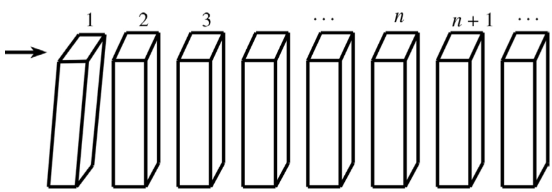
Material de apoyo para la UEA Matemáticas Discretas I

Mtro. Julián Fresán Figueroa
Dr. Diego González Moreno
Dra. Mika Olsen



$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i.$$

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Obra ganadora del Tercer Concurso para la publicación de libros de texto y materiales de apoyo a la impartición de los programas de estudio de las licenciaturas que ofrece la Unidad Cuajimalpa

Material de apoyo para la UEA

Matemáticas Discretas I

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

1)Material de apoyo para la UEA Matemáticas discretas I
Clasificación Dewey: 004.0151 F74
Clasificación LC: QA76.9.M35 F74
Fresán, Julián
Material de apoyo a la UEA : Matemáticas discretas I / Julián Fresán, Diego González Moreno y Mika Olsen . – Ciudad de México : UAM, Unidad Cuajimalpa, 2017.
111 p. : il. col., diagrs. tablas ; 17x24 cm.

ISBN: 978-607-28-1098-3

1.Ciencias de la computación – Matemáticas – Libros de texto. 2. Lógica matemática – Libros de texto. 3. Teoría de conjuntos – Libros de texto. 4. Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Cuajimalpa – Planes de estudio.

I. González Moreno, Diego, coaut. II. Olsen, Mika, coaut.

Esta obra fue dictaminada positivamente por pares académicos mediante el sistema doble ciego y evaluada para su publicación por el Consejo Editorial de la UAM Unidad Cuajimalpa.

Avenida Vasco de Quiroga 4871
Col. Santa Fe Cuajimalpa, delegación Cuajimalpa de Morelos
C.P. 05348, Ciudad de México (Tel: 5814 6500)
www.cua.uam.mx

ISBN: 978-607-28-1098-3

Primera edición: 2017

Corrección de estilo: Adriana Rivera
Diseño editorial y portada: Literatura y Alternativas en Servicios Editoriales S.C.
Avenida Universidad 1815-c, Depto. 205, Colonia Oxtopulco,
C. P. 04318, Delegación Coyoacán, Ciudad de México.
RFC: LAS1008162Z1

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Mtro. Julián Fresán Figueroa, Dr. Diego González Moreno y Dra. Mika Olsen

Material de apoyo para la UEA

Matemáticas Discretas I

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Índice

Prefacio

El texto que se presenta a continuación aborda temas del área de las Matemáticas Discretas. Fue escrito a partir de la experiencia de doce años de impartir, en la UAM Cuajimalpa, las UEA de Matemática Discretas I y II en las licenciaturas de Ingeniería en Computación y Matemáticas Aplicadas de nuestra institución. El principal objetivo de este texto es apoyar al alumno durante el primer año de su licenciatura a relacionar los conceptos adquiridos a lo largo de su educación media superior con los conocimientos y habilidades que la UEA Matemáticas Discretas I tiene como objetivo. La mayoría de los libros de matemáticas para el primer año de la licenciatura asumen cierto nivel de madurez y abstracción en el pensamiento matemático que, en nuestra experiencia, pocos alumnos adquieren en la educación media superior; esto se suma a la falta de material didáctico que se ajuste al modelo educativo de la UAM Cuajimalpa, distinto a los modelos educativos tradicionales.

Este material ayudará al alumno a madurar y estructurar su pensamiento en el área de las Matemáticas Discretas, así como a desarrollar la capacidad de abstracción y las técnicas básicas que se utilizan en las Matemáticas Discretas. Los temas que se incluyen en estas notas son aquéllos en donde hemos detectado mayores problemas en el aprendizaje de los alumnos y, a su vez, son fundamentales para personas que estudian áreas relacionadas con las Matemáticas y la Computación, en particular para la UEA Matemáticas Discretas II. En cada capítulo los conceptos se motivan y refuerzan con 22 figuras, 10 cuadros y más de 145 ejemplos de distintas áreas del conocimiento, que buscan que el alumno se identifique con los conceptos y aplicaciones, para apoyar el desarrollo de los temas y la comprensión de los mismos. Cada capítulo cuenta también con ejercicios resueltos que ejemplifican las técnicas abordadas y una sección de ejercicios que permite al alumno evaluar el avance de su aprendizaje e identificar los temas que debe reforzar. En este libro se abordan de forma introductoria los temás de Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos, Número Naturales, Relaciones, Funciones (entre conjuntos discretos) y Métodos de Conteo (Combinatoria).

La palabra discreto viene del latín *discrets-a-um* que quiere decir bien separado o bien distinguido. Las Matemáticas Discretas son aquellas cuyo objeto de estudio son los conjuntos discretos, es decir, conjuntos en los cuales sus elementos pueden ser enumerados y por lo tanto bien distinguidos. Los conjuntos finitos, los números naturales $\mathbb{N}$ y los números enteros $\mathbb{Z}$ son ejemplos de conjuntos discretos. Las Matemáticas Discretas abarcan muchas áreas de las Matemáticas como: Lógica, Teoría de Conjuntos, Teoría de los Números, Combinatoria y Teoría de las Gráficas, entre otras. La metodología de las Matemáticas Discretas es distinta a la metodología usada en las Matemáticas Continuas (aquéllas cuyo objeto de estudio son los conjuntos continuos como los números reales $\mathbb{R}$); por ejemplo, no es posible aplicar las ideas provenientes del Cálculo, como la continuidad y límite, en las Matemáticas Discretas.

Debido a la enorme cantidad de aplicaciones que las Matemáticas Discretas tienen, se han convertido en un objeto de estudio fundamental en licenciaturas de Matemáticas, Computación y afines. Los temas desarrollados en el presente material se requieren en el estudio del Álgebra Lineal, Probabilidad, Estadística, Bases de Datos, Análisis y Diseño de Algoritmos y Teoría de la Computación, entre otras.

Prólogo para profesor

El presente material constituye un texto de apoyo para el curso de Matemáticas Discretas I y consideramos que se puede cubrir a lo largo de un trimestre. La secuencia en la que aparecen los temas es una sugerencia basada en nuestra experiencia, pero es subjetiva y cada profesor puede reordenarlos a su conveniencia sin alterar el desarrollo teórico. Sin embargo los temas asumen una seriación, expuesta en la figura 1.

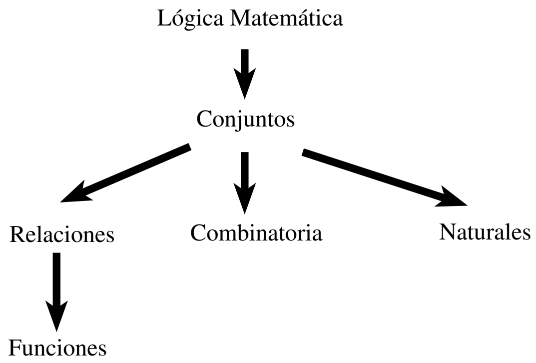


Figura 1: Diagrama de seriación

Al final de cada capítulo hay una sección de ejercicios formulados como un aprendizaje secuencial. Los ejercicios son de distinta índole: algunos son operacionales, para que el alumno aprenda y perfecciones técnicas de Matemáticas Discretas; otros son teóricos, para generar una mayor capacidad de abstracción; y otros más son para que el alumno explore, desarrolle su intuición y proponga conjeturas. Para la resolución de los ejercicios, es importante generar un ambiente propicio para equivocarse, plantear dudas, proponer soluciones y obtener retroalimentación.

1 Introducción a la lógica matemática

Uno de los objetivos de los matemáticos es descubrir verdades y una de las características más importantes de las matemáticas es su precisión, la cual se consigue gracias a las demostraciones. Una demostración es un argumento deductivo que se utiliza para garantizar la verdad de algún resultado matemático. Las demostraciones no pueden ser ambiguas y no deben dejar dudas de que son correctas.

1.1 Proposiciones

La **lógica** es la ciencia que estudia la estructura del pensamiento humano. La **lógica matemática** es la ciencia que estudia la estructura del lenguaje matemático. Los elementos básicos de la lógica son las proposiciones.

Definición 1.1.1. Una **proposición** es una oración que es verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo. Si una proposición es verdadera (falsa) decimos que su **valor** es verdadero (falso).

Ejemplo 1.1.1. Las siguientes oraciones no son proposiciones:

1. Hoy es un día hermoso.
2. El chico de la playera azul tiene ojos bonitos.
3. Las matemáticas son aburridas.
4. Paco de Lucía es el mejor guitarrista de la historia.
5. Ve a comprar tortillas.
6. ¿Cuántos años tiene Laura?
7. Ójala que mañana llueva café.
8. x es un número impar.

El valor de las primeras cuatro oraciones no está definido, puede ser falso o verdadero dependiendo de la opinión de la persona. La quinta oración es una orden; la sexta es una pregunta; la séptima es un deseo; ninguna de las últimas tres son falsas o verdaderas; y la última depende del valor de x: si $x = 2$ la proposición es falsa y si $x = 9$ la proposición es verdadera.

Ejemplo 1.1.2. Las siguientes oraciones son proposiciones:

1. Las espinacas son verdes.
2. Cuernavaca es la capital de Morelos.
3. Todas las aves vuelan.

4. 3+3 = 8.
5. En el aula magna "CUA CUA" de la UAM Cuajimalpa hay lugar para 400 personas sentadas.
6. El número π no es negativo.
7. Para todo número entero x, existe un entero y tal que $x + y = 0$.
8. Existe un ángulo θ tal que $\cos\theta = \theta$.

Todas las oraciones tienen una única respuesta en un momento dado. Las primeras dos oraciones son verdaderas, la tercera y cuarta son falsas (las avestruces no vuelan). El valor de la proposición 5 es verdadero según los datos oficiales, el valor de la proposición 6 es verdadero. Las últimas dos proposiciones son verdaderas, pero requieren una justificación; para la proposición 7, basta argumentar que si x es entero, entonces $y = -x$ también es un entero y $x + y = x + (-x) = 0$; en cambio, no es evidente que la proposición 8 sea verdadera, es necesario encontrar algún argumento convincente. Por ejemplo, para alguien que sabe algo de geometría analítica y trigonometría, la gráfica que aparece en la figura 1.1 es una justificación válida.

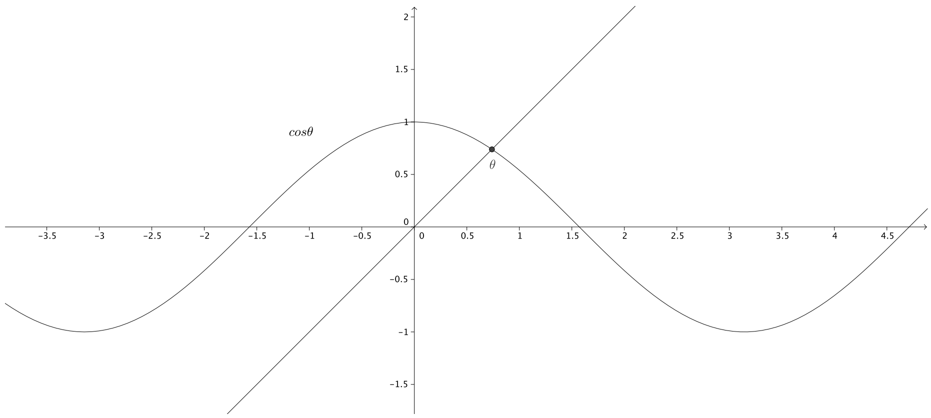


Figura 1.1: Demostración de la proposición $\cos\theta = \theta$.

A lo largo de este capítulo usaremos las letras mayúsculas, en general P y Q, para denotar proposiciones cualesquiera. Una pregunta que surge de forma natural al estudiar las proposiciones es cómo determinar el valor de verdad de una proposición P, es decir, cómo decidir si P es verdadera o falsa. En el caso en que el valor de P es falso se puede responder con un **contraejemplo**, que es un caso particular que no cumple la proposición P.

Ejemplo 1.1.3. Sea P la proposición "*Cualquier número positivo es mayor que la raíz cuadrado del mismo*".

El valor de la proposición P es falso, pues

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

De hecho, cualquier un número positivo menor o igual a 1 sirve como contraejemplo.

Encontrar un contraejemplo puede ser sencillo o complicado dependiendo de la proposición y los conocimientos de cada quien. Por ejemplo, la proposición "*El universo se creó con el Big Bang*" es una proposición de la que aún no podemos determinar el valor de verdad.

1.1.1 La negación de una proposición

Definición 1.1.2. Dada una proposición P, la **negación** de P, denotada por $\neg P$, es aquella que cumple que es falsa cuando P es verdadera, y es verdadera cuando P es falsa. La proposición $\neg P$ se lee "no P".

Ejemplo 1.1.4. Sea P la proposición "*El betabel es rojo*" y sea Q la proposición "5 *no es negativo*". Las proposiciones $\neg P$ y $\neg Q$ son "*El betabel no es rojo*" y "5 *es negativo*".

Ejemplo 1.1.5. En el cuadro 1.1 se muestran una serie de proposiciones y sus negaciones.

	P	$\neg P$
1	Ningún mamífero nace de huevo.	Hay mamíferos que nacen de huevo.
2	Todos los perros ladran.	Algunos los perros no ladran.
3	Si llueve, entonces el pavimiento esta mojado.	Llueve y el pavimiento esta seco.
4	Ningún primo es un número par.	Hay un número primo que es par.
5	Voy al cine o voy al teatro.	No voy al cine y no voy al teatro.

Cuadro 1.1: Ejemplos de proposiciones con su negación.

Puede ser bastante complicado negar una proposición P, porque no siempre basta decir *no P*. Más adelante vamos a revisar las reglas para negar distintos tipos de proposiciones.

1.2 Proposiciones compuestas

Al hablar y escribir combinamos proposiciones utilizando palabras como "*y*", "*o*" o expresiones como "*si ..., entonces ...*", estas palabras y expresiones se las llama **conectores lógicos** o simplemente **conectores**. Por ejemplo, "*está lloviendo y hace frío*", "*si termino la tarea, voy a jugar Pokémon*".

Definición 1.2.1. Decimos que una proposición es **compuesta** si contiene al menos dos diferentes proposiciones. En caso contrario decimos que la proposición es **simple**.

En el ejemplo 1.1.2, las primeras seis proposiciones son simples, mientras que las proposiciones 3 y 5 del cuadro 1.1 son compuestas (la proposición 3 contiene las siguientes dos proposiciones "*llueve*" y "*el pavimiento esta mojado*").

1.2.1 Conjunción y disyunción

Primero damos las definiciones formales de los conectores *y* y *o*.

Definición 1.2.2. Sean P y Q dos proposiciones. La proposición P y Q, se denota $P \wedge Q$, y es aquella proposición cuyo valor es verdadero sólo en el caso que ambas proposiciones son verdaderas. El conector "*y*" se conoce como la **conjunción** de P y Q.

Ejemplo 1.2.1. Si la proposición P es "*Pokémon es un videojuego*" y la proposición Q es "*Pokémon es una serie de televisión los 90's*", entonces la proposición $P \wedge Q$ es verdadera, ya que Pokémon tanto es un videojuego como una serie de televisión los 90's.

Si la proposición P es "*Pokémon se juega en la calle* y la proposición Q es "*Pokémon es una serie de televisión italiana*", entonces $P \wedge Q$ siempre es falsa, puesto que Q es falsa.

Si la proposición P es "*Pokémon es una serie de televisión italiana* y la proposición Q es "*Pokémon no es una serie de televisión italiana*", entonces $P \wedge Q$ siempre es falsa, puesto que P y Q no pueden ser verdaderas al mismo tiempo. En general, la proposición $P \wedge \neg P$ siempre es falsa.

El valor de verdad de $P \wedge Q$ está determinado por los valores de verdad de las proposiciones P y Q. Para mayor claridad escribimos un cuadro con todas las posibilidades, ver el cuadro 1.2.

P	Q	$P \wedge Q$
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	falso
falso	falso	falso

Cuadro 1.2: Tabla de verdad de $P \wedge Q$.

Una **tabla de verdad** contiene todos los posibles casos para una proposición dada. Una tabla de verdad nos proporciona un método para determinar cuando una proposición es verdadera o falsa a través del análisis de todas las posibilidades. El cuadro 1.2 es un ejemplo de una tabla de verdad.

Definición 1.2.3. Sean P y Q dos proposiciones. La proposición P o Q, se denota $P \vee Q$, y es aquella proposición cuyo valor es verdadero si al menos una de las dos proposiciones son verdaderas. El conector "*o*" se conoce como la **disyunción** de P y Q.

Ejemplo 1.2.2. Si la proposición P es "*Pokémon se juega en la calle*" y la proposición Q es "*Pokeḿon es una serie de televisión italiana*", entonces la proposión $P \vee Q$ es verdadera pues la proposición P es verdadera.

Si la proposición P es "*Pokémon no se puede jugar en la calle*" y la proposición Q es "*Pokémon es una serie de televisión italiana*", entonces la proposición $P \vee Q$ es falsa pues ambas proposiciones son falsas.

Si la proposición P es "*Pokémon es una serie de televisión italiana* y la proposición Q es "*Pokémon no es una serie de televisión italiana*", entonces $P \vee Q$ siempre es verdadera, puesto que P y Q no pueden ser falsas al mismo tiempo. En general, la proposición $P \vee \neg P$ siempre es verdadera.

Resumimos valores de verdad de $P \vee Q$ en la tabla de verdad del cuadro 1.3

P	Q	$P \vee Q$
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	verdadero
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	falso

Cuadro 1.3: Tabla de verdad de $P \vee Q$.

Casi todos los lenguajes de programación tienen definido un **o exclusivo** denotado por $\overline{\vee}$ en el cual $P \overline{\vee} Q$ es verdadero si y sólo si P es verdadero o Q es verdadero pero no ambas. El cuadro con todas las posibilidades del **o exclusivo** es el cuadro 1.4.

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
verdadero	verdadero	falso
verdadero	falso	verdadero
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	falso

Cuadro 1.4: Tabla de verdad de $P \overline{\vee} Q$.

1.2.2 Implicación lógica o condicional

Otro conector lógico importante es la **implicación lógica** o **proposición condicional**, este conector se usa cuando hay una condición (o implicación) involucrado en la proposición. Por ejemplo, "*si no alcanzo el autobús, entonces llego tarde a la cita del dentista*", si denotamos por P la proposición "*no alcanzo el autobús*" y denotamos por Q la proposición "*llego tarde a la cita del dentista*", escribimos la proposición condicional "*si P, entonces Q*" como $P \to Q$. En la proposición condicional $P \to Q$ "*si x y y son dos puntos en el plano, entonces existe una línea recta que pasa por x y y*", la proposición P es "*x y y son dos puntos en el plano* y la proposición Q es "*existe una línea recta que pasa por x y y*".

Definición 1.2.4. La **proposición condicional** $P \to Q$ es aquella que sólo es falsa cuando P es verdadera y Q es falsa. La proposición $P \to Q$ es llamada la *condicional* de P y Q. El símbolo $P \to Q$ se lee "*P implica Q*" o "*si P, entonces Q*". En una proposición condicional $P \to Q$, la proposición P recibe el nombre de **hipótesis** y la proposición Q recibe el nombre de **conclusión**.

Para abreviar diremos:

Si P, entonces Q, P implica Q o $P \to Q$

Para entender mejor la definición de la proposición condicional, analizemos con un ejemplo.

Ejemplo 1.2.3. Supongamos que un padre le dice a su hijo la siguiente frase:

"Si te portas bien, (entonces) te llevo al cine".

En este caso, la hipótesis es la proposición P que sería "*te portas bien*" y la conclusión es la proposición Q que sería "*te llevo al cine*". Para determinar cuando es falso la proposición P implica Q, hay que preguntarnos cuando es falso lo que dijo el padre, es decir, en qué casos el hijo le diría mentiroso a su padre.

Para analizar el primer caso, supongamos que el hijo se porta bien y su papá lo lleva al cine. Es decir, ambas proposiciones son verdad. En este caso el papá ha dicho la verdad, el hijo se portó bien y lo llevaron al cine.

En el segundo caso, el hijo se portó bien y el papá no lo llevó al cine. Dado que el papá le dijo que lo llevaría al cine y no lo llevó, entonces ha mentido.

Finalmente, en los últimos dos casos el hijo no se portó bien, como el padre no prometió nada en estos casos no se puede decir que miente, no importa si lo lleva al cine o no. Es estos casos el enunciado es verdadero.

El comportamiento del valor de la proposición condicional se resume en el cuadro 1.6

P	Q	$P \to Q$
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

Cuadro 1.5: Tabla de verdad de $P \to Q$.

Definición 1.2.5. Sean P y Q dos proposiciones. Decimos que P y Q son *equivalentes*, lo denotamos por $P \equiv Q$, si ambas tienen la misma tabla de verdad.

Dadas dos proposiciones P y Q y la proposición condicional $P \to Q$, se pueden construir proposiciones equivalentes. Una manera sencilla de comprobar si dos proposiciones son equivalentes es mediante tablas de verdad.

Diremos que una proposición es una **tautología** si el valor de la proposición siempre es verdadera. Usando una tabla de verdad podemos comprobar que la proposición $P \to P \vee Q$ es una tautología.

P	Q	$P \vee Q$	$P \to P \vee Q$
verdadero	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	verdadero
falso	verdadero	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero	verdadero

Cuadro 1.6: Tabla de verdad de $P \to P \vee Q$.

Contrapuesta de la condicional

Sean P y Q dos proposiciones. La proposición **contrapuesta** de la implicación $P \to Q$ es $\neg Q \to \neg P$.

Por ejemplo, la contrapuesta de "*Si sabes de futbol, entonces le vas a los Pumas*" es: "*Si no le vas a los Pumas, entonces no sabes de futbol*".

¿Son equivalentes la condicional y la contrapuesta? Esta pregunta se responde en el ejercicio 1.17**.**

Recíproca de la condicional

Sean P y Q dos proposiciones. La proposición **recíproca** de la implicación $P \to Q$ es $Q \to P$.

Por ejemplo, la recíproca de "*Si sabes de futbol, entonces le vas a los Pumas*" es: "*Si le vas a los Pumas, entonces sabes de futbol*".

¿Son equivalentes la condicional y la recíproca? Esta pregunta se responde en el ejercicio 1.17 (2).

Bicondicional

En el uso habitual y coloquial se confunden las proposiciones condicionales con la **proposiciones bicondicionales**. Antes de definir formalmente la **proposición bicondicional** vamos a revisar la versión bicondicional del ejemplo 1.2.3, para que se entienda bien la diferencia entre una proposición condicional y una proposición bicondicional.

Ejemplo 1.2.4. En la versión bicondicional del ejemplo 1.2.3, el padre le dice a su hijo la frase:

"Te llevo al cine si y sólo en el caso en que te portes bien".

En esta versión el padre no lleva a si hijo al cine si se porta mal.

Definición 1.2.6. La **proposición bicondicional** $P \longleftrightarrow Q$ es aquella que sólo es verdadera cuando P y Q tienen el mismo valor. El símbolo $P \longleftrightarrow Q$ se lee "*P si y sólo si Q*".

El comportamiento del valor de la proposición condicional se resume en el cuadro 1.7.

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	falso
falso	falso	verdadero

Cuadro 1.7: Tabla de verdad de $P \longleftrightarrow Q$.

1.3 Cuantificadores

Antes de introducir los cuantificadores lógicos, vamos a definir el concepto de **función proposicional**. Primero veremos un ejemplo.

Ejemplo 1.3.1. Considera la oración "*x es un número entero impar*". Como el valor de la oración depende del valor de x, esta oración no es una proposición, pero una vez que se conozca el valor de x, la oración se convierte en una proposición y podemos determinar su valor de verdad. Por ejemplo si $x = 14$, tenemos la proposición "14 *es un número impar*" la cual es falsa, pero si $x = 57$ tenemos la proposición "57 *es un número impar*", la cual es verdadera. En este ejemplo los valores de x son números enteros.

Diremos que una oración es una **función proposicional** si la oración tiene una variable x, tal que para todos los valores de x en un cierto conjunto D la oración se convierte en una proposición. Al conjunto D lo llamaremos el **dominio de discurso** de la función proposicional. En el ejemplo 1.3.1, el conjunto $\mathbb{Z}$ es el dominio de discurso.

Ejemplo 1.3.2. Considera la función proposicional

1. "*Hoy es martes*". Como el valor de la función proposicional depende del día de la semana en que estamos, el dominio de discurso es el conjunto de los días de la semana.

2. "*El color de la portada del libro es naranja*". Como el valor de la función proposicional depende del libro, el dominio de discurso es el conjunto de todos los libros.

1.3.1 Cuantificador universal

Los **cuantificadores** más usuales son el universal y el existencial. El **cuantificador universal** se expresa usualmente como "para todo", "cualquier" o "ningún". En lógica de matemática se denota $\forall$.

Una proposición con cuantificador universal es falsa si para al menos un elemento del dominio la proposición es falsa; tal ejemplo sería un contraejemplo de la proposición.

Ejemplo 1.3.3. Proposiciones con cuantificador universal:

1. Todo número primo es un número positivo.

2. Todas las aves vuelan.

3. Ningún mamífero nace de huevo.

4. Todos los unicornios son rosas.

5. Todos los que les gusta el futbol, le van al Barça.

El primer caso es verdadero; el segundo es falso, pues los pingüinos son aves que no pueden volar; el tercero es falso pues el otorrinco es mamífero, pero nace de huevo; el cuarto es verdadero, pues no existen contraejemplos; y el último es falso. Para determinar que el primer inciso del ejemplo 1.3.3 sea verdadero, tendríamos que justificar que para todo número primo p, se tiene que $p > 0$.

1.3.2 Cuantificador existencial

El **cuantificador existencial** se expresa usualmente como "existe", "hay" o "algún". En lógica de matemática se denota $\exists$.

Una proposición con cuantificador existencial es falsa si ningún elemento del dominio cumple la proposición. Para determinar si una proposición con cuantificador existencial es verdadera, basta encontrar y exhibir un elemento del dominio de la proposición que cumpla la proposición.

Ejemplo 1.3.4. Proposiciones con cuantificador:

1. Existe un número primo que es un número positivo par.
2. Existe un número real cuyo cuadrado es negativo.
3. Existe un ave que no vuela.

Como 2 es un número primo que es un número par, el primer caso es verdadero; el segundo es falso; y el tercero es verdadero, pues los pingüinos son aves que no pueden volar. Para determinar que el segundo inciso del ejemplo 1.3.4 es falso, tendríamos que justificar que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x^2 \geq 0$.

Para determinar si una proposición con cuantificador es falsa o verdadera, se requiere una argumentación basada en axiomas o resultados que ya se probaron. En la sección 1.6 revisaremos algunos ejemplos de tales argumentaciones/justificaciones y a lo largo del presente material trabajaremos estas técnicas.

1.3.3 Combinando cuantificadores

A menudo se utiliza más de un cuantificador en una proposición, por ejemplo:

Ejemplo 1.3.5. Proposiciones combinación de cuantificadores:

1. Para todo numero real x distinto de cero, existe otro numero real y tal que $x + y = 0$.
2. Existe un número real u tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $ux = x$.

El primer caso es la existencia del inverso aditivo (para todo número real distinto del cero) y el segundo caso es la existencia del número 1 (el neutro multiplicativo) en el conjunto de los números reales.

Es importante observar que el orden de los cuantificadores alteran el resultado. Si cambiamos el orden de los cuantificadores en el inciso 1 del ejemplo 1.3.5, obtenemos la proposición "Existe un numero real x distinto de cero tal que para todo otro numero real y se tiene que $x + y = 0$", la cual es falsa.

1.4 Negación de una proposición

En matemáticas, la mayoría de las proposiciones son compuestas, condicionales y/o con cuantificadores. En esta sección vamos a revisar las reglas para negar cada uno de estos casos.

