es una curva  $\mathcal{C}$  y un campo vectorial  $C^2$  en  $D$  dado como  $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j}$ , entonces

$$\int_D \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS = \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (4.3.1)$$

Para probar la relación anterior, el razonamiento es muy similar al caso del teorema de Gauss. Partimos de calcular el lado derecho haciendo una partición de la región  $D$  en pequeños cuadros dados por

$$\mathcal{C}_i \rightarrow \begin{cases} x \in [x_i, x_i + \Delta x_i] \\ y \in [y_i, y_i + \Delta y_i] \end{cases} \quad (4.3.2)$$

y, de manera similar al teorema de la divergencia, la integral sobre toda la curva se puede escribir como

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i} \vec{A} \cdot d\vec{s}_i \quad (4.3.3)$$

dado que, como se muestra en la figura 4.3.1, la integral de línea sobre aristas consecutivas se anula y solo quedarán las contribuciones de las aristas externas. Estas últimas a su vez se pegan a la curva  $\mathcal{C}$  y la cubren en su totalidad cuando el número de cuadros en la partición tiende a infinito. Cabe remarcar nuevamente que si la región  $D$  es tal que no se pueda cubrir de esta manera, la cubriremos con una segunda región, por ejemplo un cuadro, y definiremos una función auxiliar que se anule entre  $D$  y el cuadro como en el caso del teorema de Gauss.

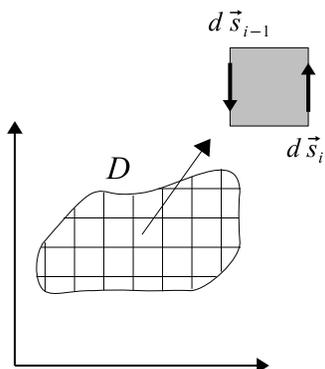


Figura 4.3.1: Partición de la región  $D$  en cuadros y aproximación de la curva  $C$  por segmentos externos  $C_i$ .

Regresando a la integral de línea, cada cuadro se divide en 4 segmentos orientados como se muestra en la figura 4.3.1, esto es

$$\begin{aligned}
 C_{i1} &\rightarrow \begin{cases} x \in [x_i, x_i + \Delta x_i] \\ y = y_i \end{cases} & C_{i2} &\rightarrow \begin{cases} x = x_i + \Delta x_i \\ y \in [y_i, y_i + \Delta y_i] \end{cases} \\
 C_{i3} &\rightarrow \begin{cases} x \in [x_i, x_i + \Delta x_i] \\ y = y_i + \Delta y_i \end{cases} & C_{i4} &\rightarrow \begin{cases} x = x_i \\ y \in [y_i, y_i + \Delta y_i] \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

y la orientación antihoraria implica

$$d\vec{s}_{i1} = dx\hat{i}, \quad d\vec{s}_{i2} = dy\hat{j}, \quad d\vec{s}_{i3} = -dx\hat{i}, \quad d\vec{s}_{i4} = -dy\hat{j} \tag{4.3.5}$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \int_{C_{ij}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_{ij} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} A_1(x, y_i) dx + \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} A_2(x_i + \Delta x_i, y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} A_1(x, y_i + \Delta y_i) dx - \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} A_2(x_i, y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Agrupando términos y multiplicando y dividiendo por  $\Delta x_i$  en la integrales en  $dy$  y por  $\Delta y_i$  en las correspondientes a la variable  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} \frac{A_2(x_i + \Delta x_i, y) - A_2(x_i, y)}{\Delta x_i} \Delta x_i dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \frac{A_1(x, y_i + \Delta y_i) - A_1(x, y_i)}{\Delta y_i} dx \Delta y_i \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Como antes, los integrandos se vuelven las derivadas al tomar  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , ya que la partición debe ser tal que en dicho límite  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$  tiendan a cero. Tenemos entonces

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x_i dy - \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} \frac{\partial A_1}{\partial y} \Big|_{y=y_i} dx \Delta y_i \right\} \quad (4.3.8)$$

donde se reconoce la definición de integral de Riemman y por lo tanto

$$\int_D \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (4.3.9)$$

lo cual concluye la prueba del teorema de Green.

### 4.3.2. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes asevera que el flujo del rotacional de un campo a través de una superficie  $\Gamma$  suave a trozos, donde dicho campo es de clase  $C^1$  se puede expresar en términos

de su integral de línea como

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.3.10)$$

donde  $\mathcal{C}$  es la curva cerrada y suave a trozos que es frontera de  $\Gamma$ . Para verificar que esta igualdad se satisface, se puede emplear el teorema de Green. Nótese que, si el campo  $\vec{F}$  tiene componentes en el plano  $xy$  únicamente, la ec. (4.3.10) en coordenadas cartesianas se reduce a

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.3.11)$$

que es justamente el teorema de Green. Esto nos da una pista de que podremos utilizar dicho resultado para probar el teorema de Stokes. Sin embargo, contrario a lo que uno podría pensar, la prueba no consiste en utilizar el teorema de Green en varias direcciones sino en usarlo en el dominio  $D$  de la parametrización de  $\Gamma$ . Veamos esto con cuidado, comenzando por establecer una parametrización  $\vec{\sigma}(u, v)$  de la superficie  $\Gamma$  que mapea la misma a una región de  $\mathbb{R}^2$ . Como se muestra en la figura 4.3.2, la curva cerrada  $\mathcal{C}$  que es frontera de  $\Gamma$  es mapeada a su vez a otra curva, que llamaremos  $c$  y se encuentra contenida en  $\mathbb{R}^2$ . Para dicha curva consideraremos entonces una parametrización dada por  $\vec{\gamma}(t)$  con  $t \in [a, b]$ . De esta forma tenemos que  $\Gamma$  se genera a través de los puntos de  $\mathbb{R}^3$  dados por

$$\vec{\sigma}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad (u, v) \in D \quad (4.3.12)$$

y la frontera de la región  $D$  por el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a los vectores

$$\vec{\gamma}(t) = u(t)\hat{e}_u + v(t)\hat{e}_v \quad t \in [a, b]. \quad (4.3.13)$$

Ambas parametrizaciones se muestran esquemáticamente en la figura 4.3.2 en donde claramente se ve que la frontera  $C$  de la superficie  $\Gamma$  se parametriza mediante la composición

$$\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t)) = x(u(t), v(t))\hat{i} + y(u(t), v(t))\hat{j} + z(u(t), v(t))\hat{k} \quad t \in [a, b] \quad (4.3.14)$$

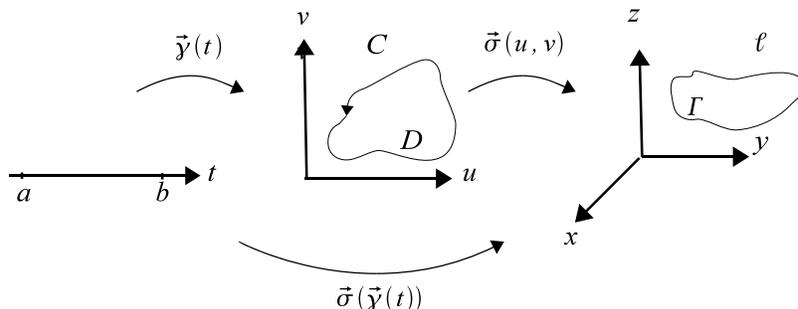


Figura 4.3.2: Parametrización de la superficie  $\Gamma$ .

Obsérvese que es necesario obtener un mapeo desde  $\mathbb{R}$  hasta  $\mathbb{R}^3$  ya que vamos a relacionar una integral de línea con una de flujo a través de una superficie en el espacio. Ahora bien, utilicemos el campo  $\vec{\sigma}$  para escribir el lado izquierdo de la ec. (4.3.10) como

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_D (\nabla \times \vec{F}(u, v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) dudv. \quad (4.3.15)$$

El paso siguiente consiste en escribir la integral del lado derecho en términos de una integral de trayectoria utilizando la siguiente identidad:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \quad (4.3.16)$$

**Problema 4.3.1.** Pruebe la identidad

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \quad (4.3.17)$$

donde  $\vec{\sigma}$  es el vector posición dado (en términos de los parámetros  $u$  y  $v$ ) por  $\vec{\sigma} = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$  y los vectores  $\vec{T}_u$  y  $\vec{T}_v$  son

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{k} \quad (4.3.18)$$

$$\vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{k}. \quad (4.3.19)$$

Introduciendo la ec. (4.3.16) en la ec. (4.3.15) obtenemos

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_D \left[ \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} - \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \right] dudv \quad (4.3.20)$$

Para seguir la prueba, recordemos que tenemos como antecedente el teorema de Green. Éste corresponde a regiones en  $\mathbb{R}^2$  y en este caso lo aplicaremos a  $D$ , con las variables  $(u, v)$ . Para usar dicho teorema, necesitamos escribir los términos en el corchete del lado derecho de la ec. (4.3.20) como una diferencia de derivadas en  $u$  y  $v$ . Usemos entonces que

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right) - \vec{F} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial u \partial v} \quad (4.3.21)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \right) - \vec{F} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\sigma}}{\partial v \partial u} \quad (4.3.22)$$

de donde se obtiene

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_D \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \right) \right] dudv. \quad (4.3.23)$$

*Justifique el paso anterior.*

La ec. (4.3.23) tiene la estructura requerida para aplicar el teorema de Green si definimos un campo

$$\vec{A}(u, v) = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \hat{e}_u + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \hat{e}_v \quad (4.3.24)$$

y por lo tanto

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (4.3.25)$$

con lo cual únicamente quedaría por probar que el lado derecho de la ec. (4.3.25) es justamente la integral de línea de  $\vec{F}$  sobre  $\mathcal{C}$ . Para ello, comencemos con observar que usando la ec. (4.3.13) podemos escribir

$$\int_c \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{A} \cdot \left( \frac{du}{dt} \hat{e}_u + \frac{dv}{dt} \hat{e}_v \right) dt \quad (4.3.26)$$

Por lo tanto, sustituyendo  $\vec{A}$  de la ec. (4.3.24) obtenemos

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{F} \cdot \left( \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \quad (4.3.27)$$

de donde es claro que

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt} dt \quad (4.3.28)$$

y tomando en cuenta la ec. (4.3.14) llegamos a la relación que queríamos probar:

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.3.29)$$

**Problema 4.3.2.** *Verifique que se satisface el teorema de Stokes (calcule por separado ambos lados de la ec. (4.3.10) y muestre que son iguales) para la circulación del campo  $\vec{A}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k}$  sobre la curva  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$  tomando al menos dos superficies diferentes.*

**Problema 4.3.3.** *Muestre que tanto el teorema de Stokes como el de Gauss implican que  $\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$  para cualquier superficie cerrada  $\Gamma$  (si el campo  $\vec{F}$  satisface las hipótesis de dichos teoremas).*

Como en el caso de los operadores gradiente y divergencia, utilizaremos ahora el tercer teorema integral para motivar la expresión del rotacional en coordenadas ortogonales. Para

ello debemos regresar al teorema de Green y modificar la ec. (4.3.6) como

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{q_{1i}}^{q_{1i} + \Delta q_{1i}} (h_1 A_1)(q_1, q_{2i}) dq_1 + \int_{q_{2i}}^{q_{2i} + \Delta q_{2i}} (h_2 A_2)(q_{1i} + \Delta q_{1i}, q_2) dq_2 - \int_{q_{1i}}^{q_{1i} + \Delta q_{1i}} (h_1 A_1)(q_1, q_{2i} + \Delta q_{2i}) dq_1 - \int_{q_{2i}}^{q_{2i} + \Delta q_{2i}} (h_2 A_2)(q_{1i}, q_2) dq_2 \right\} \quad (4.3.30)$$

Siguiendo los pasos análogos a los de las subsecciones 4.1 y 4.2 se obtiene

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int \left[ \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2 \quad (4.3.31)$$

de donde podemos ver que la componente en  $\hat{e}_3$  del rotacional está dada por

$$[\text{rot} \vec{A}]_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_2} \right] \quad (4.3.32)$$

Siguiendo el mismo procedimiento en los planos  $q_2 q_3$  y  $q_1 q_2$  se obtienen las otras dos componentes:

$$[\text{rot} \vec{A}]_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right] \quad (4.3.33)$$

y

$$[\text{rot} \vec{A}]_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_1} \right] \quad (4.3.34)$$

Definimos entonces el rotacional de un campo en coordenadas generalizadas ortogonales como

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &= \frac{\hat{e}_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right] - \frac{\hat{e}_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_3} \right] \\ &+ \frac{\hat{e}_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

**Problema 4.3.4.** Considere el campo vectorial dado por  $\vec{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{j}$ . Exprese  $\vec{F}$  en coordenadas cilíndricas, calcule su rotacional en dichas coordenadas y muestre gráficamente ambos campos. Verifique que se satisface el teorema de Stokes.

**Problema 4.3.5.** Considere un campo vectorial  $\vec{F}(q_1, q_2, q_3)$ , cuyo rotacional no se anula,

tal que  $\vec{F} \cdot \hat{e}_3 = 0$  para todo  $(q_1, q_2, q_3)$ . Muestre que su rotacional es tangente a la curva coordenada  $q_3$  siempre y cuando los productos  $\vec{F} \cdot h_1 \hat{e}_1$  y  $\vec{F} \cdot h_2 \hat{e}_2$  sean independientes de  $q_3$ . Ilustre su resultado considerando un campo perpendicular al eje  $z$  en coordenadas cilíndricas.

**Problema 4.3.6.** Utilizando coordenadas cilíndricas obtenga

(a)  $\nabla f$  donde  $f(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi + z \tan \varphi$

(b)  $\nabla \cdot \vec{F}$  y  $\nabla \times \vec{F}$  donde  $\vec{F} = \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} (\rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z)$ .

## 4.4. Aplicación: las ecuaciones de Maxwell

Ya hemos introducido algunos elementos del electromagnetismo como aplicaciones del cálculo vectorial a través de la teoría de potenciales. En esta parte mostraremos, sin fundamentar, el sistema completo de ecuaciones que lo gobiernan y exploraremos algunas de sus implicaciones utilizando las propiedades de los operadores diferenciales, así como los teoremas integrales.

El electromagnetismo comprende dos tipos de fenómenos estrechamente relacionados, el eléctrico y el magnético. Realmente, ambos son parte de un mismo fenómeno llamado electromagnetismo. Los efectos eléctricos fueron ya introducidos y hablamos del campo eléctrico como el originado por una carga o una distribución de cargas que generan un campo de fuerzas en su cercanía. Por otra parte, el campo magnético es originado ya sea por materiales magnetizados o por cargas en movimiento, esto es corrientes eléctricas. Las ecuaciones que especifican las relaciones entre estos campos y sus fuentes son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (4.4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.4.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.4.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.4.4)$$

Aquí  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son el campo eléctrico y el magnético respectivamente. La densidad de carga está denotada por  $\rho$ , la de corriente por  $\vec{J}$  mientras que  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  son constantes y la variable  $t$  es el tiempo. Si todas las partículas tienen la misma carga  $q$  y se desplazan a una velocidad  $\vec{u}$ , la corriente está dada por  $\vec{J} = q\vec{u}$ . Si existen portadores de carga de ambos signos, la corriente estará dada por la diferencia de corrientes, positiva y negativa.

**Problema 4.4.1.** *Demuestre que el conjunto de ecuaciones (4.4.1-4.4.4) es consistente con una ecuación de continuidad para la carga eléctrica (suponga que los portadores de carga son idénticos).*

**Problema 4.4.2.** *Muestre que en ausencia de carga y corriente, los campos eléctrico y magnético satisfacen una ecuación de onda, con velocidad de propagación  $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ , esto es*

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.4.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (4.4.6)$$

En presencia de fuentes, es posible establecer ecuaciones de onda inhomogéneas para los campos eléctrico y magnético. Sin embargo, resulta útil introducir los potenciales  $\vec{A}$  y  $\varphi$  por medio de las ecuaciones:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.4.7)$$

y

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.4.8)$$

Nótese que el caso  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , visto anteriormente, es un caso particular de estas relaciones. A dicho campo se le llama electrostático dado que es el que corresponde a un campo independiente del tiempo, estático. Estas definiciones permiten reducir el número de incógnitas en las ecuaciones de Maxwell y permite desacoplar el sistema para obtener cuatro ecuaciones

de onda, esta vez para los potenciales, dadas por:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_o \vec{J} \quad (4.4.9)$$

y

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_o}. \quad (4.4.10)$$

**Problema 4.4.3.** *Utilice la norma de Lorentz*

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.4.11)$$

para obtener las ecs. (4.4.9) y (4.4.10) a partir de las ecuaciones de Maxwell y las definiciones dadas en las ecs. (4.4.7) y (4.4.8).

Este resultado será retomado en la última sección de estas notas.

Regresando a la versión vectorial de las ecuaciones de Maxwell, dada por las ecs. (4.4.1)-(4.4.4), obtendremos la forma integral del sistema usando los teoremas vistos en esta sección. El caso de la ley de Gauss para el campo eléctrico ya fue explorado en la Sección 4.1, aquí lo revisaremos brevemente. Partiendo de la ec. (4.4.1), escogeremos una superficie cerrada  $\Gamma$  que contenga un volumen  $V$  e integraremos ambos lados de la ecuación en la región  $V$  como sigue

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_o} d\tau \quad (4.4.12)$$

Como  $\rho$  es la densidad de carga, es decir carga por unidad de volumen, al integrar en  $V$  obtendremos la carga total encerrada en dicha región, que llamaremos  $Q_V$ . Por otra parte, usando el teorema de Gauss del lado izquierdo de la ec. (4.4.12) obtenemos el flujo del campo  $\vec{E}$  a través de la superficie  $\Gamma$ . Por lo tanto, obtenemos la forma integral de la ley de Gauss como

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_o} \quad (4.4.13)$$

De forma similar, vemos que para la ec. (4.4.2) obtenemos

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.4.14)$$

Esta ecuación refleja el hecho de que no existe carga magnética aislada, los llamados monopolos magnéticos no han sido detectados al menos hasta ahora. Esto se traduce en una restricción geométrica sobre el campo a partir de la cual el flujo neto del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada se debe anular.

Para las otras dos ecuaciones, aplicaremos el teorema de Stokes. La ec. (4.4.3) es la llamada ley de Faraday, o ley de inducción. Consideremos una superficie  $\Gamma$  delimitada por una curva cerrada  $\mathcal{C}$  y calculemos el flujo a través de  $\Gamma$  a ambos lados de la ecuación:

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.4.15)$$

y usando el teorema de Stokes del lado izquierdo obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.4.16)$$

Por lo tanto, la ley de inducción dice que la circulación del campo eléctrico es afectada por una variación del flujo de campo magnético. Por ello se habla de inducción, ya que es posible generar un campo eléctrico a partir de tener un flujo de campo magnético variable que se puede obtener ya sea cambiando la intensidad del campo, su dirección relativa a la superficie o la cantidad del mismo que la atraviesa. En este fenómeno se basan dispositivos tan fundamentales como los transformadores y generadores. Se invita al lector interesado a investigar el funcionamiento de los mismos en un texto de física básica.

La última ecuación, la ec. (4.4.4), es la llamada ley de Ampère-Maxwell. Haciendo un

procedimiento análogo al anterior, obtenemos

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.4.17)$$

donde  $I = \int_\Gamma \vec{J} \cdot d\vec{S}$  es la corriente total que atraviesa la superficie  $\Gamma$ , de forma equivalente, la corriente que queda encerrada por la curva  $C$ .

**Problema 4.4.4.** Use la ec. (4.4.17) para mostrar que el campo magnético generado por una línea de corriente  $I$ , a una distancia  $d$  de la misma, tiene magnitud

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi d}$$

y las líneas de campo correspondientes son círculos concéntricos.

Las ecs. (4.4.13), (4.4.15), (4.4.16) y (4.4.17) son las ecuaciones de Maxwell en forma integral y de ellas resulta mucho más directa la interpretación del contenido físico de las mismas.

## 4.5. Campos conservativos

En esta parte, nos enfocaremos en las propiedades de los campos que se generan a partir de gradientes de campos escalares y exploraremos algunos ejemplos relevantes. La importancia de este tipo de campos ya se discutió anteriormente y se observó que se encuentran los fenómenos gravitacional y electrostático.

Un campo conservativo es aquel que se puede escribir como el gradiente de un campo escalar, al que se le llama potencial. Si el campo conservativo en cuestión es un campo que representa una fuerza, sabemos que las trayectorias de las partículas puntuales sometidas a los efectos de dicho campo son tales que la energía mecánica se conserva en ausencia de otras fuerzas. Sabemos además que el campo tiene la dirección perpendicular a las superficies de

potencial constante, de forma tal que las partículas tenderán a moverse siguiendo dicha dirección (la del gradiente del potencial). De este hecho se desprende que podemos caracterizar el espacio a partir de los valores del campo escalar y las partículas se moverán en la dirección en la cual disminuye el mismo, esto se deriva directamente de la relación

$$\vec{F} = -\nabla\varphi.$$

Un ejemplo muy familiar para todos es un contacto eléctrico. Entre las entradas del mismo se sostiene de manera constante una diferencia de potencial llamado voltaje. Al conectar los extremos de un circuito, automáticamente se establece una corriente. A través de ella se alimenta el dispositivo que se haya conectado.

Las propiedades que se mencionan en el párrafo anterior ya fueron discutidas en varias partes de este texto. En esta sección estableceremos formalmente el siguiente resultado para campos vectoriales. Consideremos un campo vectorial  $\vec{F}$  de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$  (a lo sumo a excepción de un número finito de puntos), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) La integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de una curva suave y cerrada (que no toque los puntos conflictivos de  $\vec{F}$ ) es cero.
- b) La integral de línea de  $\vec{F}$  es la misma para cualquier trayectoria suave a trozos cuyos extremos coincidan (y que no toque los puntos conflictivos de  $\vec{F}$ ).
- c) Existe un campo escalar  $\varphi$  de clase  $C^2$  tal que  $\vec{F} = -\nabla\varphi$ .
- d)  $\nabla \times \vec{F} = 0$ .

Para probar la equivalencia, comenzaremos por ver que (a) implica (b). Para ello, tracemos una curva  $\mathcal{C}$  cerrada que pase por los extremos de las curvas en cuestión. La integral sobre esta curva es cero, por la hipótesis (a). Dividamos esta curva cerrada  $\mathcal{C}$  en dos tramos como se muestra en la figura 4.5.1.

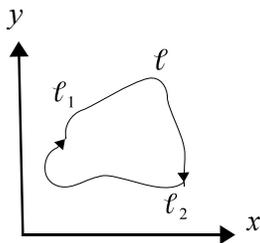


Figura 4.5.1: Curva cerrada como unión de dos curvas.