1.4.1 Leyes de De Morgan

Las **Leyes de De Morgan** establecen lo siguiente:

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
2. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Las Leyes de De Morgan se pueden probar utilizando tablas de verdad. Si consideramos el primer inciso y vemos la tabla de verdad 1.2, podemos observar que $P \wedge Q$ es falsa cuando al menos una de las dos proposiciones es falsa, es decir, $\neg(P \wedge Q)$ es verdadero cuando al menos una las proporciones P o Q es falsa.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
verdadero	verdadero	falso	falso	falso	falso
verdadero	falso	verdadero	falso	verdadero	verdadero
falso	verdadero	verdadero	verdadero	falso	verdadero
falso	falso	verdadero	verdadero	verdadero	verdadero

Cuadro 1.8: Tabla de verdad de $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

Como los valores de la proposición $\neg(P \wedge Q)$ coinciden con los valores de la proposición $\neg P \vee \neg Q$, entonces $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

La comprobación es el ejercicio 1.16(6)

Intuitivamente, las leyes de De Morgan establecen que la negación de un *o* siempre es un *y* así como la negación de un *y* siempre es un *o*.

Ejemplo 1.4.1. Considera las siguientes proposiciones:

1. $a^2 + b^2 = c^2$ y $a \geq 0$. La negación es $a^2 + b^2 \neq c^2$ o $a < 0$.
2. *Voy a comer tacos o voy a comer sushi*, la negación es *no voy a comer tacos y no voy a comer sushi*.
3. *Vamos al cine y a cenar*, la negación es *no vamos al cine o no vamos a cenar*.

1.4.2 Negación de la condicional

Sean P y Q dos proposiciones. Por definición, la negación de la condicional $P \rightarrow Q$ es verdadero sólo en el caso que $P \rightarrow Q$ es falso, es decir, cuando P es verdadero y Q es falso. Por lo que $\neg(P \rightarrow Q)$ es equivalente a $P \wedge \neg Q$, como se comprueba en el ejercicio 1.17 (3).

Ejemplo 1.4.2. Considera las siguientes proposiciones:

1. *Si sacas 10 en el examen, (entonces) te invito al cine*.

   En este caso tenemos que una proposición condicional de la forma $P \rightarrow Q$, donde P es *sacas 10 en el examen* y Q es *te invito al cine*, por lo que *Sacas 10 en el examen y no te invito al cine* es la negación $P \wedge \neg Q$.

2. *Si* $2 + 2 = 5$*, (entonces) me como mi sombrero*.

   La negación es $2 + 2 \neq 5$ *y no me como mi sombrero*.

1.4.3 Negación de cuantificadores

Sea P una proposición con un cuantificador universal. Por definición, la negación de la función proposicional $\forall x, P(x)$ es verdadera sólo en el caso en que $\forall x, P(x)$ es falsa, es decir, cuando $\exists x, \neg P(x)$ es verdadera. Por lo que $\neg(\forall x, P(x))$ es equivalente a $\exists x, \neg P(x)$.

Ejemplo 1.4.3. Considera las siguientes proposiciones:

1. "*Todas las aves vuelan*". La negación es "*existe un ave que no vuela*".

2. "*Existe un mamífero que no nace de un huevo*". La negación es "*Todos los mamíferos nacen de un huevo*".

3. "*Existe un mamífero que nace de un huevo*". La negación es "*Ningún un mamífero que nace de un huevo*".

De manera análoga, la negación de la función proposicional $\exists x, P(x)$ es verdadero sólo en el caso que $\exists x, P(x)$ es falso, es decir, cuando $\forall x, \neg P(x)$ es verdadero. Por lo que $\neg(\exists x, P(x))$ es equivalente a $\forall x, \neg P(x)$.

1.5 Paradojas

Una **paradoja** es una oración que parece contradictoria. Esta definición es poco formal porque a dos personas distintas una oración les puede parecer o no contradictoria, por ejemplo la 1.5.1(4). Algunas paradojas evidencian que hay incongruencias en la lógica, como los demás ejemplos.

Ejemplo 1.5.1. Ejemplos de paradojas "famosas":

1. **Paradoja del mentiroso:** "*Lo que estoy diciendo ahora es una mentira*".
   Como es un mentiroso, la oración es una mentira, por lo que es falsa, pero si es falsa, entonces dijo una verdad, lo cual no es posible porque es un mentiroso.

2. **Paradoja de Pinocho:** "*Mi nariz va a crecer*".
   Si es verdad que su nariz va a crecer, entonces dijo una mentira y la oración es falsa, pero si es falsa, no creció su nariz. Si dijo una mentira, entonces crece su nariz, pero en este caso la oración era falsa y no creció su nariz.

3. **Paradoja del peluquero:** "*El único peluquero del lugar le corta el cabello a todo aquél que no se lo puede cortar él/ella misma*".
   ¿Quién le corta el cabello al peluquero?

4. **Paradoja del examen sorpresa:** "*La próxima semana habrá un examen sorpresa*".
   Los estudiantes se relajaron porque sabían que no iba a haber examen, porque, como el examen tenía que ser sorpresa, no podía ser el viernes, ya que si para el jueves no lo habían aplicado el examen sorpresa todos sabrían que el examen sería el viernes y no sería examen sorpresa. Lo mismo sucede con el jueves, porque el viernes ya se eliminó, y si el examen sorpresa no lo habían aplicado para el miércoles, todos sabrían que el examen sería el jueves y no será sorpresa. Lo mismo pasa para eliminar el miércoles, el martes y el lunes. Nadie estudió y la semana siguiente, el jueves por a la mañana, hubo examen sorpresa.

1.6 Demostraciones

En el área de las matemáticas buscamos probar bajo qué condiciones ciertas proposiciones son válidas. Para ello se utilizan las demostraciones (pruebas o justificaciones). Demostrar que una propiedad o un argumento es válido es esencialmente construir una justificación lógica usando axiomas o proposiciones ya probadas. Las demostraciones sirven para poder asegurar que bajo ciertas condiciones (hipótesis) un resultado es válido (conclusión).

Ejemplificar una proposición no es una demostración. Considera la proposición "*Si n es impar, entonces n^2 es impar*". No basta observar que como 3 es impar y $3^2 = 9$ también es impar, entonces la proposición es verdadera. Este argumento sólo asegura que la proposición es verdadera cuando $n = 3$, pero no nos da información para ningún otro impar. Esta proposición se demostrará más adelante. Este tipo de argumento puede conducir a errores; por ejemplo, considera la propoción "*Todos los números impares son primos*". Claramente la proposición es falsa, aunque se cumple para el número 3.

En esta sección vamos a revisar ejemplos de diferentes técnicas de demostración.

Demostración directa

Supongamos que queremos demostrar una proposición de la forma $P \to Q$. La demostración directa empieza suponiendo que P es verdadera y, después, utilizando cualquier tipo de información disponible (axiomas, teoremas, lemas, etc.), hay que probar que Q es verdadera. Antes de que veamos un ejemplo de demostración directa, es necesaria una definición formal de número par y número impar.

Definición 1.6.1. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces n es un **número par**; si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m$ y n es un **número impar** si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m + 1$.

Ejemplo 1.6.1. Considera la proposición:

"*Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Si m es impar y n es par, entonces $m + n$ es impar*".

Para demostrar esta proposición de forma directa hay que suponer que m es impar y n es par. Por definición existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k + 1$ y existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2l$. Sumamos m y n:

$$m + n = (2k + 1) + (2l) = 2(k + l) + 1.$$

Como $k + l \in \mathbb{Z}$, entonces $m + n$ es un número impar y la proposición es verdadera.

Demostración por contradicción

La demostración por contradicción o reducción al absurdo se basa en suponer que la proposición que queremos demostrar es falsa. Para demostrar por contradicción una proposición de la forma $P \to Q$, tenemos que suponer $P \wedge \neg Q$ y ver que esto implica una contradicción.

Ejemplo 1.6.2. Considera la proposición:

"*Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a + b \geq 2$, entonces $a \geq 1$ o $b \geq 1$*".

Para demostrar esta proposición por contradicción hay que suponer que a y b son dos reales tales que $a+b \geq 2$ y que $a < 1$ y $b < 1$. Como $a < 1$ y $b < 1$ se tiene que $a+b < 1+1 = 2$. Lo cual contradice la hipótesis $a + b \geq 2$. Por lo tanto la suposición que hicimos era falsa y podemos concluir que $a \geq 1$ o $b \geq 1$, y la proposición queda demostrada.

Demostración por contrapuesta

Esta demostración está basada en la equivalencia lógica que hay entre las proposiciones $P \to Q$ y $\neg Q \to \neg P$, como se muestra en el ejercicio 1.17 inciso (1).

Ejemplo 1.6.3. Considera la proposición:

"*Sean m, n dos números enteros. Si m^2 es impar, entonces m es impar*".

Para demostrar la proposición por contrapuesta hay que probar la contrapuesta de la proposición, es decir,
"*Si m es par, entonces m^2 es par.*"
Con la definición 1.6.1 sabemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$. Entonces:

$$m^2 = (2k)^2 = 2(2k^2).$$

Como $2k^2 \in \mathbb{Z}$, se sigue que m^2 es un número par. Por lo tanto, hemos probado la proposición contrapuesta, es decir, que si m es impar, si m^2 es impar y la proposición es verdadera.

Demostración por unicidad

Este tipo de demostración se utiliza para mostrar que existe un único elemento x tal que satisface la propiedad $P(x)$. En esta técnica de demostración hay que probar que existe existe un elemento x que satisface la propiedad deseada. Después hay que probar la unicidad, es decir, que si $y \neq x$ entonces y no cumple con la propiedad.

Ejemplo 1.6.4. Considera la proposición:

"*Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x + y = 0$*".

La existencia se tiene por los axiomas de los números reales (para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$). Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para ver que el inverso aditivo es único, supongamos que existen dos reales $-x_1, -x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $x + (-x_1) = 0$ y $x + (-x_2) = 0$. Como ambos son iguales a cero tenemos que:

$$x + (-x_1) = x + (-x_2).$$

Utilizando la ley de la cancelación en $\mathbb{R}$ tenemos que $-x_1 = -x_2$, por lo que el inverso aditivo es único.

Demostración por casos

En este método de demostración se divide la proposición que quiere ser probada en un número finito de casos. Veamos un ejemplo para el cual es necesario conocer la definición de la función valor absoluto. El **valor absoluto** de un número real x se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $x = 5$ como $5 \geq 0$, entonces $|5| = 5$ mientras que si $x = -2$ como $-2 < 0$ entonces $|-2| = -(-2) = 2$.

Ejemplo 1.6.5. Considera la proposición:

"*Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $|xy| = |x|\,|y|$".

El valor de la función valor absoluto depende de si x y y son negativos o no. Por lo que tenemos cuatro casos:

$$x, y \geq 0; \quad x \geq 0,\ y < 0; \quad x < 0,\ y \geq 0; \quad x, y < 0.$$

Caso 1: $x, y \geq 0$.
Como $x, y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$ y $|x| = x$, $|y| = y$ y $|xy| = xy$.
Por lo que $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
Caso 2: $x \geq 0$, $y < 0$.
Como $x \geq 0$, $y < 0$, entonces $xy \leq 0$, $|x| = x$, $|y| = -y$ y como $-0 = 0$, entonces $|xy| = -xy$.
Por lo que $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$.
Caso 3: $x < 0$, $y \geq 0$.
Como $x < 0$, $y \geq 0$, entonces $xy \leq 0$, $|x| = -x$, $|y| = y$ y como $-0 = 0$, entonces $|xy| = -xy$.
Por lo que $|xy| = -xy = (-x)y = |x|\,|y|$.
Caso 4: $x, y < 0$
Como $x, y < 0$, entonces $xy > 0$, $|x| = -x$, $|y| = -y$ y $|xy| = xy$.
Por lo que $|xy| = xy = (-1)(-1)xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$.
En los cuatro posibles casos la proposición es verdadera.

Contraejemplo

Este método se utiliza para demostrar la falsedad una proposición en la que se haga referencia a una propiedad que cumplen "todos los elementos de un conjunto".

Ejemplo 1.6.6. Considera la proposición:

"*Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $2^n + 1$ *es un número primo*".

Si $n = 3$, entonces $2^n + 1 = 8 + 1 = 9$ y 9 no es un número primo. Por lo tanto la proposición es falsa.

Demostración gráfica

En este caso, la demostración de la proposición está dada de forma gráfica, es decir, a través de un dibujo.

Ejemplo 1.6.7. Considera el Teorema de Pitágoras como una proposición.

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa
es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

El dibujo que aparece en la figura 1.2 es una demostración gráfica del Teorema de Pitágoras:

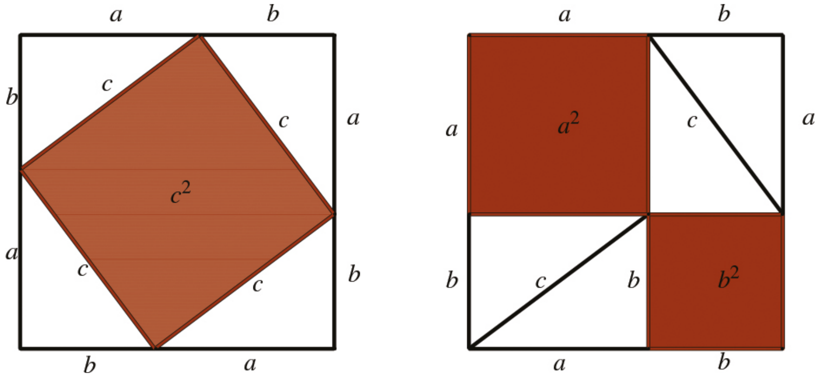


Figura 1.2: Demostración gráfica de Teorema de Pitágoras

Ejemplo 1.6.8. La gráfica que aparece en la figura 1.1 es una prueba gráfica de la proposición que aparece en el el inciso 8 del ejemplo 1.1.2 (“Existe un ángulo θ tal que $\cos\theta = \theta$”).

Demostración de existencia

Este tipo de demostración es útil para probar proposiciones en las que se hace referencia a una propiedad que cumple un elemento de un cierto conjunto.

Ejemplo 1.6.9. Considera la proposición:

“*Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$*”.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $a + a < a + b$ y $2a < a + b$, por lo que:

$$a < \frac{a+b}{2}.$$

Análogamente $a + b < b + b$ y $a + b < 2b$, por lo que

$$\frac{a+b}{2} < b.$$

Por lo tanto:

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

y $x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$. Por lo tanto, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$ y la proposición es verdadera.

1.7 Ejercicios

Ejercicio 1.1.

Explica con tus propias palabras que es:

1. una proposición.
2. un contraejemplo.
3. una proposición compuesta.
4. una proposición condicional.
5. una función proposicional.

Ejercicio 1.2. Explica con tus propias palabras la diferencia entre:

1. una proposición y una función proposicional.
2. un conectivo disyuntivo y un conectivo condicional.
3. una proposición cuantificada universalmente y una una proposición cuantificada existencialmente.
4. una demostración directa, una por contradicción y una por contrapositiva.

Ejercicio 1.3. Explica cómo probar que una proposición cuantificada universalmente es verdadera y cómo probar que es falsa.

Ejercicio 1.4. Explica cómo probar que una proposición cuantificada existencialmente es verdadera y cómo probar que es falsa.

Ejercicio 1.5. Determina si cada una de las oraciones es una proposición. Si lo es, escribe su negación.

1. $2 + 5 = 19$.
2. Mesero, ¿puede traer las nueces?
3. Para algún entero positivo n, $40 = 4n$.
4. Dame una manzana.
5. La frase "*házlo de nuevo, Sam*" aparece en la película Casablanca.
6. La diferencia de dos números primos.
7. Elija un número entre 1 y 10.
8. Existe x tal que $x < y$ con x y y números reales.

Ejercicio 1.6. En cada uno de los siguientes incisos identifica la hipótesis y la conclusión:

1. Si x es un número real, entonces el valor mínimo de $x(x - 1)$ es al menos $-1/4$.
2. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$.
3. Si n es un número par, entonces n^2 es un número par.

Ejercicio 1.7. Escriban la negación con palabras de las siguientes proposiciones (sin determinar si la proposición es falsa o verdadera):

1. La negación de: "*Hay mexicanos que no les gusta ni el futbol ni los tacos*".
2. Hay un número entero que es número par y número impar.
3. Todo número entero es un número par o un número impar.
4. Hoy juegan los Pumas en CU o el Cruz Azul juega en el Estadio Azul.

Ejercicio 1.8. Escriban la negación y la contrapuesta de las siguientes proposiciones:

1. Si Jesus recibe una beca, entonces va a la universidad.
2. Si no domino la Inducción Matemática, no pasaré Matemáticas Discretas I.

3. Si $2 + 2 = 3$, entonces yo me como mi sombrero.
4. Si estudias ingeniería, te gustan las matemáticas.

Ejercicio 1.9. Determina el significado y el valor de verdad (justifica tu respuesta) de cada una de las siguientes proposiciones:

1. "Todos los hombres no engañan a sus esposas" (de la columna *Querida Abby*).
2. "Cada problema ambiental no es una tragedia" (cita del economista Robert J. Samuelson).

Ejercicio 1.10. Si hace frío, Iliana usará su bufanda, si la ha terminado. Los pronósticos del tiempo dicen que el lunes hará frío, pero Iliana no terminó la bufanda para el lunes. Por lo que Iliana no usará su bufanda. Lo que hizo Iliana, ¿contradijo lo que se había propuesto?

Ejercicio 1.11. Represente la proposición dada en forma simbólica con p: $5 < 8$, $q : 8 < 7$ y $r : 5 < 7$. Determinar si cada proposición es verdadera o falsa:

1. $5 < 8$ y $8 < 7$.
2. No es cierto que ($5 < 8$ y $8 < 7$).
3. $5 < 9$ o no es cierto que ($8 < 7$ y $5 < 7$).
4. Si no es cierto que ($8 < 7$ y $5 \geq 8$), entonces $5 < 7$.
5. $5 < 7$ si y sólo si ($5 < 8$ y $8 \geq 7$).

Ejercicio 1.12. Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados y escribe su recíproco y su forma contrapositiva:

1. Si $4 < 6$, entonces $9 > 12$.
2. Si $4 > 6$, entonces $9 > 12$.
3. $|2| < 3$ si $-3 < 2 < 3$.
4. $|5| < 3$ si $-3 < 5 < 3$.

Ejercicio 1.13. Sea $P(n)$ la función proposicional "n divide a 77". Escribe las siguientes proposiciones con palabras e indica su valor de verdad. El dominio del discurso son todos los enteros positivos:

1. $P(2)$.
2. $P(11)$.
3. Para cada n, $P(n)$.
4. Para alguna n, $P(n)$.

Ejercicio 1.14. Supongamos que $T(x, y)$ es la función proposicional "x es mas alto que y". El dominio de discurso son tres personas: Marco que mide 1.64m, Alma que mide 1.70m y Max que mide 1.89m. Escribe cada proposición con palabras e indica si es verdadera o falsa:

1. $\forall x \ \forall y, \ T(x, y)$.
2. $\forall x \ \exists y, \ T(x, y)$.
3. $\exists x \ \forall y, \ T(x, y)$.
4. $\exists x \ \exists y, \ T(x, y)$.

Ejercicio 1.15. Determina si las siguientes proposiciones son o no una tautología:

1. $P \wedge Q \to P$.
2. $P \to P \wedge Q$.
3. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to](p \to r)]$.
4. $(p \vee q) \to [q \to (p \wedge q)]$.

Ejercicio 1.16. Sean P, Q, y R tres proposiciones, y R una proposición absurda (es decir, siempre falsa), construye una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

1. $P \wedge \neg Q$.
2. $\neg(P \to \neg Q)$.
3. $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$.
4. $P \to (Q \to R)$.
5. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \to R)$.
6. Determina si $\neg(P \vee Q)$ es equivalente a $\neg P \wedge \neg Q$

Ejercicio 1.17. Sean P, Q, y R tres proposiciones, y R una proposición absurda (es decir, siempre falsa), construye una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. En cada caso determina si $P \to Q$ es equivalente a la expresión:

1. $\neg Q \to \neg P$.
2. $Q \to P$.
3. $P \wedge \neg Q$.
4. $P \wedge \neg Q \to R$.

Ejercicio 1.18. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Justifica por qué:

1. Si n, m son impares, entonces $m + n$ es un número par.
2. Si mn es un número par, entonces m es un número par o n es un número par.
3. Si n^2 es un número par, entonces n es un número par.
4. Si m es par, entonces mn es un número par.
5. Si n es un número impar, entonces n^3 también es un impar.
6. Si $3n + 4$ es impar, entonces n es impar.

7. Si $m^2 = n^2$, entonces $m = n$ o $m = -n$.

8. Demuestra que si n es impar, entonces $3n^3 + 5n^2 + 13n + 1$ es par.

9. Si m es un impar, entonces la solución de la ecuación $n^2 + n - m$ no es un entero impar.

Ejercicio 1.19. Justifica por qué:

1. Sean $q \in \mathbb{Q}$ y r un número irracional. Expliquen por qué $q + r$ es un número irracional.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $0 < x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

3. Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Expliquen por qué $q_1 + q_2$ es un número racional.

4. Dar un contraejemplo de la siguiente afirmación:
   Si r_1, r_2 son números irracionales, entonces $r_1 + r_2$ es un número irracional.

Ejercicio 1.20. Encuentra el error en el siguiente razonamiento y explica por qué esta mal:
Todos los números impares mayores o iguales a 3 son primos: el número 3 es un número primo, 5 y 7 también son números primos, se ve que todos los números impares son números primos.

Ejercicio 1.21. Demuestra por contradicción que:

1. En un tablero de ajedrez y de acuerdo a sus reglas, cada peón se mueve a lo mas 6 veces.

2. Si L_1 y L_2 son dos líneas rectas las cuales son perpendiculares a una tercer línea L, entonces L_1 y L_2 son paralelas.

3. Demuestre que si se colocan 10 bolas en 9 cajas, al menos una caja tendrá 2 bolas.

Ejercicio 1.22. Demuestra por contrapositiva que:

1. Sean $m \neq 0$ y b dos números reales. Sea $f(x) = mx + b$. Pruebe que si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.

2. Pruebe que si en un cuadrilátero ningún ángulo es obtuso, entonces todos los ángulos son rectos.

2 Conjuntos

El concepto de *conjunto* es de fundamental importancia en las matemáticas modernas. De hecho cualquier noción de las matemáticas discretas puede definirse empleando el concepto de conjunto. El interés en los conjuntos se debe tanto al papel que representan en las matemáticas como a su utilidad en la modelización e investigación de problemas en la computación. Si bien la definición de conjunto puede ser algo complicada, por el momento bastará la siguiente definición intuitiva.

Definición 2.0.1. Un **conjunto** es una colección de objetos.

Esta noción de conjunto fue dada por George Cantor, fundador de la teoría de conjuntos, sin embargo después de que esta teoría se estableciera como un área bien definida en las matemáticas, aparecieron contrtadicciones o paradojas en la misma. Para eliminar tales paradojas se desarrollaron teorías más sofisticadas que las que hizo Cantor. Nosotros trabajaremos con esta definición de la cual es posible derivar contradicciones, sin embargo la existencia de estas contradicciones no afecta la validez de nuestros resultados, ya que estos pueden ser demostrados en las teorías mas sofisticadas en las que las paradojas no ocurren.

Definición 2.0.2. A los objetos que conforman un conjunto se les denomina **elementos**.

A los conjuntos los denotaremos con letras mayúsculas y a los elementos los denotaremos usando letras minúsculas. Si A es un conjunto y x es un elemento de A diremos que x **pertenece a** A lo cual denotaremos como $x \in A$, en caso contrario, si x no es un elemento de A usaremos la notación $x \notin A$ y diremos que x **no pertenece a** A. La definición de un conjunto no debe ser ambigua en el sentido de que pueda decidirse cuando un objeto particular pertenece o no a un conjunto.

2.1 Conjuntos por extensión y por comprensión

Definición 2.1.1. Un conjunto está definido por **extensión** si se especifican todos los elementos que tiene el conjunto.

Ejemplo 2.1.1. Ejemplos de conjuntos definidos por extensión.

1. $A = \{a, e, i, o, u\}$.
2. $B = \{0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 2, 1, 3\}$.
3. $C = \{b, \heartsuit, 7, \ddot\smile\}$.

Notemos que los elementos de un conjunto están separados por comas y están encerrados entre llaves, además como podemos ver en el tercer ejemplo, pueden no tener nada que ver uno con el otro.

Ejemplo 2.1.2. Sea A el conjunto de los enteros positivos múltiplos de 3 que están entre uno y setenta entonces

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69\}.$$

Como podemos ver en el ejemplo anterior, esta manera de definir conjuntos puede no ser muy práctica cuando trabajamos conjuntos con muchos elementos. De hecho los conjuntos con una cantidad infinita de elementos no siempre pueden especificarse de forma explícita, por ello necesitamos otra manera de definir conjuntos.

Definición 2.1.2. Un conjunto esta definido por **comprensión** cuando especificamos una propiedad que todos los elementos cumplen.

Esta propiedad se expresa como una proposición $P(x)$, de aquí que el conjunto

$$A = \{x \in U \mid P(x)\}$$

sea el conjunto de todos los x en el universo del discurso U tales que $P(x)$ sea verdadera.

Ejemplo 2.1.3. Ejemplos de conjuntos definidos por extensión

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$.
2. $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 10\}$.
3. $C = \{a \in \mathbb{N} \mid a = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

El conjunto A es justamente $A = \{-1, 3\}$ pues estos valores son todas las soluciones a la ecuación cuadrática que aparece como proposición. El conjunto B consta de todos los números enteros mayores o iguales a 10 mientras que el conjunto C comprende a todos los números naturales pares.

Frecuentemente se ocupa notación un poco menos formal para describir conjuntos, por ejemplo para describir a los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 100\}$ y $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ frecuentemente usamos puntos suspensivos y los describimos como $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ y $B = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$, sin embargo debemos cuidar, al usar esta notación, que sea claro a que conjunto nos estamos refiriendo.

2.2 Conjunto vacío y conjunto universal

Cuando hablemos de conjuntos, para contextualizar de dónde sacamos nuestros elementos fijaremos un conjunto que contenga a todos los posibles miembros de estos conjuntos.

Definición 2.2.1. El **conjunto universal**, Ω, es el conjunto formado por todos los elementos con los que estamos trabajando en un cierto contexto dado.

De igual manera otro conjunto importante es el que no contiene elementos.

Definición 2.2.2. El **conjunto vacío**, $\emptyset$, es el conjunto que no tiene ningún elemento.

2.3 Igualdad de conjuntos

Como en muchas ramas en las matemáticas es importante definir cuando dos estructuras son iguales, en el caso de los conjuntos tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen a los mismos elementos.

Si esto se cumple diremos que $A = B$, por otro lado si los conjuntos no son iguales lo denotraremos como $A \neq B$.

Ejemplo 2.3.1. Los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$ y $B = \{-1, 3\}$ son iguales aunque estén definidos de distinta manera.

Como dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, esto implica que el orden en que aparecen los elementos en un conjunto definido por extensión no importa.

Ejemplo 2.3.2. Los conjuntos $\{c, b, a\}$, $\{a, b, c\}$ y $\{b, c, a\}$ son iguales, pues tienen los mismos elementos.

Otro aspecto importante de esta definición que si hay elementos repetidos tampoco es importante. Los conjuntos $\{\ddot\smile, \heartsuit\}$ y $\{\ddot\smile, \ddot\smile, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit\}$ son iguales pues cualquier elemento de uno está en el otro.

Ejemplo 2.3.3. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5\}$ son distintos pues $4 \in A$ y $4 \notin B$.

Como el ejemplo anterior muestra, una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos A y B sean distintos es que exista un elemento en uno que no pertenezca al otro.

Ejemplo 2.3.4. Los conjuntos $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$ son distintos, pues $\emptyset$ no tiene elementos mientras que y $\{\emptyset\}$ tiene un elemento, $\emptyset$.

2.4 Subconjuntos

Definición 2.4.1. Sean A y B dos conjunto. Diremos que A es **subconjunto** de B, lo cual denotaremos por $A \subseteq B$, si todo elemento de A también es elemento de B.