De esta forma tenemos

$$0 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Si llamamos  $C_2^-$  a la curva  $C_2$  con la orientación opuesta tendremos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0,$$

por lo cual

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

lo que prueba (b) ya que  $C_1$  y  $C_2^-$  son dos curvas arbitrarias cuyos extremos coinciden. Sigue ver que (b) implica (c), para lo cual consideramos una curva simple  $C$  que une el origen y un punto genérico  $(x, y, z)$ , esto sin perder generalidad ya que el origen se puede mover utilizando una traslación. Sea  $\varphi$  dado por la integral

$$\varphi(x, y, z) = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

la cual, al ser independiente de la trayectoria (inciso (b)), puede ser calculada usando diferentes curvas que unan los extremos de  $C$ . Para probar que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$ , si  $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ ,

consideramos una curva compuesta por tres segmentos rectos como sigue

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 & \text{dada por } \vec{\gamma}_1(t) = t\hat{k} & 0 \leq t \leq z \\ \mathcal{C}_2 & \text{dada por } \vec{\gamma}_2(t) = t\hat{j} + z\hat{k} & 0 \leq t \leq y \\ \mathcal{C}_3 & \text{dada por } \vec{\gamma}_3(t) = t\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} & 0 \leq t \leq x, \end{cases}$$

la cual avanza al punto  $(0, 0, z)$  sobre el eje  $z$ , luego se desplaza al punto  $(0, y, z)$  en dirección paralela al eje  $y$  en el plano  $zy$  y finalmente llega a  $(x, y, z)$  avanzando una distancia  $x$  en la dirección  $\hat{i}$ . Podemos escribir entonces  $\varphi$  como

$$\varphi(x, y, z) = - \int_0^z F_3(0, 0, t) dt - \int_0^y F_2(0, t, z) dt - \int_0^x F_1(t, y, z) dt,$$

de donde claramente se obtiene  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$ . Tomando curvas de forma análoga se puede ver que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3$  y por lo tanto  $\vec{F} = -\nabla\varphi$ , lo cual termina la prueba de esta parte. Claramente, teniendo que  $\vec{F}$  se puede escribir como un gradiente, se sigue que su rotacional es cero ya que se probó anteriormente (ver problema 3.1.9) que

$$\nabla \times (\nabla f) = 0,$$

siempre que  $f$  sea  $C^2$ , lo cual se cumple ya que  $\vec{F}$  es  $C^1$ . Para cerrar la cadena de equivalencias, falta únicamente probar que  $\nabla \times \vec{F}$  implica que la integral en una curva cerrada suave es siempre nula. Para ello tomemos una curva arbitraria, cerrada y suave, y sea  $\Gamma$  una superficie cualquiera cuya frontera sea  $\mathcal{C}$  de forma tal que ni  $\mathcal{C}$  ni  $\Gamma$  toquen los posibles puntos conflictivos de  $\vec{F}$ . Por el teorema de Stokes tenemos entonces que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.5.1)$$

dado que  $\nabla \times \vec{F} = 0$  por hipótesis. Esto termina la prueba de que todas las aseveracio-

nes son equivalentes. Este resultado es sumamente útil ya que verificando cualquiera de las condiciones anteriores para un campo  $\vec{F}$  tendremos que se satisface el resto, así como todas las propiedades adicionales que hemos discutido para los campos que son conservativos. Sin embargo, hay que ser muy cuidadosos con las hipótesis ya que la presencia de puntos en los cuales el campo no existe y/o pierde continuidad puede invalidar los enunciados como se mostrará en el siguiente problema.

**Problema 4.5.1.** *Considere el campo dado por*

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j}.$$

- a) *Verifique que el rotacional de  $\vec{F}$  se anula para todo  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ .*
- b) *Muestre que la integral de línea sobre una curva cerrada cualquiera que no encierre al origen es cero (sugerencia: use el teorema de Green).*
- c) *Calcule la integral de línea alrededor del círculo unitario centrado en el origen.*
- d) *Dado que la integral de línea sobre cualquier curva cerrada no se anula (el inciso anterior debe haber resultado  $2\pi$ ) sabemos que no podremos escribir  $\vec{F}$  como gradiente de un potencial. Sin embargo, restringiendo el dominio del campo para evitar el origen, esto es posible. Encuentre entonces un campo escalar tal que su gradiente sea el campo  $\vec{F}$  en un dominio restringido.*

Con este resultado cerramos la parte de cálculo vectorial. Las aplicaciones del mismo a la física y otras ramas de la ciencia se encontrarán en otros cursos y se pueden consultar en varios textos de dichos temas. Consideramos de particular importancia tener siempre en mente los teoremas integrales, así como los operadores diferenciales e integrales en coordenadas curvilíneas, ya que los mismos se usarán repetidamente para obtener las ecuaciones diferenciales o sistemas de las mismas que modelan la gran mayoría de los fenómenos naturales.

En el siguiente y último capítulo se verá una introducción a tensores con algunos elementos de análisis tensorial a nivel básico. En dicha parte se abandonarán un poco las aplicaciones

ya que las mismas son parte de cursos más avanzados como mecánica de fluidos, gravitación y cosmología entre otros.

# Capítulo 5

## Introducción al cálculo tensorial

A lo largo de estas notas, nos hemos encontrado con el concepto de tensor en más de una ocasión. Primeramente al hablar de la diferencia en las leyes de transformación para vectores y algunos campos (en particular campo gradiente) y en una segunda ocasión al pensar en cómo podríamos calcular gradientes de campos vectoriales. Ambos aspectos serán cubiertos en esta última parte, en la que veremos una breve y muy general introducción al cálculo tensorial. Ésta pretende dar los elementos básicos que caracterizan a estos objetos como su definición, sus operaciones básicas y su relación con la geometría del espacio a partir de la derivada covariante. El análisis tensorial y sus aplicaciones es un tema muy interesante y constituye una de las ramas más elegantes de la física matemática. Esperamos que estas páginas sean útiles para dar un panorama general del tema que sirva de antecedente para ahondar más en el mismo en otros cursos o textos que interesen al lector.

## 5.1. Leyes de transformación: tensores contravariantes y covariantes de primer rango

En la Sección 1.3, vimos que dada una transformación lineal que lleva de un sistema coordinado  $S$  a un sistema  $\bar{S}$ , el vector posición sigue la ley de transformación

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} x_j \quad (5.1.1)$$

mientras que las componentes del gradiente de un campo escalar  $F_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$  se transforman como

$$\bar{F}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} F_j. \quad (5.1.2)$$

Discutimos en su momento, porqué esta diferencia es crucial en la física. Las leyes naturales están expresadas en términos de vectores y campos y por lo tanto no permanecerán invariantes ante un cambio de sistema de referencia, lo cual contradice el principio de relatividad<sup>1</sup>.

Habiendo reconocido que los objetos que usualmente llamamos vectores pueden transformarse de dos formas diferentes, los llamaremos tensores y los distinguiremos según la ley de transformación que siguen. Definimos un tensor contravariante de primer rango como un objeto cuyas componentes se transforman como

$$\bar{A}^\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (5.1.3)$$

y un tensor covariante de primer rango cuando la ley de transformación es

$$\bar{B}_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} B_\nu \quad (5.1.4)$$

Nótese que se utilizan subíndices y supraíndices para distinguir ambos tipos de tensores. Para simplificar la notación introduciremos la convención de suma de Einstein que consiste

---

<sup>1</sup>Véase el problema 1.1.3

en eliminar el símbolo de suma y se sobreentiende que los términos se sumarán, siempre que un subíndice y supraíndice se repitan.

**Problema 5.1.1.** *Considere el sistema de ecuaciones dado por  $y_i = a_i^j x_j$  con  $i, j = 1, 2, 3$ .*

*(a) Escriba explícitamente las ecuaciones que conforman dicho sistema. (b) Si  $x_i = b_{ij} z^j$ , escriba las variables  $y$  en términos de las variables  $z$ .*

De esta forma podemos escribir

$$\bar{A}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (5.1.5)$$

$$\bar{B}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} B_\nu. \quad (5.1.6)$$

De las definiciones anteriores, vemos que el vector posición es un tensor por naturaleza contravariante mientras que el gradiente de un campo escalar es un tensor covariante. El campo escalar que estamos considerando es un invariante tal que

$$\bar{\phi} = \phi \quad (5.1.7)$$

y se denomina tensor de rango cero o escalar. De este punto en adelante, se utilizará el término escalar para objetos invariantes de rango cero únicamente. El que  $\phi$  sea invariante proviene de que estamos suponiendo que visto desde cualquier sistema de referencia su valor en un punto dado no cambia y no del hecho de que sea un número real. Esto es, si tomamos por ejemplo una de las componentes del vector posición, por ejemplo  $z$ , ésta es un escalar en el sentido de su dimensión, sin embargo no es un invariante ya que se transforma como lo indica la ec. (5.1.5) con  $A^\mu = x^\mu$  y  $\mu = 3$ . Este es un punto muy importante y debe ser tenido en mente: las componentes de los tensores, por más que son reales, no son (necesariamente) invariantes.

**Problema 5.1.2.** *Las componentes covariantes de un tensor de primer rango en coordenadas cartesianas son  $A_1 = x + y$ ,  $A_2 = yz$  y  $A_3 = x^2$ . Encuentre las componentes covariantes en coordenadas esféricas utilizando la transformación dada por la ec. (5.1.6).*

Las operaciones básicas para tensores de primer rango y de rango cero son relativamente intuitivas dado que ya conocemos la suma y productos para vectores y escalares. Se dejarán aquí como problema.

**Problema 5.1.3.** *Muestre que la suma de dos tensores covariantes de primer rango es un tensor covariante de primer rango. Repita el ejercicio para contravariantes y para rango cero.*

La generalización del producto punto a tensores se denomina contracción y consiste en sumar, con dos índices iguales, los productos de las componentes de un tensor covariante y uno contravariante, esto es  $A^\mu B_\mu$ . A continuación veremos que esta operación genera un escalar. Es claro que la operación genera un real por su estructura, veamos que el mismo es invariante. Calculemos la contracción en el sistema  $\bar{S}$ :

$$\overline{A^\mu B_\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} A^\nu B_\alpha. \quad (5.1.8)$$

Dado que la convención de suma implica una suma sobre índices repetidos, es claro que éstos son mudos y por lo tanto pueden ser cambiados. Más aún, en la ec. (5.1.8) fue necesario cambiar el índice  $\nu$  por  $\alpha$  en la ley de transformación para  $B$  dada por la ec. (5.1.6) ya que las sumas de  $A$  y  $B$  son independientes. Observemos ahora que

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\alpha \quad (5.1.9)$$

donde la delta de Kronecker es la definida en la Sección 1.1 e indica 0 para índices diferentes y 1 para índices iguales. Introduciendo este resultado en la ec. (5.1.8) obtenemos

$$\overline{A^\mu B_\mu} = \delta_\nu^\alpha A^\nu B_\alpha = A^\nu B_\nu \quad (5.1.10)$$

lo cual prueba la invariancia de la contracción de tensores de segundo rango. Nótese que cuando calculamos el producto escalar en vectores, sumamos los productos de las componentes de objetos puramente contravariantes, en el caso de vectores posición y derivadas del mismo.

**Problema 5.1.4.** *Muestre que la operación  $\sum_{\ell=1}^n A^\ell C^\ell$  no necesariamente genera un invariante.*

Del problema anterior extraemos que la definición que usualmente se considera para longitud o distancia tiene un gran problema: la longitud para dos observadores no es necesariamente la misma. Más adelante veremos cómo se relaciona la contracción con el producto punto que se maneja en  $\mathbb{R}^n$ , aunque en este punto ya se puede vislumbrar que únicamente coincidirán para espacios euclídeos descritos en la base cartesiana.

**Problema 5.1.5.** *Considere el símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ , el cual satisface*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{para } i, j, k \text{ permutaciones cíclicas de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si se repite algún índice} \\ -1 & \text{para } i, j, k \text{ permutaciones anticíclicas de } 1, 2, 3, \end{cases}$$

*y utilice el mismo para escribir una expresión general para el producto cruz de dos vectores tomando los mismos como tensores de primer rango contravariantes.*

**Problema 5.1.6.** *Utilice el símbolo de Levi-Civita para mostrar la identidad  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$*

Tenemos entonces tensores de rango cero que son invariantes y tensores de rango uno que pueden ser contravariantes o covariantes según la ley de transformación que sigan. Como operaciones básicas hemos visto la suma por componentes, que genera tensores y la contracción que genera escalares. Existe otra operación de producto, llamada producto directo, que genera objetos de rango superior. Éstos serán definidos y estudiados en la siguiente sección.

## 5.2. Producto directo y tensores de rango superior

Los tensores de primer rango se pueden asociar por pares de manera directa generando tensores de segundo rango. Consideremos dos tensores contravariantes, el producto directo de

ellos se denota como  $A^\mu B^\nu$  y es un objeto que tiene  $n \times n$  componentes, siendo  $n$  la dimensión del espacio. En cierto sentido los podemos pensar como matrices pero recordemos que lo que caracteriza los tensores son sus propiedades de transformación. En este caso vemos que

$$\overline{A^\mu B^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} A^\alpha B^\beta \quad (5.2.1)$$

de forma tal que definimos un tensor covariante de segundo rango como un objeto  $T^{\mu\nu}$  que ante un cambio de sistema coordenado se transforma como

$$\overline{T^{\mu\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (5.2.2)$$

De forma similar, al asociar en producto directo dos tensores covariantes obtenemos un tensor covariante de segundo rango. Esto es, un objeto  $T_{\mu\nu}$  que se transforma como

$$\overline{T_{\mu\nu}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} T_{\alpha\beta}. \quad (5.2.3)$$

Finalmente, podemos obtener también un tensor mixto, el cual obedece a una transformación covariante y una contravariante como sigue

$$\overline{T^\mu{}_\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} T^\alpha{}_\beta. \quad (5.2.4)$$

Nótese como se deja un espacio antes del índice  $\nu$  para indicar que se encuentra en la segunda posición.

**Problema 5.2.1.** *Muestre que la delta de Kronecker  $\delta^a_b$  es un tensor mixto de segundo rango.*

En tensores de segundo rango, podemos hablar de simetría y antisimetría en los índices. Definimos un tensor simétrico como aquel que no varía ante permutaciones de sus índices y antisimétrico como aquel que cambia de signo ante dicha operación. Se probarán algunas propiedades interesantes en el siguiente problema.

**Problema 5.2.2.** Muestre que si  $A^{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico,  $S_{\mu\nu}$  un tensor simétrico y  $V^{\mu\nu}$  un tensor arbitrario se satisfacen las siguientes identidades

a)  $A^{\nu\mu} S_{\mu\nu} = 0$

b)  $V^{\mu\nu} A_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (V^{\nu\mu} - V^{\mu\nu}) A_{\mu\nu}$

c)  $V^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu}) S_{\mu\nu}$ .

De forma análoga se pueden definir tensores de cualquier rango. Serán covariantes o contravariantes únicamente si sus transformaciones son puramente covariantes o contravariantes respectivamente, de lo contrario se llamarán en general mixtos.

**Problema 5.2.3.** Clasifique los siguientes tensores según su rango e indicando si son covariantes, contravariantes o mixtos mediante sus propiedades de transformación

a)  $A^\mu B_{\alpha\mu} T^\gamma_\beta$

b)  $R^\mu_{\beta\gamma\alpha} T^{\alpha\sigma} A_\sigma$

c)  $S_{\alpha\beta} T^{\beta\alpha}$ .

Veamos ahora qué sucede cuando llevamos a cabo una contracción en tensores de rango superior a uno. Consideremos la transformación de la ec. (5.2.4) y tomemos  $\mu = \nu$

$$\overline{T^\mu_\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} T^\alpha_\beta. \quad (5.2.5)$$

Observemos que la transformación resultante es la misma que la del producto escalar y genera una delta. Al resultado se le denomina traza del tensor  $T$  (en analogía con la traza de una matriz) y es un invariante

$$T^\mu_\mu = \sum_{i=1}^n T^i_i \equiv tr(T), \quad \overline{T^\mu_\mu} = T^\mu_\mu. \quad (5.2.6)$$

Si consideramos ahora el producto directo de  $A^\mu$  y  $B^\nu_\mu$  y contraemos los índices obtenemos

$$\overline{A^\mu B^\nu_\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} A^\alpha B^\gamma_\beta \quad (5.2.7)$$

de donde, como  $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta_\alpha^\beta$ ,

$$\overline{A^\mu B^\nu}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\gamma} A^\alpha B^\gamma_\alpha \quad (5.2.8)$$

que es un tensor de primer rango contravariante. Observamos que el contraer índices disminuye el rango: de segundo rango pasamos a rango cero y de tercer rango a primero. Vemos que los índices sobre los que no hay suma son los que realmente determinan el rango de la expresión y se llaman índices libres, a los repetidos se les llama mudos. Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$A^{\mu\alpha} B^\nu_\mu C_{\alpha\beta\gamma} = R^\nu_{\beta\gamma} \quad (5.2.9)$$

vemos que a ambos lados de la igualdad tenemos tensores de tercer rango. Los índices mudos son  $\mu$  y  $\alpha$  mientras que  $\nu$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son índices libres.

### 5.3. Ecuaciones tensoriales y la ley de cocientes

En gran parte, la motivación para trabajar con tensores es la promesa de poder expresar las leyes de la naturaleza, y en particular las ecuaciones que modelan los fenómenos físicos, de forma tal que sean invariantes ante un cambio de sistema coordenado. Debería ser a esta altura relativamente claro que si expresamos estas relaciones en términos de tensores, al momento de hacer un cambio de marco de referencia la forma general de la ecuación no cambiará. Veamos esto con un ejemplo. Demostraremos que si  $A^{\mu\alpha}$ ,  $B_\alpha^\nu$  y  $T^{\mu\nu}$  son tensores y en algún sistema coordenado se satisface la ecuación

$$A^{\mu\alpha} B_\alpha^\nu = T^{\mu\nu} \quad (5.3.1)$$

entonces la misma se satisface en cualquier sistema coordenado. Es decir, todos los observadores sin importar su posición, las coordenadas que usen o su estado de movimiento, estarán de acuerdo en la relación de la ec. (5.3.1), aunque obtengan diferentes valores para cada uno

de los tensores involucrados en la misma.

Para ver que es verdadera la aseveración de arriba, basta con calcular el lado izquierdo de la ec. (5.3.1) en un sistema  $\bar{S}$ , usando que  $A^{\mu\alpha}$  y  $B_{\alpha}{}^{\nu}$  son tensores, esto es

$$\overline{A^{\mu\alpha}B_{\alpha}{}^{\nu}} = \overline{A^{\mu\alpha}} \overline{B_{\alpha}{}^{\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} A^{\gamma\sigma} B_{\epsilon}{}^{\eta}. \quad (5.3.2)$$

Usando que  $\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} = \delta_{\sigma}^{\epsilon}$  e introduciendo la ec. (5.3.1) obtenemos

$$\overline{A^{\mu\alpha}B_{\alpha}{}^{\nu}} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} A^{\gamma\sigma} B_{\sigma}{}^{\eta} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\eta}} T^{\gamma\eta}. \quad (5.3.3)$$

Como  $T^{\gamma\eta}$  es un tensor, al aplicar las dos transformaciones contravariantes del lado derecho obtenemos  $\overline{T^{\mu\nu}}$  y por lo tanto

$$\overline{A^{\mu\alpha}B_{\alpha}{}^{\nu}} = \overline{T^{\mu\nu}} \quad (5.3.4)$$

para un sistema arbitrario. Esto concluye la prueba para este ejemplo. De forma análoga se puede probar la invariancia para cualquier relación entre tensores que esté correctamente escrita. Cuando una ecuación se expresa en términos de tensores, se dice que la misma es *covariante*. De forma similar, cuando hablamos de una teoría covariante nos referimos a un formalismo en el cual todas las cantidades y las relaciones entre ellas son covariantes.

La llamada ley de cocientes es de alguna forma el recíproco de este teorema y constituye un criterio de tensorialidad. Ésta enuncia que, si  $A^{\mu\alpha}$  y  $T^{\mu\nu}$  son tensores y la relación de la ec. (5.3.1) se satisface en todo sistema coordinado, podemos concluir que  $B_{\alpha}{}^{\nu}$  es también un tensor. Como la relación se sostiene en cualquier sistema, consideremos un sistema  $\bar{S}$  arbitrario donde

$$\overline{A^{\mu\alpha}B_{\alpha}{}^{\nu}} = \overline{A^{\mu\alpha}} \overline{B_{\alpha}{}^{\nu}} = \overline{T^{\mu\nu}}. \quad (5.3.5)$$

Como  $A^{\mu\alpha}$  y  $T^{\mu\nu}$  son tensores, podemos escribir sus componentes en el sistema  $\bar{S}$  usando su

ley de transformación, esto es

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\delta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} A^{\delta\sigma} (\overline{B_\alpha^\nu}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} T^{\gamma\eta} \quad (5.3.6)$$

y usando ahora la ec. (5.3.1) obtenemos

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\delta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} A^{\delta\sigma} (\overline{B_\alpha^\nu}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} A^{\gamma\beta} B_\beta^\eta \quad (5.3.7)$$

de donde debemos “despejar”  $(\overline{B_\alpha^\nu})$  para comprobar que  $B_\beta^\eta$  sigue una ley de transformación mixta de segundo rango. Realicemos una contracción en ambos lados de la ecuación con  $\frac{\partial x^\phi}{\partial \bar{x}^\mu}$  (lo cual implica una suma sobre  $\mu$ ), de lo que se obtiene

$$\left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\phi}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} A^{\delta\sigma} (\overline{B_\alpha^\nu}) = \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\phi}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} A^{\gamma\beta} B_\beta^\eta. \quad (5.3.8)$$

Los términos en paréntesis generan deltas, por lo que obtenemos

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} A^{\phi\sigma} (\overline{B_\alpha^\nu}) = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} A^{\phi\beta} B_\beta^\eta. \quad (5.3.9)$$

Como el índice  $\sigma$  del lado izquierdo es mudo, podemos cambiarlo por  $\beta$ , lo cual nos permite escribir

$$A^{\phi\beta} \left( \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \overline{B_\alpha^\nu} - \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} B_\beta^\eta \right) = 0, \quad (5.3.10)$$

siendo  $A^{\phi\beta}$  un tensor arbitrario, podemos concluir que  $B_\beta^\eta$  satisface

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \overline{B_\alpha^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} B_\beta^\eta. \quad (5.3.11)$$

De la ec. (5.3.11) es sencillo obtener la ley de transformación. Observando que  $\beta$  es ahora índice libre y contrayendo con  $\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\delta}$  a ambos lados se obtiene

$$\overline{B_\delta^\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\delta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\eta} B_\beta^\eta \quad (5.3.12)$$

que es la ley de transformación para un tensor mixto de segundo rango.