Ejemplo 2.4.1. Sean $A = \{1, 2, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $A \subseteq B$ pues 1, 2 y 5 son elementos de B.

Si A no es un subconjunto de B, entonces lo denotaremos como $A \nsubseteq B$.

Ejemplo 2.4.2. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d\}$. Entonces $A \nsubseteq B$ pues $a \in A$ pero $a \notin B$.

Como podemos ver en el ejemplo anterior, basta con que exista un elemento en A que no esté en B para que A no sea subconjunto de B.

Definición 2.4.2. Si A es subconjunto de B y además existe un elemento en B que no está en A, entonces diremos que A es un **subconjunto propio**, lo cual se denota como $A \subset B$.

Esta definición implica que si A es un subconjunto propio de B, entonces $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Como los conjuntos también son objetos en si mismos, podemos tener conjuntos de conjuntos. Debemos tener cuidado de no confundir la notación de pertenencia de un elemento a un conjunto con la de subconjunto.

Ejemplo 2.4.3. Sea $A = \{\{\heartsuit\}, \diamond\}$. El conjunto $\{\heartsuit\}$ es un elemento de A, sin embargo no es subconjunto de A pues $\heartsuit$ no es un elemento de A, es decir $\{\heartsuit\} \in A$ pero $\{\heartsuit\} \nsubseteq A$. Por otro lado $\{\diamond\}$ es un subconjunto de A, pero no es un elemento de A, es decir $\{\diamond\} \notin A$ pero $\{\diamond\} \subseteq A$.

A continuación demostraremos algunos resultados sencillos pero importantes acerca de los subconjun

Proposición 2.4.3. Sea A un conjunto, entonces $\emptyset \subseteq A$.

Demostración. Sea A un conjunto. Supongamos por contradicción que el conjunto vacío no es subconjunto de A, entonces existe un elemento $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Sin embargo esto es una contradicción pues el conjunto vacío no tiene elementos. □

Proposición 2.4.4. Sea A un conjunto, entonces $A \subseteq A$.

Demostración. Sea A un conjunto. Supongamos por contradicción que A no es subconjunto de A, entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin A$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.4.5. Sea A un conjunto, entonces $A \subseteq \Omega$.

Demostración. Sea A un conjunto. Supongamos por contradicción que A no es subconjunto de Ω, entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin \Omega$. Sin embargo esto es una contradicción pues el conjunto universal Ω contiene a todos los elementos. □

Proposición 2.4.6. Sean A y B conjuntos. Entonces $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Demostración. Para la necesidad probaremos que si $A = B$, entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si $A = B$, entonces todos los elementos de A están en B, por lo tanto $A \subseteq B$. Por otro lado, si $A = B$ todos los elementos de B se encuentran en A, por lo que $B \subseteq A$. De aquí que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Para la suficiencia probaremos que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Si $A \subseteq B$, entonces todo elemento de A está en B. Por otro lado como $B \subseteq A$ todo elemento de B está en A, por lo que estos conjuntos deben ser iguales. □

Proposición 2.4.7. Sean A, B y C conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Demostración. Sean A, B y C conjuntos y sea $x \in A$. Como $A \subset B$, entonces $x \in B$ y luego como $B \subseteq C$, entonces $x \in C$. Por lo tanto si $x \in A$, entonces $x \in C$. Esto implica que todo elemento en A está en C por lo que $A \subseteq C$. □

2.5 Diagramas de Venn

Definición 2.5.1. Un **diagrama de Venn** es un tipo de diagrama que puede usarse para representar visualmente conjuntos de un universo Ω.

Los diagramas de Venn son muy útiles para representar pocos conjuntos. Para elaborar un diagrama de Venn primero se dibuja un rectángulo que representará al conjunto universal Ω; dentro de él se dibujarán círculos, rectángulos u otras formas, las cuales pueden sombrearse en caso de ser necesario, para representar conjuntos. En ocasiones, es conveniente también agregar los elementos que contienen los conjuntos.

Ejemplo 2.5.1. En el diagrama de Venn de la figura 2.1 aparecen los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$ del conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

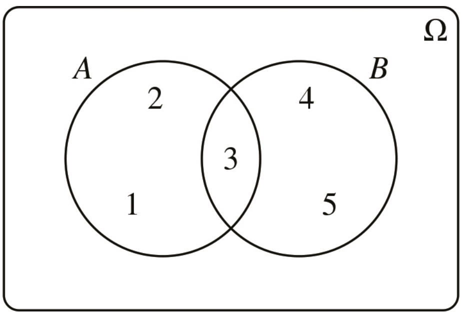


Figura 2.1: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B en el conjunto Ω.

Ejemplo 2.5.2. En el diagrama de Venn de la figura 2.2 se ejemplifica la proposición 2.4.7

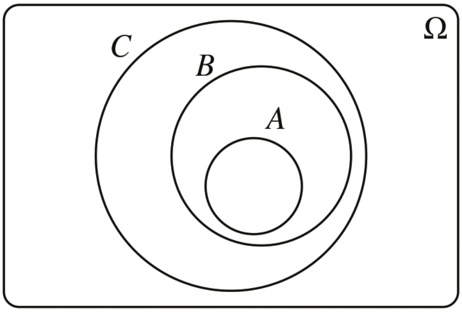


Figura 2.2: Diagrama de Venn que ejemplifica la transitividad en los subconjuntos.

Ejemplo 2.5.3. En el diagrama de Venn de la figura 2.3 se pueden observar dos conjuntos que no tienen elementos en común.

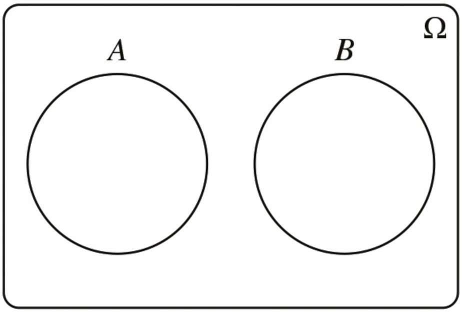


Figura 2.3: Diagrama de Venn de dos conjuntos que no comparten elementos.

Es importante destacar que un diagrama de Venn no es una demostración, sin embargo puede ayudar a hacer claras las ideas en los argumentos.

2.6 Operaciones con conjuntos

Podemos definir diferentes operaciones entre conjuntos para construir conjuntos nuevos a partir de ellos, vamos a revisar con detalle las operaciones mas comunes.

2.6.1 Unión

Definición 2.6.1. La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B. A este conjunto se le denota $A \cup B$.

Usando la notación de conjuntos, el conjunto unión es

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En la figura 2.4 aparece sombreada la unión de los conjuntos A y B.

Ejemplo 2.6.1. La unión de los conjuntos $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \ddot\smile\}$ y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$ es el conjunto $A \cup B = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \ddot\smile\}$.

Notemos que por definición en la unión de conjuntos también se incluyen los elementos que pertenece a ambos conjuntos.

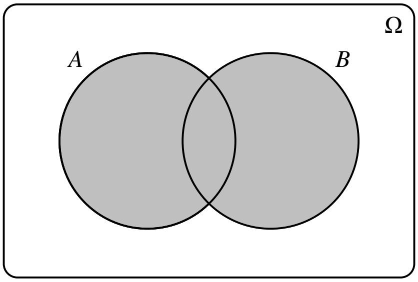


Figura 2.4: Diagrama de Venn de la unión de dos conjuntos.

Propiedades de la unión

Sean A, B, y C conjuntos. Entonces

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
4. $A \cup \Omega = \Omega$.
5. $A \cup A^c = \Omega$.
6. $A \cup \emptyset = A$.
7. $A \subset A \cup B$.
8. Si $B \subset A$, entonces $A \cup B = A$.

2.6.2 Intersección

Definición 2.6.2. La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B. A este conjunto se le denota $A \cap B$.

Usando la notación de conjuntos, el conjunto intersección es:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

En la figura 2.5 aparece sombreada la intersección de los conjuntos A y B.

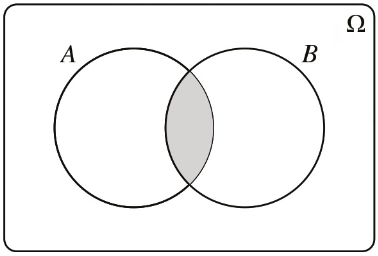


Figura 2.5: Diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos.

Ejemplo 2.6.2. La intersección de los conjuntos $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \ddot\smile\}$ y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$ es el conjunto $A \cap B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$.

Puede suceder que $A \cap B = \emptyset$, cuando los conjuntos A y B no tienen elementos en común. Si esto sucede, diremos que los conjuntos son **ajenos**.

Propiedades de la intersección

Sean A, B, y C conjuntos. Entonces:

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cap A^c = \emptyset$.
6. $A \cap \Omega = A$.
7. $A \cap B \subset A$.
8. Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.

Leyes distributivas

Sean A, B, y C conjuntos. Entonces:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.6.3 Complemento

Definición 2.6.3. El **complemento** de un conjunto A es el conjunto conformado por todos los elementos que no pertenecen a A. A este conjunto se le denota A^c o $\overline{A}$.

Usando la notación de conjuntos, el complemento de A es el conjunto:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

.

En la figura 2.6 aparece sombreado el complemento de A:

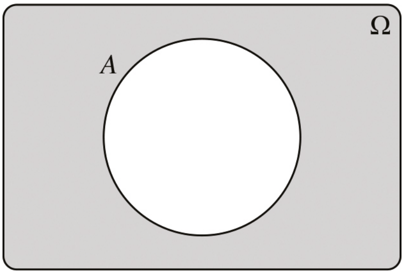


Figura 2.6: Diagrama de Venn del complemento de un conjunto.

Ejemplo 2.6.3. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y sea $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$, entonces el complemento de A es el conjunto $A^c = \{3, 5, 8\}$.

Propiedades del complemento

Sea A un conjunto. Entonces:

1. $(A^c)^c = A$.

2. $\Omega^c = \emptyset$.

3. $\emptyset^c = \Omega$.

4. $A \cup A^c = \Omega$.

5. $A \cap A^c = \emptyset$.

Leyes de De Morgan

Sean A y B conjuntos. Entonces:

1. $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$.

2. $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.

Contrario a las anteriores propiedades las Leyes de De Morgan no son inmediatas, su demostración se deja como ejercicio (ver ejercicio 2.10).

2.6.4 Diferencia

Definición 2.6.4. La **diferencia** o resta de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A pero no a B. A este conjunto se le denota $A \setminus B$.

Usando la notación de conjuntos, la diferencia de A y B es el conjunto:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

En la figura 2.7 aparece sombreada la diferencia de los conjuntos A y B.

Ejemplo 2.6.4. La diferencia de los conjuntos $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \smile\}$ y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$ es el conjunto $A \setminus B = \{\smile\}$. Por otro lado la diferencia de B y A es el conjunto $A \setminus B = \{\spadesuit\}$. Como podemos ver la diferencia de conjuntos no es una operación conmutativa.

Propiedades de la diferencia

Sean A y B conjuntos. Entonces:

1. $A \setminus B = A \cap B^C$.
2. $A \setminus B \neq B \setminus A$, salvo si $A = B$.
3. $A \setminus A = \emptyset$.
4. $A \setminus \Omega = \emptyset$.

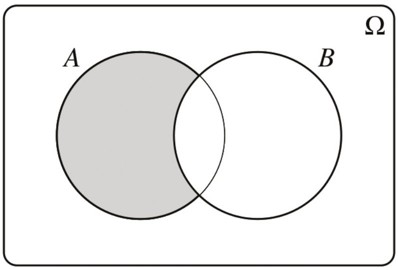


Figura 2.7: Diagrama de Venn de la diferencia de dos conjuntos.

5. $A \setminus \emptyset = A$.
6. $A \setminus B \subseteq A$.
7. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \setminus B = A$.
8. $A^c = \Omega \setminus A$.

2.6.5 Diferencia simétrica

Definición 2.6.5. La **diferencia simétrica** dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B, pero no a ambos. A este conjunto se le denota $A \vartriangle B$.

Esta operación es análoga al o exclusivo en lógica. Usando la notación de conjuntos, la diferencia simétrica de A y B es el conjunto:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

En la figura 2.8 aparece sombreada la diferencia simétrica de los conjuntos A y B.

Ejemplo 2.6.5. La diferencia simétrica de los conjuntos $A = \{\heartsuit, \diamond, \ddot\smile\}$ y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamond\}$ es el conjunto $A \triangle B = \{\ddot\smile, \spadesuit\}$.

Otra forma común de definir a la diferencia simétrica es:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

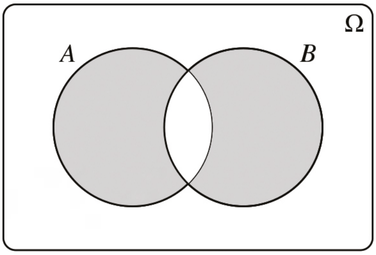


Figura 2.8: Diagrama de Venn de la diferencia simétrica de dos conjuntos.

Propiedades de la diferencia simétrica

Sean A y B conjuntos. Entonces:

1. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. $A \triangle B = B \triangle A$.
3. $A \triangle A = \emptyset$.
4. $A \triangle \Omega = A^c$.
5. $A \triangle \emptyset = A$.
6. $A \triangle A^c = \Omega$.
7. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \triangle B = A \cup B$.

2.6.6 Producto Cartesiano

Uno de los conceptos más importantes en la teoría de conjuntos y en las matemática es el del producto cartesiano de conjuntos. Para entender este concepto necesitamos primero conocer el de n-eada ordenada.

Definición 2.6.6. Una ***n*-eada ordenada** es una sucesión ordenada de n elementos a la cual denotaremos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

A las 2-eadas ordenadas se les denomina pares ordenados y a las 3-eadas ordenadas se les denomina ternas ordenadas. Diremos que dos n-eadas ordenadas son son tal si son iguales en su i-ésimo elemento, para $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots n$. Notemos que el orden es muy importante, por lo que aunque las n-eadas ordenadas tengan los mismos elementos, no serán iguales a menos que estén también en el mismo orden. Son de particular interés las n-eadas cuya i-ésima entrada es un elemento de un cierto conjunto A_i.

Definición 2.6.7. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. El **producto cartesiano** de estos conjuntos, el cual se denota por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, es el conjunto formado por las n-eadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

En notación de conjuntos, el producto cartesiano es el conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2 \ldots, n\}.$$

En el caso en que $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, denotamos al producto cartesiano con A^n.

Ejemplo 2.6.6. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, el conjunto $\mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano, donde cada par ordenado (x, y) corresponde a un punto y viceversa.

Ejemplo 2.6.7. Sean $A = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$A \times B = \{(\heartsuit, 1), (\heartsuit, 2), (\heartsuit, 3), (\diamondsuit, 1), (\diamondsuit, 2), (\diamondsuit, 3)\}.$$

Por otro lado

$$B \times A = \{(1, \heartsuit), (1, \diamondsuit), (2, \heartsuit), (2, \diamondsuit), (3, \heartsuit), (3, \diamondsuit)\}.$$

Como podemos observar en el ejemplo anterior, en general $A \times B \neq B \times A$. A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes del producto cartesiano.

Propiedades del producto cartesiano

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2.6.7 Conjunto potencia

Definición 2.6.8. Sea A un conjunto. El **conjunto potencia** del conjunto A, el cual se denota por $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

El conjunto potencia es particularmente importante en la teoría de conjuntos y en las matemáticas discretas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.6.8. Sea $A = \{1\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$.

Ejemplo 2.6.9. Sea $B = \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}$.

Ejemplo 2.6.10. Sea $C = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, C\}$.

Recordemos que, por las proposiciones 2.4.3 y 2.4.4, el conjunto vacío siempre es subconjunto de todo conjunto y que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

2.7 Cardinalidad de un conjunto.

Definición 2.7.1. Sea A un conjunto. La **cardinalidad** de A es el número de elementos que tiene A. La denotaremos como $|A|$.

Notemos que $|A| = 0$ si y sólo si $A = \emptyset$. Diremos que un conjunto A es **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$, en caso contrario diremos que es **infinito**. Si A es un conjunto de cardinalidad n, podemos denotarlo como $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Ejemplo 2.7.1. Sea $A = \{a, \heartsuit, \diamond, \ddot\smile, 1\}$, entonces $|A| = 5$.

Ejemplo 2.7.2. Sea $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $|\mathcal{P}(B)| = 8$.

El concepto de cardinalidad es particularmente importante en algunas áreas de las matemáticas como la probabilidad o la combinatoria. Sin embargo, contar los elementos de un conjunto no siempre es fácil y ha llevado a la creación de diversas técnicas para abordar este problema, las cuales se verán en el capítulo 6. En esta sección abordaremos algunos resultados básicos acerca de la cardinalidad de conjuntos y sus operaciones.

Proposición 2.7.2. Sean A y B conjuntos finitos ajenos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos ajenos. Si alguno de ellos es vacío, el resultado se cumple, así que podemos suponer que son distintos del vacío. Sean

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

con $|A| = n$ y $|B| = m$. Como A y B son ajenos, no tienen elementos en común, es decir, $a_i \neq b_j$, entonces

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

por lo que,

$$|A \cup B| = n + m = |A| + |B|.$$

□

Proposición 2.7.3. Sean A y B conjuntos finitos, entonces $|A \times B| = |A|\,|B|$.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos finitos. Si alguno de ellos es vacío el resultado se cumple, así que podemos suponer que son distintos del vacío. Sean

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

con $|A| = n$ y $|B| = m$. Sea a_i un elemento cualquiera de A, entonces existen m pares ordenados de la forma (a_i, b) con $b \in B$ en el conjunto $A \times B$. Ahora bien, como existen n elementos en A y hay m maneras de elegir la segunda entrada del par ordenado (a_i, b), esto implica que hay nm pares ordenados en $A \times B$. Por esto

$$|A \times B| = nm = |A|\,|B|.$$

□

Proposición 2.7.4. Sean A y B conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos finitos; sea m la cantidad de elementos que están en A pero no en B, es decir, $|A \setminus B| = m$; sea n la cantidad de elementos que están en B pero no en A, es decir, $|B \setminus A| = n$; y sea k la cantidad de elementos que pertenecen a ambos conjuntos, es decir, $|A \cap B| = k$, como se muestra en la figura 2.9.

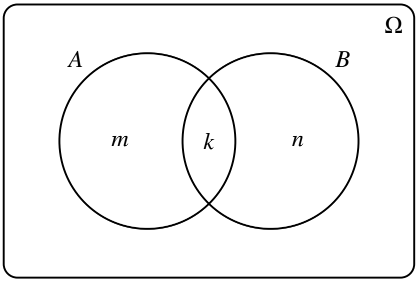


Figura 2.9: Esbozo de la demostración acerca de la cardinalidad de la unión de dos conjuntos.

Como estos tres conjuntos son ajenos, por la proposición 2.7.3 tenemos que:

$$|A \cup B| = m + n + k = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

Por otro lado $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ y $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, por lo que:

$$|A| + |B| - |A \cap B| = (m + k) + (n + k) - k = m + n + k.$$

Por lo tanto:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

□

Ejemplo 2.7.3. Los 100 alumnos de Ingeniería en Computación hicieron exámenes de Matemáticas Discretas I y de Cálculo I, obtuvieron los siguientes resultados:

1. 20 alumnos no han aprobado ninguna de las dos UEA.
2. 25 alumnos aprobaron las dos UEA.
3. El número de alumnos que aprobaron Cálculo I es el doble de los que aprobaron Matemáticas Discretas I.

Determinar el número de alumnos que aprobaron Cálculo I y el número de alumnos que aprobaron Matemáticas Discretas I.

Para determinar el número de alumnos que aprobaron las UEA usaremos el principio de inclusión y exclusión. Sean Ω el conjunto conformado por los 100 alumnos, A el conjunto de alumnos que aprobó Cálculo I y sea B el conjunto de alumnos que aprobó Matemáticas Discretas I. De los datos que se tienen, sabemos que:

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= 100\\
|(A\cup B)^c| &= 20\\
|A\cap B| &= 25\\
|A| &= 2|B|
\end{aligned}$$

Como $(A \cup B)^c$ y $(A \cup B)$ son conjuntos ajenos y $(A \cup B)^c \cup (A \cup B) = \Omega$, tenemos que:

$$|(A\cup B)^c| + |(A\cup B)| = |\Omega|$$

Por lo que al despejar obtenemos que $|(A \cup B)| = 80$. Usando el principio de inclusión y exclusión y sustituyendo la información que ya obtuvimos, tenemos que

$$\begin{aligned}
|A\cup B| &= |A| + |B| - |A\cap B|\\
80 &= 2|B| + |B| - 25\\
3|B| &= 105\\
|B| &= 35
\end{aligned}$$

Por lo que el número de alumnos que aprobaron Matemáticas Discretas I es 35 y el número de alumnos que aprobaron Cálculo I es 70.

2.8 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Define por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \leq x \leq 15\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$.
3. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x$ es primo y $x \leq 20\}$.
4. $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ tiene un solo dígito$\}$.
5. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20$ y $x = k^2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 2.2. Define por comprensión los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de los naturales menores que 15.
2. $\{a, e, i, o, u\}$.
3. $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
4. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.
5. El conjunto de las letras de tu primer nombre.

Ejercicio 2.3. Determina, en el conjunto de los números enteros cuales de los siguientes conjuntos son iguales:

1. $A = \{x \mid x \text{ es par y } x^2 \text{ es impar}\}$.
2. $\{1, 2, 3\}$.
3. $\{x \mid x = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. $\{x \mid x > x + 1\}$.
5. $A = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10 \ldots\}$.
6. $\{1, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 2\}$.
7. $\emptyset$.

Ejercicio 2.4. Indica si es verdadero o falso:

1. ( ) $\{x\} \subseteq \{x\}$.
2. ( ) $\{x\} \in \{x\}$.
3. ( ) $\{x\} \subsetneq \{x\}$.
4. ( ) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$.
5. ( ) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$.

Ejercicio 2.5. Sean A, B, y C conjuntos. Si $A \in B$ y $B \in C$, ¿Podría pasar que $A \in C$? ¿Podría pasar que $A \notin C$? Construye ejemplos de tus afirmaciones.

Ejercicio 2.6. Elabore los diagramas de Venn para los siguientes conjuntos:

1. $A \cup B^c$.
2. $A \setminus B^c$.
3. $A^c \cup B^c$.
4. $A \cap B^c$.
5. $A^c \cap B^c$.

Ejercicio 2.7. Elabore los diagramas de Venn para los siguientes conjuntos:

1. $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
3. $(A \cup B) \setminus (A \cap C)$.
4. $(A^c \cap B^c) \setminus C^c$.
5. $(A \triangle B) \setminus C$.

Ejercicio 2.8. Simplifica usando álgebra de conjuntos $(((A \cup B) \cap C)^c \cup B^c)^c$.

Ejercicio 2.9. Prueba que:

1. $\overline{A \triangle B} = A \triangle \overline{B}$.
2. Si $A \subset B$ y $C \subset D$, entonces $A \cap C \subset B \cap D$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. Si $A \subset B$, entonces $A \setminus B = \emptyset$.
6. $(A \setminus B) \cap (A \cup B) = \emptyset$.
7. $A \cup (B \cap A) = A$.
8. $A \cap (A \cup B) = A$.
9. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.
10. $A \cup \overline{A} = \Omega$.
11. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
12. $(A \setminus B^c) = A \cap B$.
13. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Ejercicio 2.10. Demuestra las leyes de De Morgan para conjuntos.

Ejercicio 2.11. Sean A y B conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y solo si $A \cup B = A \cap B$.

Ejercicio 2.12. Comprueba que la diferencia simétrica es una operación conmutativa.

Ejercicio 2.13. Sean A y B conjuntos. Demuestra que $A = B$ si y solo si $A \triangle B = \emptyset$.

Ejercicio 2.14. Demostrar que $A \times \emptyset = \emptyset$.

Ejercicio 2.15. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, y $C = \{\alpha, \gamma, \psi\}$. Calcula los siguientes conjuntos:

1. $A \times B \times C$.
2. $A \times (B \cap C)$.
3. $A \times (B \cup C)$.

Ejercicio 2.16. Demostrar que $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Ejercicio 2.17. Demostrar que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Ejercicio 2.18. Encuentra el conjunto potencia del conjunto $\{\emptyset, \{A\}, \{1, 2\}\}$.

3 Números Naturales

"Dios hizo los números enteros;
el resto es obra del hombre"
Leopold-Kronecker

Los números naturales surgieron por la necesidad de contar y son los primeros en aparecer en la historia de la humanidad. Éstos sirven para contar y/o ordenar a los elementos que tiene un conjunto. El conjunto de los números naturales se denota como $\mathbb{N}$ y es el conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}.$$

Estrictamente los naturales no contienen al número cero, por este motivo, a través de este texto, vamos a considerar el conjunto de los número naturales sin el cero. Es importante mencionar que en cursos como cálculo a menudo se incluye al cero en el conjunto de los naturales. Depende de las necesidades con las que nos encontremos el poder incluirlo o no.

3.1 Axiomas de Peano

Hay distintas formas de construir a los números naturales. Una de ellas es a través de los Axiomas de Peano, llamados así en honor a su creador Guisseppe Peano (1858-1932), amante del rigor y la precisión. Los axiomas de Peano son cinco, aunque hay versiones en las que solamente aparecen tres axiomas.

Axiomas de Peano

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Existe una función, llamada *sucesor*, $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $s(n) \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $s(n) = n + 1$.
3. Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $s(n) \neq s(m)$.
4. El 1 no es sucesor de nadie.
5. (*Axioma de inducción*) Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ distinto del vacío. Si S satisface las siguientes propiedades:

   a) $1 \in S$.

   b) Si $n \in S$, entonces $s(n) \in S$.

   Entonces $S = \mathbb{N}$.

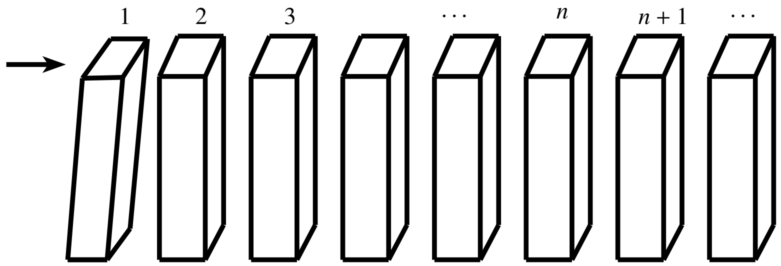


Figura 3.1: Fichas de dominó que caen después de tirar la primer ficha.

3.2 Principio de Inducción Matemática

El axioma 5 de los Axiomas de Peano es el fundamento del método de demostración de la inducción matemática. La inducción matemática es una técnica de demostración que se utiliza para establecer la validez de un enunciado concerniente con los números naturales.

Esta forma de demostración consiste en demostrar que el enunciado es cierto para el primer número natural y, después, si se pureba que la proposición es cierta para un número natural, entonces también es cierta para el siguiente. Una explicación informal de la inducción matemática puede ser ilustrada por el efecto dominó. A continuación explicamos el método de inducción matemática:

Principio de Inducción Matemática

Sea P una propiedad y sea S el subconjunto de los naturales que satisfacen la propiedad P, es decir,

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ satisface la propiedad } P\}.$$

Si el conjunto S satisface las siguientes dos propiedades:

a) $1 \in S$,

b) si $k \in S$, entonces $k + 1 \in S$ (nótese que $k + 1$ es el sucesor $s(k)$ de k),

entonces por el Axioma de inducción (axioma 5 de Peano) se tiene que $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.2.1. Demostrar utilizando inducción matemática que la siguiente fórmula es válida para todos los números naturales.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Definimos al conjunto S como:

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

Ahora vamos a probar que S satisface las propiedades *a*) y *b*) del axioma 5 de los axiomas de Peano.

1. **Base de la inducción**: Comprobar la propiedad para $n = 1$.

$$\frac{1(2)}{2} = 1.$$

   Por lo tanto $1 \in S$.

2. **Hipótesis de inducción**: Suponer que un natural $k > 1$ es un elemento de S, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3. **Paso Inductivo**: Demostrar que la fórmula es cierta para el natural $k + 1$, dicho de otra forma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

   Utilizando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}_{\text{Hipótesis de inducción}} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, por el axioma de inducción tenemos que $S = \mathbb{N}$ y la fórmula es válida para todos lo números naturales.