Del resultado obtenido en esta subsección, debemos resaltar dos puntos. La primer parte del mismo, la directa, nos demuestra que si escribimos las ecuaciones que modelan fenómenos de interés en términos de tensores, las mismas permanecerán invariantes ante un cambio de sistema coordinado y esto hará que la teoría sea covariante. La segunda parte nos facilita un criterio de tensorialidad y a su vez, a través de su demostración, nos ilustra cómo “despejar” tensores. En cierto sentido es un procedimiento similar al que se hace cuando queremos despejar un vector en el sentido de que se realiza una proyección, en este caso una contracción. Es importante notar que esta contracción se puede hacer únicamente con los índices libres de la ecuación, que finalmente son los que dictan la direccionalidad de la misma. Por otro lado observemos que el cambio de índices es válido siempre que los mismos sean mudos.

**Problema 5.3.1.** *Si  $\phi$  es un campo escalar invariante, demuestre que*

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

**Problema 5.3.2.** *Encuentre  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  para  $\phi(r, \theta)$  utilizando la transformación de coordenadas cartesianas a polares.*

**Problema 5.3.3.** *¿Qué implicaciones tiene la ecuación del problema 5.3.1 a la luz de la discusión de esta subsección? ¿Qué puede decir acerca de aquellas ecuaciones en las cuales se involucra la cantidad  $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta}$ ?*

## 5.4. Tensor métrico, componentes físicas y tensoriales

En esta sección definiremos el tensor métrico, el cual está relacionado con la métrica que se introdujo en la Sección 2.3. Sin embargo, aquí lo motivaremos desde otro punto de vista. Sabemos que existen tensores covariantes y contravariantes y que se debe respetar la tensorialidad en las ecuaciones para que las mismas sean covariantes. Ahora bien, cuando tenemos la segunda ley de Newton, por usar un ejemplo sencillo, observamos que de un

lado de la igualdad tenemos la derivada segunda del vector posición con respecto al tiempo. Como el vector posición es de naturaleza contravariante, si consideramos al tiempo como un invariante la aceleración será contravariante. Del otro lado de la igualdad tenemos una fuerza que se podrá escribir en el caso conservativo como el gradiente de un potencial, lo cual es un tensor covariante (ver ecuación 5.1.2). Surge naturalmente entonces la pregunta de cómo podemos sostener la segunda ley de Newton cuando iguala dos tensores de diferente naturaleza. Resulta que esta ley, de la forma que se escribe usualmente, no es covariante pero se puede escribir de forma tal que lo sea. Para lograr esto, basta con tener una forma de poder transformar tensores covariantes en contravariantes y viceversa, de forma tal que podamos escribir

$$m \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = F^\mu \quad (5.4.1)$$

donde  $F^\mu$  es una fuerza que, aún siendo el gradiente de un potencial, es de naturaleza contravariante. En un tono similar, necesitamos poder modificar la naturaleza de un tensor para definir su norma, en el caso de los de primer rango al menos. Sabemos que los vectores de  $\mathbb{R}^n$  son objetos contravariantes y para obtener su norma, calculamos la raíz cuadrada del producto punto del vector consigo mismo. Pero ya mostramos que el producto punto no es en general un invariante mientras que contracción de tensores sí lo es. Por lo tanto, si podemos obtener a partir de un tensor cualquiera  $A_\nu$  su forma contravariante  $A^\nu$  podremos definir ahora sí la norma

$$A \equiv \sqrt{A^\nu A_\nu}. \quad (5.4.2)$$

La discusión anterior motiva la propuesta de un par de objetos que llamaremos  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\zeta^{\mu\nu}$  tales que, para cualquier tensor  $A^\mu$  cuyas componentes covariantes determinan un tensor  $A_\nu$ , tendremos

$$\eta_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad (5.4.3)$$

$$\zeta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu. \quad (5.4.4)$$

Se dice coloquialmente que los tensores que estamos proponiendo suben y bajan índices. Realmente cambian la naturaleza covariante o contravariante de los tensores agregándoles algunos factores que, como veremos, no cambian la esencia de los mismos. Esto es,  $A^\mu$  y  $A_\mu$  son los mismos tensores pero en forma contravariante y covariante respectivamente.

Observemos primeramente que gracias a la ley de cocientes podemos concluir que  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\zeta^{\mu\nu}$  son tensores (dado que  $A^\mu$  y  $A_\mu$  lo son) y por ello podemos pensar en el tensor mixto dado por  $\eta_{\mu\nu}B^{\nu\alpha}$ . Si consideramos  $B^{\nu\alpha} = C^\nu D^\alpha$  obtenemos

$$\eta_{\mu\nu}B^{\nu\alpha} = B_\mu{}^\alpha. \quad (5.4.5)$$

De esta forma, vemos que los tensores que estamos introduciendo bajan, o suben, índices de uno en uno. Si queremos pasar de un tensor puramente contravariante a uno covariante, por ejemplo, haremos la siguiente operación:

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}B^{\beta\mu} = \eta_{\mu\nu}B_\alpha{}^\mu = B_{\alpha\nu} \quad (5.4.6)$$

y de forma análoga se pueden transformar tensores de cualquier rango.

**Problema 5.4.1.** *Escriba la ecuación que relaciona los siguientes tensores*

- a)  $A^\mu{}_\nu \longrightarrow A^{\mu\alpha}$
- b)  $S^\alpha{}_{\beta\gamma} \longrightarrow S^{\alpha\nu}{}_\gamma$
- c)  $R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \longrightarrow R_{\gamma\eta\alpha\beta}$ .

Veremos ahora que los tensores  $\eta_{\mu\nu}$  y  $\zeta^{\mu\nu}$  son inversos, esto es  $\zeta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu} = \delta^\alpha{}_\nu$ . Comencemos por escribir la ec. (5.4.3) usando la ec. (5.4.4) para escribir  $A^\nu$  de la siguiente forma

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu = \eta_{\mu\nu}\zeta^{\nu\alpha}A_\alpha. \quad (5.4.7)$$

Ahora del lado izquierdo podemos escribir  $A_\mu = \delta_\mu^\alpha A_\alpha$  y obtenemos

$$A_\alpha (\delta_\mu^\alpha - \eta_{\mu\nu} \zeta^{\nu\alpha}) = 0 \quad (5.4.8)$$

siendo  $A_\alpha$  arbitrario, de lo cual se deduce

$$\eta_{\mu\nu} \zeta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \quad (5.4.9)$$

que es justamente lo que queríamos probar. Utilizando este resultado, bajemos los índices de  $\zeta^{\mu\nu}$

$$\zeta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\nu\beta} \zeta^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\mu} \delta^\mu_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.4.10)$$

La ecuación anterior prueba que los tensores que bajan y suben índices están formados realmente por las componentes covariantes y contravariantes de un mismo tensor que llamaremos  $g^{\mu\nu}$ . A continuación y para cerrar esta sección, mostraremos que  $g^{\mu\nu}$  es un tensor métrico que corresponde con la métrica que ya se introdujo en la Sección 2.3. Partamos del elemento de línea, claramente un invariante, que escribiremos como

$$ds^2 = dx^\ell dx_\ell \quad (5.4.11)$$

donde  $x^\ell$  son las componentes del vector posición en algún sistema coordenado. Recordemos que el vector posición es por naturaleza contravariante por lo que conviene escribir

$$ds^2 = g_{\ell\mu} dx^\mu dx^\ell \quad (5.4.12)$$

de donde, comparando con la ec. (2.3.14), podemos ver que  $g_{\ell\mu}$  tiene como componentes los coeficientes métricos. Sabemos que en coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo

$$ds^2 = \delta_{\ell\mu} dx^\mu dx^\ell. \quad (5.4.13)$$

Usando que  $g_{\mu\nu}$  es un tensor, podemos escribir en general la métrica para cualquier sistema euclídeo (sin importar las coordenadas) como

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (5.4.14)$$

que es justamente la ec. (2.3.11). Por ello, sin necesidad de hacer cálculos sabemos que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.4.15)$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (5.4.16)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.4.17)$$

para coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas en  $\mathbb{R}^3$  respectivamente.

Una pregunta que surge de manera natural es, cómo se relacionan las componentes tensoriales con las componentes de los vectores que hemos usado hasta ahora, llamadas componentes físicas. Para ver esto, calculemos la norma de un vector y de un tensor de primer rango y comparémoslas. Si llamamos  $\tilde{A}_i$  a las componentes de un vector  $\vec{A}$  y  $A^\nu$  a las componentes del tensor correspondiente tenemos

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \quad (5.4.18)$$

$$A^\nu A_\nu = g_{\nu\mu} A^\nu A^\mu. \quad (5.4.19)$$

En el caso de coordenadas ortogonales, la métrica es diagonal y podemos escribir

$$A^\nu A_\nu = \sum_{i=1}^n (h_i A^i)^2. \quad (5.4.20)$$

Como ambas normas deben coincidir para el caso de cartesianas, definimos las componentes físicas de un tensor como  $\tilde{A}^i = h_i A^i$  (no hay suma en esta expresión). Con esta relación

podremos extraer los valores de diferentes vectores a partir de su expresión covariante.

## 5.5. Derivación covariante

En esta parte veremos un concepto fundamental en el cálculo tensorial: la derivada covariante. Como se mostró anteriormente, el gradiente de un escalar genera un tensor covariante. Dicho de otra forma, al derivar un tensor de rango cero con respecto a uno de primer rango, se obtiene uno de primer rango:

$$\overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}\right)} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta}. \quad (5.5.1)$$

De lo anterior, intuitivamente uno esperaría obtener un tensor de rango dos al derivar uno de rango uno y así sucesivamente. Sin embargo, al transformar la derivada de un tensor  $A_\alpha$  obtenemos

$$\overline{\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\alpha} A_\mu \quad (5.5.2)$$

**Problema 5.5.1.** *Obtenga la ec. (5.5.2), note que este problema es equivalente al problema 5.3.1.*

El primer término de la ec. (5.5.2) corresponde a la ley de transformación de un tensor de segundo rango covariante. El segundo término nos lleva a concluir que la derivada parcial, con respecto a cualquiera de las coordenadas, no es en general un tensor ya que no se transforma de manera adecuada. Exploremos la naturaleza de este segundo término. Para ello, mostraremos que puede ser escrito en términos de unos objetos llamados símbolos de Christoffel, que se definen de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \quad \text{primera especie} \quad (5.5.3)$$

$$\Gamma^\eta_{\alpha\beta} = g^{\eta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{segunda especie.} \quad (5.5.4)$$

Estos objetos no son tensores, por eso son simplemente llamados símbolos. En particular nos interesa la ley de transformación para los de segunda especie, la cual está dada por

$$\overline{\Gamma^\eta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\eta}{\partial x^\varphi} \left[ \frac{\partial^2 x^\varphi}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} + \Gamma^\varphi_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \right]. \quad (5.5.5)$$

**Problema 5.5.2.** *Obtenga la ec. (5.5.5).*

**Problema 5.5.3.** *Encuentre explícitamente, utilizando un programa como Mathematica, los símbolos de Christoffel para la métrica euclídea en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.*

Observemos que la derivada segunda que aparece en el corchete del lado derecho de la ec. (5.5.5) es precisamente el término adicional a la transformada covariante de la ec. (5.5.2). Contrayendo entonces la ec. (5.5.5) con el tensor  $\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\eta}$  podremos escribir dicho término como

$$\frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = \overline{\Gamma^\eta}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\eta} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \quad (5.5.6)$$

y al introducir esta expresión en la ec. (5.5.2), identificando  $\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \bar{x}^\eta} A_\varepsilon = \bar{A}_\eta$ , podemos escribir

$$\left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right) - \overline{\Gamma^\eta}_{\alpha\beta} \bar{A}_\eta = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} A_\eta \right). \quad (5.5.7)$$

De la ec. (5.5.7) vemos que al restar a la derivada parcial la cantidad  $\Gamma^\eta_{\mu\nu} A_\eta$ , obtenemos un tensor covariante. Se define entonces la derivada covariante como

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} A_\eta. \quad (5.5.8)$$

Junto con la notación de punto y coma para la derivación covariante, se introduce un coma simple para la derivación parcial como

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.5.9)$$

de forma tal que podemos escribir

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} A_{\eta}. \quad (5.5.10)$$

Siguiendo un procedimiento similar se puede probar que para tensores contravariantes tenemos

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta} A^{\eta} \quad (5.5.11)$$

mientras que para tensores de rango superior tenemos, por ejemplo

$$A^{\alpha\beta}_{;\gamma} = A^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} A^{\nu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu} A^{\alpha\nu} \quad (5.5.12)$$

$$A^{\alpha}_{\beta;\gamma} = A^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} A^{\nu}_{\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} A^{\alpha}_{\nu} \quad (5.5.13)$$

$$A^{\alpha\beta}_{\gamma;\eta} = A^{\alpha\beta}_{\gamma,\eta} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\mu} A^{\mu\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\eta\mu} A^{\alpha\mu}_{\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma} A^{\alpha\beta}_{\mu}. \quad (5.5.14)$$

De los ejemplos anteriores se puede ver cómo se establecen las derivadas covariantes para tensores de rango arbitrario agregando tantos términos con símbolos de Christoffel como índices adicionales tenga el tensor.

Utilizando los resultados anteriores, definimos el gradiente de un tensor como su derivada covariante. La parte antisimétrica de este tensor tendrá por componentes las del rotacional del tensor mientras que su traza será su divergencia.

**Problema 5.5.4.** *Establezca una descomposición general para un tensor de segundo rango en una parte simétrica con traza cero, una antisimétrica y un múltiplo de su traza por el tensor métrico (se sugiere realizar un procedimiento similar al que se usa para descomponer matrices). Muestre que en el caso del gradiente de un tensor de primer rango, la parte antisimétrica tiene como componentes las del rotacional mientras que la traza corresponde con su divergencia.*

Los símbolos de Christoffel son también llamados conexión y están relacionados con el trans-

porte paralelo de vectores. Estos conceptos pertenecen a la geometría diferencial y sobrepasan los objetivos de estas notas. Son de suma importancia en geometría de espacios curvos donde la curvatura puede ser expresada en términos de los mismos. Aquí han sido introducidos simplemente como los factores necesarios para incluir un término extra con el objetivo de generar una derivada de un tensor que sea a su vez un tensor. Sus amplias aplicaciones en temas como relatividad general y en geometría riemanniana se verán en cursos más avanzados.

Es claro que los símbolos de Christoffel se anulan en el caso de una métrica cartesiana de un espacio euclídeo. Sin embargo, aún en un espacio plano, son distintos de cero cuando la métrica depende de las coordenadas mismas, por ejemplo en coordenadas esféricas. En estos casos, el derivar covariantemente genera tensores con los factores métricos correspondientes a las coordenadas en cuestión. Se probará esto en el siguiente problema.

**Problema 5.5.5.** *Calcule el gradiente de un tensor de primer rango contravariante y a partir del mismo encuentre las componentes del gradiente por coordenadas, las del rotacional y la divergencia. Muestre las componentes físicas de dichas expresiones coinciden con las establecidas en la Sección 2.3.*

## 5.6. Ejemplo: el espacio de Minkowski

En las secciones anteriores se ha trabajado únicamente con  $\mathbb{R}^3$ . En esta parte veremos un ejemplo de un espacio diferente en el cual la métrica es la llamada métrica de Minkowski. El cálculo tensorial realmente abre las puertas para el análisis de la dinámica de cuerpos en espacios curvos y para el desarrollo de formalismos tan fascinantes, elegantes y útiles como el de la relatividad general. Estos temas se verán en otros cursos para los cuales la herramienta desarrollada en estas notas servirán como base y podrá ser profundizada de una forma menos abrupta. Sin embargo, con los elementos introductorios vistos aquí, podemos analizar hasta cierto punto la relatividad especial y entender fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud así como la unificación de los fenómenos eléctricos y magnéticos.

### 5.6.1. Transformaciones de Lorentz: contracción de la longitud y dilatación del tiempo

**Problema 5.6.1.** *Investigue, de preferencia de fuentes en inglés, las circunstancias que llevaron a la formulación de la relatividad especial. En particular, indague sobre la invariancia de las ecuaciones de Maxwell, la teoría del éter y el experimento de Michelson y Morley. Exponga las mismas en español de forma no técnica con el único fin de contextualizar el formalismo que se verá.*

De la tarea anterior, queda planteada la siguiente situación: requerimos de un formalismo que modele nuestra realidad macroscópica, manteniendo invariantes las ecuaciones de Maxwell y que sea compatible con la segunda parte del principio de relatividad especial, esto es, la invariancia de la velocidad de la luz. Este problema de la física clásica es muy apropiado para ver una primera aplicación de tensores ya que resalta justamente la importancia de las leyes de transformación para vectores y tensores. La transformación galileana, ilustrada en la figura 5.6.1, lleva a las siguientes relaciones

$$\vec{r} = (x - ut, y, z), \quad \bar{t} = t, \quad (5.6.1)$$

de donde

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} - u\hat{i}, \quad \bar{a} = \frac{d\vec{v}}{d\bar{t}} = \vec{a}, \quad (5.6.2)$$

lo cual mantiene invariante la ley de Newton, ya que no afecta a la aceleración, pero lleva a ecuaciones del electromagnetismo que no son invariantes.

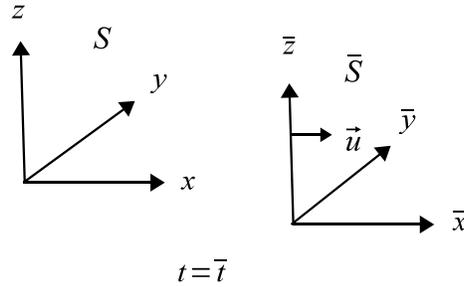


Figura 5.6.1: Transformación galileana.

El principal problema es que las ecuaciones de Maxwell, como se comprobó en el problema 4.4.2, llevan a una ecuación de onda para el campo electromagnético que implica la propagación de ondas en el vacío con velocidad  $c$ , independientemente del sistema de referencia. Sin embargo, la transformación galileana dice que dos observadores que se mueven con una velocidad relativa constante, medirán diferentes velocidades de propagación.

Debe ser claro en este punto que, si el problema que presenta una teoría es referente a la invariancia de sus leyes y resultados dependiendo del sistema de referencia y el estado de movimiento del mismo, se deberá reformular la misma de forma covariante para que sus ecuaciones no dependan del observador. Observemos que en la ecs. (5.6.1) y (5.6.2) existe una suposición poco justificada aunque se nos haga relativamente natural: la invariancia del tiempo. El que el tiempo sea el mismo independientemente del estado de movimiento sabemos que no es correcto. Al quitar esta hipótesis y permitir que el tiempo sea una variable más, que al igual que las otras se transforma, aterrizamos en un espacio físico que ya no tiene tres dimensiones sino cuatro.

Comencemos entonces por formular la mecánica de una partícula puntual de forma covariante, en un espacio en el cual el tiempo no sea absoluto. La posición de un punto en este

espacio será

$$x^\nu = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \quad (5.6.3)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Al estar trabajando en un espacio de cuatro dimensiones los índices (griegos) correrán del 1 al 4. Esto significa que, para especificar el estado de la partícula no tenemos que fijar únicamente sus coordenadas de posición sino que también el tiempo. A los puntos en este espacio se les llama usualmente eventos ya que no están caracterizados únicamente por las coordenadas espaciales sino también por la temporal. Las leyes de transformación para este tensor de posición, que dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell así como la velocidad de la luz, son las llamadas transformaciones de Lorentz. En el caso de dos sistemas que se mueven con una velocidad relativa  $u\hat{i}$ , esta transformación se escribe como

$$\mathcal{L}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (5.6.4)$$

donde hemos escrito de forma matricial la expresión

$$\mathcal{L}^\mu_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.6.5)$$

y se han introducido los siguientes parámetros

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (5.6.6)$$

En el caso de una velocidad relativa  $\vec{u}$  en una dirección arbitraria se puede demostrar que la

transformación de Lorentz tiene la forma

$$\mathcal{L}_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 + (\gamma - 1) \frac{u^1 u^1}{|\vec{u}|^2} & (\gamma - 1) \frac{u^1 u^2}{|\vec{u}|^2} & (\gamma - 1) \frac{u^1 u^3}{|\vec{u}|^2} & -\frac{u^1}{c} \gamma \\ (\gamma - 1) \frac{u^1 u^2}{|\vec{u}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{u^2 u^2}{|\vec{u}|^2} & (\gamma - 1) \frac{u^2 u^3}{|\vec{u}|^2} & -\frac{u^2}{c} \gamma \\ (\gamma - 1) \frac{u^1 u^3}{|\vec{u}|^2} & (\gamma - 1) \frac{u^2 u^3}{|\vec{u}|^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{u^3 u^3}{|\vec{u}|^2} & -\frac{u^3}{c} \gamma \\ -\beta \gamma & -\frac{u^2}{c} \gamma & -\frac{u^3}{c} \gamma & \gamma \end{bmatrix}.$$

La métrica en este espacio está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (5.6.7)$$

y es invariante ante transformaciones de Lorentz.

**Problema 5.6.2.** *Muestre que el elemento de línea  $ds^2$  dado en la ec. (5.6.7) es invariante ante transformaciones de Lorentz.*

Los elementos anteriores forman el llamado grupo de Lorentz, que es un subgrupo del grupo de transformaciones que mantienen invariantes el elemento de línea de la ec. (5.6.7), llamado grupo de Poincaré. La invariancia de dicho elemento, que incluye la duración del intervalo, nos dice que ya no necesariamente la longitud o la duración de un evento serán invariantes sino una combinación de ambas. Esto es, la distancia no es un invariante y el intervalo de tiempo tampoco, sino que el invariante es la distancia espacio-temporal de dos eventos. Esto puede resultar familiar al lector, ya que es ampliamente manejado a nivel no técnico que los intervalos de tiempo se hacen más extensos si la velocidad es cercana a la de la luz. Este fenómeno se puede entender con los elementos mínimos de relatividad especial que se han introducido hasta este punto. Si los intervalos de tiempo han de aumentar, las distancias espaciales han de disminuir de forma tal que la distancia entre dos puntos del espacio-tiempo se mantenga invariante. Se habla entonces de la dilatación del tiempo y contracción de la longitud, que se pueden obtener simplemente de usar las leyes de transformación dadas arriba. Veamos cómo se reduce la longitud. A la longitud “real” de un objeto se le llama longitud

propia y es su medida en el sistema en el cual el objeto se mantiene en reposo. Si dicho sistema es  $S$  y los extremos del objeto están situados en

$$x_0^\nu = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ ct_0 \end{bmatrix} \quad x_1^\nu = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ ct_1 \end{bmatrix} \quad (5.6.8)$$

queremos explorar qué longitud espacial medirá un observador en un sistema  $\bar{S}$  cuando el movimiento entre ambos sistemas sea como el de la figura 5.6.2.