Ejemplo 3.2.2. Probar utilizando inducción matemática que la siguiente fórmula es cierta para todos los números naturales.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Definimos al conjunto S como

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}.$$

Veamos que el conjunto S cumple las propiedades *a*) y *b*).

1. **Base de la inducción**: Comprobar la propiedad para $n = 1$.

$$1^2 = 1 = \frac{1(2)(3)}{6}.$$

   Por lo tanto $1 \in S$.

2. **Hipótesis de inducción**: Suponer que la fórmula es cierta para un natural $k > 1$, es decir,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$
3. **Paso Inductivo**: Demostrar que la fórmula es cierta para el sucesor de k, es decir, para $k+1$. Queremos demostrar utilizando la hipótesis de inducción que
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$
Al observar el lado izquierdo de la igualdad anterior, se ve que para sumar los primeros k términos podemos utilizar la hipótesis de inducción. Entonces, tenemos:
$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\,(k(2k+1) + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Por el axioma de inducción la fórmula queda demostrada.

A partir de ahora no definiremos al conjunto S, pues su definición no es necesaria para la demostración.

Ejemplo 3.2.3. Demostrar utilizando inducción matemática que para todo número natural n, $n^3 - n$ es divisible[1] entre 3.

1. **Base de la inducción**: Cuando $n = 1$, tenemos que $1^3 - 1 = 0$ y como $3|0$, pues $0 = 3 \cdot 0$, entonces $3|(1^3 - 1)$.
2. **Hipótesis de inducción**:

   Supongamos ahora que $k \in \mathbb{N}$, con $k > 1$ y $3|(k^3 - k)$. Esto significa que existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $k^3 - k = 3c$.
3. **Paso Inductivo**: Demostrar que $3|((k+1)^3 - (k+1))$.

   Desarrollando el término $(k+1)^3 - (k+1)$ tenemos:
$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - (k+1) \\
&= (k^3 - k) + 3(k^2 - k) \\
&= 3c + 3(k^2 + k) \text{ (utilizando la hipótesis de inducción } k^3 - k = 3c) \\
&= 3(c + k^2 + k).
\end{aligned}$$
   Así tenemos que 3 divide a $(k+1)^3 - (k+1)$.

[1] Recordemos que $a|b$ y si sólo existe c $\in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$.

Ejemplo 3.2.4. Demostrar por inducción que para todo número natural n,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

1. **Base de la inducción**: Cuando $n = 1$ tenemos que:

$$1 + 2 = 2^{1+1} + 1 = 4 - 1 = 3.$$

2. **Hipótesis de inducción**: Supongamos que para algún natural $k > 1$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

3. **Paso Inductivo**: Utilizando la hipótesis de inducción queremos demostrar que:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= 2^{k+1+1} - 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.5. Probar utilizando inducción matemática que la siguiente fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

1. **Base de la inducción**: Cuando $n = 1$ tenemos que:

$$1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

por lo que la propiedad se cumple para $n = 1$.

2. **Hipótesis de Inducción:** Supongamos que la propiedad es cierta para un natural $n = k > 1$, es decir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

3. **Paso Inductivo:** Hay que probar que $k + 1$ (el sucesor de k) satisface la fórmula:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por hipótesis de inducción sabemos que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Le sumamos el término $\frac{1}{2^{k+1}}$ a ambos lados de la igualdad en la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{\text{Hipótesis de Inducción}} \quad +\frac{1}{2^{k+1}} &= 1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1-\frac{2}{2\left(2^k\right)}+\frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1-\frac{1}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Consideremos ahora un caso de desiguladades.

Ejemplo 3.2.6. Encontrar cuáles son los números naturales que satisfacen la siguiente desigualdad

$$n! > 2^n,$$

recuerda que $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

1. **Base de la inducción**: La desigualdad no es válida para $n = 1, 2, 3$. Para $n = 4$, tenemos que $4! = 24 > 2^4 = 16$.

2. **Hipótesis de inducción**: Supongamos que la desigualdad se cumple para algún natural $k > 4$. Esto es $k! > 2^k,\ k > 4$.

3. **Paso Inductivo**: Demostrar que $(k + 1)! > 2^{k+1}$.

   Nótese que $(k+1)! = k!\cdot(k+1)$, entonces tenemos $(k+1)! = k!\cdot(k+1) > 2^k\cdot(k+1) > 2^k\cdot 2 = 2^{k+1}$, pues $k \geq 4$.

La inducción matemática también puede utilizarse para probar fórmulas en geometría.

Ejemplo 3.2.7. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo con n lados es $(n - 2)\pi$.
Para resolver este ejercicio utilizaremos inducción sobre el número de lados del polígono.

1. **Base de la inducción**: Como el polígono más pequeño que se puede construir es un triángulo, el cual tiene tres lados, demostramos la base de inducción para $n = 3$.

   Si $n = 3$, entonces el polígono es un triángulo y sabemos de la geometría elemental que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $\pi = (3 - 2)\pi$.

2. **Hipótesis de inducción**: Supongamos que para todo polígono convexo con k lados, se tiene que la suma de sus ángulos internos es $(n - 2)\pi$.

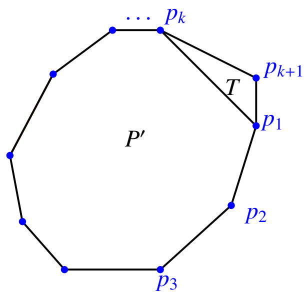


Figura 3.2: Polígono convexo P.

3. **Paso Inductivo**: Consideremos un polígono convexo P con $k+1$ lados. Supongamos que los vértices de P son $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$. Para utilizar la hipótesis de inducción, tracemos la diagonal $p_1 p_k$. Observa que esta diagonal divide a P en dos polígonos, el trángulo T formado por los vértices p_1, p_k y p_{k+1} y el polígono P' con vértices $p_1, p_2, \ldots, p_k$, como se muestra en la figura 3.2.

   Sabemos que la suma de los ángulos internos T es π y, si aplicamos la hipótesis de inducción, tenemos que la suma de los ángulos internos de P' es $(k-2)\pi$. Como la suma de los ángulos internos de P es igual a la suma de los ángulos internos de T y de P', tenemos que la suma de los ángulos de P es:
   $$\pi + (k-2)\pi = ((k+1)-2)\pi$$
   Con lo que queda demostrada la fórmula.

3.2.1 Formas equivalentes de inducción

En esta sección discutiremos algunas formas equivalentes del principio de inducción matemática. En ocasiones estas formas pueden ser más fáciles de utilizar.

Principio de Inducción Matemática Modificada o Fuerte

Sea P una propiedad y sea $S \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales que satisfacen la propiedad P. Si el conjunto S satisface las siguientes dos propiedades:

a) $1 \in S$,

b) Si $1, 2, 3, \ldots, n \in S$, entonces que $n+1 \in S$,

entonces $S = \mathbb{N}$.

A diferencia de la inducción matemática, en el principio de inducción fuerte la hipó- tesis se cumple para todo $k \leq n$ (en lugar de suponer que se cumple solo para $k = n$).

Veamos un ejemplo para ver cómo se utiliza este tipo de inducción. Para ello necesitamos definir a la sucesión de Fibonnaci. La sucesión de Fibonacci es una sucesión infinita de número naturales que comienza
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$
La sucesión de Fibonacci puede definirse de forma recursiva por las siguientes ecuaciones:

a) $f_1 = 1$,

b) $f_2 = 1$,

c) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para toda $n \geq 3$.

Ejemplo 3.2.8. Vamos a probar, utilizando el principio de inducción matemática fuerte, que para todo natural $n \geq 1$ se tiene que $f_n < 2^n$.

1. **Base de la inducción**: Demostramos que la desigualdad se cumple para $n = 1, 2$.

$$f_1 = 1 < 2^1 = 2 \text{ y } f_2 = 1 < 2^2 = 4.$$

2. **Hipótesis de inducción**: Sea $n \geq 3$ un número natural. Supongamos que la desigualdad se cumple para todo f_k, donde $1 \leq k \leq n$, es decir,

$$f_k < 2^k.$$

3. **Paso Inductivo**: Hay que probar que $f_{k+1} < 2^{k+1}$, $k \geq 3$. Para esto vamos a utilizar la hipótesis de inducción (fuerte) para f_{k-1} y f_k.

$$f_{k+1} = \underbrace{f_k + f_{k-1} < 2^k + 2^{k-1}}_{\text{hipótesis de inducción.}} = 2 \cdot 2^{k-1} + 2^{k-1} = (1+2) \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1} < 2^2 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}.$$

Entonces, queda demostrado que $f_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es importante hacer notar que en este ejemplo, la base de la inducción se probó para $n = 1$ y $n = 2$. Esto se hizo porque la sucesión de Fibonacci se construye a partir de f_1 y f_2. Además vale la pena recalcar que la hipótesis de inducción se utilizó para los valores de k y $k - 1$.

Principio del buen orden.

Un aspecto muy importante de los número naturales es el orden. El principio del buen orden establece que todo subconjunto de números naturales contiene un primer elemento. Esto quiere decir que existe un elemento del conjunto que no es sucesor de ningún otro elemento del conjunto.

Principio del buen orden: Sea $B \subset \mathbb{N}$ con $B \neq \emptyset$. Entonces existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \leq b$ para todo $b \in B$.

El principio del buen orden y el principio de inducción matemática son equivalentes. Es decir:

$$\text{principio del buen orden} \Longleftrightarrow \text{principio de inducción matemática.}$$

Teorema 3.2.1. Principio del buen orden $\Longrightarrow$ Principio de inducción matemática.

Demostración. Supongamos que se cumple el principio del buen orden. Consideremos un subconjunto S de números naturales que cumpla las siguientes dos propiedades:

a) $1 \in S$.

b) Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Para llegar a un absurdo, supongamos que $S \neq \mathbb{N}$, y definimos el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus S$. Por el principio del buen orden sabemos que B tiene un elemento b_0 tal que $b_0 \leq b$ para todo $b \in B$. Obsérvese que $b_0 \neq 1$ (pues $1 \in S$ y $B = \mathbb{N} \setminus S$), por lo tanto $b_0 > 1$ y podemos escribir:

$$b_0 = (b_0 - 1) + 1,$$

además, $b_0 - 1 \in \mathbb{N}$ y $b_0 - 1 \notin B$ pues b_0 es el elemento más pequeño de B. Entonces $b_0 - 1 \in S$ y por la propiedad b) tenemos que $(b_0 - 1) + 1 = b_0 \in S$, lo cual es una contradicción pues $B = \mathbb{N} \setminus S$. Por lo que nuestra suposición $S \neq \mathbb{N}$ es falsa y por lo tanto $S = \mathbb{N}$ y concluimos que el Principio de inducción matemática se cumple. $\square$

Ahora veremos utilizando reducción al absurdo que la otra parte de la implicación es cierta.

Teorema 3.2.2. Principio de inducción matemática $\Longrightarrow$ Principio del buen orden

Demostración. Supongamos que se cumple el principio de inducción matemática. Para llegar a un absurdo, supongamos que no se cumple el principio del buen orden, es decir, que existe un subconjunto S no vacío de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo. Definimos al conjunto B como:

$$B = \{b \in \mathbb{N} : b < s \text{ para cada } s \in S\}.$$

Obsérvese que $1 \in B$, si $1 \in S$, entonces por los axiomas de Peano, 1 sería un elemento mínimo de S. Supongamos que $k \in B$. Por la definición de B tenemos que $k < s$ para todo $s \in S$ por lo que $k + 1 \leq s$ para todo $s \in S$. Si $k + 1 \in S$, entonces $k + 1$ sería un elemento mínimo de S, lo cual es una contradicción pues S no tiene elemento mínimo. Por lo tanto $k + 1 \in B$ y, utilizando inducción matemática, tenemos $B = \mathbb{N}$, lo cual implica que $S = \emptyset$, que es una contradicción a la elección de S. Por lo que nuestra suposición acerca de la existencia de un subconjunto S no vacío de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo es falsa y por lo tanto S sí tiene primer elemento y concluimos que el principio de inducción matemática se cumple. $\square$

3.3 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Prueba utilizando inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$ las siguientes fórmulas son válidas:

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
2. $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$.
3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
4. $\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
5. $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.
6. $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.
7. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+3)}{3}$.
8. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.
9. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.
10. $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$.
11. $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, para $r \in \mathbb{R}$.
12. $(1 + a)^n \geq 1 + a^n$ donde $a > 1$.

Ejercicio 3.2. Demuestra utilizando inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $n^3 + 2n$ es multiplo de 3.
2. 6^n es un número que acaba en 6.
3. 4 divide a $5^n - 1$.
4. $a - b$ divide a $a^n - b^n$.
5. $2n < n^2 + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
6. Determinar si el producto de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 6.

Ejercicio 3.3. Experimenta con valores pequeños de n y encuentra una fórmula para la siguientes sumas. Después utiliza inducción matemática para demostrarlas:

1. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)$.

2. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

Ejercicio 3.4. Dado un tablero de ajedrez de $n \times m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ y m par, prueba utilizando inducción matemática que la tabla tiene el mismo número de cuadros blancos que de cuadros negros.

Ejercicio 3.5. Demuestra que en un tablero de de ajedrez de $n \times m$, con n, m impares los cuadros de las esquinas tienen el mismo color.

Ejercicio 3.6. Experimentando con valores pequeños de n, adivina una fórmula para el número de diagonales de un polígono regular con n lados. Luego utiliza inducción matemática para demostrarla.

Ejercicio 3.7. Considera la sucesión de Fibonacci. Demuestra utilizando inducción matemática que el n-ésimo término f_n de la sucesión está dado por la fórmula:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Ejercicio 3.8. Considera la sucesión de Fibonacci. Demuestra utilizando inducción matemática que:

$$(f_1)^2 + (f_2)^2 + \cdots + (f_n)^2 = f_n f_{n+1}.$$

Ejercicio 3.9. Considera la sucesión $1, 3, 6, 10, 15, 21\ldots$ la cual también puede ser definida de forma recursiva por:

(i) $a_1 = 1$, y

(ii) $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$.

1. Demuestra utilizando inducción que $a_n + a_{n-1} = n^2$.
2. Demuestra que $a_n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Ejercicio 3.10. Encuentra dos ejemplos de conjuntos de números que no satisfacen el Principio del Buen Orden.

Ejercicio 3.11. Encuentra dos ejemplos de conjuntos de números que no son subconjuntos de los números naturales, pero que sí tienen un primer elemento.

Ejercicio 3.12. Demuestra que cualquier cantidad de dinero $D \geq 4$ puede ser descompuesta en monedas de 5 y 2 pesos.

Ejercicio 3.13. Sean $l_1, l_2, \ldots, l_n$ un conjunto de n rectas en un plano tales que pasan por un punto en común. Demuestra que las rectas dividen al plano en $2n$ partes.

Ejercicio 3.14. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 3n\}$. Si S es un subconjunto de A de cardinalidad $2n + 1$, entonces S contiene tres número consecutivos.

Ejercicio 3.15. Considera la proposición:

"*Todos los números naturales son iguales.*"

Encuentra el error en la siguiente prueba.

Sean a, b dos enteros positivos. Sea $n = max\{a, b\}$ el valor del mayor de ambos: Procederemos por inducción sobre n.

1. **Base de la inducción**: Demostramos que la desigualdad se cumple para $n = 1$.

   Si $n = 1$ es que el máximo de ambos es 1, y por lo tanto $a = b = 1$. Por lo tanto a y b son iguales.

2. **Hipótesis de inducción**: Supongamos cierta la afirmación para k, es decir, si $max\{a, b\} = k$, entonces $a = b$.

3. **Paso Inductivo**: Hay que probar que la afirmación también es cierta para $k + 1$, es decir, si $max\{a, b\} = k + 1$, entonces $a = b$. .

   Sean a, b tales que $max\{a, b\} = k + 1$. Entonces es evidente que $max\{a - 1, b - 1\} = k$, y por la hipótesis de inducción tenemos que $a - 1 = b - 1$, de donde concluimos que $a = b$.

   Por lo tanto, $a = b$ para todo par de enteros positivos.

4 Relaciones

En este capítulo abordamos el estudio de la relaciones en matemáticas. El concepto de relación surge de la vida cotidiana; podemos pensar que una *relación* de un conjunto a otro es una forma de asociar o relacionar los elementos del primer conjunto con los elementos en el segundo conjunto. Esto puede representarse a través de una tabla. Por ejemplo, en la tabla que aparece en el cuadro 4.1 se muestra un conjunto de alumnos de la UAM-Cuajimalpa y la licenciatura que éstos estudian:

Alumno	Licenciatura
Lucas	Matemáticas Aplicadas
Emiliano	Ingeniería en Computación
Ana	Derecho
Sofía	Matemáticas Aplicadas
María	Ingeniería en Computación
Fernando	Matemáticas Aplicadas
Laura	Derecho

Cuadro 4.1: Tabla de una relación.

En el lenguaje de las relaciones, se dice que Lucas está relacionado con la licenciatura de Matemáticas Aplicadas, mientras que Ana está relacionada con la de Derecho.

4.1 Relaciones matemáticas

Comenzamos esta sección formalizando la noción de relación en matemáticas.

Definición 4.1.1. Una **relación binaria** R del conjunto A en el conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Decimos que una relación R es una **relación sobre** A si $A = B$.

Veamos algunos ejemplos de relaciones entre distintos tipos de conjuntos.

Ejemplo 4.1.1. Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{w, x, y, z\}$. Entonces $R = \{(a, x), (a, y), (b, z), (c, w), (c, z)\}$ es una relación de A en B.

Ejemplo 4.1.2. Sean $A = \{x, y\}$ y $B = \{1, 2\}$. Entonces $R_1 = \{(x, 1), (x, 2)\}$, $R_2 = \{(x, 2)\}$ y $R_3 = \{(x, 1), (x, 2), (y, 2)\}$ son relaciones de A en B.

Ejemplo 4.1.3. Sea A el conjunto formado por todos los estudiantes de la UAM-Cuajimalpa y B el conjunto formado por todas las licenciaturas que se imparten en la UAM-Cuajimlpa. Definimos una relación R que relaciona a cada estudiante con la licenciatura que estudia, es decir,

$$R = \{(a, b) : \text{el estudiante } a \text{ estudia la licenciatura } b\}.$$

Ejemplo 4.1.4. Sea A el conjunto que utilizamos en el inciso anterior. Definimos una relación binaria R' sobre A de forma que dos estudiantes van a estar relacionados si y sólo si estudian la misma licenciatura, es decir,

$$R' = \{(a, b) : \text{el estudiante } a \text{ estudia la misma licenciatura que el estudiante } b\}.$$

Ejemplo 4.1.5. Sea $A = B = \mathbb{R}$. El conjunto $R = \{(x, y) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = -y\}$ es una relación binaria sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.6. Sea $A = B = \mathbb{Z}$. Definimos la relación *desigualdad* D definida por:

$$D = \{(a, b) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leq b\}.$$

De forma similar podemos definir la relación *desigualdad estricta* D' donde la pareja (a, b) pertenece a D' si y solo si $a < b$.

Ejemplo 4.1.7. Sean $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ y $B = \{4, 8, 10, 12, 11, 13\}$. Definimos la relación D de A en B dada por $(a, b) \in D$ si y solo si $a \mid b$ (a divide a b).[2] A partir de la definición de D tenemos que

$$D = \{(2, 4), (2, 8), (2, 10), (2, 12), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (5, 10)\}.$$

Ejemplo 4.1.8. Definimos la relación de *divisibilidad* D_1 sobre $\mathbb{Z}$ donde la pareja (a, b) pertenece a D_1 si y sólo si $a \mid b$.

Ejemplo 4.1.9. La igualdad de los elementos de un conjunto A siempre define una relación binaria sobre A:

$$\mathcal{I} = \{(a, a) : a \in A\}.$$

Si R es una relación de A en B, decimos que un elemento a de A está **relacionado** con un elemento b de B si la pareja $(a, b) \in R$. En este caso escribimos aRb o $a \sim_R b$. En el Ejemplo 4.1.2 tenemos que $xR_1 1$ y $xR_1 2$. Mientras que en el item 4.1.9 se tiene que $a\mathcal{I}a$ para todo $a \in A$.

Sea R una relación. El **dominio** de la relación R es el conjunto:

$$Dom_R \quad = \quad \{a \in A : (a, b) \text{ para algún } b \in B\}.$$

La **imagen** de R es el conjunto:

$$Im_R \quad = \quad \{b \in B : (a, b) \text{ para algún } a \in A\}.$$

A partir la definición del dominio e imagen se tiene que $dom(R) \subseteq A$ y $Im(R) \subseteq B$.

Dada una relación R de A en B se puede definir una relación de B en A.

Definición 4.1.2. Sea R una relación de A en B. La **relación inversa** de R, la cual se denota por R^{-1} es la relación de B en A definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Ejemplo 4.1.10. Sea A = {Lucas, Inés, Lía, Federico, Pablo, Juan} y B = {Pumas, América, Cruz Azul, Chivas}. Definimos la relación R en la que un elemento a de A va a estar relacionado con un elemento b de B si a le va a b. Entonces R = {(Lucas,Pumas), (Inés, Cruz Azul), (Juan, América), (Lía, Pumas)}. La relación inversa de R es:

$$R^{-1} = \{(\text{Pumas,Lucas}), (\text{Cruz Azul,Inés}), (\text{América,Juan,}), (\text{Pumas, Lía})\}.$$

[2] Recordemos $a|b$ si y solo si existe un entero k tal que $b = ak$.

4.2 Clasificación de las relaciones

Las relaciones que tiene un conjunto pueden ser muy importantes. Dependiendo de las propiedades que una relación cumple, ésta puede clasificarse en relexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Definición 4.2.1. Sea A un conjunto R una relación binaria sobre A. Decimos que:

- R es **reflexiva** si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.
- R es **simétrica** si para cada $(a, b) \in R$ se tiene que $(b, a) \in R$.
- R es **antisimétrica** si para cada $(a, b) \in R$, con $a \neq b$, se tiene que $(b, a) \notin R$.
- R es **transitiva** si para cada pareja $(a, b), (b, c) \in R$ se tiene que $(a, c) \in R$.

A continuación vamos a revisar algunas de las relaciones vistas anteriormente y las propiedades que éstas cumplen.

Ejemplo 4.2.1. La relación desigualdad sobre el conjunto de los enteros:

$$D = \{(a, b) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leq b\}.$$

Reflexiva Esta relación es reflexiva, pues siempre se cumple que $a \leq a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Simétrica. No cumple con la propiedad simétrica. Para ver esto es suficiente con dar un contra ejemplo. Claramente, $1 \sim_D 2$, pues $1 \leq 2$, pero $2 \nsim_D 1$ ya que $2 \nleq 1$.

Antisimétrica. Si se satisface esta propiedad. Si $(a, b) \in D$ y $a \neq b$, entonces $a < b$, lo cual implica que $(b, a) \notin D$.

Transitiva. Supongamos que (a, b) y (b, c) son parejas en D. Utilizando la definición de D, tenemos que $a \leq b$ y $b \leq c$, implicando que $a \leq c$ por lo cual a está relacionado con c, es decir, $(a, c) \in D$. Por lo tanto D es transitiva

La relación desigualdad estricta D' con $D' \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde $(a, b) \in D$ si $a < b$.

Reflexiva. Esta relación no es simétrica pues a no puede ser menor que a.

Simétrica. Para ver que D' no es simétrica podemos ver que $(0, 1) \in D'$ y $(1, 0) \notin D'$.

Antisimétrica. Utilizando un argumento similar al utilizado en el ejercicio anterior, se puede ver que D' es antisimétrica.

Transitiva Utilizando un argumento similar al utilizado en el ejercicio anterior se puede ver que D' es transitiva.

Ejemplo 4.2.2. La relación de divisibilidad D_1 con $D_1 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donde $(a, b) \in D$ si $a \mid b$.

Reflexiva Para ver que D_1 es reflexiva tenemos que probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a|a$. Lo cual es cierto pues $a = a \cdot 1$, por lo tanto la relación es reflexiva.

Simétrica La relación no es simétrica ya que 1 divide a 2 y 2 no divide a 1.

Antisimétrica No es antisimétrica. Para ver esto es suficiente dar un contra ejemplo. Observa que $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son elementos de D_1.

Transitiva Para ver que es transitiva hay que probar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

Ejemplo 4.2.3. Considera el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos la relación S sobre $\mathcal{P}(A)$ como sigue: sean $U, V \in \mathcal{P}(A)$, decimos que $(U, V) \in S$ si y sólo si $U \subset V$. Veamos ahora que propiedades satisface S.

Reflexiva Como todo subconjunto es subconjunto de sí mismo, tenemos que la relación es reflexiva.

Simétrica Sea $U = \{1, 2\}$ y $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, como $U \subset V$ se sigue que $(U, V) \in S$, pero $V \not\subset U$, por lo que $(V, U) \notin S$ y la relación no es simétrica.

Antisimétrica La relación es antisimétrica. Sean U y V elementos de $\mathcal{P}$. Supongamos que $(U, V) \in R$ con $U \neq V$. Entonces U es un subconjunto propio de V y por lo tanto V no puede estar contenido en U. Por lo tanto $(V, U) \in R$.

Transitiva Sean U, V y W elementos de $\mathcal{P}$. Si (U, V) y (V, W) pertenecen a S, entonces por la definición de S tenemos que $U \subset V$ y $V \subset W$. De donde se puede concluir que $U \subset W$ y por lo tanto S es transitiva.

Ejemplo 4.2.4. La relación igualdad $\mathcal{I}$ sobre un conjunto A, donde $(a, b) \in \mathcal{I}$ si y solo si $a = b$.

Reflexiva Como $a = a$ para todo $a \in A$, se sigue que $\mathcal{I}$ es reflexiva

Simétrica Sean $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in \mathcal{I}$. Entonces $a = b$ y por lo tanto $(b, a) \in \mathcal{I}$, lo que implica que $\mathcal{I}$ es simétrica.

Antisimétrica Obsérvese que si $(a, b) \in \mathcal{I}$ entonces por la definición de $\mathcal{I}$ se sigue que $a = b$. Por lo tanto no es posible encontrar un contra ejemplo y por vacuidad la relación es antisimétrica.

Transitiva Si (a, b) y (b, c) son parejas en $\mathcal{I}$, entonces tenemos que $a = b$ y $b = c$. Por lo tanto $a = c$ y $(a, c) \in \mathcal{I}$ y la relación es transitiva.

Observa que la relación de divisivilidad no es simétrica ni antisimétrica, mientras que la relación igualdad es al mismo tiempo simétrica y antisimétrica. Con estos dos ejemplos podemos hacer notar que las propiedades de simetría y antisimetría no son opuestas ni excluyentes.

4.2.1 Relaciones de equivalencia, particiones y órdenes parciales

Una relación sobre un conjunto A es una forma de establecer correspondencias entre los elementos de A. Este tipo de corresponencias pueden ser de cualquier tipo y cumplir varias propiedades. Por ejemplo, si A es el conjunto formado por todos los seres humanos, podemos definir una relación en la cual dos elementos de A van a estar relacionados si tienen el mismo grupo sanguíneo. Esta relación cumple varias propiedades (es reflexiva, simétrica y transitiva) y recibe un nombre especial, es una *relación de equivalencia*.

Relaciones de equivalencia

Definición 4.2.2. Sea R una relación binaria sobre un conjunto A. Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 4.2.5. Vamos a definir una relación sobre una bolsa de canicas de colores. Dos canicas van a estar relacionadas si tienen el mismo color. Veamos que es una relación de equivalencia.

Reflexiva Es fácil ver que la relación es reflexiva, pues toda canica tiene el mismo color que sí misma.

Simétrica Si tenemos una canica a que tiene el mismo color que la canica b, entonces la canica b tiene el mismo color que la canica a, y la relación es simétrica.

Transitiva Supongamos que a, b y c son tres canicas de la bolsa. Si a tiene el mismo color que b y b tiene el mismo color que c, entonces a también tiene el mismo color que c. Entonces la relación es transitiva.

Como la relación satisface las tres propiedades, es una relación de equivalencia.

Ejemplo 4.2.6. Sea R una relación definida sobre el conjunto de los números naturales, tal que $(n, m) \in R$ si $n - m$ es múltiplo de 3. Probaremos que R es una relación de equivalencia:

Reflexiva Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $n - n = 0 = 3 \cdot 0$, entonces $n - n$ es un múltiplo de 3 y $(n, n) \in R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que R es una relación reflexiva.

Simétrica Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $(n, m) \in R$. Utilizando la definición de R tenemos que $n - m$ es un múltiplo de 3, es decir, $n - m = 3k$, para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $m - n = -3k = 3(-k)$ con -$k \in \mathbb{Z}$, y $m - n$ es un múltiplo de 3, por lo que $(m, n) \in R$ y R es una relación simétrica.

Transitiva Sean $n, m, l \in \mathbb{N}$ tales que $(n, m), (m, l) \in R$. Entonces $n - m = 3k_1$, para alguna $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $m - l = 3k_2$, para alguna $k_2 \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rr} & n - m = 3k_1 \\ + & m - l = 3k_2 \\ \hline & n - l = 3(k_1 + k_2) \end{array}$$

y $n - l$ es un múltiplo de 3, por lo que $(n, l) \in R$ y se sigue que R es una relación transitiva.

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, R es una relación de equivalencia.

Ejemplo 4.2.7. Sea R la relación definida sobre $\mathbb{R}$ definida como

$$R = \{(x, y) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x - y \text{ es un entero}\}.$$

Reflexiva Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x - x = 0$ y $(x, x) \in R$.

Simétrica Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) \in R$. Entonces $x - y$ es un entero, además $y - x = -(x - y)$ tenemos que $y - x$ también es un entero. Por lo tanto R es simétrica.

Transitiva Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y), (y, z) \in R$. Entonces $x - y$ y $y - z$ son números enteros. Como la suma de dos número enteros es un entero tenemos que $(x - y) + (y - z) = x - z$ es un entero. Por lo tanto $(x, z) \in R$ y la relación es transitiva.

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, R es una relación de equivalencia.

Ejemplo 4.2.8. Consideremos al conjunto de los número naturales $\mathbb{N}$ y consideremos al producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$. Sea A el subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido como:

$$A = \{(a, b) : b \neq 0\}.$$

Definimos la relación H sobre A como:

$$(a, b) \sim_H (c, d) \text{ si y sólo si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Vamos a ver que H es una relación de equivalencia.

Reflexiva H es reflexiva pues para todo $(a, b) \in A$ se tiene trivialmente que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Simétrica Sean (a, b) y (c, d) dos elementos de A tales que $(a, b) \sim_H (c, d)$. Entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

y se puede ver que $(c, d) \sim_H (a, b)$.

Transitiva Sean $(a, b), (c, d)$ y (e, f) tres elementos de A tales que $(a, b) \sim_H (c, d)$ y $(c, d) \sim_H (e, f)$. Tenemos que probar que $(a, b) \sim_H (e, f)$. Como $(a, b) \sim_H (c, d)$ y $(c, d) \sim_H (e, f)$ se sigue que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}.$$

y por lo tanto $(a, b) \sim_H (e, f)$.

Particiones

Una de las propiedades más importantes de una relación de equivalencia es que proporcionan una partición del conjunto.

Definición 4.2.3. Una **partición** de un conjunto A es una familia de conjuntos (distintos del vacío) $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$,
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

A cada subconjunto A_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, se le llama una **clase** o **bloque** de la partición de A.

Para ver cómo es que una relación de equivalencia divide a un conjunto, tenemos que fijarnos en todos los elementos que se relacionan con un elemento dado. Esto da paso a la siguiente definición.

Definición 4.2.4. Sea $R \subset A \times A$ una relación de equivalencia. Para cada $x \in A$ la **clase de equivalencia** de x se denota $[x]$ y se define cómo

$$[x] = \{y \in A : (x, y) \in R\}.$$

Si regresamos al ejemplo 4.2.5 podemos ver que sí hay una canica de color verde, entonces la clase de equivalencia de esa canica van a ser todas las canicas verdes de la bolsa. Observa cómo las clases de equivalencia de ésta relación dividen a las canicas de la bolsa en colores.

Ahora vamos a revisar un ejemplo similar al ejemplo 4.2.6.

Ejemplo 4.2.9. Sea R la relación de equivalencia (ver ejercicio 4.13) definida sobre los naturales en la que $(n, m) \in R$ si $n - m$ es un múltiplo de dos, es decir, un número par. Analicemos cual es la clase de equivalencia del 1, es decir, $[1] = \{m \in \mathbb{N} : 1 - m \text{ es par}\}$. Entonces tenemos que:

$$[1] = \{(1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Veamos ahora cuál es la clase de equivalencia del 2.

$$[2] = \{(2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

Observa que $[1] \cap [2] = \emptyset$ y $\mathbb{N} = [1] \cup [2]$, entonces por la definición 4.2.4 podemos decir que las clases [1] y [2] son una partición de los números naturales. En este caso, diremos que la relación R induce una partición de $\mathbb{N}$.

Los siguientes teoremas establecen algunas de las propiedades que cumplen las clases de equivalencia de un conjunto.

Teorema 4.2.5. Sea R una relación de equivalencia sobre A. Sean $x, y \in A$, entonces:

(i) $x \in [x]$.

(ii) $(x, y) \in R$ si y solo si $[x] = [y]$.

(iii) Si $[x] \neq [y]$, entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demostración. (i) Como R es una relación de equivalencia, en particular se tiene que es reflexiva, entonces $x \sim_R x$ para toda $x \in A$. Por lo tanto $x \in [x]$.

(ii) Primero supongamos que $(x, y) \in R$. Para ver que $[x] = [y]$ hay que probar una doble contensión, es decir, $[x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$. Sea $a \in [x]$, entonces $(x, a) \in R$ y por la simetría se sigue que $(a, x) \in R$. Utilizando la transitividad de R, como $(x, y) \in R$, entonces $(a, y) \in R$ y por simetría también $(y, a) \in R$ y por lo tanto $a \in [y]$.

La otra implicación la vamos a probar por contradicción. Supongamos que $[x] = [y]$. Como $x \in [x]$ y $[x] = [y]$, se sigue que $x \in [y]$ y, por lo tanto, $(y, x) \in R$. Como R es simétrica tenemos que $(x, y) \in R$.

(iii) Vamos a demostrar la contrapuesta, es decir, que si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, entonces $[x] = [y]$.

En efecto, si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, entonces existe $a \in [x] \cap [y]$ y por lo tanto (x, a) y (y, a). Por simetría tenemos que (a, y) y, utilizando la transitividad, se sigue que $(x, y) \in R$. Entonces por (ii) tenemos que $[x] = [y]$.

□

Teorema 4.2.6. Una relación de equivalencia induce una única partición y una partición induce una única relación de equivalencia.

Demostración. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Primero veamos que las clases de equivalencia de R inducen una partición de A. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto formado por todas las clases de equivalencia de R. Para probar $\mathcal{S}$ es una partición de A hay que ver que todo elemento en A pertenece a exactamente una clase de equivalencia. Sea $a \in A$. Como $a \sim_R a$, entonces $a \in [a]$. Supongamos que a pertenece a dos clases de equivalencia, es decir, $a \in [x]$ y $a \in [y]$ para un par de elementos $x, y \in A$. Utilizando el item (ii) del teorema 4.2.5, tenemos que $[a] = [x]$ y $[a] = [y]$, por lo tanto $[x] = [y]$ y el resultado se sigue.

Ahora supongamos que $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ es una partición del conjunto A. Definimos la relación R sobre A en la que $(x, y) \in R$, si y sólo si $x, y \in A_i$ para alguna $i = 1, 2, \dots, r$. Se puede probar que R es una relación de equivalencia (ver ejercicio 4.17). □

Podemos pensar que las de equivalencia de una relación R sobre un conjunto A realizan una clasificación de los elementos de A en el ejemplo 4.2.9; esta clasificación se divide en pares e impares.

4.2.2 Órdenes parciales

Las relaciones también pueden ser de ayuda para ordenar a los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la relación desigualdad que se definió en el item 4.1.6 del ejemplo 4.1.1 es reflexiva, antisimétrica, transitiva y establece un orden en los número enteros.

Definición 4.2.7. Una relación binaria R sobre un conjunto A es un **orden parcial** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 4.2.10. La relación desigualdad D que se definió en el numeral 4.1.6 del ejemplo 4.1.1 es un orden parcial. Recordemos dos enteros a y b van a estar relacionados (con respecto a D) si si $a \leq b$.

Reflexiva Como $a \leq a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que D es reflexiva.

Antisimétrica Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) \in D$ y $a \neq b$. Como a está relacionado con b tenemos que $a \leq b$, además, como $a \neq b$ tenemos que $a < b$, que implica que $(b, a) \notin D$. Por lo tanto D es antisimétrica.

Transitiva Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b), (b, c) \in D$. Entonces $a \leq b$ y $b \leq c$. Por lo tanto $a \leq c$ y $(a, c) \in D$.

Ejemplo 4.2.11. Consideremos el alfabeto español, el cual ya tiene una relación de orden, es decir, la primer letra del alfabeto es a, la segunda b, la tercera c, etc. Sea P el conjunto formado por todas las palabras en español (una palabra es una sucesión de letras del alfabeto). Sean $x = x_1x_2 \dots x_n$ y $y = y_1y_2 \dots y_m$ dos palabras. Definimos una relación $\preceq$ sobre P en donde $x \preceq y$ si sucede alguna de las siguientes condiciones:

a) x y y son iguales.

b) x_i aparece antes en el alfabeto que y_i en la primera posición i en la que las palabras difieren.

c) $n < m$ y $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Veamos que $\preceq$ es un orden parcial.

Reflexiva Sea $x \in P$, como x es igual a sí misma, tenemos que $x \preceq x$, y la relación es reflexiva.

Antisimétrica Sean $x, y \in P$ tales que $x \preceq y$ con $x \neq y$. Supongamos que $x = x_1x_2 \dots x_n$ y $y = y_1y_2 \dots y_m$. Como $x \neq y$ pueden suceder dos cosas:

a) existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal $x_i \neq y_i$, o

b) $n < m$ y $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Supongamos que sucede *a*). Sea j la primera posición en la que difieren x y y. Como $x \preceq y$, entonces x_j aparece antes en el alfabeto que y_j y, por lo tanto, $y \npreceq x$.

Si sucede *b*), entonces $n < m$ y, por lo tanto, $y \npreceq x$.

Transitiva Esta propiedad se prueba en el ejercicio 4.21.

Esta relación se conoce como el *orden lexicográfico* y define el orden en el que aparecen las palabras en el diccionario: *agachar* $\preceq$ *agua* $\preceq$ *aguacate*.

Los órdenes parciales tiene aplicaciones en la programación de tareas. Supongamos que tenemos una serie de actividades o tareas que debemos realizar. Para esto hay algunas actividades que deben realizarse antes que otras, también hay otras tareas que pueden hacerse en cualquier orden. Una programación de las tareas consiste en asignar un orden para la realización de las tareas.

Ejemplo 4.2.12. Considera el conjunto de tareas que deben realizarse para prepara una deliciosa agua de jamaica.

1. Ponga a hervir la flor de jamaica en el agua por 25 minutos.
2. Retire el agua del fuego.
3. Espere a que se enfríe.
4. Cuele el agua para retirar la flor de jamaica.
5. En una jarra mezcle el agua con el azúcar.

En este caso, observa que el paso 3 y 4 pueden realizarse en cualquier orden. Definimos una relación de orden R sobre el conjunto de las tareas a realizar, donde

$$i \sim_R j \text{ si y solo si } i = j \text{ o la tarea } i \text{ debe realizarse antes que la tarea } j.$$

Entonces

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}.$$

Se puede ver que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, es un orden parcial. Un forma de asignar las tareas con el fin de preparar una deliciosa agua de jamaica nos la da un orden parcial. Una solución a este problema la da el ordenamiento $1, 2, 3, 4, 5$.

Sea R un orden parcial definido sobre un conjunto A. Decimos que dos elementos x y y de A son **comparables** si y solo si $(x, y) \in R$ o $(y, x) \in R$.

Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X. Consideremos la relación subconjunto definida sobre $\mathcal{P}(X)$, en el $A \sim_S B$ si y solo si $A \subset B$. En esta relación los conjuntos $A = \{a, b\}$ no son comparables $B = \{c, d\}$.

Definición 4.2.8. Sea R un orden parcial sobre un conjunto A. Si para todo par $x, y \in A$ tenemos que x y y son comparables, entonces decimos que R es un **orden total**.

Los números naturales, enteros, racionales y reales junto con la relación menor o igual es un orden total. El orden lexicográfico también es un orden total.

4.3 Digráfica de una relación

Las relaciones pueden representarse a través de un diagrama de puntos y flechas, a este diagrama se le conoce como la **digráfica de la relación**. Veamos un ejemplo de cómo hacer este diagrama.

Ejemplo 4.3.1. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Definimos una relación R sobre A como sigue:

$$R = \{(a,b),(b,b),(b,a),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d)\}.$$

Vamos a representar R mediante un diagrama formado por puntos y flechas de la siguiente manera:

1. Colocamos un punto o vértice por cada elemento de A.

2. Ponemos una flecha del punto a al punto b si la pareja (a, b) pertenece a R.

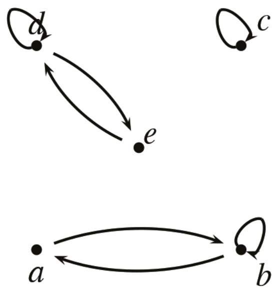


Figura 4.1: Digráfica de la relación R.

En la figura 4.1 se muestra la digráfica de R.

Ejemplo 4.3.2. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Definimos una relación H sobre A como sigue:

$$H = \{(0, 1), (0, 4), (1, 4), (2, 3), (3, 2), \}.$$

En la Figura 4.2 se muestra la digráfica asociada a H. Encuentra el dominio y los elementos de la relación.

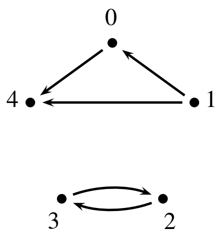


Figura 4.2: La digráfica de la relación H.

En general, para dibujar la digráfica de una relación R sobre un conjunto A, tenemos que dibujar un vértice por cada elemento de A. Si el elemento (a, b) pertenece a R, colocamos una flecha de a a b. En este diagrama, los vértices representan a los elementos de A y las flechas las relaciones entre los elementos.

4.4 Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Encuentra una relación sobre A que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Reflexiva, simétrica y transitiva.
2. Simétrica y antisimétrica.
3. No simétrica, antisimétrica y no transitiva.
4. No reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 4.2. Explica con tus propias palabras que significa que una relación sea:

1. Reflexiva.
2. Simétrica.
3. Antisimétrica.
4. Transitiva.

Ejercicio 4.3. Para cada una de las siguientes relaciones binarias en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, determina si la relación es reflexiva, simétrica, antisemétrica y/o transitiva. Dibuja la digráfica asociada para cada una de las relaciones:

1. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 4)\}$.
2. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
3. $\{(1, 1), (2, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 3), (4, 4)\}$.

Ejercicio 4.4. Determina si cada una de las siguientes relaciones, definidas sobre los números enteros, es relexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva:

1. $(a, b) \in R$ si $a = 2b$.
2. $(a, b) \in R$ si $a - b$ es un número impar.
3. $(a, b) \in R$ si $a = b^2$.
4. $(a, b) \in R$ si $a^2 \leq b^2$.

Ejercicio 4.5. Encuentra todas las relaciones binarias en el conjunto $\{0, 1\}$ y determina cuáles de ellas son reflexivas, simétrica, antisimétrica y/o transitivas.

Ejercicio 4.6. ¿Cuántas relaciones existen de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos?

Ejercicio 4.7. Considera el ejemplo 4.2.3 del ejercicio 4.2.1. ¿Cómo cambian las propiedades de la relación si consideramos a D como la relación definida como sigue:

Sean $U, V \in \mathsf{P}$, decimos que $(U, V) \in S$ si $U \subseteq V$.

Ejercicio 4.8. Sea R la relación definida sobre el conjunto de los números enteros, tal que:

$$(n, m) \in R \text{ si } n \mid m.$$

¿Qué propiedades cumple la relación? Justifica tu respuesta tanto para las propiedades que cumple como para las que no cumple.

Ejercicio 4.9. Encuentra el error en el siguiente razonamiento:

Sea A un conjunto y sea $R \subset A \times A$. Si R es una relación simétrica y transitiva, entonces R es reflexiva.

Demostración: Sea $(a, b) \in R$ como R es simétrica, entonces $(b, a) \in R$, luego como R es transitiva, entonces $(a, a) \in R$, y R es reflexiva.

Ejercicio 4.10. Sea R la relación definida sobre $\mathbb{N}$ de forma que $(a, b) \in R$ si $a + 4b = 12$. Expresa a R como conjunto de pares ordenados.

Ejercicio 4.11. Sea P la relación definida sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de forma que $(x, y) \in P$ si $x^2 - \alpha x + 1 = -y^2 + \alpha y + 4$. Encuentra para que valores de α se sigue que R es una relación reflexiva y/o simétrica.

Ejercicio 4.12. Sea R la relación definida sobre $\mathbb{Z}$ en la que $(a, b) \in R$ si $ab = 0$. Determina si es reflexiva, simétrica, antisemétrica y/o transitiva. Encuentra la clase del 0.

Ejercicio 4.13. Demuestra que la relación definida en el ejemplo 4.2.9 es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4.14. Sea A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de A. Sea $\mathcal{R}$ la relación *tienen la misma cardinalidad*, es decir, dados $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si $|X| = |Y|$. Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4.15. Sea $A = \{x, y, z\}$. Encuentra todas las posibles relaciones de equivalencia que pueden hacerse sobre A.

Ejercicio 4.16. ¿Cuáles de los siguientes colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?:

(*i*) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{5, 6\}$.

(*ii*) $\{1, 2\}, \{4, 5\}\{3, 6\}$.

Ejercicio 4.17. Sea A un conjunto y sea $A_1, A_2, \ldots, A_r$ una partición de A. Sea R la relación definida sobre A de la siguiente forma:

$$R = \{(x, y) \in A \times A : \; x, y \in A_i \text{ para alguna } i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Demuestra que R es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4.18. Sea $A = \{01, 2\}$. Definimos la relación S sobre $\mathcal{P}(A)$ en la que dos subconjuntos X y Y van a estar relacionados en S si la suma de los elementos de X es igual a la suma de los elementos de Y. Demuestra que S es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4.19. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las rectas en el plano. Sea P la relación definida sobre $\mathcal{L}$ de forma que dos rectas l_1 y l_2 van a estar relacionadas si l_1 es paralela a l_2. Demuestra que P es una relación de equivalencia.

Ejercicio 4.20. Sea R la relación definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de forma que $(a, b) \sim_R (c, d)$ si sucede alguna de las siguientes condiciones:

1. $a < c$ o,
2. $a = c$ y $b < d$.

Demuestra que R es un orden parcial.

Ejercicio 4.21. Demuestra el orden lexicográfico (ver la relación definida en el ejemplo 4.2.11) satisface la propiedad transitiva.

Ejercicio 4.22. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Sea R la relación definida sobre A de forma que $(a, b) \in R$ si a divide a b.

1. Demuestra que esta relación es un orden parcial. Explica si es un orden total.
2. Dibuja la digráfica de R.

Ejercicio 4.23. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.

1. Define una relación de orden R sobre X de forma que $(a, b) \in R$ y $(d, b) \notin R$.
2. Determina si existe una relación de equivalencia H sobre X tal que $(b, c), (c, d) \in H$ y $(d, b) \notin H$.
3. Determina si existe una relación de equivalencia sobre X que también sea una relación de orden.

5 Funciones

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de función. Una función es un tipo particular de relación en la que la imagen de un elemento dado está determinada de forma única. Las funciones aparecen en muchas áreas de las matemáticas como en el Cálculo, Álgebra y Geometría, entre otras. En este capítulo vamos a abordar el estudio de las funciones en términos de la Teoría de Conjuntos, es decir, como una regla de correspondencia entre conjuntos en la que se asocia a cada elemento de un conjunto un elemento de otro conjunto.

En este capítulo, presentamos las definiciones básicas y conceptos relacionados con las funciones entre conjuntos. Las funciones son casos particulares de las relaciones. Para hacer notar la diferencia, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.0.1. La UAM-Cuajimalpa cuenta con un programa de tutorías en el que cada alumno tiene un tutor[3] que lo acompaña durante su formación académica. Consideremos un conjunto A formado por los estudiantes de la UAM-Cuajimalpa y otro conjunto B, formado por los profesores de la UAM-Cuajimalpa. Debido a que cada alumno tiene un tutor, el programa de tutorías puede verse como una relación en la que a cada elemento del conjunto A se le asocia un elemento del conjunto B, es decir, a cada alumno se le asocia con su tutor. Observa que un profesor puede ser tutor de varios alumnos, mientras que un alumno tiene exactamente un tutor, es decir, el tutor que se le asigna a un alumno está determinado de forma única.

La relación que le asigna a cada alumno un tutor es una función de A en B, en la que la imagen de cada alumno es el tutor que se le asignó.

A continuación enunciamos formalmente la definición de función.

Definición 5.0.1. Dados dos conjuntos A y B. Una **función** f de A en B, la cual se denota como $f : A \longrightarrow B$, es una relación de A en B que satisface las siguientes propiedades:

1. Para toda $a \in A$ existe exactamente un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.
2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$

Obsérvese que el inciso (2) de la definición 5.0.1 indica que una función de A en B asocia a cada elemento de A un único elemento de B. Entonces, podemos escribir $f(a) = b$ para indicar que $(a, b) \in f$. Utilizando esta notación podemos reescribir la defínción de función como sigue:

Definición 5.0.2. Dados dos conjuntos A y B. Una **función** $f : A \longrightarrow B$ es una relación de A en B que satisface las siguientes propiedades:

1. Para toda $a \in A$ existe exactamente un elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$.
2. Si $f(a) = b$ y $f(a) = c$, entonces $b = c$.

El conjunto A se llama el **dominio** de f y se denota como Dom_f. El conjunto B es el **codominio** y lo denotamos como Cod_f. Si $a \in A$ y se cumple que $f(a) = b$ ($(a, b) \in f$), diremos que b es la **imagen de** a, mientras que a es la **preimagen de** b. En ocasiones se escribe $a \mapsto b$ para decir que $f(a) = b$.

[3] Los tutores son profesores de la UAM-Cuajimalpa.

Definición 5.0.3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. La **imagen** o **rango** de f, denotado como Im_f, es el conjunto:

$$\begin{aligned} Im_f &= \{b \in B : (a,b) \in f \text{ para algún elemento } a \in A\} \\ &= \{b \in B : f(a) = b \text{ para algún elemento } a \in A\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.0.2. Si $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ y $B = \{w,x,y,z\}$, podemos definir una función de A en B como $f = \{(a,x),(b,x),(c,y),(d,y),(e,y),(e,z)\}$. El dominio de f es $Dom_f = \{a,b,c,d,e,f\}$, el codominio es $Cod_f = \{w,x,y,z\}$ y la imagen de f es $Im_f = \{x,y,z\}$. Además, podemos observar que la imagen de a y b es x y la preimagen de z es e. En el cuadro 5.1 se muestra una tabla con los elementos de A y sus respectivas imágenes

x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	x	x	y	y	y	z

Cuadro 5.1: Elementos de la función del ejemplo 5.0.2.

A partir de la definición de la imagen de una función se sigue que Im_f es un subconjunto del codominio de f (ver figura 5.1).

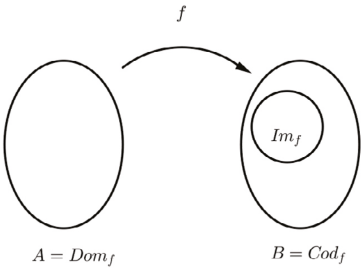


Figura 5.1: Diagrama de una función.

Decimos que dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son **iguales** si $A = C$, $B = D$ y para toda $a \in A$, se tiene que $f(a) = g(a)$.

Ejemplos de funciones

Ejemplo 5.0.3. Sea A el conjunto de todos las personas nacidas en México y B el conjunto formado por todos los estados de la República Mexicana. Consideremos la relación f que asocia a cada persona nacida en México el estado en el que nació. Se puede ver que la relación f es una función. El dominio de f son todas las personas nacidas en México. En este caso no es difícil de ver que la imagen y el codominio de la función son iguales, es decir, todos los estados de la república Mexicana.

Ejemplo 5.0.4. Sea A el conjunto de todos los jugadores de fútbol de la liga mexicana y sea B el conjunto de equipos de futbol de la liga mexicana. Supongamos que a cada jugador se le ha asignado un equipo para la presente temporada. Obsérvese que a varios jugadores se les puede asociar el mismo equipo, pero a un jugador no se le pueden asociar dos equipos distintos. Por lo cual esta regla de correspondencia determina una función.

Ejemplo 5.0.5. Podemos definir una función que relacione la cantidad de kilogramos de mangos comprados y el precio final.

Ejemplo 5.0.6. Podemos definir una función que relacione al conjunto de personas en un restaurante y la cantidad de comida ingerida por cada persona.

Ejemplo 5.0.7. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z\}$. Si f es la función

$$f = \{(a, x)(b, z), (c, z), (d, x)\},$$

entonces podemos describir a f como: $a \mapsto x$, $b \mapsto z$, $c \mapsto z$ y $d \mapsto x$, o bien como $f(a) = x$, $f(b) = z$, $f(c) = z$ y $f(d) = x$. En este ejemplo tenemos que $Dom_f = \{a, b, c, d\}$, $Cod_f = \{x, y, z\}$ e $Im_f = \{x, z\}$.

Ejemplo 5.0.8. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{w, x, y, z\}$ dos conjuntos. Sea $f : A \longrightarrow B$ la función definida por $f = \{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$.

Ejemplo 5.0.9. Sea g la función que a cada número natural le asocia el siguiente número natural, es decir, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ está dada por la regla de correspondencia[4] $g(n) = n + 1$, es decir, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \mapsto n + 1$. Entonces g es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Ejemplo 5.0.10. Sea A un conjunto cualquiera. Definimos la función $Id_A : A \longrightarrow A$ dada por la regla de correspondencia $Id_A(a) = a$ para todo $a \in A$. La función Id_A juega un papel importante en el mundo de las funciones y se le conoce como ***función identidad***.

Ejemplo 5.0.11. (Función valor absoluto) Recordemos que el valor absoluto de un número real es el valor numérico que éste tiene sin tomar en cuenta su signo (positivo o negativo). El valor absoluto puede verse como una función h que va de los números reales ($\mathbb{R}$) a los reales no negativos ($\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$) donde:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 5.0.12. (Funciones trigonométricas) Las funciones trigonométricas son funciones que relacionan los ángulos de un triángulo rectángulo con el conciente entre dos de sus lados. Por ejemplo, la función coseno (ver figura 5.2) cos : $[0, 360] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por la regla $cos(\theta) = AC/AB$.

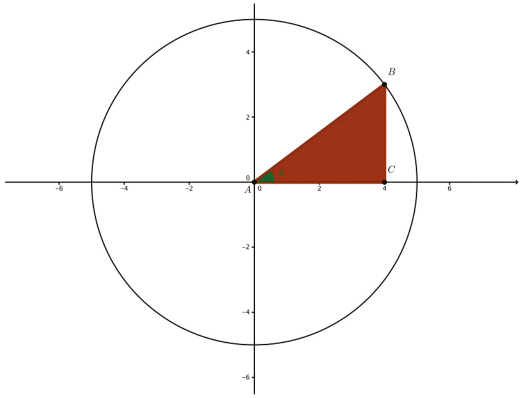


Figura 5.2: Relación entre el ángulo de un triángulo rectángulo y sus lados.

Como acabamos de ver, una función no tiene por qué estar dada o definida por una fórmula o una regla de correspondencia clara. Aunque muchas veces, una función puede describirse en términos de una expresión matemática o fórmula. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x - 1$, donde f es una función que va de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

[4] Esta es la función sucesor que utilizó Peano en la construcción axiomática de los números naturales que aparece en la Sección 3.1.