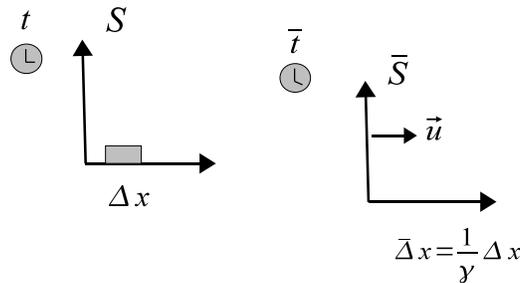


Figura 5.6.2: Contracción de la longitud.

Tenemos entonces, para la distancia  $d$  entre los extremos del objeto

$$d = \Delta x^1 \quad (5.6.9)$$

y

$$\bar{d} = \overline{\Delta x^1} = \mathcal{L}_\mu^1 \Delta x^\mu. \quad (5.6.10)$$

Desarrollando el lado derecho tenemos

$$\bar{d} = \mathcal{L}_1^1 \Delta x^1 + \mathcal{L}_2^1 \Delta x^2 + \mathcal{L}_3^1 \Delta x^3 + \mathcal{L}_4^1 \Delta x^4 = \gamma (\Delta x^1 - \beta \Delta x^4) \quad (5.6.11)$$

o, llamando  $T$  a la distancia temporal medida en  $S$

$$\bar{d} = \gamma(d - \beta T) \quad (5.6.12)$$

donde

$$T = \frac{1}{c} \Delta x^4. \quad (5.6.13)$$

Por otra parte, el intervalo  $\bar{T}$  observado en  $\bar{S}$  debe ser nulo ya que para poder medir el objeto en dicho sistema se deben observar los extremos al mismo tiempo. En el sistema  $S$  esto no fue necesario ya que el objeto se mantiene en reposo en el mismo. Tenemos entonces

$$\bar{T} = \frac{1}{c} \overline{\Delta x^4} = \frac{1}{c} \mathcal{L}^4_{\mu} \Delta x^{\mu} \quad (5.6.14)$$

y desarrollando nuevamente el lado derecho obtenemos

$$\bar{T} = \mathcal{L}_1^4 \Delta x^1 + \mathcal{L}_4^4 \Delta x^4 = \frac{\gamma}{c} (-\beta \Delta x^1 + \Delta x^4) \quad (5.6.15)$$

y como  $\bar{T} = 0$ , tenemos que  $T = \beta d$ . Sustituyendo entonces en la ec. (5.6.12) obtenemos

$$\bar{d} = d\gamma(1 - \beta^2) = \frac{d}{\gamma}. \quad (5.6.16)$$

Como las velocidades pueden variar en un rango  $0 \leq u < c$ , tenemos que  $1 \leq \gamma < \infty$  por lo que  $\bar{d} < d$ . Esto es, un observador en movimiento siempre medirá una longitud menor que la longitud propia (medida únicamente en el sistema en el cual el objeto permanece en reposo).

Por otra parte, podemos ver como los intervalos de tiempo aumentan cuando la medición se realiza en movimiento. Pensemos en un reloj en reposo en un sistema  $S$  y dos eventos en la misma posición, por ejemplo dos tics del reloj. Un observador en un sistema  $\bar{S}$  observará

entre dichos eventos un tiempo

$$\bar{T} = \gamma (-\beta \Delta x^1 + \Delta x^4). \quad (5.6.17)$$

En este caso será  $\Delta x^1 = 0$  y  $\bar{\Delta x}^1 \neq 0$  ya que al estar el sistema  $\bar{S}$  en movimiento, los dos tics no ocurren en el mismo punto del espacio tridimensional. Por lo tanto,

$$\bar{T} = \gamma T > T \quad (5.6.18)$$

esto es, el tiempo observado en movimiento es mayor que el medido en reposo. El tiempo medido en el sistema de referencia donde los eventos en cuestión ocurren en reposo se llama tiempo propio. El tiempo propia y la longitud propia son invariantes ya que todos los observadores están de acuerdo en cuál es el tiempo y la distancia medidas en reposo. Las distancias y tiempo medidos en movimiento variarán según las transformaciones vistas aquí.

Estos fenómenos han dado lugar a muchos ejemplos curiosos y paradojas. Se invita a aquellos lectores interesados a revisarlas a detalle; el ejemplo más popular es el de la paradoja de los gemelos y un buen punto para iniciar la investigación. También vemos que en muchas novelas de ciencia ficción así como en series y películas se utilizan estas consecuencias de la relatividad especial para generar escenarios interesantes. En la vida real la imposibilidad, al menos hasta ahora, de viajar a velocidades tales que las correcciones relativistas sean significativas han hecho que el efecto de contracción de la longitud y dilatación del tiempo no sean experimentados en la vida cotidiana. Sin embargo han sido probados repetidas veces y se ha constatado su relevancia para partículas subatómicas que viajan a velocidades cercanas a las de la luz.

### 5.6.2. Cuadrivector de ímpetu y formulación covariante de la 2da ley de Newton

Como mencionamos en la parte anterior, parece no haber evidencia notoria en la vida cotidiana de la relatividad especial. Decimos que sólo parece ya que, por más que no podemos experimentar en carne propia la dilatación del tiempo, convivimos en todo instante con fenómenos electromagnéticos, los cuales no pueden existir fuera del contexto de la relatividad especial. Como se vio a principio de esta sección, existían dos problemas fundamentales con la física que desencadenaron la formulación de la relatividad especial. Uno de ellos es la invariancia de la velocidad de la luz y el otro la discrepancia entre las leyes de transformación que dejan invariante las leyes de Newton de la mecánica y las de Maxwell del electromagnetismo. Para analizar estos dos puntos, comencemos por desarrollar la dinámica de una partícula en el espacio de Minkowski.

El punto de partida es la expresión para la posición de una partícula en este espacio, dada por la ec. (5.6.3). Si derivamos con respecto al tiempo, obtendremos la velocidad. La pregunta natural en este punto es, ¿con respecto a qué tiempo derivamos? Si derivamos con respecto al tiempo medido en el marco donde se midió la posición dada por  $x^\alpha$  podemos definir la velocidad medida en dicho sistema como

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \quad (5.6.19)$$

sin embargo, se puede mostrar que este objeto no se transforma como un tensor.

**Problema 5.6.3.** *Muestre que el objeto  $v^\alpha$  definido en la ec. (5.6.19) no sigue una ley de transformación contravariante.*

Reflexionando un poco en torno a este resultado, uno puede intuir que el problema con la definición de  $v^\alpha$  es que la combinación de las leyes de transformación de la posición y el tiempo es tal que no produce un objeto contravariante. Es relativamente natural pensar que, para derivar un tensor contravariante y que el resultado mantenga dicha propiedad, la

variable con respecto a la cual se deriva debe ser un invariante y mantenerse igual en la transformación. El tiempo invariante en relación a la dinámica de una partícula es el tiempo propio introducido en la subsección anterior. Este es el tiempo que se mide en el sistema donde la partícula se encuentra en reposo y que es de alguna forma el tiempo que mide la partícula misma (lo denotaremos  $\tau$ ). Se llama cuadvirvelocidad al tensor que se obtiene de derivar la posición, en un sistema arbitrario, con respecto al tiempo propio y se escribe

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (5.6.20)$$

**Problema 5.6.4.** *Muestre que  $u^\alpha$  definido en la ec. (5.6.20) es un tensor contravariante.*

Usando las transformaciones de Lorentz para el tiempo, podemos ver que si estamos en el sistema  $S$  donde se miden  $t$  y  $x^\alpha$  como tiempo y posición de una partícula que se mueve con una velocidad

$$w^\ell = \frac{dx^\ell}{dt} \quad \ell = 1, 2, 3 \quad (5.6.21)$$

podemos escribir la cuadvirvelocidad en el sistema  $S$  como

$$u^\alpha = \gamma_w \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma_w v^\alpha \quad (5.6.22)$$

dado que

$$\tau = \frac{t}{\gamma_w}. \quad (5.6.23)$$

Aquí hemos usado que la velocidad relativa entre el observador y el sistema donde se mide el tiempo propio es justamente la velocidad de la partícula medida desde el sistema  $S$  (ver figura 5.6.3). Como notación, estamos usando el subíndice  $w$  para denotar

$$\gamma_w = \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (5.6.24)$$

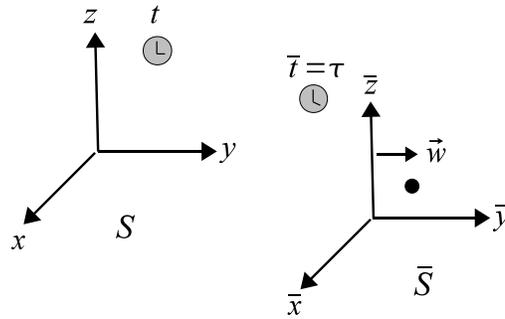


Figura 5.6.3: Tiempo propio y cuadrivelocidad.

Es importante ser muy cuidadoso con la notación al trabajar con velocidades. Aquí usaremos  $w$  para la llamada trivelocidad que es simplemente el vector de velocidad,  $v$  para la cuadrivelocidad asociada a él y  $u$  para el tensor de velocidad. Esto es,

$$w^\ell = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (5.6.25)$$

$$v^\alpha = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ c \end{pmatrix} \quad (5.6.26)$$

$$u^\alpha = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_w w_x \\ \gamma_w w_y \\ \gamma_w w_z \\ \gamma_w c \end{bmatrix}. \quad (5.6.27)$$

En resumen, un observador en  $S$  y uno en  $\bar{S}$ , como en la figura 5.6.3, medirán las siguientes

velocidades

$$\text{Observador en } S : \begin{cases} \text{trivelocidad} & w^l = [w_x, w_y, w_z]^T \\ \text{cuadrivelocidad} & v^\alpha = [w_x, w_y, w_z, c]^T \\ \text{tensor velocidad} & u^\alpha = [\gamma_w w_x, \gamma_w w_y, \gamma_w w_z, \gamma_w c]^T \end{cases}$$

$$\text{Observador en } \bar{S} : \begin{cases} \text{trivelocidad} & \bar{w}^l = [0, 0, 0]^T \\ \text{cuadrivelocidad} & \bar{v}^\alpha = [0, 0, 0, c]^T \\ \text{tensor velocidad} & \bar{u}^\alpha = [0, 0, 0, c]^T \end{cases}$$

**Problema 5.6.5.** *Considere dos observadores en diferentes sistemas de referencias en un espacio-tiempo de Minkowski. Para el observador 1, la cuadrivelocidad de una partícula tiene componentes espaciales  $w^\ell = (c/8, 0, 0)$ .*

- ¿Cuál es el tensor de velocidad de la partícula en el sistema de referencia 1?
- El sistema 2 se mueve con velocidad  $\mathcal{V}^\ell = (c/4, 0, 0)$  con respecto al sistema 1. ¿Cuál es el tensor de velocidad de la partícula en el sistema 2?
- ¿Cuál es el tensor de velocidad medido en el sistema de la partícula?

Ahora bien, teniendo un tensor que representa la velocidad, podemos multiplicar éste por la masa y obtendremos un cuadvivector de ímpetu, esto es

$$p^\mu = m u^\mu \quad (5.6.28)$$

donde la masa es un invariante (cantidad de materia en reposo). De forma tal que podemos escribir la segunda ley de Newton finalmente de forma covariante como

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (5.6.29)$$

Esta ecuación no está referida a ningún sistema en particular, es una expresión general tensorial que se sostiene en cualquier sistema.