5.1 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Dependiendo de las propiedades que cumple la regla de correspondencia de una función, ésta se puede clasificar en distintos tipos.

Definición 5.1.1. Decimos que una función $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** o **uno a uno**, si todos los elementos de A tienen distintas imagenes en B, es decir, si $a_1, a_2 \in A$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Utilizando la contrapuesta de esta definición podemos obtener una definción equivalente.

Definición 5.1.2. Una función $f : A \longrightarrow B$ es ***inyectiva*** o ***uno a uno***, si para toda pareja $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$, se tiene que $a_1 = a_2$.

Ejemplo 5.1.1.

- Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la función definida por $f(x) = 4x - 1$. Veamos que f es inyectiva. Supongamos que existen elementos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Utilizando la definición de f tenemos que:
$$4(a_1) - 1 = 4(a_2) - 1.$$
Si sumamos uno a cada lado de la igualdad y luego dividimos todo entre cuatro, tenemos que $a_1 = a_2$. Por lo tanto f es una función inyectiva.

- La función $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = x^2 + 2$ no es inyectiva, pues $g(1) = g(-1) = 3$ y $1 \neq -1$.

Dependiendo del tipo de relación que existe entre el codominio y la imagen de una función, surge el concepto de función suprayectiva o sobreyectiva.

Definición 5.1.3. Decimos que una función $f : A \longrightarrow B$ es **suprayectiva** o **sobre**, si para todo elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$ o, equivalentemente, $(a, b) \in f$.

Obsérvese que una función $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva si la imagen de f es igual al codominio, es decir, si $Im_f = B = Cod_f$. Podemos escirbir las siguientes definiciones equivalentes de función suprayectiva:

- Una función $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva, si para todo $b \in B = Cod_f$ se tiene que $b \in Im_f$.
- Una función $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva, si para todo $b \in B = Cod_f$ existe $a \in A = Dom_f$ tal que $f(a) = b$.

Ejemplo 5.1.2. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la función definida por $f(x) = 4x - 1$. Veamos que f es suprayectiva. Sea $b \in \mathbb{R}$, queremos encontrar un elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = b$. Utilizando la definición de f, tenemos que $b = f(a) = 4(a) - 1$. Si despejamos a, obtenemos que $a = (b + 1)/4$. Por lo tanto, si $a = (b + 1)/4$, entonces:

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{b+1}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{b+1}{4}\right) - 1 \\ &= b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Ejemplo 5.1.3. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 1$. Se puede ver que esta función no es suprayectiva, pues $f(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{Z}$.

Al juntar el concepto de inyectividad y suprayectividad aparece la definición de función biyectiva.

Definición 5.1.4 Decimos que una función $f: A \to B$ es **biyectiva** si f es inyectiva y supra yectiva. Por ejemplo 5.1.1 y 5.1.2, la función $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = 4x - 1$ es una función biyectiva.

Ejemplo 5.1.4. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la función definida por $f(x) = 3x + 4$. Vamos a probar que f es biyectiva. Para esto, debemos ver que f es inyectiva y suprayectiva.

- *f es inyectiva*

  Procedemos tras suponer que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Utilizando la definición de f, tenemos que:
  $$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4,$$
  de donde concluimos que $x_1 = x_2$, lo que prueba así que f es inyectiva.

- *f es suprayectiva.*

  Para probar que f es suprayectiva tenemos que ver que la ecuación $f(x) = b$ tiene solución para toda $b \in \mathbb{Q}$. Entonces:
  $$3x + 4 = b$$
  Si despejamos x se tiene que $x = (b + 4)/3$. Por lo tanto, si $x = (b + 4)/3$, se tiene que $f(x) = b$ y por lo tanto f suprayectiva.

De lo anterior concluimos que f es biyectiva.

5.2 Composición de funciones

Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, existe una forma natural de componer a f y g.

Definición 5.2.1. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. La función **composición**, denotada por $g \circ f$, se define como
$$g \circ f : A \longrightarrow C$$
donde $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

La composición $g \circ f$ se lee como *“f seguida de g”* o *“f compuesta con g”*. También es importante hacer notar que la composición de dos funciones sólo tiene sentido cuando la imagen de f es igual al dominio de g.

Ejemplo 5.2.1. Sean $A = \{x, y, z\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$ y $C = \{a, b\}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ las funciones dadas por $f(x) = \alpha$, $f(y) = \alpha$, $f(z) = \beta$ y $g(\alpha) = b$; $g(\beta) = a$. Entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ está dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\alpha) = b$, $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(\alpha) = b$ y $(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(\beta) = a$. Ver figura 5.3.

Ejemplo 5.2.2. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 1$ y $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida por $g(x) = 3x - 2$. Entonces, $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ está dada por la regla:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2 = 3x^2 + 1.$$

Así como la suma es una operación entre dos números, la composición de funciones es una operación entre dos funciones. A continuación estudiamos algunas de las propiedades principales que cumple la composición de funciones.

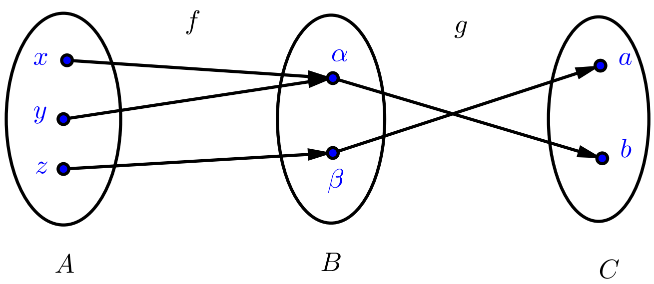


Figura 5.3: Ejemplo de la composición de funciones.

Proposición 5.2.2. La composición de funciones es una operación asociativa.

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ tres funciones.

De la definición de composición, tenemos que $h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$ y $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$, por lo que el dominio y el codominio de las funciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ coinciden.

Hay que probar que para cada $a \in A$ se tiene que:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a).$$

Al usar la definición de composición tenemos que el lado izquierdo de la igualdad satisface:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h \circ ((g \circ f)(a)) = h \circ (g(f(a))) = h(g(f(a))).$$

Por otra parte, tenemos que el lado derecho de la igualdad cumple:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Por lo tanto tenemos que:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h(g(f(a))) = ((h \circ g) \circ f)(a).$$

Con lo cual queda terminada la demostración. □

En la suma de números hay un elemento neutro (el cero), en la composición de funciones también hay una función distinguida que funciona de forma análoga al 0 en la suma. El elemento neutro en la composición de funciones es la función identidad, ver ejemplo 5.0.10.

Proposición 5.2.3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $Id_A : A \longrightarrow A$ la función identidad en el conjunto A. Entonces:

1. $f \circ Id_A = f$.
2. $Id_B \circ f = f$.

Demostración. 1. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $I_A : A \longrightarrow A$ la función identidad en el conjunto A. Al usar la definición de composición de funciones tenemos que para todo $a \epsilon A$:

$$(f \circ Id_A)(a) = f(Id_A(a)) = f(a).$$

La demostración de 2 se deja como ejercicio (ver ejercicio 5.13). □

Otra propiedad importante que conviene revisar si cumple la composición de funciones es la comnmutatividad. A diferencia de la suma y multiplicación de números reales, tenemos que la composición de funciones NO es conmutativa.

Ejemplo 5.2.3. Para ver que la composición de funciones no es conmutativa es suficiente dar dos funciones f y g tales que $f \circ g \neq g \circ f$.

Sean f y g dos funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ dadas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - 2$. Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5.$$

Por otra parte, tenemos:

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2 = 3x^2 + 1.$$

Con lo cual podemos concluir que la composición de funciones no es una operación conmutativa.

La composición de funciones se comporta bien con la propiedades de inyectividad y suprayectividad.

Proposición 5.2.4. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones inyectivas. Entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tales que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Para ver que $g \circ f$ es inyectiva, hay que probar que $x_1 = x_2$. Tenemos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, lo cual implica:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Por hipótesis sabemos que g es inyectiva, entonces aplicando la definición de inyectividad tenemos que $f(x_1) = f(x_2)$. Como f es inyectiva se sigue que $x_1 = x_2$. □

Proposición 5.2.5. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones suprayectivas. Entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ es suprayectiva.

Demostración. Como $g \circ f : A \longrightarrow C$, hay que probar que para todo elemento $c \in C$ existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. Sea $c \in C$. Como $g : B \longrightarrow C$ es suprayectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Ahora, como $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva sabemos que existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

y el resultado se sigue. □

Como corolario de las proposiciones 5.2.4 y 5.2.5, tenemos el siguiente resultado sobre la composición de funciones biyectivas.

Corolario 5.2.6. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones biyectivas. Entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es biyectiva.

5.3 Función inversa

Recordemos que una función $f : A \longrightarrow B$ es una relación entre los conjuntos A y B. Una pregunta que surge de forma natural es cuando la relación inversa[5] de f también es una función.

En esta sección vamos a determinar que propiedades debe cumplir una función para que su inversa también sea una función.

Ejemplo 5.3.1. Sea $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = 2x$. Queremos encontrar una función $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que si la evaluamos en $f(x)$, ésta me devuelva el valor x, es decir, $g(f(x)) = g(2x) = x$. En este ejemplo no es difícil ver que la función $g(x) = x/2$ cumple con la condición deseada.

Obsérvese que $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ y que $Id_{\mathbb{R}}(x) = x$. Entonces, estamos buscando una función $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $(g \circ f)(x) = Id_{\mathbb{R}}(x) = x$.

El ejemplo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5.3.1. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Decimos que $g : B \longrightarrow A$ es:

1. una **función inversa derecha de *f*** si $g \circ f = I_A$.

2. una **función inversa izquierda de *f*** si $f \circ g = I_B$.

Proposición 5.3.2. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Si f tiene una inversa derecha g_1 y una función inversa izquierda g_2, entonces $g_1 = g_2$.

Demostración. Sea f una función que cuenta con una inversa por derecha g_1 y una inversa por izquierda g_2. Por definición tenemos $g_1 \circ f = Id_A$ y $f \circ g_2 = Id_B$. Por lo tanto, sustityendo y aplicando la propiedad distributiva tenemos que:

$$g_1 = g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 = g_2.$$

□

Definición 5.3.3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Decimos que $g : B \longrightarrow A$ es una **función inversa** de f si $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$. La función inversa g de f suele denotarse como f^{-1}. Ver figura 5.4.

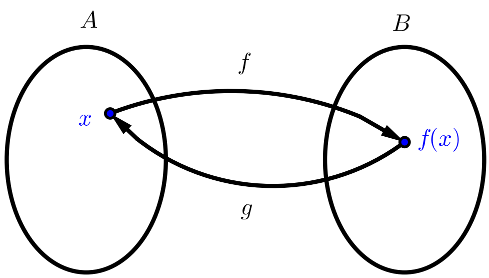


Figura 5.4: Diagrama de una función f y su función inversa g.

[5] Ver definición 4.1.2.

Dicho con otras palabras, si $f : A \longrightarrow B$ es una función y $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es la inversa de f, entonces:

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

En particular si f^{-1} es una función. Entonces $(b, a) \in f^{-1}$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$. Por lo tanto:

$$a = f^{-1}(b) \iff (b, a) \in f^{-1} \iff (a, b) \in f \iff f(a) = b.$$

Como una consecuencia de la proposición 5.3.2, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.3.4. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función invertible, entonces su inverso $g : B \longrightarrow A$ es único.

Ejemplo 5.3.2. Si $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $f = \{(\alpha, a), (\beta, c), (\gamma, b), (\delta, d)\}$. Entonces la función inversa de f es:

$$f^{-1} = \{(a, \alpha), (c, \beta), (b, \gamma), (d, \delta,)\}.$$

Además, observa que:

$$(f^{-1})^{-1} = \{(\alpha, a), (\beta, c), (\gamma, b), (\delta, d)\} = f.$$

Cuando una función $f : A \longrightarrow B$ tiene inversa, decimos que es **invertible**. No toda función es invertible.

Ejemplo 5.3.3. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por $f(x) = x^4 - 1$. Obsérvese que $f(1) = f(-1) = 0$, entonces, si f tuviera una función inversa g, tendríamos que $g(f(1)) = g(0) = 1$ y $g(f(-1)) = g(0) = -1$. Por lo tanto, $g(0) = 1$ y $g(0) = -1$, lo que implica que g no es función, pues no está bien definida.

Ejemplo 5.3.4. Considera los siguientes conjuntos $A = \{x, y, z, w\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ la función definida por $f(x) = 4,\ f(y) = 2,\ f(z) = 1$ y $f(w) = 1$. Se puede ver que f no es invertible, pues en caso que existiera una inversa g se tendría que cumplir que $g(1) = z$ y $g(1) = w$, lo cual contradice la definición de función.

El siguiente resultado establece una equivalencia entre las funciones invertibles y las biyectivas.

Teorema 5.3.5. Una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si y sólo si f es invertible.

Demostración. Supongamos que f es una función biyectiva, es decir, sobre y uno a uno. Definimos una función $g : B \longrightarrow A$ como sigue: $g(b) = a$ si y solo si $f(a) = b$.

Observa que como f es sobre, la función g va a estar definida para todo elemento en B. Además, por la inyectividad de f, la imagen de cada elemento en B es única. Para ver que g es la inversa de f hay que probar que $f \circ g = g \circ f = Id$. Sea $a \in A$ y supongamos que $f(a) = b$. Consideremos la composición $f \circ g$, entonces se tiene que:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a.$$

Esto prueba que g es una inversa izquierda de f. Ahora probaremos que $(f \circ g) = Id$.

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b,$$

y g es una inversa derecha de f. Por lo tanto, g es la inversa de f.

Ahora supongamos que g es la función inversa de f. Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Si aplicamos g a ambos lados de la igualdad tenemos que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ y, utilizando la definición de la composición de funciones, $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Como g es la inversa de f, entonces $a_1 = a_2$ y f es inyectiva. Para ver que f es sobre, sea $b \in B$. Si aplicamos la función identidad tenemos que:

$$b = Id(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b)).$$

Entonces para todo $b \in B$, existe $a = g(b)$ en A tal que $f(a) = b$ y por lo tanto f es sobre. Entonces, como f es inyectiva y sobre, se sigue que f es biyectiva.

La función del ejemplo 5.3.3 no tiene inversa porque $f(1) = f(-1) = 0$, es decir f no es inyectiva. En el item *b)*, se puede ver que f nos invertible por qué f no es biyectiva.

5.4 Funciones entre conjuntos finitos.

En esta sección consideramos la cardinalidad de los conjuntos entre los cuales está definida una función con la finalidad de comparar la el tamaño entre los conjuntos, incluso si éstos son infinitos. Para motivar el estudio de funciones entre conjuntos finitos, considera la siguiente pregunta:

Sean A y B dos conjuntos finitos, ¿cómo podemos determinar si $|A| = |B|$?

Ejemplo 5.4.1. Supongamos que tenemos un conjunto de personas llamado A y un conjunto de sillas llamado B. Si podemos establecer una función biyectiva entre A y B, tendríamos que $|A| = |B|$, pues a cada persona le correspondería una y solo una silla y todas las sillas estarían ocupadas.

Proposición 5.4.1. Sean A y B dos conjuntos finitos. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$.

Proposición 5.4.2. Sean A y B dos conjuntos finitos. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva, entonces $|A| \geq |B|$.

Combinando las proposiciones 5.4.1 y 5.4.2 se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 5.4.3. Sean A y B dos conjuntos finitos. Si $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva, entonces $|A| = |B|$.

5.5 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Determina cuáles de las siguientes relaciones son funciones:

1. $R_1 = \{(x, x), (x, y), (y, z), (z, y), (w, w)\}$.
2. $R_2 = \{(1, 3), (0, 0), (-1, 0), (3, 0), (-5, -1)\}$.
3. $R_3 = \{(a, b), (b, c), (c, a\}$.
4. $R_4 = \{((1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Ejercicio 5.2. Demuestra que cada una de las siguientes funciones es inyectiva en el dominio dado:

1. $f(x) = -3x + 2$, $D = \mathbb{Q}$.
2. $g(x) = x^3 - 1$, $D = \mathbb{Q}$.
3. $h(x) = \dfrac{3x}{x+4}$, $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$.
4. $r(x) = \dfrac{-1}{x^2-1}$, $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$.

Ejercicio 5.3. Determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

1. $f(x) = -x^3 + 4$.
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x^4-1}$.
3. $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-6x+1}$.
4. $f(x) = 0$.

Ejercicio 5.4. Sean $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(n) = n^2 + 1, \quad g(n) = n - 1.$$

Determina el dominio, codominio y la regla de correspondencia de:

1. $f \circ g$.
2. $g \circ f$.
3. Encuentra la imagen de $g \circ f$.

Ejercicio 5.5. Encuentra dos funciones f y h tales que $f \circ h = h \circ f$.

Ejercicio 5.6. Prueba el inciso 2 de la proposición 5.2.3.

Ejercicio 5.7. Prueba la proposición 5.2.4.

Ejercicio 5.8. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con la siguiente regla de correspondencia: $f(n) = n - 2$:

1. Prueba que f es biyectiva.
2. Encuentra la función inversa de f.

Ejercicio 5.9. Considerar la función $g : \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con la siguiente regla de correspondencia: $g(n) = \dfrac{n^2 - 4}{n + 2}$, $n \neq -2$.

1. Encuentra la imagen de g.
2. Encuentra dominio y el codominio en donde g es biyectiva y la función inversa de g (con el dominio y codominio que establecieron).

Ejercicio 5.10. Determina el dominio y el rango de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para que f sea una función biyectiva.

Ejercicio 5.11. Encuentra un ejemplo de una función f tal que f sí tiene inversa derecha, pero no inversa izquierda.

Ejercicio 5.12. Determina si la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como sigue: $f(n) = (n + 2)^2 - 1$ es inyectiva y/o suprayectiva, biyectiva.

Ejercicio 5.13. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $Id_B : B \longrightarrow B$ la función identidad en el conjunto B. Demuestra que $Id_B \circ f = f$.

Ejercicio 5.14. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. ¿Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f y g son inyectivas?

Ejercicio 5.15. Para cada inciso encuentra una función que cumpla las propiedades.

1. Sea inyectiva y suprayectiva.
2. Sea inyectiva y no sea suprayectiva.

3. No sea inyectiva y sea suprayectiva.
4. No sea inyectiva y no sea suprayectiva.

Ejercicio 5.16. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por $f(x) = ax + b$. Determina el valor de a y b de forma que $f(1) = 2$ y $f(3) = -2$.

Ejercicio 5.17. Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0; \\ \\ x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Determina si h es una función biyectiva. En caso de serlo, encuentra la función inversa de h.

Ejercicio 5.18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 1$.

1. Demuestra que f es biyectiva.
2. Encuentra la función inversa de f.

Ejercicio 5.19. Sean $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$ e $I = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}$. Encuentra una función biyectiva de P en I.

Ejercicio 5.20. Sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de un conjunto A. Demuestra que $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

6 Métodos de Conteo

El problema de contar es tan viejo como el inicio del conocimiento humano. Los números se inventaron para contar, sin embargo, los problemas de conteo de hoy en día van mucho más allá de la utilización de los números. Podemos decir que los métodos de conteo (los cuales forman parte del análisis combinatorio) son estrategias que se utilizan para contar distintas formas de crear diferentes grupos con los elementos de un conjunto dado. A continuación presentaremos algunas técnicas para contar los elementos de un conjunto, ademas de abordar problemas clásicos en el área de la combinatoria. Los temas y pruebas en esta sección están basados principalmente en la teoría de conjuntos

Antes de iniciar, vamos a hacer énfasis en la diferencia entre el concepto de partición definido en la sección 4.2.1 y cubrimiento.

Definición 6.0.1. Sea A un conjunto y sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ subconjuntos no vacíos de A. Diremos que $A_1, A_2, \ldots, A_r$ es un **cubrimiento** de A si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$.

Observa que una partición de A en particular es un cubrimiento, pero el inverso no necesariamente es cierto.

Ejemplo 6.0.1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 4\}$ y $A_3 = \{1, 2, 5\}$, entonces A_1, A_2, A_3 es un cubrimiento ya que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$, pero A_1, A_2, A_3 no es una partición ya que $A_1 \cap A_2 = \{2\}$ (además $A_2 \cap A_3 = \{2\}$ y $A_1 \cap A_3 = \{1, 2\}$). Si consideramos los subconjuntos $A_1' = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2, 4\}$ y $A_3 = \{5\}$, entonces A_1', A_2, A_3 es un cubrimiento ya que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ y también es una partición ya que $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \emptyset$.

Ejemplo 6.0.2. Por las propiedades 4 y 5 de la sección 2.6.3, tenemos que A y A^c es una partición del conjunto universal Ω.

Ejemplo 6.0.3. Por el inciso 9 del ejercicio 2.9, tenemos que $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$ y la propiedad 5 de la sección 2.6.3 afirma que $B \cap B^c = \emptyset$. Entonces $A \cap B$ y $A \cap B^c$ es una partición del conjunto A.

6.1 Principios de conteo

En esta sección abordaremos algunas de las técnicas de conteo basadas en conjuntos.

6.1.1 Principio de inclusión-exclusión

El **principio de inclusión-exclusión** es una técnica que se deriva de propiedades de conjuntos. Cuando contamos, es importante distinguir entre el conteo los elementos si tenemos una partición o un cubrimiento de un conjunto. Primero revisamos el ejemplo 6.0.1.

Ejemplo 6.1.1. Considera la partición A_1, A_2, A_3 del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en el ejemplo 6.0.1. Es fácil ver que $|A| = 5$, $|A_1| = 2$, $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 1$ y podemos observar que $|A| = 5$ y $|A_1| + |A_2| + |A_3| =$

$2+2+1=5$, por lo que $|A| = |A_1'| + |A_2| + |A_3|$. Mientras que si consideramos el cubrimiento A_1, A_2, A_3 del conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ en el ejemplo 6.0.1, es fácil ver que $|A| = 5$, $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 1$ y podemos observar que $|A| = 5$ mientras que $|A_1| + |A_2| + |A_3| = 3+2+3 = 8$, por lo que $|A| \neq |A_1'| + |A_2| + |A_3|$.

En general, estos comportamientos se conservan y se expresan en el principio de inclusión-exclusión que tiene como caso particular el principio de la suma. Observa que si $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$, entonces $A_1, A_2, \ldots, A_r$ es un cubrimiento de B. El principio de inclusión-exclusión es una generalización de la proposición 2.7.4 de cardinalidad de la sección 2.7 y en el caso general se expresa como:

Teorema 6.1.1. [Principio de inclusión-exclusión] Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ conjuntos. Entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r| = \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^r |\bigcap_{i=1,2\ldots r} A_i|.$$

Demostración. Vamos a probar el teorema para $r = 3$, el argumento se puede generalizar y el teorema se puede probar en su caso general usando propiedades de conjuntos e inducción sobre el número de conjuntos. Por la proposición 2.7.4 del la sección 2.7 sabemos que $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$. Considera 3 conjuntos A_1, A_2, A_3.

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \\
&= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|) + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cup A_2| \\
&\quad -(|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cup A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |(A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.1.2. En la UAM Cuajimalpa los estudiantes de estadística hicieron una encuesta a 78 compañeros. La encuesta arrojó que:

1. 48 comen al menos 3 veces por semana en el comedor,
2. 32 trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa,
3. 37 deben una UEA del tronco básico,
4. 21 comen al menos 3 veces por semana en el comedor y trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa,
5. 18 deben una UEA del tronco básico y comen regularmente en el comedor,
6. 15 trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa y deben una UEA del tronco básico, y
7. 8 comen al menos 3 veces por semana en el comedor, trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa y deben una UEA del tronco básico.

¿Cuántos de los entrevistados comen al menos 3 veces por semana en el comedor o trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa o deben una UEA del tronco básico?

Sea A_1 el conjunto de entrevistados que comen al menos 3 veces por semana en el comedor, A_2 el conjunto de entrevistados que trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa y A_3 el conjunto de entrevistados que deben una UEA del tronco básico.

De los datos proporcionados tenemos que:

$$|A_1| = 48,\ |A_2| = 32\ y\ |A_3| = 37.$$

$$|A_1 \cap A_2| = 21,\ |A_2 \cap A_3| = 15,\ y\ |A_3 \cap A_1| = 18\ y\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8.$$

En la figura 6.1 representamos la situación mediante un diagrama de Venn.

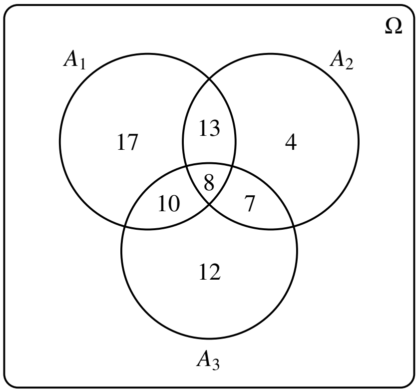


Figura 6.1: Diagrama de Venn con los datos del ejemplo 6.1.2.

El conjunto de los entrevistados que comen al menos 3 veces por semana en el comedor o trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa o deben una UEA del tronco básico es justo $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Usamos el principio de inclusión-exclusión para calcular $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cup A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 48 + 32 + 37 - 21 - 18 - 15 + 8 = 71. \end{aligned}$$

Por lo que 71 de los entrevistados comen al menos 3 veces por semana en el comedor o trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa o deben UEA del tronco básico.

Si los conjuntos en el teorema 6.1.1 son distintos entre sí, entonces para todo $i < j$ tenemos que $|A_i \cap A_j| = 0$ y, por el principio de la inclusión-exclusión, tenemos el siguiente corolario también llamado el **principio de la suma**:

Corolario 6.1.2. [Principio de la suma] Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ conjuntos disjuntos entre sí. Entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_r|.$$

Si definimos el conjunto A como la unión de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$, entonces, en el principio de inclusión exclusión, los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ forman un cubrimiento del conjunto A; mientras que, en el principio de la suma, los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ forman una partición del conjunto A.

Como corolario del principio de la suma, tenemos el principio del complemento, que se puede aplicar en los casos en que conocemos el número de elementos del conjunto universal Ω; y es una consecuencia de las propiedades 4 y 5 de la sección 2.6.3 que establece que:

$$A \cup A^c = \Omega, \qquad A \cap A^c = \emptyset.$$

El **principio del complemento** indica que, en lugar de contar el número de elementos del conjunto A, podemos contar el número de elementos del complemento A^c y restárselo al número de elementos del conjunto universal, para obtener así el número de elementos del conjunto A.

Corolario 6.1.3. [Principio del complemento] Sea A un subconjunto propio del conjunto universal Ω. Entonces

$$|A| = |\Omega| - |A^c|.$$

Ejemplo 6.1.3. Considera el subconjunto $A = \{2, 4\}$ del conjunto universal $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es fácil ver que $A^c = \{1, 3, 5\}$, $|\Omega| = 5$, $|A^c| = 3$ y, como $|A| = 2$, la igualdad $|A| = |\Omega| - |A^c|$ se cumple.

Ejemplo 6.1.4. Considera los datos del ejemplo 6.1.2. ¿Cuántos de los entrevistados

1. no deben UEA del tronco básico?
2. comen a lo más 2 veces por semana en el comedor, no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben UEA del tronco básico?
3. comen al menos 3 veces por semana en el comedor, pero no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben UEA del tronco básico?

Sea A_1 el conjunto de entrevistados que comen al menos 3 veces por semana en el comedor, A_2 el conjunto de entrevistados que trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa y A_3 el conjunto de entrevistados que deben materias del tronco básico.

De los datos proporcionados tenemos que:

$$|A_1| = 48,\ |A_2| = 32 \ y\ |A_3| = 37.$$

$$|A_1 \cap A_2| = 21,\ |A_2 \cap A_3| = 15,\ y\ |A_3 \cap A_1| = 18\ y\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8.$$

Los datos están representados mediante un diagrama de Venn en la figura 6.1.

1. El conjunto de los entrevistados que no deben UEA del tronco básico es justo A_3^c, y $|A_3^c| = |\Omega| - |A_3| = 78 - 37 = 41$. Por lo que 38 de los entrevistados que no deben UEA del tronco básico.

2. El conjunto de los entrevistados que comen a lo más 2 veces por semana en el comedor, no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben UEA del tronco básico es justo $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$. Al usar leyes de De Morgan tenemos que:

$$(A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2)^c \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c.$$

Por el principio de complemento tenemos que:

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Por el ejemplo 6.1.2 sabemos que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 71$, por lo que $|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 78 - 71 = 7$ y 7 de los entrevistados comen a lo más 2 veces por semana en el comedor, no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben UEA del tronco básico.

3. El conjunto de los entrevistados que comen al menos 3 veces por semana en el comedor, pero no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben una UEA del tronco básico es justo $A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$. Al usar leyes de De Morgan tenemos que:

$$A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)^c = A_1 \setminus (A_2 \cup A_3).$$

Usando la figura 6.1 tenemos que:

$$|A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c| = |A_1 \setminus (A_2 \cup A_3)| = 17.$$

Por lo que 17 de los entrevistados comen al menos 3 veces por semana en el comedor, pero no trabajan fuera de la UAM Cuajimalpa ni deben UEA del tronco básico.

6.1.2 Principio del producto

El principio del producto es una de las técnicas que también se deriva de propiedades de conjuntos. Primero revisamos el ejemplo 6.1.5.

Ejemplo 6.1.5. Supongamos que los salones de la UAM-Cuajimalpa tienen que ser etiquetados con una letra del abecedario y un número entre 0 y 9. ¿Cuál es el máximo número de salones que pueden ser etiquetados?

Hay 26 letras en el abecedario y podemos utilizar 10 dígitos. Para seleccionar la letra del abecedario tenemos 26 opciones y cada una de estas opciones puede estar acompañada de 10 dígitos distintos, por lo tanto el máximo número de salones que pueden ser etiquetados es:

$$26 \cdot 10 = 260.$$

El **principio del producto** se deriva de la cardinalidad del producto cartesiano de dos o más conjuntos

Teorema 6.1.4. [Principio del producto] Sean $A_1, A_2, \ldots, A_r$ conjuntos. Entonces:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r| = |A_1|\,|A_2| \ldots |A_r|.$$

En la sección 2.6.6 se definió $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$. En el ejemplo 6.1.5, el conjunto A_1 es el conjunto de las letras del abecedario y el conjunto A_2 es el conjuntos de los dígitos $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Coloquialmente el principio del producto es el número de formas en las cuales una sucesión de eventos puede ocurrir es el producto de formas en las que cada evento puede ocurrir de forma individual.

Ejemplo 6.1.6. La fonda “La cocina de María” ofrece una comida corrida cuyas opciones se encuentran en la tabla 6.1:

Entrada:	Ensalada Sopa de lentejas
Plato fuerte:	Enchiladas verdes Flautas de pollo Pechuga de pollo empanizada Calabazas rellenas de queso
Postre:	Gelatina Ate con queso Café

Cuadro 6.1: Menu de la fonda “La cocina de María”.

¿De cuántas maneras diferentes se puede pedir una comida corrida en la Fonda “La cocina de María”?

Sea E el conjunto de entradas, F el conjunto de platos fuertes y P el conjunto de postres. Como hay dos diferentes entradas, cuatro diferentes platillos fuertes y tres diferentes postres, entonces $|E| = 2$, $|F| = 4$ y $|P| = 3$. El conjunto de todas las opciones de comida corrida es $E \times F \times P$, por el principio del producto tenemos que $|E \times F \times P| = |E|\,|F|\,|P| = 3(4)3 = 36$. Por lo tanto hay 36 maneras diferentes de pedir una comida corrida en la Fonda “La cocina de María”.

Ejemplo 6.1.7. Cada carta en una baraja inglesa consta de un palo del conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ y un número del conjunto $\{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$. ¿Cuántas cartas tiene una baraja inglesa?

Sea $P = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ y $N = \{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$. El conjunto de cartas en una baraja inglesa es $P \times N$. Como $|P| = 4$ y $|N| = 13$, entonces $|P \times N| = |P|\,|N| = 4(13) = 52$. Hay 52 cartas en una baraja inglesa.

El siguiente teorema es un resultado importante que puede obtenerse a partir del principio del producto.

Teorema 6.1.5. El número de subconjuntos (incluyendo al conjunto vacío y al total) de un conjunto de cardinalidad n es 2^n.

Demostración. Supongamos que A es un conjunto de cardinalidad n y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los n elementos de A. Obsérvese que cada subconjunto X de A se corresponde con una sucesión de elecciones. Por ejemplo, ¿el elemento a_1 está en X?, ¿el elemento a_2 está en X? ... ¿el elemento a_n está en X? Como cada pregunta puede contestarse de dos formas (si o no), tenemos que el número total de subconjuntos es:

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

$\square$

6.1.3 Principio del palomar

El **principio del palomar** (también llamado el principio de las casillas o el principio de Dirichlet) es un principio que, aunque se enuncia y se justifica de manera muy sencilla, tiene aplicaciones muy fuertes.

Teorema 6.1.6. [Principio del palomar] Considera un palomar con n nidos, si llegan $n + 1$ palomas, entonces hay un nido con más de una paloma.

La prueba del teorema es el ejercicio 6.1.

Ejemplo 6.1.8. En una conferencia con el auditorio lleno en la UAM Cuajimalpa, hay al menos dos personas que cumplen años el mismo día.

En el auditorio de la UAM Cuajimalpa caben 400 personas y hay 366 fechas distintas en el calendario (incluyendo 29 de febrero). Por el principio del palomar, hay dos personas que cumplen años el mismo día.

Ejemplo 6.1.9. Considera las nueve cifras del conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Si se seleccionan al azar seis elementos distintos del conjunto C, hay dos elementos cuya suma sea exactamente diez.

Primero nos fijamos en las parejas de cifras distintas que suman exactamente diez:

$$\{1, 9\},\ \{2, 8\},\ \{3, 7\}\ y\ \{4, 6\}.$$

La única cifra que no se encuentra en alguno de los conjuntos es el 5. Considera la partición $\{1,9\}$, $\{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}$ y $\{5\}$ del conjunto C. Si elegimos seis cifras distintas del conjunto C, tenemos que elegir dos cifras de la misma clase de la partición y como la clase $\{5\}$ tiene un sólo elemento, tenemos que elegir dos elementos de una de las otras clases, es decir, elegimos ambos elementos de una clase cuyos elementos suman exactamente diez, y hemos terminado.

Ejemplo 6.1.10. Dados 5 puntos cualesquiera dentro de un triángulo equilátero de lado 2, al menos dos de ellos están a distancia menor que 1.

Considera los puntos medios de los lados del triángulo ABC y une los con segmentos como en la figura 6.2. El triángulo se divide en cuatro triangulitos equiláteros de lado 1.

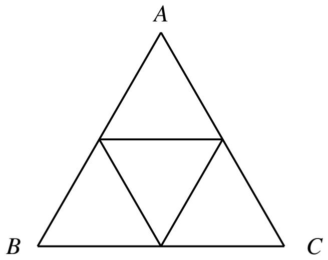


Figura 6.2: Triángulo y principio del palomar.

Como son cuatro triángulos de lado 1 y cinco puntos, entonces al menos dos puntos están en el mismo triangulito equilátero de lado 1, y estos dos puntos están a una distancia menor que 1.

Teorema 6.1.7. [Principio generalizado del palomar] Considera un palomar con n nidos, si llegan $m > kn$ palomas, entonces hay un nido con mas de k palomas.

Ejemplo 6.1.11. En el trimestre 17I habían 786 alumnos inscritos en alguna licenciatura en la UAM Cuajimalpa. Al menos 3 alumnos cumplen años el mismo día.

Considera las 366 fechas posibles de un año. Como $786 > 732 = 2(366)$, entonces hay 3 alumnos cumplen años el mismo día.

Las siguientes proposiciones se pueden probar con el principio del palomar:

1. En el comedor de la UAM Cuajimalpa en un día normal existen dos personas tales que su primera y su última letra son iguales (como por ejemplo, María y Mariana, o Jorge y José).

2. En una fiesta cualquiera hay por lo menos dos personas con el mismo número de amigos.

3. Si se toman 9 números cualesquiera entre 18 y 58, se puede elegir dos grupos tal que las sumas de los números de cada grupo sean iguales.

4. Consideremos un conjunto arbitrario de 47 números, entonces existen al menos dos cuya diferencia es divisible por 46.

5. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{100} \in \mathbb{Z}$, distintos o no. Entonces, existen dos números r y s, con $0 < r < s \leq 100$ tales que la suma $a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_s$ es un múltiplo de 100.

6. Si se toman $n+1$ números cualesquiera del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, habrá entre ellos dos elementos m y k tal que m divide a k.

7. Consideremos los enteros del 1 al 10 distribuidos al azar en una circunferencia, entonces existirán tres números vecinos cuya suma sea al menos 17.

Para terminar, resumimos en el cuadro 6.2 los principios que hemos presentado.

Principio de inclusión-exclusión	$\|A_1 \cup A_2 \cup A_3\| = \|A_1\| + \|A_2\| + \|A_3\| - \|A_1 \cup A_2\|$ $-\|A_1 \cap A_3\| - \|A_2 \cap A_3\| + \|(A_1 \cap A_2 \cap A_3\|.$
Principio de la suma	$\|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\| = \|A_1\| + \|A_2\| + \cdots + \|A_r\|, \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$
Principio del complemento	$\|Ac\| = \|\Omega\| - \|A\|.$
Principio del producto	$\|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r\| = \|A_1\|\,\|A_2\| \ldots \|A_r\|.$
Principio del palomar	Si llegan $n + 1$ palomas a un palomar con n nidos, entonces hay un nido con más de una paloma.

Cuadro 6.2: Tabla de principios de conteo.

6.2 Ordenaciones

Un aspecto de la combinatoria elemental consiste en contar de cuántas maneras distintas se puede seleccionar un cierto número de elementos de un conjunto. Si tenemos n objetos ¿de cuántas formas los podemos ordenar los elementos? Para poder determinar este número es necesario fijar criterios para poder diferenciar una selección de otra. Nosotros consideraremos dos tipos de criterios: el orden de los elementos y si un elemento se puede repetir o no. Distinguimos dos selecciones cuando los elementos de éstas aparecen en un orden diferente. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\{a, b\}$, las ordenaciones *ab* y *ba* son distintas, pues las letras aparecen en un orden distinto.

6.2.1 Permutaciones

A las ordenaciones de todos los elementos de un conjunto en donde no se puede repetir un elemento se les llama **permutaciones**. Si un conjunto tiene n elementos diremos que una ordenación de todos los elementos del conjunto es una permutación de los n elementos. Utilizamos P_n para denotar al número de permutaciones de un conjunto de n elementos.

Primero revisamos un ejemplo, para el cual necesitamos definir una **palabra** como una sucesión de letras sin importar si no tenga sentido en español o en algún otro idioma.

Ejemplo 6.2.1. ¿De cuántas formas distintas pueden acomodarse las letras del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Para elegir la primera letra de nuestro palabra tenemos 6 posibilidades (todos las letras de A). La segunda letra de nuestra palabra la podemos seleccionar de 5 formas distintas (pues ya se utilizó una letra y no queremos que aparezca dos veces la misma letra). Utilizando un razonamiento similar podemos ver que hay 4 formas para seleccionar la tercera letra, 3 formas para seleccionar la cuarta letra, 2 formas para seleccionar la quinta letra y sólo una para la última letra. Por lo tanto el número total de palabras que se pueden formar con las seis letras del conjunto A de forma que no aparezca dos veces la misma letra es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

Teorema 6.2.1. Sea $n \in \mathbb{Z}$. El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es:

$$P_n = n!.$$

Demostración. Tenemos n opciones para el primer elemento, como no se pueden repetir elementos, para el segundo elemento tenemos $n-1$ opciones. Para el tercero tenemos $n-2$ opciones, pues ya utilizamos dos elementos del conjunto que no podemos utilizar pues la repeticiones no están permitidas. Continuando con este razonamiento tenemos la siguiente fórmula:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!.$$

□

Ejemplo 6.2.2. ¿De cuántas formas distintas pueden acomodarse 20 libros en un estante?

Al aplicar la fórmula para una permutación de 20 elementos, tenemos que:

$$P_{20} = 20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000.$$

6.2.2 Ordenaciones sin repetición

Estudiemos ahora las ordenaciones en las que cada elemento puede aparecer a lo más una sola vez. Una **ordenación sin repetición** de un conjunto A de n elementos tomados de m en m es una m-éada $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ tal que $a_i \in A$ y $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ (una sucesión de m elementos distintos entre sí del conjunto A). Al número de ordenaciones sin repetición de un conjunto de n elementos tomados de m en m lo denotamos como O_n^m. Una permutación es una ordenación sin repetición de un conjunto de n elementos tomados de n en n.

Primero revisamos un ejemplo.

Ejemplo 6.2.3. ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse de forma que no aparezca dos veces el mismo dígito?

Para elegir el primer dígito de nuestro número tenemos 10 posibilidades (todos los números del 0 al 9). El segundo dígito de nuestro número lo podemos seleccionar de 9 formas distintas (pues ya se utilizó un número para el primer dígito y no queremos que aparezca dos veces el mismo número). Utilizando un razonamiento similar podemos ver que hay 8 formas para seleccionar el tercer dígito y 7 para el último dígito. Por lo tanto el número total de números de cuatro dígitos pueden formarse de forma que no aparezca dos veces el mismo dígito es $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 30.240$.

Teorema 6.2.2. Sea $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$. El número de ordenaciones sin repetición de un conjunto de n elementos tomados de m en m es:

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Demostración. Tenemos n opciones para el primer elemento. Como no se pueden repetir elementos, para el segundo elemento tenemos $n-1$ opciones. Para el tercero tenemos $n-2$ opciones, pues ya utilizamos dos elementos del conjunto que no podemos utilizar pues la repeticiones no están permitidas. Si continuamos con este razonamiento, tenemos $n-m+1$ opciones para el m-ésimo elemento y obtenemos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} O_n^m &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\frac{(n-m)(n-m-1)\dots 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\dots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

□

Nótese que $O_n^n = P_n$.

Ejemplo 6.2.4. Supongamos que tenemos una caja con 5 objetos de la cual queremos extraer 3 objetos uno a uno, con la condición que, una vez extraído un objeto, éste ya no se vuelve a introducir a la caja. ¿De cuántas formas podemos extraer los tres objetos de la caja?

Para el primer objeto tengo 5 opciones (una por cada objeto de la caja), para el segundo elemento tengo 4 opciones (pues en la caja solamente quedan 4 objetos). Finalmente, para el tercer elemento sólo tengo 3 opciones. Por lo tanto, hay $5 \cdot 4 \cdot 3$ distintas ordenaciones.

Ejemplo 6.2.5. ¿De cuántas opciones pueden asignarse los premios de primero, segundo y tercero de un sorteo en una rifa de 10 boletos?

Utilizando un razonamiento similar al ejemplo anterior, hay $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas de asignar los premios.

Ejemplo 6.2.6. ¿Cuál es el número total de ordenaciones sin repetición que hay si saco 4 elementos de un conjunto de 8 elementos?

Para el primer elemento tengo 5 opciones, para el segundo elemento tengo 4 opciones (pues en la caja solamente quedan 4 elementos). Finalmente, para el tercer elemento sólo tengo 3 opciones. Por lo tanto hay $5 \cdot 4 \cdot 3$ distintas ordenaciones.

6.2.3 Ordenaciones con repetición

Estudiemos ahora las ordenaciones en las que cada elemento puede aparecer más de una vez. Una **ordenación con repetición** de un conjunto A de n elementos tomados de m en m es una m-éada $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ tal que $a_i \in A$ (una sucesión de m elementos no necesariamente distintos entre sí del conjunto A). Al número de ordenaciones con repetición de un conjunto de n elementos tomados de m en m lo denotamos como OR_n^m.

Primero revisamos un ejemplo.

Ejemplo 6.2.7. Considera el conjunto $A = \{a, b, c\}$. ¿Cuántas palabras de dos letras que podemos formar utilizando las letras del conjunto A?.

Para elegir la primera letra de nuestro palabra tenemos 3 posibilidades (todas las letras de A). La segunda letra de nuestra palabra la podemos seleccionar de 3 formas distintas (pues tenemos todas las letras de A). Por lo tanto el número total de palabras que se pueden formar con las tres letras del conjunto A de forma que cada letra pueda aparecer las veces que sea es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. Por lo que $OR_3^2 = 3^2 = 9$.

Como $|A| = 3$ podemos enlistar todas las posibles palabras:

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.$$

Nótese que el conjunto de palabras corresponde al producto cartesiano $A \times A$.

En general tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.2.3. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. El número de ordenaciones con repetición de un conjunto de n elementos tomados de m en m es:

$$OR_n^m = n^m.$$

Demostración. Considera un conjunto A cardinalidad n. El número de ordenaciones con m elementos del conjunto A es por el principio del producto:

$$\underbrace{|A|\,|A|\,|A|\ldots\,|A|}_{m-veces} = \underbrace{n\cdot n\cdot n\ldots n}_{m-veces} = n^m.$$

Por lo que $OR_n^m = n^m$. $\square$

Ejemplo 6.2.8. ¿Cuáles son las ordenaciones con repetición del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ tomados de dos en dos?

Enlistamos todos los números que podemos formar con dos dígitos:

$$11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.$$

Tenemos que $OR_4^2 = 2^4 = 16$.

Ejemplo 6.2.9. ¿Cuáles son las ordenaciones con repetición del conjunto $\{0, 1\}$ tomados de tres en tres?

$$000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111.$$

Entonces tenemos que $OR_2^4 = 2^4 = 8$.

Ejemplo 6.2.10. ¿Cuántas contraseñas de longitud cuatro pueden obtenerse si solamente utilizamos los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

Cada contraseña es una ordenación con repetición. Tenemos 10 dígitos y cada dígito puede aparecer las veces que sea. El número de contraseñas distintas es $OR_{10}^4 = 10^4$.

Ejemplo 6.2.11. ¿Cuántos números con cuatro dígitos hay que inician con el número 1 si no se pueden repetir los dígitos? y ¿cuántos números con cuatro dígitos hay que inician con el número 1 si se pueden repetir los dígitos?

En ambos casos se fija el primer número como el número 1.

Para el caso en que no se puede repetir dígito, tenemos que elegir sin repetición tres de los restantes 9 dígitos, es decir, $O_9^3 = (9)(8)(7) = 504$. Por lo que hay 504 números distintos con cuatro dígitos que inician con el número 1 en donde no se pueden repetir los dígitos.

Para el caso en que se puede repetir dígito, tenemos que elegir tres de los restantes 10 dígitos, es decir, $OR_3^{10} = 10^3$. Por lo que hay 1 000 números distintos con cuatro dígitos que inician con el número 1 en donde sí se pueden repetir los dígitos.

6.3 Combinaciones

Consideramos selecciones sin repetición en donde dos selecciones serán diferentes sólo si sus elementos son diferentes (el orden no importa). Por ejemplo, la selección ab es igual a la ba, pues tienen los mismos elementos, mientras que la selección abc es distinta a la selección abd. Una **combinación** de un conjunto A de n elementos tomados de m en m es un subconjunto de orden $m \leq n$ del conjunto A. Denotamos por C_n^m al número de combinaciones, al tomar m de n. En algunos libros pueden encontrar la notación $\binom{n}{m}$ o $C(n, m)$. A $\binom{n}{m}$ se le llama coeficiente binomial.

Recordamos que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos y que el orden en que aparazcan en el conjunto no importa, así los conjuntos $\{\alpha, 8, a, \{\phi, 0\}\}$ y $\{a, \{0, \phi\}, \alpha, 8, \}$ son iguales.

Ejemplo 6.3.1. Considera el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y enlistamos todas las combinaciones de 2 elementos del conjunto U (los subconjuntos de cardinalidad 2):

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$$

por lo que hay 10 combinaciones diferentes de dos elementos tomados de un conjunto de cardinalidad 5.

Teorema 6.3.1. Sea $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. El número de combinaciones de m elementos tomados de un conjunto de cardinalidad n es:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

El ejercicio 6.3 (5) es fundamental en la prueba del Teorema 6.3.1.

Demostración. Relacionamos el número de combinaciones C_n^m con el número de ordenaciones O_n^m. Calculamos O_n^m de la siguiente manera: elegimos primero los m elementos y luego ordenamos estos m elementos. Podemos elegir los m elementos del conjunto con n elementos de C_n^m maneras diferentes y tenemos $m!$ maneras diferentes de ordenar los k elementos, porque el número de ordenaciones diferentes es igual al número de permutaciones diferentes de m elementos. Por lo tanto $O_n^m = C_n^m \cdot m!$ y despejando a C_n^m obtenemos,

$$C_n^m = \frac{O_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

□

Ejemplo 6.3.2. ¿De cuántas maneras puedes elegir una mano de 7 fichas de dominó de las 28 fichas de dominó?

Como no nos importa el orden en el que elegimos las fichas estamos buscando las combinaciones de 7 tomados de 28 y no las ordenaciones de 28 tomados de 7 en 7.

$$C_{28}^7 = \frac{28!}{7! \cdot (28-7)!} = \frac{28!}{7! \cdot (21)!} = 1\,184\,040.$$

Por lo que hay 1 184 040 manos distintas de dominó.

Ejemplo 6.3.3. En el juego de pókar, cada jugador recibe 5 cartas que forman *la mano* del jugador. El jugador recibe las cartas una por una, pero el orden en el que recibió cada carta no importa, sino el conjunto de cartas. Si queremos contar el número de manos distintas que le puede salir a un jugador, tenemos que contar el número de subconjuntos distintos de cardinalidad cinco del conjunto de las 52 cartas de una baraja inglesa.

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot (47)!} = 2\,598\,960.$$

Por lo que hay 2 598 960 manos distintas de pókar (con una baraja inglesa).

Ejemplo 6.3.4. En el Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas (DMAS) hay dos licenciaturas, una de Matemáticas Aplicadas (*MA*) y otra de Ingeniería en Computación (*IC*). Alumnos de las dos licenciaturas quieren iniciar un ciclo de pláticas profesionales. Hay 6 alumnos de *MA* y 7 alumnos de *IC* interesados y como hay más alumnos de *IC* en DMAS, deciden formar un comité organización con tres alumnos de *MA* y cuatro de *IC*. ¿De cuántas maneras se pueden formar este comité?

Elegimos de manera independiente los alumnos de *MA* y los de *IC*, y no importa el orden en el que elegimos los alumnos. Elegimos 3 de las 6 alumnos de *MA*: $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ y elegimos 4 de las 7 alumnos de *IC*: $C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$. Por cada terna de alumnos de *MA* tenemos C_7^4 posibilidades de elegir a los alumnos de *IC*, por el principio del producto el número total de comités posibles es:

$$C_6^3 \cdot C_7^4 = 20 \cdot 35 = 700.$$

Ejemplo 6.3.5. En el DMAS hay dos licenciaturas, la licenciatura de Matemáticas Aplicadas (*MA*) y la licenciatura de Ingeniería en Computación (*IC*). En una fila fuera de la oficina de los dos coordinadores de las licenciaturas de DMAS, están formados siete alumnos.

1. ¿De cuántas maneras puede estar conformada la fila de los alumnos si se sabe que hay al menos cinco alumnos de *MA*?

2. ¿De cuántas maneras puede estar conformada la fila de los alumnos si se sabe que hay al menos tres alumnos de *MA* y al menos dos alumnos de *IC*?

La fila tiene siete lugares que se van a ocupar por siete alumnos. Vamos a elegir cuáles de los siete lugares serán ocupados por los alumnos de *MA*, los restantes serán ocupados por los alumnos de *IC*.

1. En la fila de los alumnos hay al menos cinco alumnos de *MA*, por lo que tenemos tres casos según el número exacto de alumnos de *MA* y vamos a contar por separado el número de filas en cada caso. Para el caso en que la fila tiene exactamente cinco alumnos de *MA*, elegimos los cinco lugares de la fila ocupados por los alumnos de *MA*, es decir, hay $C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 35$ maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA*. El total de maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA* es:

   $$C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 35.$$

   Para el caso en que la fila tiene exactamente seis alumnos de *MA*, elegimos los seis lugares de la fila ocupados por los alumnos de *MA*, es decir, hay $C_7^6 = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = 7$ maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA*. El total de maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA* es:

   $$C_7^6 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 7.$$

   Para el último caso, la fila tiene sólo alumnos de *MA*, y hay una sola manera de elegir los lugares, pues cada uno de los lugares está ocupado por un alumno de *MA*, lo cual coincide con:

   $$C_7^7 = \frac{7!}{7! \cdot 0!} = 1.$$

   Como son eventos ajenos, por el principio de la suma el número se suman y el número total de filas con al menos cinco alumnos de *MA* es:

   $$C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 21 + 7 + 1 = 29.$$

2. En la fila de los alumnos hay al menos tres alumnos de *MA* y al menos dos alumnos de *IC*, por lo que tenemos tres casos según el número exacto de alumnos de *MA* y vamos a contar por separado el número de filas en cada caso. Vamos a considerar que la fila tiene siete lugares por ocupar y vamos a elegir los lugares ocupados por los alumnos de *MA*.

   Para el caso en que la fila tiene exactamente tres alumnos de *MA*, elegimos los tres lugares de la fila ocupados por los alumnos de *MA*, es decir, hay C_7^3 maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA*. El total de maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA* es:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

Para el caso en que la fila tiene exactamente cuatro alumnos de *MA*, elegimos los cuatro lugares de la fila ocupados por los alumnos de *MA*, es decir, hay C_7^4 maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA*. El total de maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA* es:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35.$$

Para el último caso, la fila tiene exactamente cinco alumnos de *MA*, hay $C_7^5 = 21$ maneras diferentes de elegir los lugares que ocupan los alumnos de *MA*.

Como son eventos ajenos, por el principio de la suma el número se suman y el número total de filas con al menos tres alumnos de *MA* y al menos dos alumnos de *IC* es:

$$C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 = 35 + 35 + 21 = 91.$$

Los números de combinaciones tienen muchas propiedades interesantes. Tenemos el siguiente corolario del teorema 6.3.1.

Proposición 6.3.2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces:

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m.$$

Demostración. Procedemos aplicando la definición y realizando los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
C_n^{m-1} + C_n^m &= \frac{n!}{(m-1)! \cdot (n-(m-1))!} + \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \\
&= \frac{n!}{(m-1)! \cdot (n-m+1)!} \cdot \frac{m}{m} + \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{n-m+1}{n-m+1} \\
&= \frac{m \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n-m+1)!} + \frac{(n-m+1) \cdot n!}{m! \cdot (n-m+1) \cdot (n-m)!} \\
&= \frac{m \cdot n!}{(m)! \cdot (n-m+1)!} + \frac{(n-m+1) \cdot n!}{m! \cdot (n-m+1)!} = \frac{m \cdot n! + (n-m+1) \cdot n!}{(m)! \cdot (n-m+1)!} \\
&= \frac{(m+n-m+1) \cdot n!}{(m)! \cdot (n+1-m)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(m)! \cdot ((n+1)-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m)! \cdot ((n+1)-m)!} \\
&= C_{n+1}^m.
\end{aligned}$$

□

6.4 Aplicaciones

La mayoría de los problemas de conteo no se resuelven aplicando una sola fórmula. Aun así es conveniente considerar el cuadro 6.3, que resume las fórmulas de las secciones anteriores. En esta sección vamos a revisar algunos ejemplos clásicos de aplicaciones de conteo, como funciones, anagramas, dominó, pókar y el Teorema del Binomio.

Permutación de n	$P_n = n!$
Ordenación sin repeticón de n tomados de m en m	$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
Ordenación con repeticón de n tomados de m en m	$OR_n^m = n^m$
Combinación de n tomados de m en m	$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!(m!)}$

Cuadro 6.3: Tabla de fórmulas para conteo.

6.4.1 Anagramas

Dada una palabra con n letras, un **anagrama** es una permutación de las n letras de la palabra original. Si la palabra no repite letras, un anagrama es simplemente una permutación de las letras, y el número de anagramas distintas de tal palabra es el número de permutaciones P_n.