Viendo con detenimiento la ec. (5.6.29) vemos que tiene 4 componentes. Las primeras 3 claramente nos darán la ecuación de movimiento para la partícula y si las integramos 2 veces podríamos tener una ecuación para la posición como función del tiempo dado un campo de fuerzas y condiciones iniciales. Exploremos entonces qué nos dice la cuarta ecuación, esto es

$$F^4 = \frac{dp^4}{d\tau} \quad (5.6.30)$$

donde  $p^4 = m\gamma c$ . Para explorar qué es físicamente esta cantidad, calculamos el límite no relativista de la misma, esto es, consideramos velocidades bajas y vemos que

$$p^4 \sim \frac{1}{c} \left( mc^2 + \frac{1}{2}mw^2 \right). \quad (5.6.31)$$

El segundo término es la energía cinética y el primero es la energía en reposo  $mc^2$ , esto es la energía almacenada en un objeto de masa  $m$  aún en estado de reposo y aislado de cualquier potencial. Por lo tanto, la cuarta componente del cuadvivector de ímpetu es la energía dividida entre  $c$ . Siendo

$$E = mc^2\gamma \quad (5.6.32)$$

la energía relativista, tenemos entonces que

$$p^\mu = \begin{bmatrix} mu^1 \\ mu^2 \\ mu^3 \\ E/c \end{bmatrix}. \quad (5.6.33)$$

**Problema 5.6.6.** *Calcule explícitamente  $p^\mu p_\mu$  y demuestre que es un invariante.*

Regresando a la pregunta sobre la cuarta componente de la ec. (5.6.29), es claro que al

ser  $p^4$  proporcional a la energía, ésta tiene que dar cuenta de un balance de dicha cantidad. Tenemos entonces

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = F^4 \quad (5.6.34)$$

donde, si la fuerza es conservativa y la escribimos como  $F_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$  tendremos que  $F_4 = \frac{\partial\phi}{\partial x^4}$ . Si el potencial no depende explícitamente del tiempo, sino únicamente a través de la posición sobre la trayectoria, tenemos

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \phi_{,\mu} v^\mu \quad (5.6.35)$$

que, integrando de ambos lados con respecto al tiempo propio, lleva a la relación trabajo-energía o la conservación de la energía vistas en la Sección 4.1 (usando el cambio de notación  $K \leftrightarrow E$ ).

### 5.6.3. El potencial electromagnético, el tensor de campo y la formulación covariante del electromagnetismo.

En la Sección 4.4, se introdujeron las ecuaciones de Maxwell y se estudiaron brevemente. En esta última parte, veremos cómo realmente los campos eléctricos y magnéticos no sólo están relacionados sino que son parte del mismo fenómeno. En general, ni el campo magnético ni el eléctrico son tensores. Esto se puede ver a partir de las ecs. (4.4.7) y (4.4.8) donde los términos que contienen el potencial vectorial  $\vec{A}$  hacen que las expresiones no sean covariantes. Para construir un tensor que represente dichos campos y se transforme según las transformaciones de Lorentz, comenzaremos por recordar las ecuaciones de onda para los potenciales dadas en la Sección 4.4 (ecs. (4.4.9) y (4.4.10)) y que aquí escribiremos de forma covariante como sigue

$$\square^2 A^\nu = \mu_0 J^\nu \quad (5.6.36)$$

donde  $A^\nu$  es el llamado potencial electromagnético y está dado por

$$A^\nu = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \\ \varphi/c \end{bmatrix} \quad (5.6.37)$$

siendo  $A^\ell$ , con  $\ell = 1, 2, 3$ , las componentes contravariantes del potencial vectorial magnético y  $cA^4$  el potencial electrostático. La cuatro-corriente es  $J^\nu = \rho u^\nu$  o

$$J^\nu = \begin{bmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \\ c\rho \end{bmatrix} \quad (5.6.38)$$

donde  $J^\ell$ , con  $\ell = 1, 2, 3$ , son las componentes de la corriente eléctrica y  $\rho$  la densidad de carga. El operador D'Alembertiano, denotado por  $\square^2$  es una generalización del operador Laplaciano para incluir la derivada temporal y está dado por

$$\square^2 A^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\nu. \quad (5.6.39)$$

**Problema 5.6.7.** *Muestre que el operador d'Alambertiano ( $\square^2 \phi = (\phi_{,\nu})^{,\nu}$ ) en la métrica de Minkowski es un escalar.*

Para establecer un tensor de campo electromagnético, partimos de la base de que las ecuaciones de onda para los campos y potenciales han de ser invariantes (principio de relatividad). Por lo tanto, imponiendo la validez de la ec. (5.6.39) para cualquier observador y siendo tanto el operador D'Alambertiano como la cuatro-corriente objetos covariantes, podemos concluir que el cuatro potencial  $A^\nu$  es un tensor. Basándonos ahora en las definiciones dadas por las

ecs. (4.4.7) y (4.4.8) construimos un tensor dado por

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}. \quad (5.6.40)$$

Para simplificar los cálculos, supondremos que todos los símbolos de Christoffel se anulan de forma tal que, como se probará en el siguiente problema, el tensor de campo electromagnético tiene la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{E^1}{c} \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{E^2}{c} \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6.41)$$

**Problema 5.6.8.** *Obtenga la ec. (5.6.41).*

La existencia de un tensor de campo electromagnético termina de confirmar la estrecha relación entre campos eléctricos y magnéticos. Esto es, el principio de relatividad implica que no son los campos eléctrico y magnético las cantidades físicas relevantes sino la combinación de ambos que se da en  $F^{\mu\nu}$ .

**Problema 5.6.9.** *Use un programa como Mathematica o Matlab para obtener  $\bar{F}^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\alpha^\mu \mathcal{L}_\beta^\nu F^{\alpha\beta}$ .*

Un caso particular de la transformación estudiada en el problema anterior es la llamada ley de Biot Savart. Ésta se concibe originalmente como un resultado experimental en el cual se corrobora que cargas en movimiento generan campos magnéticos. Sin embargo hay un problema muy importante con este enunciado y es que si el observador está en reposo con respecto a la carga, sólo medirá un campo eléctrico mientras que si existe un movimiento relativo entre carga y observador, éste verá un campo eléctrico y uno magnético. Esto va claramente en contra del principio de relatividad. La solución a este problema está claramente en la relatividad especial y radica en que campos eléctricos y magnéticos son una misma entidad. Un campo que se observa como eléctrico en un sistema, se manifestará como eléctrico y magnético en otro!

**Problema 5.6.10.** a) Muestre que para una carga  $Q$  en reposo en un sistema  $S$  situada en un punto a una distancia  $r$  del origen del mismo, el tensor de campo electromagnético tiene la siguiente forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} z \\ -\frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} x & -\frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} y & -\frac{1}{c} \frac{kQ}{r^3} z & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.42)$$

donde  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

b) Considere un sistema  $\bar{S}$  que se desplaza a una velocidad  $\vec{w}$  con respecto a  $S$  con  $w \ll c$ . Muestre que en este caso, la transformación de Lorentz se puede aproximar por

$$\mathcal{L}_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta^1 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta^2 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta^3 \\ -\beta^1 & -\beta^2 & -\beta^3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6.43)$$

c) Obtenga el campo magnético medido en el sistema  $\bar{S}$  usando la transformación del inciso anterior y compare con la ley de Biot-Savart dada por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{w} \times \vec{r}}{r^2}. \quad (5.6.44)$$

Para finalizar con este ejemplo, usaremos los tensores que hemos construido para establecer la forma covariante de la ecuación de movimiento para cargas y las ecuaciones de Maxwell. La fuerza que actúa sobre una partícula con carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$  en presencia de un campo electromagnético está dada en forma vectorial como

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (5.6.45)$$

Ahora bien, hemos establecido que la forma covariante de la segunda ley de Newton está dada por la ec. (5.6.29) donde debemos insertar una versión covariante de la fuerza dada por la ec. (5.6.45) del lado izquierdo. Tenemos dos tensores para ello, el tensor de campo  $F^{\mu\nu}$  y la cuadrivelocidad de la partícula  $u_\nu$ . Como se verificará en el siguiente problema, la contracción de ambos tensores lleva justamente a la expresión correcta por lo cual, escribimos la ecuación de movimiento para una partícula cargada como

$$qF^{\mu\nu}u_\nu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (5.6.46)$$

y para el caso de una distribución continua de carga podemos escribir

$$F^{\mu\nu}J_\nu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (5.6.47)$$

**Problema 5.6.11.** *Verificar que el lado derecho de la ec. (5.6.46) corresponde con la ec. (5.6.45) en el límite  $w \ll c$ .*

Por último, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como

$$F_{\mu\nu;\alpha} + F_{\alpha\mu;\nu} + F_{\nu\alpha;\mu} = 0 \quad (5.6.48)$$

$$F_{\mu;\nu}^\nu = -\mu_o J_\mu. \quad (5.6.49)$$

La justificación de las formas anteriores corresponde a cursos más avanzados. Aquí únicamente se verificará que corresponden con las ecs. (4.4.1) a (4.4.4).

**Problema 5.6.12.** *Verificar que las ecs. (5.6.48) y (5.6.49) corresponden con la ecs. (4.4.2, 4.4.3) y (4.4.1, 4.4.4) respectivamente.*

De esta forma, probamos que es posible formular el electromagnetismo de forma covariante. Las ecs.(5.6.48) y (5.6.49) no están ligadas a ningún observador en particular sino que son válidas en cualquier sistema de referencia.

Como comentario final, nos gustaría resaltar que el verdadero poderío del cálculo tensorial se ve al introducir espacio-tiempos curvos en los cuales se puede formular una teoría gravitacional sin recurrir al concepto de fuerzas. Esperamos que estas notas y en particular este último ejemplo sirvan de motivación para que el alumno interesado en la física matemática se acerque a un curso de gravitación y/o cosmología o consulte textos de estos temas, incluso a nivel divulgación, que permitan ahondar en el tema.

# Bibliografía

- [1] J. E. Marsden & A. J. Tromba, Cálculo Vectorial 5ta. Ed. (Prentice Hall, España 2004).
- [2] C. Pita Ruiz, Cálculo Vectorial (Prentice Hall Hispanoamericana, México 1995).
- [3] T. M. Apostol, Calculus Vol. 2, 2da. Ed. (John Wiley & Sons, USA 1969).
- [4] M. Bowen & C.-C. Wang, Introduction to Vectors and Tensors 2da. Ed. (Dover, USA 2008).
- [5] G. B. Arfken & H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, 7th Ed. (Academic Press, USA 2012).
- [6] R. Aris, Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics (Dover, Moscu 1990).
- [7] I. S. Sokolnikoff, Tensor Analysis (John Wiley & Sons, USA 1951).
- [8] R. A. Serway & J. W. Jewett Jr., Física para Ciencias e Ingenierías (Cengage Learning, México 2008).
- [9] R. P. Feynman, The Feynman Lectures on Physics (Pearson Addison Wesley, USA 2006).  
En línea en <http://www.feynmanlectures.caltech.edu> .
- [10] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, (John Wiley & Sons, USA 1972).
- [11] P.B. Gusiátnikov, S.V. Reznichemko, Algebra Vectorial con ejemplos y problemas, (Ed. Mir Moscú, URSS 1985).

- [12] H. N. Zbigniew, *Calculus un 3D: Geometry, Vectors and Multivariate Calculus*, (Tufts University, USA 2010).
- [13] Bento de Jesus Caraca, *Cálculo Vectorial*, (Lisboa, 1960).
- [14] E. Braun, *Física 2: Electricidad y Magnetismo*, (Trillas, México 1993).
- [15] J. H. Heinbockel, *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, (Old Dominion University, USA 1996).