Ejemplo 6.4.1. Considera la palabra *abc*. Hay $3! = 6$ anagramas distintos y los podemos enlistar fácilmente:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Si consideramos la palabra *cosa*, usando la fórmula para permutaciones, tenemos que hay $4! = 24$ anagramas distintos. Sin embargo si consideramos la palabra *aba* y enlistamos las posibles anagramas tenemos solo tres posibles anagramas:

$$aab,\ aba,\ baa,$$

y si consideramos la palabra *caba* y enlistamos las posibles anagramas tenemos sólo doce posibles anagramas:

$$aabc,\ aacb,\ abac,\ abca,\ acab,\ acba,\ baac,\ baca,\ bcaa,\ caab,\ caba,\ cbaa$$

Si la palabra repite letras un anagrama es un **permutación con repetición**.

Teorema 6.4.1. Sean $a_1, a_2, \dots, a_m$ números distintos entre sí y sean $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ tales que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. Considera una palabra M con las letras:

$$\underbrace{a_1 \dots a_1}_{r_1}, \underbrace{a_2 \dots a_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{a_m \dots a_m}_{r_m}.$$

El número de permutaciones con repetición de la palabra M es:

$$P_n(a_1^{r_1}, a_2^{r_2}, \dots, a_m^{r_m}) = \frac{n!}{(r_1!)(r_2!)\dots(r_m!)}.$$

Ejemplo 6.4.2. Considera la palabra *popocatépetl*. Reordenamos las letras según el orden alfabético: *aceeloopp ptt* y resumimos los datos como en el cuadro 6.4.

a_i	a	c	e	l	o	p	t
r_i	1	1	2	1	2	3	2

Cuadro 6.4: La palabra *popocatépetl*.

Usando la formula del teorema 6.4.1 tenemos que el número de anagramas de la palabra *popocatepetl* es:

$$P_n(a^1, c^1, e^2, l^1, o^2 p^3 t^2) = \frac{12!}{(2!)(2!)(3!)(2!)} = 19\,958\,400.$$

6.4.2 Dominó

Un juego de dominó consta de 28 fichas cada una con dos números del 0 al 6. De las 28 fichas de dominó, 7 de ellas son "dobles", es decir, doble "cero", doble "uno" etc. Estas fichas reciben el nombre de mula. Una mano de dominó consta de 7 fichas.

En el ejemplo 6.3.2 usamos la fórmula para combinaciones para determinar que hay 1 184 040 manos distintos de dominó.

Una mano de dominó se puede partir en el conjunto M de las m fichas que son mulas y el conjunto F de las $7 - m$ fichas que no son mulas. Podemos visualizar cada mano como una pareja (M, F), donde M es un subconjunto de las mulas y F es un subconjunto de las fichas que no son mulas.

Ejemplo 6.4.3. ¿Cuántas manos hay de dominó que tengan exactamente dos mulas?

Las manos que queremos contar consta de exactamente dos mulas y cinco fichas que no sean mulas. Así cada mano es una pareja (M, F), donde M es un subconjunto de dos mulas y F es un subconjunto de cinco fichas no mulas. Por el principio del producto, el número de manos con exactamente dos mulas es $|M|\,|F|$.

Como M es un subconjunto de cardinalidad dos del conjunto de las siete fichas que son mulas, entonces $|M| = C_7^2 = 21$. El conjunto F es un subconjunto de cardinalidad cinco del conjunto con las 21 fichas que no son mulas, por lo que $|F| = C_{21}^5 = 20\,349$.

El número de manos con exactamente dos mulas es $|M|\,|F| = 21 \cdot 20\,349 = 427\,329$.

Ejemplo 6.4.4. ¿Cuántas manos hay de dominó que tengan a lo más tres mulas?

Que tenga a lo más tres mulas significa que las manos tiene 0, 1, 2 o 3 mulas. Si consideramos el conjunto A_i, que consta de todas las manos de dominó con exactamente i mulas, entonces A_i y A_j son disjuntos si $i \neq j$ y, por el Principio de la suma, tenemos que el número de manos de dominó con a lo más tres mulas es $|A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3|$. Calculamos cada $|A_i|$ por separado, usando un argumento análogo al usado en el ejemplo 6.4.3, donde M_i es un subconjunto de cardinalidad i del conjunto de las siete fichas que son mulas y F_i es un subconjunto de cardinalidad i del conjunto con las 21 fichas que no son mulas.

$|A_0|$: Como no elegimos ninguna ficha mula, entonces:

$$|A_0| = |F_7| = C_{21}^7 = 116\ 280.$$

$|A_1|$: $|M_1| = C_7^1 = 7$, $|F_6| = C_{21}^6 = 54\ 264$ y $|A_1| = 379\ 848$.
$|A_2|$: Por ejercicio 6.4.3, tenemos que $|A_2| = 427\ 329$.
$|A_3|$: $|M_3| = C_7^3 = 35$, $|F_4| = C_{21}^4 = 5\ 985$ y $|A_3| = 209\ 475$.
Por el principio de la suma, el número de manos de dominó con a lo más tres mulas es:

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3| = 1\ 132\ 932.$$

Ejemplo 6.4.5. ¿Cuántas manos hay de dominó que tengan por lo menos una mula?

Que tenga por lo menos una mula significa que las manos tienen de una a siete mulas. Por el principio del complemento, tenemos que es igual al número de todas las manos menos el número de manos que no tienen mulas. Por el ejemplo 6.3.2, tenemos que el número total de manos de dominó es 1 184 040 y, por el ejemplo 6.4.4, tenemos que hay 116 280 manos distintas sin mulas. Por lo que el número de manos de dominó con por lo menos una mula es:

$$1\ 184\ 040 - 116\ 280 = 1\ 067\ 760.$$

6.4.3 Pókar

Una baraja inglesa consta de 52 cartas, cada una tiene dos características: un "número" del conjunto $N = \{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$ y un "palo" del conjunto $P = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$. Una mano de pókar consta de 5 cartas. Un par se forma con dos cartas del mismo número, una tercia se forma con tres cartas del mismo número y un Poker con cuatro cartas del mismo número. El Full es un par y una tercia y una corrida son 5 cartas del mismo palo y numeros consecutivos.

En el ejemplo 6.3.3 usamos la fórmula para combinaciones para determinar que hay 2 598 960 manos distintas de pókar.

Ejemplo 6.4.6. ¿Cuántas manos hay de pókar que tengan a lo más un par?

Una mano de pókar con a lo más un par es una mano en donde los números de las cinco cartas son distintas entre sí o hay exactamente un par. Como no puede haber un par y ningún par en una misma mano, podemos contar las manos sin pares y las que tienen exactamente un par y luego usar el principio de la suma.

Sea A_0 el conjunto de manos sin pares. Cada mano tiene cinco números distintos entre sí de los 13 números posibles. Hay $C_{13}^5 = \frac{13!}{(8!)(5!)} = 1287$ maneras de elegir los cinco números de la mano. Como no hay restricción sobre los palos de las cartas, hay $4^5 = 1024$ maneras de elegir los palos de las cinco cartas (el número de ordenaciones con repetición de los 4 palos tomados de 5 en 5). Por el principio del producto, el número de manos de pókar que no tengan un par es $A_0 = C_{13}^5 4^5 = 1287 \cdot 1024 = 1\ 317\ 888$

Sea A_1 el conjunto de manos con exactamente un par. Primero elegimos el número que corresponde al par. Hay 13 maneras de elegir el número que corresponde al par y elegimos dos de los cuatro palos para las cartas del par: $C_4^2 = 6$. Por lo que hay $13 \cdot 6 = 78$ maneras de elegir el par. Para elegir las tres cartas que no forman pares quedan 12 números y no hay restricciones sobre los palos, hay $C_{12}^3 = \frac{12!}{(9!)(3!)} = 220$ maneras de elegir los tres números de la mano que no forman pares ni tercias. Como no hay restricción sobre los palos de las cartas, hay $4^3 = 64$ maneras de elegir los palos de las tres cartas. Por el principio del producto hay $220 \cdot 64 = 14080$ maneras de elegir el las tres cartas restantes.

Por el principio del producto, el número de manos de pókar que tengan exactamente un par es $|A_1| = (13 \cdot C_4^2)(C_1 2^3\ 4^3) = 78 \cdot 14080 = 1\ 098\ 240$

Por el principio de la suma, el número de manos de pókar con a lo mas un par es $|A_0| + |A_1| = 1\ 317\ 888 + 1\ 098\ 240 = 2\ 416\ 128$.

Ejemplo 6.4.7. ¿Cuántas manos hay de pókar de modo que tenga exactamente dos pares?

Una mano de pókar con exactamente dos pares es una mano en donde hay exactamente dos pares con números distintos (si no, sería pókar) y una quinta carta cuyo número no coincide con ninguno de los números de los pares (si no, sería tercia).

Sea A_2 el conjunto de manos con dos pares. Primero elegimos los dos números que corresponde a los dos pares. El número de maneras de elegir dos números que correspondan a los dos pares es: $C_{13}^2 = 78$ y para cada par elegimos dos de los cuatro palos para un número dado. Cada par tiene $C_4^2 = 6$ posibilidades. Por el principio del producto hay $78 \cdot 6 \cdot 6 = 2\ 808$ maneras de elegir dos pares. Para elegir la última carta que no forman tercias con los dos pares quedan 44 (las 52 cartas menos las 8 cartas de los dos números elegidos).

Por el principio del producto, el número de manos de pókar que tengan exactamente dos pares es $|A_2| = (C_{13}^2)(C_4^2)(C_4^2)(44) = (2\ 808)(44) = 123\ 552$.

Ejemplo 6.4.8. ¿Cuántas manos hay de pókar de modo que tenga por lo menos una tercia?

Una mano de pókar con por lo menos una tercia es una mano exactamente una tercia par o una tercia y un par o pókar. Como los tres conjuntos de manos son mutuamente disjuntos, podemos contar las manos por separado y luego usar el principio de la suma.

Sea A_3 el conjunto de manos con exactamente una tercia. Primero elegimos el número que corresponde a la tercia. Hay 13 maneras de elegir el número que corresponde a la tercia y elegimos tres de los cuatro palos para las cartas de la tercia: $C_4^3 = 4$. Por el principio del producto hay $13 \cdot 4 = 52$ maneras de elegir la tercia. Para elegir las dos cartas que no forman pares ni pókar con la tercia quedan 12 números y no hay restricciones sobre los palos, así que hay $C_{12}^2 = \frac{12!}{(10!)(2!)} = 66$ maneras de elegir los dos números de la mano que no forman pares ni pókar con la tercia. Como no hay restricción sobre los palos de las cartas, hay $4^2 = 16$ maneras de elegir los palos de las dos cartas y hay $66 \cdot 16 = 1\ 056$ maneras de elegir las dos cartas restantes. Por el principio del producto, el número de manos de pókar que no tengan exactamente una tercia es $A_3 = (13 \cdot 4^3)(C_{12}^2 \cdot C_4^2) = 52 \cdot 1\ 056 = 54\ 912$.

Sea $A_{2,3}$ el conjunto de manos con un par y una tercia. Primero elegimos el número que corresponde al par. Hay 13 maneras de elegir el número que corresponde al par y elegimos dos de los cuatro palos para las cartas del par: $C_4^2 = 6$. Por el principio del producto hay $13 \cdot 6 = 78$ maneras de elegir el par. Para elegir el número de la tercia, quedan 12 números y hay 12 maneras de elegir un número de los 12 disponibles, para elegir los tres palos para la tercia tenemos $C_4^3 = 4$ posibilidades, por el principio del producto hay $12 \cdot C_4^3 = 48$ posibilidades y el número de manos de pókar que tengan un par y una tercia es $|A_{2,3}| = (13 \cdot C_4^2)(12 \cdot C_4^3) = 78 \cdot 48 = 3\ 744$.

Sea A_4 el conjunto de manos con pókar. Primero elegimos el número que corresponde al pókar. Hay 13 maneras de elegir el número que corresponde al par y, como vamos a elegimos los cuatro palos del número, hay una sóla manera de elegir los cuatro. Por lo que hay $13 \cdot 1 = 13$ maneras de elegir los cuatro cartas del pókar. Para elegir la última carta, quedan 48 cartas y, como sólo vamos a elegir una de ellas, hay 48 maneras de elegir una de ellas. Por lo tanto el número de manos de pókar que no tengan pókar es $|A_4| = 13 \cdot 44 = 572$

Por el principio de la suma, el número de manos de pókar con al menos una tercia es $|A_3| + |A_{2,3}| + |A_4| = 54\ 912 + 3\ 744 + 572 = 5\ 372$.

6.4.4 Teorema del Binomio

En lo que sigue vamos a denotar C_n^m por $\binom{n}{m}$ y por conveniencia se define $\binom{n}{m} = 0$, si $m > n$, $n < 0$ o $m < 0$.

En la prueba del teorema del binomio vamos a usar la proposición 6.3.2 y el ejercicio 6.3 (8).

Teorema 6.4.2 (Teorema del Binomio)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i.$$

Demostración. Procedemos por inducción matemática sobre n.

Base de la inducción:

Cuando $n = 1$ tenemos que $(a+b)^1 = a + b$ y $\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} \cdot b^i = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b$.
El resultado es válido para $n = 1$ ya que:

$$(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} \cdot b^i.$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ y $\sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a^{2-i} \cdot b^i = 1 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot b^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$.
El resultado es válido para $n = 2$ ya que:

$$(a+b)^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a^{2-i} \cdot b^i.$$

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que, para un número natural k, con $k \geq 2$, se tiene que:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^i.$$

Paso Inductivo:

Considera el número natural $k + 1$. Probaremos, usando la Hipótesis de Inducción, que:

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i.$$

Claramente,

$$(a+b)^{k+1} = (a+b) \cdot (a+b)^k = a \cdot (a+b)^k + b \cdot (a+b)^k. \tag{6.1}$$

Ahora calculamos por separado cada sumando usando la Hipótesis de Inducción:

$$\begin{aligned}
a \cdot (a+b)^k &= a \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k+1-i} \cdot b^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i + 0 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i + \binom{k}{k+1} a^0 \cdot b^{k+1} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a \cdot (a+b)^k = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i. \tag{6.2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
b \cdot (a+b)^k &= b \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^{i+1} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} \cdot b^{i+1} + 0 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{(k+1)-(i+1)} \cdot b^{i+1} + \binom{k}{-1} a^{k+1} \cdot b^0 \\
&= \textstyle\sum_{i=-1}^{k} \binom{k}{i} a^{(k+1)-(i+1)} \cdot b^{i+1} \\
\text{Sea } j = i+1 \quad & \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k}{j-1} a^{(k+1)-j} \cdot b^j.
\end{aligned}$$

Como j es un contador le podemos cambiar de nombre y llamarle i. Por lo tanto:

$$b \cdot (a+b)^k = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^{(k+1)-i} \cdot b^i. \tag{6.3}$$

Sustituimos (6.2) y (6.3) en (6.1):

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= a \cdot (a+b)^k + b \cdot (a+b)^k \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i-1} a^{(k+1)-i} \cdot b^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} (\binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i + \binom{k}{i-1} a^{(k+1)-i} \cdot b^i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} (\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}) a^{(k+1)-i} \cdot b^i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i} a^{(k+1)-i} \cdot b^i.
\end{aligned}$$

Por el Principio de Inducción Matemática, hemos probado el resultado para todo número natural $n \in \mathbb{N}$. □

Como consecuencia del Teorema del Binomio tenemos varios corolarios interesantes.

Corolario 6.4.3. El conjunto potencia de un conjunto con n elementos tiene cardinalidad 2^n.

Demostración. El número de subconjuntos de cardinalidad i de un conjunto de cardinalidad n es $C_n^i = \binom{n}{i}$. El número de subconjuntos de un conjunto de cardinalidad n es la suma del número de subconjuntos de cardinalidad $0,\ 1,\ 2, \ldots, n$ y, por el Teorema del Binomio, tenemos que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = (1+1)^n = 2^n$. □

Corolario 6.4.4. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Demostración. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0.$ □

Corolario 6.4.5. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

Demostración. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$ □

Corolario 6.4.6. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. El coeficiente del sumando $a^k b^{n-k}$ en $(a+b)^n$ es $\binom{n}{k}$.

6.5 Ejercicios

Ejercicio 6.1. Por inducción matemática demuestra la validez del Principio del palomar para todos los números naturales.

Ejercicio 6.2. Sean $r, n \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq r < n$. Prueba la *fórmula de Pascal*:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}.$$

Ejercicio 6.3. Sean $n, m, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $n \geq m \geq 0$. Demuestra:

1. $OR_n^r = nOR_n^{r-1}$.
2. $O_n^{n-1} = O_n^n$.
3. $O_n^m = (n-m+1)O_n^{m-1}$.
4. $O_{n+1}^m = \frac{n+1}{n+1-m} O_n^m$.
5. $C_n^m P_m = O_n^m$.
6. $O_n^m P_{n-m} = P_n$.
7. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

8. $C_n^m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.4. Demuestra las siguientes igualdades usando una biyección o mostrando que son dos maneras distintas de contar los mismos objetos:

1. $C_n^m = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$.
2. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$.
3. $\sum_{i=0}^n C_n^i C_n^{n-i} = C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n \left(C_n^i\right)^2$.
4. $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$.
5. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.
6. $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$.

Ejercicio 6.5. Demuestra:

1. $n! + (n+1)! = n!(n+2)$.
2. $n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(n+2)^2$.
3. ¿existe $n \in \mathbb{N}$ para el cuál $n! = 5820$?

Ejercicio 6.6. Determina SIN usar una calculadora el valor de n tal que $n! = 39\,916\,800$.
Hint: Un camino posible es tratar de encontrar los divisores primos.

Ejercicio 6.7. Siete niños están en el patio tomados de la mano.

1. ¿De cuántas formas pueden formar una línea?
2. ¿De cuántas formas pueden formar un círculo?

Ejercicio 6.8. De un grupo de 26 socios de un club se quiere elegir una mesa directiva con un presidente, un secretario y 3 equipos de 2 personas cada uno. Calcula cuántas mesas directivas distintas se pueden formar.

Ejercicio 6.9. Cuatro parejas van a tomar asiento alrededor de una mesa redonda, decir cuántas formas distintas de sentar a las ocho personas existen si:

1. Las parejas deben sentarse juntas.
2. Una pareja debe quedar junta.
3. Exactamente una pareja debe quedar separada.
4. Cada uno de un grupo de diez niños es amigo de exactamente otros siete del mismo grupo (la amistad es mutua). Demuestra que no es posible dividirlos en tres equipos de tal manera que en cada uno de los tres equipos no haya un par de amigos.

Ejercicio 6.10. Determina de cuántas maneras diferentes puede elegirse un grupo de cuatro o más personas de entre un grupo de ocho personas.

Ejercicio 6.11. Determina de cuántas maneras pueden dividirse 12 personas en dos grupos de 7 y 5 personas respectivamente.

Ejercicio 6.12. Determina cuántas formas distintas de acomodar las letras de la palabra *MATEMÁTICAS* existen si:

1. No se toma en cuenta el acento.

2. Se toma en cuenta el acento.

Ejercicio 6.13. Determina de cuántas maneras se puede tomar un número impar de objetos de entre n objetos.

Ejercicio 6.14. En cada subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ con siete elementos, toma el elemento mayor. Determina cuál es la suma de todos esos elementos mayores.

Ejercicio 6.15. Determina cuántos son los números entre 0 y 10^n inclusive, en los cuales no figuran cifras sucesivas iguales.

Sugerencia: Considera primero el caso de los números de una cifra, luego los de dos cifras, luego los de tres cifras, etc.

Ejercicio 6.16. Determina cuántos números distintos de cinco cifras pueden componerse empleando las cifras del número 75 226 522.

Sugerencia: Considera primero el caso de los números con un 2, luego con dos 2, etc.

Ejercicio 6.17. Se escriben los números de 1 a n formando el número G_n. Por ejemplo, si $n = 325$, tenemos el número $G_{325} = 1234567891011 \cdots 323324325$.

1. Si el número total de dígitos de G_n es 2889, ¿cuál es el valor de n?

2. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual hay un millón de unos en el número G_n?

3. Si $n = 1995$, ¿cuál es la cifra central del número G_n? y ¿a qué número de los de la sucesión de G_n corresponde esa cifra?

Ejercicio 6.18. Determina cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados.

Ejercicio 6.19. Cada una de las caras de un cubo es coloreada con uno de seis colores diferentes. Diremos que dos coloraciones son distintas si no se puede ir de una a otra mediante rotaciones del cubo. Calcula cuántas coloraciones distintas existen.

Ejercicio 6.20. De una baraja que contiene 52 cartas, se extraen manos de 10 cartas, determina cuántas manos contienen:

1. Por lo menos un as.

2. Exactamente un as.

3. Por lo menos dos ases.

4. Exáctamente dos ases.

Ejercicio 6.21. En una mesa circular están sentadas n personas. Diremos que dos maneras de sentarse son diferentes si al menos una persona no tiene los mismos vecinos en ambas. Calcula cuántas de las $n!$ formas de sentarse son distintas.

Ejercicio 6.22. En una lotería son escogidos al azar seis números entre 1 y 49 ambos números incluidos. Hay un total de C_{49}^{6} distintas elecciones (subconjuntos de cardinalidad 6). Calcula cuántos de esas elecciones tienen al menos dos números consecutivos.

Ejercicio 6.23. Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de una joyería, justo antes de que sonara la alarma contra robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas las dos jóvenes, ellas pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la placa (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del automóvil que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 o un 8. Juana dijo que la primera letra de la placa era una C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7. ¿Cuámtas placas diferentes tendrá que verificar la policía?

Ejercicio 6.24. ¿De cuántas formas se puede colocar las letras de la palabra MURCIELAGO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

Ejercicio 6.25. ¿Cuántos enteros positivos mayores que 5,000,000 se pueden formar con los dígitos 3,4,4,5,5,6,7?

Ejercicio 6.26. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de básquetbol con 13 posibles jugadores? ¿Cuántas opciones incluyen al jugador más débil y al más fuerte?

Ejercicio 6.27. Un estudiante debe responder 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede hacer su selección si:

1. no hay restricciones?
2. debe contestar las dos primeras preguntas?
3. debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

Ejercicio 6.28. En un plano donde se tienen dados 15 puntos, de modo que no hay tres colineales (es decir, no hay tres en la misma recta), ¿cuántas rectas determinan?

Ejercicio 6.29. Repite los ejemplos 6.4.6, 6.4.7 y 6.4.8 con una baraja española.

Bibliografía

[1] Cárdenas, H., Lluis, E, Raggi, F, y Tomas, F. Álgebra Superior, Trillas, 2007.

[2] Caballero, R, Hortalá, T, Martí N, Nieva, S, Pareja A y Rodriguez, M, Matemáticas Discretas para Informáticos Ejercicios resueltos. Pearson Educación S.A., Madrid 2007.

[3] Comellas, F., Fábrega, J., Sánchez A. y Serra, O. Matemática Discreta. Ediciones UPC, 2002.

[4] Goodaire E., Parmenter M., Discrete Mathematics with Graph Theory, (3 ed.) Addison Wesley, 2005.

[5] Grimaldi, R. Matemáticas Discreta y Combinatoria: una introducción con aplicaciones, Prentice Hall, 1998.

[6] Johnsonbaugh, R., Matemáticas Discretas, (6 ed.). Prentice Hall, 2005.

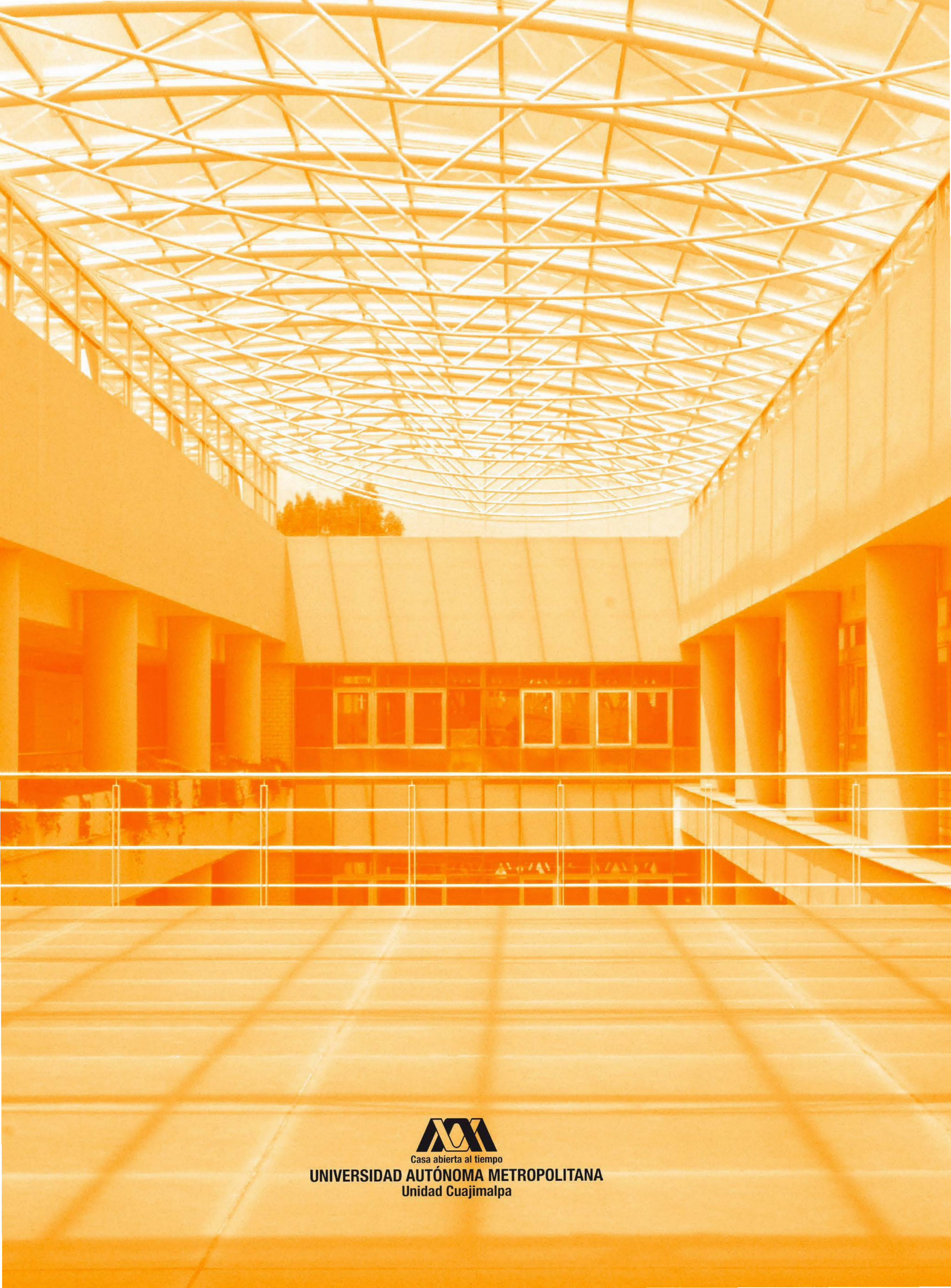
[7] Klima R.E., Sigmon, N., Stitzinger E. Applications of Abstract Algebra with Maple, CRC Press, 2000.

[8] Solow, D. Introducción al razonamiento matemático, Limusa, 2006.

Índice de figuras

Índice alfabético

Material de apoyo para la UEA Matemáticas Discretas I se terminó de imprimir en la Ciudad de México en octubre de 2017. La producción editorial e impresión estuvo a cargo de Literatura y Alternativas en Servicios Editoriales S.C. Avenida Universidad 1815-c, Depto. 205, Colonia Oxtopulco, C. P. 04318, Delegación Coyoacán, Ciudad de México. RFC: LAS1008162Z1. En su composición se usaron tipos Times New Roman y Helvetica. Se tiraron 100 ejemplares sobre papel Prisma Bright, papel certificado FSC (Forest Stewardship Council®) Ref EP.01.00028.



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa